Existência da Derivada

4.1 Continuidade

As seções precedentes serviram para nos fornecer o conceito de derivada de uma função. Muito embora os conceitos de velocidade instantânea e de inclinação da curva num ponto tenham sido obtidos sem qualquer preocupação com o rigor teórico, o que procuramos foi enfatizar que eles podem ser tratados indistintamente através de um método matemático. Acreditamos que o visto seja motivação suficiente para desenvolver um estudo mais amplo da derivada. Com esse propósito, e para que não percamos ligação com as noções apresentadas anteriormente, procuraremos estabelecer uma análise mais cuidadosa do conceito de derivada de uma função, tendo sempre presente o que já aprendemos em situações anteriores. Em primeiro lugar vamos recordar que em todas as situações, conhecido o valor da função $y = f(x)$ num ponto, digamos x_0, consideramos a variação Δy obtida em razão de uma variação Δx, tomada a partir de x_0, seguindo os seguintes passos:

a) para $x = x_0$ temos $y_0 = f(x_0)$
b) para $x = x_0 + \Delta x$ temos $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$

assim, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ de tal forma que $\Delta y \to 0$, quando $\Delta x \to 0$.

O que está escrito acima é representado em símbolos da seguinte maneira:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \quad (1)$$

Observemos que dizer que $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ é o mesmo que afirmar que $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$, quando $\Delta x \to 0$. Assim, a expressão (1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \quad (2)$$

Este fato caracteriza uma particularidade importante de função que denominamos *continuidade*.

Definição 4.1

Dizemos que uma função $y = f(x)$ é *contínua* em um ponto x_0 de seu domínio quando

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Observe que considerando $x = x_0 + \Delta x$, teremos que $x \to x_0$ quando $\Delta x \to 0$ e, desta forma, o limite da Definição 4.1 pode ser reescrito na seguinte forma:

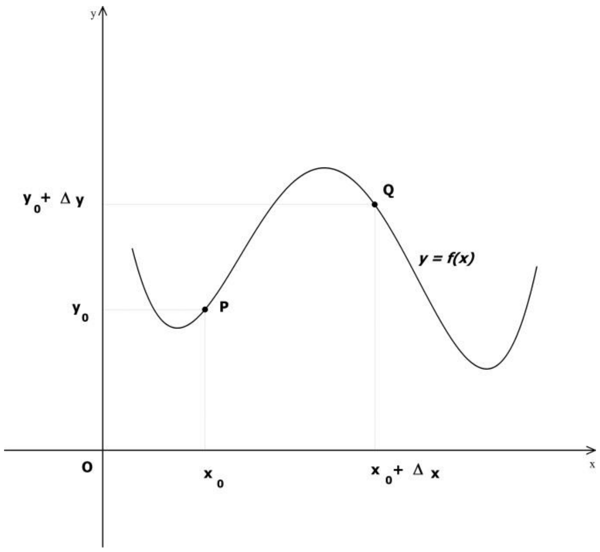
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Resulta dessa definição que para verificar se uma função $y = f(x)$ é *contínua* num ponto x_0 é preciso constatar a ocorrência dos seguintes fatos:

1) a função deve estar definida em x_0;
2) deve existir o limite de $f(x)$ quando $x \to x_0$;
3) o limite de $f(x)$ quando $x \to x_0$ deve ser igual a $f(x_0)$.

Definição 4.2

Dizemos que uma função $y = f(x)$ é *contínua em um intervalo* se for *contínua em todos os pontos do intervalo*.

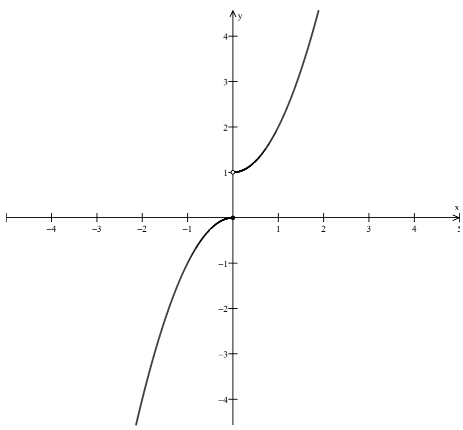


Geometricamente, veja figura, se P é o ponto do gráfico da função $y = f(x)$ de coordenadas (x_0, y_0) e Q outro ponto de coordenadas (x_1, y_1) com $x_1 = x_0 + \Delta x$ e $y_1 = y_0 + \Delta y$, a continuidade é caracterizada pela possibilidade de mover o ponto Q, ao longo da curva definida pela função, sem saltos, até que este sobreponha ao ponto P.

A continuidade não é uma propriedade que se estende a todas as funções. Em seguida apresentamos o exemplo bem simples de uma função que não possui essa propriedade.

Exemplo 4.1

A função definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$



cujo gráfico se encontra à direita não é contínua no ponto de abcissa $x = 0$, muito embora esteja definida nesse ponto.

Importante!
É de grande importância salientar que, tomando-se um ponto x_0 do domínio de uma função, o incremento Δx dado a x_0 para obter o ponto $x_0 + \Delta x$ deve ser olhado com a forma de representar uma variação em torno de x_0. Sendo assim, devemos considerar que:

1º) O ponto $x_0 + \Delta x$ deve estar sempre no domínio da função;

2º) A variação Δx pode ser tomada tanto positiva quanto negativa.

No exemplo dado vamos estudar a existência do limite da função em $x_0 = 0$. Para tanto vamos, como no capítulo anterior, verificar a existência e a igualdade dos limites laterais no ponto em questão:

1º) Tomando $\Delta x > 0$, teremos $x_0 + \Delta x = 0 + \Delta x = \Delta x > 0$. Pela definição da função teremos

$$f(x_0 + \Delta x) = f(0 + \Delta x) = (0 + \Delta x)^2 + 1 = (\Delta x)^2 + 1$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} f(0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} f(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} [(\Delta x)^2 + 1] = 1 \quad (1)$$

2º) Tomando $\Delta x < 0$, teremos $x_0 + \Delta x = 0 + \Delta x = \Delta x < 0$. Pela definição da função teremos

$$f(x_0 + \Delta x) = f(0 + \Delta x) = (0 + \Delta x)^2 = -(\Delta x)^2$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} f(0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} f(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} [-(\Delta x)^2] = 0 \quad (2)$$

De (1) e (2) segue-se que

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} f(0 + \Delta x) \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} f(0 + \Delta x).$$

Daí conclui-se que não existe o $\lim_{\Delta x \to 0} f(0 + \Delta x)$ e, portanto, a função dada não é contínua em $x_0 = 0$.

Em vista do exemplo anterior podemos associar à noção de continuidade um aspecto puramente geométrico. Nesta forma uma função contínua será aquela em cujo gráfico um ponto poderá se deslocar sem que dê saltos. Evidentemente, isto não pode ser feito no gráfico desta última função.

Importante!
*Como consequência imediata das propriedades de limite temos que a **soma, diferença, o produto e o quociente (com devida restrição) de funções contínuas** também **são funções contínuas**.*

4.2 Derivabilidade

No estudo de derivada a noção de continuidade estará sempre presente. Na realidade, o fato de uma função ter derivada num ponto implicará na continuidade dela nesse ponto. Em outras palavras, o conceito de derivada de uma função num ponto requer mais do que continuidade. Na derivada o que nos interessa é a variação do quociente $\Delta y/\Delta x$, onde $\Delta y \to 0$, quando $\Delta x \to 0$.

Mais explicitamente, dada a função $y = f(x)$ e tomando-se um ponto x_0 no domínio dessa função teremos:

1) Para $x = x_0$, tem-se $y_0 = f(x_0)$

2) Para $x = x_0 + \Delta x$, tem-se $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$

Assim, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ que dividido por Δx fica:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

que é denominado *quociente de Newton* ou *razão incremental*, em referência aos incrementos (ou acréscimos) Δx e Δy proporcionados, respectivamente, às variáveis x e y a partir de x_0.

Definição 4.3

Uma função $y = f(x)$ é derivável em um ponto x_0 se existir o seguinte limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Esse limite é chamado de derivada de $y = f(x)$ no ponto x_0 e é denotado por $f'(x_0)$, que deve ser lida assim: *f linha de* x_0.

Teorema 4.1

Se uma função $y = f(x)$ é derivável num ponto x_0 então essa função é contínua em x_0.

Demonstração

Uma função é derivável em x_0 se existir o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Por outro lado, para demonstrar que a função dada é contínua em x_0, deveremos mostrar que

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

ou, equivalentemente, que

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

É claro que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

Portanto,

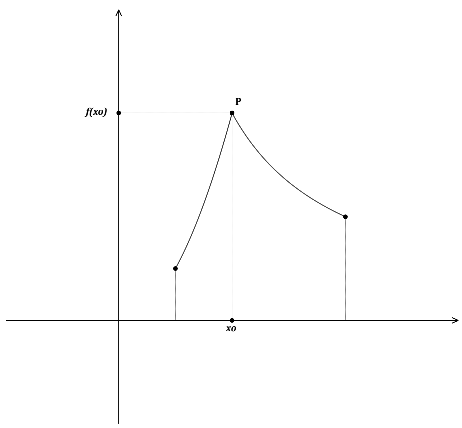
$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

Como a função $y = f(x)$ é derivável em x_0 o limite do primeiro fator do segundo membro acima é igual a $f'(x_0)$ e o limite do segundo fator é, obviamente, igual a zero segue-se que:

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = f'(x_0).0 = 0$$

Assim a função $y = f(x)$ é contínua em x_0 o que conclui a demonstração.

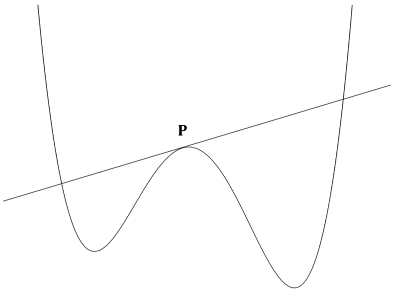
A definição de derivada nos leva ao seguinte problema: em que condição existirá a derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto x_0? Do ponto de vista formal basta verificar a existência do limite que define a derivada; do ponto de vista geométrico a derivada resolve o problema da determinação da reta tangente a uma curva num ponto.

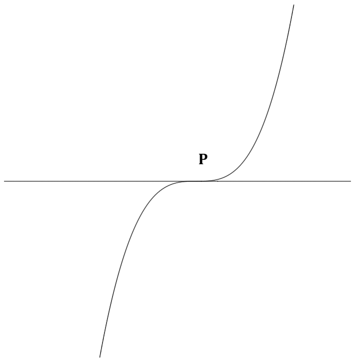


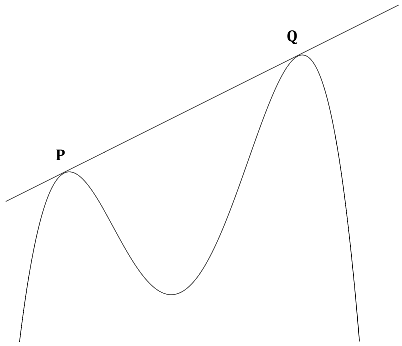
Esse fato foi fundamental para a construção e aplicação do conceito de derivada. A existência da derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto x_0, prende-se à possibilidade de "apoiar" uma única reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto de coordenada$(x_0, f(x_0))$.
Observemos que isto não poderá ser feito se o gráfico de $y = f(x)$ apresentar uma angulosidade no ponto $(x_0, f(x_0))$ como está apresentado na figura ao lado.

Desta forma, enquanto a continuidade equivale à possibilidade de se mover um ponto ao longo do gráfico de $y = f(x)$ sem que se deem saltos, a derivabilidade equivale à possibilidade de se apoiar uma reta tangente em cada ponto da curva.

É importante salientar que a noção de reta tangente a uma curva de falamos aqui é mais geral do aquela da Geometria Elementar, que está mais ligada à ideia de reta tangente a uma curva fechada. O termo tangência aplicado aqui se restringe ao que está ocorrendo na vizinhança do ponto em questão, o que não impede que essa reta venha cortar novamente a curva em pontos mais afastados. Nas figuras seguintes, em todos os casos, as retas são tangentes às curvas nos pontos indicados.







Apresentamos em seguida exemplos de funções que não possuem derivadas nos pontos indicados.

Exemplo 4.2

A função $f(x) = |x|$ não possui derivada em $x = 0$.

Justificativa:

Pela definição de módulo, podemos escrever que

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

A derivada, definida como limite, terá provada sua existência num ponto se o limite existir, portanto deveremos estudar os limites laterais:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Devido ao seu grande uso esses limites quando existem recebem denominações e notações especiais: o primeiro é denominado *derivada à direita da função f em* x_0 e o segundo é a *derivada à esquerda da função f em* x_0.

Para o caso em questão: $f(x) = |x|$ e $x_0 = 0$.

1º) Para $\Delta x > 0$ teremos $f(0 + \Delta x) = |0 + \Delta x| = |\Delta x| = \Delta x$, daí:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1$$

2º) Para $\Delta x < 0$ teremos $f(0 + \Delta x) = |0 + \Delta x| = |\Delta x| = -\Delta x$, daí:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} (-1) = -1$$

Conclusão: os limites laterais são distintos e, portanto, não existe o limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

para $f(x) = |x|$ em $x = 0$. Consequentemente a função dada não é derivável no ponto dado.

Exercício 4.1

1) Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ (x-2)^2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ é contínua em $x = 1$.

2) Mostre que a função $f(x) = |x^2 - 1|$ é contínua em $x = -1$ e em $x = 1$.

3) Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ (x-2)^2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ não possui derivada em $x = 1$.

4) Mostre que a função $f(x) = |x^2 - 1|$ não possui derivadas em $x = 1$ e em $x = -1$.

5) Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ é contínua e derivável em $x = 0$. Trace o gráfico de $y = f(x)$ e também o gráfico da reta tangente a essa curva no ponto de abscissa $x = 0$.

6) Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{x} - 1, & 0 < x < 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x \ge 2 \end{cases}$ é contínua e derivável em $x = 2$.

7) Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ não é derivável em $x = 0$.

8) Dê exemplo de uma função $y = f(x)$ tal que o seu limite quando x tende a -2 existe mas ela não é contínua em $x_0 = -2$. Justifique.

9) Qual deve ser o valor de $f(1)$ para que a função $y = f(x)$, seja contínua no ponto $x = 1$? Justifique a sua resposta.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

10) Sejam f e g duas funções descontínuas em $x = x_0$, então:

a) $f + g$ também é descontínua em $x = x_0$;

b) $f \cdot g$ também é descontínua em $x = x_0$.

Justifique a sua resposta.

11) Dê exemplo de:

a) uma função $y = f(x)$ que possua limite quando x tende para zero mas que não seja contínua em $x_0 = 0$;

b) uma função $y = f(x)$ que possua o limite lateral à direita de -2 e que não possua o limite lateral à esquerda de -2;

c) uma função $y = f(x)$ que seja contínua mas que não seja derivável em $x_0 = 1$.

12) Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \leq -2 \\ |x^2 - 4|, & -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 4, & x > 2 \end{cases}$$

a) Trace o seu gráfico;

b) Verifique se é contínua em $x = -2$ e $x = 2$;

c) Verifique e é derivável em $x = -2$ e $x = 2$.

13) Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2, & x < 2 \\ |x| - 2, & -2 \leq x < 2 \\ -x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

d) Trace o seu gráfico;

e) Verifique se é contínua em $x = -2$ e $x = 2$;

f) Verifique e é derivável em $x = -2$ e $x = 2$.

14) Dada a função $y = f(x)$:

I) Trace o seu gráfico;

II) Verifique se é contínua em x_0;

III) Verifique se é derivável em x_0.

a) $\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 3 \\ -x, & x < 3 \end{cases} \\ x_0 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 3 \end{cases} \\ x_0 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x - 2, & 2 < x \leq 3 \\ x - 3, & 3 < x \leq 4 \end{cases} \\ x_0 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ -2x - 2, & x > -1 \end{cases} \\ x_0 = -1 \end{cases}$

Na Definição 4.3 dissemos que uma função $y = f(x)$ é derivável num ponto x_0 se existir

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Antes, no Capítulo 2, falamos de *função derivada* e *função primitiva*, sendo que a primeira era obtida calculando-se a derivada da segunda num ponto genérico x pertencente ao domínio da segunda. Com vistas a um aprimoramento desse fato introduziremos uma nova definição:

Definição 4.4

Uma função $y = f(x)$ é derivável num intervalo $]a, b[$ se existir, para todo x desse intervalo, o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Notação:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Neste ponto, chamamos a atenção do leitor para a evolução do presente estudo. Começamos com a apresentação de um método operacional motivado por uma situação concreta e, agora, a Definição 4.4 nos permite pensar num conjunto de funções de singular importância: *o conjunto das funções deriváveis num intervalo* $]a, b[$. Os exemplos e exercícios anteriores permitem-nos concluir que esse conjunto não contêm todas as funções definidas em $]a, b[$. Apenas para reforçar, a função $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, logo ela não pertence, por exemplo, ao conjunto das funções deriváveis no intervalo $]-2,2[$.

4.3 Regras de Derivação

Considerando-se o conjunto das funções deriváveis num certo intervalo $]a, b[$, a derivada funciona para esse conjunto como uma operação. É a operação que a cada função do conjunto, considerada como *função primitiva*, faz corresponder a sua *função derivada*.

Neste sentido, mostraremos que a *operação derivada* é compatível com as operações elementares de funções. Essa compatibilidade é no sentido de que a soma de duas funções deriváveis é uma função derivável, o produto de duas funções deriváveis é uma função derivável, etc. Com vistas à obtenção desses resultados faremos o estudo a seguir.

4.3.1 A derivada de $f + g$

Teorema 4.2

Se f e g são funções deriváveis em $]a, b[$ então a função $f + g$ também é derivável em $]a, b[$ e, se $y = f(x)$, $z = g(x)$ e $u = y + z = f(x) + g(x)$, teremos

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

Demonstração:

Consideremos x um ponto qualquer de $]a, b[$. Sejam $y = f(x)$, $z = g(x)$ e $u = f(x) + g(x)$. Para mostrar que $f + g$ é derivável deveremos mostrar que existe o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x)}{\Delta x}$$

Assim:

1º) para x, $u = f(x) + g(x)$

2º) para $x + \Delta x$, $u + \Delta u = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$

Daí segue-se que:

$$\Delta u = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - [f(x) - g(x)] = f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x).$$

Dividindo termo a termo por Δx teremos:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

e, passando ao limite com $\Delta x \to 0$, resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \qquad (1)$$

Como as funções $y = f(x)$ e $z = g(x)$ são deriváveis, a Definição 4.3 garante a existência dos limites:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Portanto, pela propriedade de limite de uma soma, o limite do primeiro termo de (1) existe e é dado por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Assim, $f + g$ é derivável e $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{x}\cdot$

Exemplo 4.3

Sejam $y = x^4$ e $z = x^8$ duas funções. A função soma é $u = x^4 + x^8$ e a derivada é, portanto,

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 + 8x^7$$

Observação:

Nos dois casos seguintes deixamos as demonstrações para o leitor com a recomendação: é importante tentar a formalização dessas demonstrações para adquirir familiaridade com a forma de raciocínio que será empregado no decorrer do estudo.

4.3.2 A derivada de $f - g$

Teorema 4.3

Se f e g são funções deriváveis em $]a, b[$ então a função $f - g$ também é derivável nesse intervalo e, se $y = f(x)$, $z = g(x)$ e $u = y - z = f(x) - g(x)$, teremos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}\cdot$$

4.3.3 A derivada de cf, sendo c um número real.

Teorema 4.4

Se f é uma função derivável em $]a, b[$ e c um número real então a função cf também é derivável nesse intervalo e, se $y = f(x)$ e $u = cy = cf(x)$, teremos:

$$\frac{du}{dx} = c\frac{dy}{dx}\cdot$$

Exemplo 4.4

a) Se $y = x^3$, $z = x^5$ e $u = y - z$, então $u = x^3 - x^5$ e assim teremos:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 5x^4\cdot$$

b) Se $y = x^3$, $c = 4$ e $u = cy$, então $u = 4x^3$ e assim teremos:

$$\frac{du}{dx} = 4(3x^2) = 12x^2\cdot$$

Exercício 4.2

Dadas as funções $y = f(x)$, $z = g(x)$ e dado o número real c, encontre as funções $u = y + z$, $w = y - z$, $v = z - y$, $s = cy$ e $t = cz$ e determine suas respectivas derivadas.

1) $y = 2x^2, z = x^3 + x$ e $c = -2$

2) $y = x^2 - 2x + 1, z = x + 1$ e $c = 5$

3) $y = x^6 + x^5, z = -2x + 4, c = 3$

4) $y = x^3 - 4, z = x^{-2} + x^5$ e $c = -1$

4.3.4 A derivada de $f \cdot g$

Teorema 4.5

Se f e g são funções deriváveis em $]a, b[$, então a função $f \cdot g$ é também derivável nesse intervalo e, se $y = f(x)$, $z = g(x)$ e $u = yz = f(x) \cdot g(x)$, teremos:

$$\frac{du}{dx} = y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx} \cdot$$

Demonstração

Consideremos as funções $y = f(x)$, $z = g(x)$ e $u = f(x) \cdot g(x)$ definidas no intervalo $]a, b[$ e x um ponto qualquer desse intervalo. Para mostrar que $f.g$ é derivável em x deveremos mostrar que existe o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f.g)(x + \Delta x) - (f.g)(x)}{\Delta x} \cdot$$

Assim:

a) para x, teremos $u = (f.g)(x) = f(x).g(x)$
b) para $x + \Delta x$, teremos $u + \Delta u = (f.g)(x + \Delta x) = f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) \cdot$

Portanto, $\Delta u = f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - f(x).g(x)$ (1)

Para formar a expressão de Δu, de forma que nos permita concluir o objetivo proposto, torna-se necessário escrevê-lo de uma maneira conveniente. Um procedimento que já se tornou clássico é somar e subtrair $f(x + \Delta x).g(x)$ ao segundo membro de (1). Assim, teremos

$$\Delta u = f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - f(x).g(x) + f(x + \Delta x).g(x) - f(x + \Delta x).g(x).$$

Organizando, teremos

$$\Delta u = f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) + f(x + \Delta x).g(x) - f(x + \Delta x).g(x) - f(x).g(x).$$

Ou, ainda

$$\Delta u = f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)].$$

Dividindo termo a termo por Δx, teremos

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = f(x+\Delta x).\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x).\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot$$

Passando ao limite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x).\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x).\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]\cdot$$

Agora, voltemos às hipóteses do teorema. Por hipótese f e g são deriváveis em $]a,b[$ e, portanto, por definição existem os limites:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

Além disso, o fato de f ser derivável resulta do Teorema 4.1 que f é contínua e assim, pela definição de continuidade, temos que:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x).$$

Desta forma conclui-se que $f.g$ é derivável e pelas propriedades operatórias de limite, tem-se que:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\,.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Ou, em outras palavras, conclui-se que:

$$\frac{du}{dx} = y\frac{dz}{du} + z\frac{dy}{dx}\cdot$$

Exemplo 4.5

Se $y = x^2 + 2x + 1$ e $z = x^4$, então $u = y.z = (x^2 + 2x + 1\,)x^4$ e teremos

$$\frac{du}{dx} = (x^2 + 2x + 1\,)4x^3 + x^4(2x + 2) = 6x^5 + 10x^4 + 4x^3$$

4.3.5 A derivada de $1/f$

Teorema 4.6

Seja f uma função tal que $f(x) \neq 0$ em $]a,b[$. Se f for derivável em $]a,b[$ então a função $1/f$ também será derivável nesse intervalo e, se tivermos $y = f(x)$ e $u = 1/y = 1/f(x)$, teremos:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\cdot$$

Demonstração

Consideremos x um ponto qualquer do intervalo $]a, b[$, a função $y = f(x)$, com $f(x) \neq 0$ e $u = 1/f(x)$.

Para mostramos que $u = 1/f(x)$ é derivável em x, deveremos mostrar que existe o limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x + \Delta x) - \left(\frac{1}{f}\right)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{f(x + \Delta x)} - \frac{1}{f(x)}}{\Delta x}.$$

Assim:

a) para x, teremos: $u = 1/f(x)$
b) para $x + \Delta x$, teremos: $u + \Delta u = 1/f(x + \Delta x)$

Portanto,

$$\Delta u = \frac{1}{f(x + \Delta x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{f(x).f(x + \Delta x)} \qquad (1)$$

Dividindo (1) termo a termo por Δx e organizando o segundo membro, teremos:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{-1}{f(x).f(x + \Delta x)} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Passando ao limite iremos obter

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-1}{f(x).f(x + \Delta x)} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \qquad (2)$$

Como por hipótese a função $y = f(x)$ é derivável e, por conseguinte, também contínua existirão os limites:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{e} \qquad f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)$$

Como consequência, de (2), aplicando as propriedades de limite, concluímos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{1}{f(x) \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Portanto $1/f$ é derivável e

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Exemplo 4.6

Seja $y = x^2 + 1$. Então $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2+1}$ e $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Exercício 4.3

Nas funções $y = f(x)$ abaixo encontre $u = 1/f(x)$ e determine a sua derivada.

(Obs.: As funções devem ser consideradas somente para valores de x para os quais $f(x) \neq 0$).

1) $y = x$ 2) $y = x^3$ 3) $y = x^3 + 4x^2 + 1$
4) $y = x^2 - x$ 5) $y = 7x^3 + 4x - 1$ 6) $y = 6x^2$

4.3.6 A derivada de f/g

Teorema 4.7

Se f e g são deriváveis no intervalo $]a,b[$ e se $g(x) \neq 0$ nesse intervalo então função f/g é derivável em $]a,b[$ e, se $y = f(x)$, $z = f(x)$ e $u = y/z = f(x)/g(x)$, teremos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{z\dfrac{dy}{dx} - y\dfrac{dy}{dx}}{z^2}.$$

Mais uma vez deixaremos a demonstração a cargo do leitor. Como sugestão, indicamos a aplicação dos teoremas 4.5 e 4.6.

Exemplo 4.7

Sejam $f(x) = x^2 + 3x + 1$ e $g(x) = x^2 + 1$. Então $u = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+1}$

e sua derivada é:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x^2+1)(2x+3) - (x^2+3x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

Exercício 4.4

Das funções $y = f(x)$ e $z = g(x)$ abaixo, encontre $u = y/z$ e $w = z/y$ e determine suas derivadas.

Observação:

As funções que figurarem nos denominadores devem ser consideradas somente para valores de x para os quais elas forem diferentes de zero.

1) $y = x^3$ e $z = x^2 + 3x - 1$

2) $y = 4x^4 + 5x^3$ e $z = x^2 - 1$

3) $y = 7$ e $z = \dfrac{1}{x}$

4) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ e $z = \dfrac{1}{7x^2 + x}$

Os resultados dos teoremas 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7 são comumente chamados *Regras de Derivação* e, para comodidade do leitor, daremos em seguida um resumo dessas regras.

Resumo das *Regras de Derivação*

Funções Primitivas	Funções Derivadas
$u = y + z$	$u' = y' + z'$
$u = y - z$	$u' = y' - z'$
$u = cy, c \in R$	$u' = cy'$
$u = yz$	$u' = y'z + yz'$
$u = \dfrac{1}{y}$	$u' = -\dfrac{y'}{y^2}$
$u = \dfrac{y}{z}$	$u' = \dfrac{zy' - yz'}{z^2}$

(Observação: A derivadas indicadas por u', y' e z' devem ser lidas como "*u linha*", "*y linha*" e "*z linha*", respectivamente).

Exercício 4.5

Se n é um número natural e $y = 1/x^n$ mostre que $y' = (-n)x^{-n-1}$.

Importante!
Se $y = x^a, a \in R$ então $y' = ax^{a-1}$. A justificativa deste fato será apresentada no Capítulo 10.

Exercício 4.6

Encontre as derivadas das funções:

1) $y = x^8 + x^7 - x$

2) $y = 3x^{-4} - 5x$

3) $y = (x + 1)(3x - 2)(5x + 1)$

4) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^3 + 5}$

5) $y = 3x^2 - \dfrac{1}{x}$

6) $y = \dfrac{2}{x - 3}$

7) $f(x) = 3x^3\sqrt[3]{x}$

8) $f(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

9) $f(x) = \dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

10) $f(x) = x\sqrt[3]{x}$

11) $y = \dfrac{1}{x+1}$

12) $y = \dfrac{3x^2+x-1}{3x+2}$

13) $y = 4x^3 - x^{-3}$

14) $y = x^{-\frac{2}{3}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

15) $y = -x^{-5} + \dfrac{2}{3}x^3 - \sqrt{x}$

16) $y = \dfrac{3-x^2}{\sqrt[3]{x}}$

4.4 Derivadas das funções trigonométricas

Nas páginas anteriores tratamos da derivação de funções polinomiais e de frações racionais. Torna-se necessário neste ponto introduzir derivadas de novas funções. Procedendo assim ampliaremos nosso conhecimento acerca de funções deriváveis e evitaremos que o estudo se torne monótono.

Antes de qualquer coisa reforçaremos a observação anterior de que sempre empregaremos o *radiano* como unidade de medida de ângulo.

4.4.1 A derivada de $y = senx$

a) Para x, teremos $y = senx$

b) Para $x + \Delta x$, teremos $sen(x+\Delta x)$.

Portanto,

$$\Delta y = sen(x+\Delta x) - senx \quad (1).$$

Lembrando que $sen(a+b) = senacosb + senbcosa$, a expressão (1) poderá ser escrita assim:

$$\Delta y = senxcos(\Delta x) + sen(\Delta x)cosx - senx$$

Ou

$$\Delta y = senx[\cos(\Delta x) - 1] + sen(\Delta x)cosx$$

Dividindo termo a termo por Δx, teremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = senx \cdot \frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} + \frac{sen(\Delta x)}{\Delta x} \cdot cosx \quad (2)$$

Passando ao limite com $\Delta x \to 0$ e lembrando do Capítulo 3 onde vimos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

teremos após a aplicação das propriedades de limites que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = senx \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + cosx \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = senx \cdot 0 + cosx \cdot 1 = cosx.$$

Portanto a função $y = senx$ é derivável e

$$\frac{dy}{dx} = cosx.$$

4.4.2 A derivada de $y = cosx$

Deixamos para o leitor o trabalho de provar que a função $y = cosx$ é derivável e que

$$\frac{dy}{dx} = -senx.$$

Como sugestão, indicamos que o procedimento é similar ao do caso anterior.

4.4.3 A derivada de $y = tgx$

A função $y = tgx$ é derivável e

$$\frac{dy}{dx} = sec^2 x$$

Para demonstrar o resultado basta lembrar que da trigonometria temos que

$$y = tgx = \frac{senx}{cosx}$$

e portanto, aplicando a derivada de um quociente teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cosx \cdot \frac{d(senx)}{dx} - senx \cdot \frac{d(cosx)}{dx}}{cos^2 x} = \frac{cosx \cdot cosx - senx(-senx)}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x}$$

e concluímos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x.$$

Exercício 4.7

Use as relações trigonométricas, as derivadas de $senx$, de $cosx$ e as regras de derivação para provar que:

1) Se $y = cotgx$ $então$ $\frac{dy}{dx} = -cossec^2x$

2) Se $y = secx$ $então$ $\frac{dy}{dx} = secx \cdot tgx$

3) Se $y = cossecx$ $então$ $\frac{dy}{dx} = -cossecx \cdot cotgx$

Exercício 4.8

Verifique se cada uma das seguintes funções satisfazem a equação diferencial $y + y'' = 0$.

1) $y = senx$

2) $y = cosx$

3) $y = asenx + bcosx$

4) $y = tgx$

Com o objetivo de aumentar o nosso conhecimento de novas funções e de suas derivadas daremos, a seguir, uma pequena tabela com o nome da função, sua expressão analítica e a sua derivada. O leitor poderá fazer uso dessa tabela e, posteriormente, faremos um estudo detalhado dessas funções, época que justificaremos suas derivadas.

Nome da função	Expressão analítica	Expressão da derivada
Função potência	$y = x^a, \; a \in R$	$y' = ax^{a-1}$
Função Exponencial	$y = e^x$	$y' = e^x$
Função Logarítmo Natural	$y = lnx, \; x > 0$	$y' = \frac{1}{x}$
Função Exponencial Geral	$y = a^x, \; a > 0$ e $a \neq 1$	$y' = a^x lna$
Função Arco-seno	$y = arcsenx$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Função Arco-cosseno	$y = arccosx$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Função Arco-tangente	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
Função Arco-secante	$y = arcsecx, \; x > 1$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Exercício 4.9

Encontre as derivadas das funções:

1) $y = xsenx$

2) $y = senxcosx$

3) $y = x^2tgx$

4) $y = \frac{1}{x^3} + secx$

5) $y = \frac{x + cosx}{1 - senx}$

6) $y = secx + tg^2x$

7) $y = cotgx - cossecx$

8) $y = sen^2x - cos^2x$

9) $y = x^3cosx + \sqrt{x}tgx$

10) $y = 1 - xsecx$

11) $y = xlnx$

12) $y = e^xcosx$

13) $y = x2^x$

14) $y = x^3e^x$

15) $y = \frac{1}{xlnx}$

16) $y = e^xarcsenx$

17) $y = \frac{x - tgx}{lnx}$

18) $y = xarcsecx$

19) $y = 3^xe^x$

20) $y = xarccosx$

4.5 A Regra da Cadeia

Ao estudarmos as derivadas das funções trigonométricas vimos que a derivada de $y = senx$ é $y' = cosx$ e que a derivada de $y = cosx$ é $y' = -senx$. Como já conhecemos as regras de derivação podemos encontrar, por exemplo, a derivada de $y = sen2x$. Para tanto, da trigonometria, temos que $sen2x = 2senxcosx$ e, assim

$$y = sen2x = 2senxcosx \qquad (1)$$

Aplicando as regras de derivação em (1), teremos

$$\frac{dy}{dx} = 2cosx \cdot \frac{d(senx)}{dx} + 2senx \cdot \frac{d(cosx)}{dx} = 2cosxcosx + 2senx(-senx) = 2(cos^2x - sen^2x).$$

Novamente da trigonometria, relembremo-nos que $cos^2x - sen^2x = 2cos2x$ e, portanto concluímos que a derivada de $y = sen2x$ é $y' = 2cos2x$.

Seguindo esse mesmo raciocínio é possível mostrar que a derivada de $y = sen3x$ é $y' = 3cos3x$ e, é provável que consigamos mostrar que a derivada de $y = sen(nx)$ é igual a $y' = ncos(nx)$, para todo n inteiro.

No entanto é pouco provável que, seguindo o mesmo caminho, consigamos mostrar que a derivada de $y = sen(ax)$ é $y' = a\cos(ax)$, sendo a um número real qualquer. Mas podemos estabelecer um critério de derivabilidade através do qual a prova da última proposição é uma consequência muito simples. Com essa finalidade introduziremos a seguinte definição

Definição 4.5

Sejam f e g duas funções e suponhamos que o domínio da segunda contenha a imagem da primeira. Neste caso é possível construir a função $g_o f$, chamada *g composta com f* e se $u = f(x)$ e $y = g(u)$ teremos $y = (g_o f)(x) = g(f(x))$.

Esquematicamente

$$x \to u = f(x) \to y = g(u)$$

Por exemplo, se indicarmos por $u = 2x$ em $y = sen2x$ teremos $y = senu$. Assim, a composição pode ser entendida pela seguinte lei:

$$x \to u = 2x \to y = senu$$

Calculando as derivadas separadamente, teremos:

1º) se $y = senu$ então $\dfrac{dy}{du} = cosu$ (1)

2º) se $u = 2x$ *então* $\dfrac{du}{dx} = 2$ (2)

No início, vimos que

se $y = sen2x$ *então* $\dfrac{dy}{dx} = 2cos2x$ (3)

De (1) e (2) segue-se que

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2cosu = 2cos2x.$$

Comparando com (3), teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Se a validade do método utilizado para a função $y = sen2x$ for assegurada para funções que possam ser expressas por composição de funções que apresentam derivadas mais simples o leitor constatará a enorme facilidade que o método trará para o cálculo da derivada. Veremos, primeiramente, dois exemplos.

Exemplo 4.8

Para encontrar a derivada de $y = sen(ax)$, onde a é um número real podemos, em primeiro lugar, considerar o sistema

$$\begin{cases} u = ax \\ y = senu \end{cases}$$

que caracteriza a função dada pela seguinte composição

$$x \to u = ax \to y = senu$$

Como $\dfrac{du}{dx} = a$ e $\dfrac{dy}{du} = cosu$ e se $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ teremos: $\dfrac{dy}{dx} = \text{acos}(ax)$

Então se $y = sen(ax)$ teremos $y' = \text{acos}(ax)$ para todo número real a.

Exemplo 4.9

A derivada de $y = (ax+b)^n$, onde $n \in R \; e \; n \neq -1$ é obtida considerando o sistema

$$\begin{cases} u = ax + b \\ y = u^n, \;\; n \neq -1 \end{cases}$$

para caracterizar a função a função dada pela composição: $x \to u = ax + b \to y = x^n$.

Como $\dfrac{du}{dx} = a$ e $\dfrac{dy}{du} = nu^{n-1}$ e se $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ segue que

$$\frac{dy}{dx} = an(ax+b)^{n-1}.$$

Acreditamos que os dois exemplos dados são suficientes para convencer o leitor do enorme alcance do processo apresentado e da facilidade que ele traz à operação de derivação, caso ele seja válido. Felizmente as coisas no *Cálculo*, na maioria das vezes, comportam-se bem.

Como já ocorreu em situações anteriores o processo apresentado é válido em todos os casos em que a função dada pode ser reformulada em termos de uma composição de duas ou mais funções. O processo de derivação decorrente, conforme apresentado nos dois exemplos anteriores é conhecido como *Regra da Cadeia*.

Formalmente, podemos deduzir a *Regra da Cadeia* considerando o sistema:

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

que caracteriza a seguinte composição: $x \to u = g(x) \to y = f(u) = f\big(g(x)\big)$ onde as funções f e g são ambas deriváveis em seus respectivos domínios.

Daí, para a função $y = (g_o f)(x)$ teremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(f_o g)(x + \Delta x) - (f_o g)(x)}{\Delta x} = \frac{f\big(g(x + \Delta x)\big) - f(g(x))}{\Delta x}$$

Supondo-se que $g(x + \Delta x) - g(x) \neq 0$ podemos reescrever o quociente acima como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\big(g(x + \Delta x)\big) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)}$$

ou

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\big(g(x + \Delta x)\big) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

Do sistema (1) temos que: se $u = g(x)$ segue que $u + \Delta u = g(x + \Delta x)$ e, portanto, $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$.

Desta forma, reescreveremos (2) como segue:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (3)$$

Como as funções $y = f(u)$ e $u = g(x)$ são deriváveis, teremos:

a) devido à continuidade de g, concluímos que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$

b) $\displaystyle \frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$

c) $\displaystyle \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$

Assim, aplicando o limite com $\Delta x \to 0$ em (3) teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Esse desenvolvimento sugere o seguinte teorema:

Teorema 4.8 (Regra da Cadeia)

Sejam f e g duas funções para as quais a composta $f_o g$ esteja definida. Se f e g forem deriváveis então $f_o g$ também será derivável e, se o sistema:

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$$

caracterizar a composição: $x \to u = g(x) \to f(u)$, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Exemplo 4.10

Na função $y = tg(4x^2 + 1)$ podemos destacar a composição:

$$x \to u = 4x^2 + 1 \to y = tgu$$

Como $\frac{du}{dx} = 8x$ e $\frac{dy}{du} = sec^2 u$ teremos: $\frac{dy}{dx} = 8xsec^2(4x^2 + 1)$

Exemplo 4.11

Na função $y = \sqrt{2x^2 + 1}$, podemos destacar a composição:

$$x \to u = 2x^2 + 1 \to y = u^{\frac{1}{2}}$$

Como $\frac{du}{dx} = 4x$ e $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

O Teorema 4.8 estende-se naturalmente para o caso em que na composição figurem três ou mais funções. Desta forma se a composição puder ser indicada pelo esquema:

$$x \to u = g(x) \to v = h(u) \to t = m(v) \to y = f(t)$$

teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

A representação abaixo é útil para o caso:

$$\begin{tikzcd} x & u = g(x) \arrow[l, "\frac{du}{dx}"'] & v = h(u) \arrow[l, "\frac{dv}{du}"'] & t = m(v) \arrow[l, "\frac{dt}{dv}"'] & y = f(t) \arrow[l, "\frac{dy}{dt}"'] \arrow[llll, bend right, "\frac{dy}{dx}"'] \end{tikzcd}$$

Exemplo 4.12

Na função $y = sen(2x+1)^2$ podemos destacar a composição:

$$x \to u = 2x + 1 \to v = u^2 \to y = senv$$

Como

$$\frac{dy}{dv} = cosv, \qquad \frac{dv}{du} = 2u, \qquad \frac{du}{dx} = 2, \text{teremos: } \frac{dy}{dx} = (cosv)(2u)2$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x+1)cos(2x+1)^2$$

Exercício 4.10

Encontre as derivadas de:

1) $y = \sqrt{x+7}$

2) $y = \dfrac{senx}{e^x}$

3) $y = (x^2+1)cosx$

4) $y = e^{3x^2+5}$

5) $y = arctg(2x-3)$

6) $y = arcsen(e^x)$

7) $y = \dfrac{x^3+1}{arcsenx}$

8) $y = lnx.cosx$

9) $y = ln\left(\frac{x+1}{x^2+4x}\right)$

10) $y = e^{x^2} + 2cos(x^2+4)$

11) $y = \frac{arctg(x^2-1)}{arcsen(x^2-1)}$

12) $y = ln(senx + cosx)$

13) $y = \frac{sen(3x^2-5)}{e^{2x}}$

14) $y = (x^2-1)e^{5x-3}$

15) $y = \ln(3x-2)$

16) $y = \sqrt{ln(x^2+1)}$

17) $y = sen\sqrt{3x^2+2}$

18) $y = (senx + cosx)^2$

19) $y = ln\big(cos(sen3x)\big)$

20) $y = \left(\frac{senx}{secx + cosx}\right)^4$

21) $y = (senx.cosx)^3$

22) $y = sen(ln(x^2+1)^3)$

23) $y = e^{cos4x}$

24) $y = cos\big(sen(e^x)\big)$

25) $y = 2^{3x+1}$

26) $y = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{(6x^2-4x)^2}$

27) $y = \frac{3x^4 + x^{\frac{5}{4}}}{4x^3 - x^5 + 1}$

28) $y = 4^{x^2}tg(2x)$

29) $y = \frac{e^{-x}}{cos2x}$

30) $y = e^{2t}arctg(3t)$

31) $y = (1 - sent)(t + cost)$

32) $y = e^{2t^2}lnt$

33) $y = ln\sqrt{x^3+2}$

34) $y = 4x3^{2x+1}$

35) $y = sen(3x)cotg(2x)$

36) $y = 2x^3 + 4^{x^2}$

37) $y = cos\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$

38) $y = e^{\sqrt{2x+1}}$

39) $y = 2^{\sqrt{2x+1}}$

40) $y = sec\sqrt[4]{3x-1}$

41) $y = (2x-3)^7$

42) $y = (cos\,x)^3$

43) $y = sen\left(lnx + \frac{1}{x^2}\right)$

44) $y = sen\big(sec(x^2+1)\big)$

45) $y = cos\sqrt{x^2-1}$

46) $y = x\sqrt{x} + cotgx$

47) $y = sen(x^2tgx^3)$

48) $y = \frac{x^2 - lnx^3}{x^2-2}$

49) $y = e^{x^2+1}tg4x$

50) $y = \sqrt{sen(3x^2+1)}$

51) $y = (ln2x)arcsen(x^2)$

52) $y = (x+1)^3ln(x^3+x)$

53) $y = (senx)arcsec3x$

54) $y = arctg\sqrt{x^2+2}$

Exercício 4.11

1. Mostre que a reta $y = 14x - 4$ é tangente à $y = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ e determine o ponto de tangência.
2. Encontre a equação da reta tangente a $y = 5x^2 + 6x - 2$ que é paralela à reta $y = -x + 2$.
3. Mostre que os gráficos das equações $y = -x^2 + 1$ e $y = x^2 - 4x + 3$ têm em comum a reta tangente no ponto $(1,0)$.
4. Mostre que existem exatamente duas retas tangentes ao gráfico de $y = x^2 + 1$ passando pela origem e encontre suas equações.
5. Verificar se as retas $y = 9$, $y = -16$ e $y = 8x$ são tangentes à curva de equação: $y = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16\,x$. Em caso afirmativo encontre os respectivos pontos de tangência.
6. Determine c de modo que a reta que passa pelos pontos $(0,3)$ e $(5,-2)$ seja tangente à curva $y = c/(x+1)$ ·
7. Achar em que ponto as curvas $y = x^3 - 6x^2 - 15x$ e $y = 5x^4 + 5x$ têm tangentes paralelas ao eixo x.
8. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = x^2 + 1$ que passa pelo ponto $(1,0)$.
9. Uma partícula se move de modo que no instante t o espaço percorrido é descrito pela equação $s(t) = 4t^3 + 2t^2 - 6t$. Em que instante sua aceleração é igual a 4?
10. A equação horária de um movimento é $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5$. Em que instante a velocidade é igual à aceleração?