Cálculo I (Derivada propriedades e regras)

Antônio Calixto de Souza Filho*

Escola de Artes, Ciências e Humanidades*
Universidade de São Paulo

27 de maio de 2013

subject

- Vejamos que a derivada de $\sqrt[q]{x^p}$ será obtida da mesma forma que x^n, quando $n \in \mathbb{N}$.
- Vimos ser suficiente a fatoração $(x - x_0)^n = (x - x_0)(x^{n-1} + \cdots + x^{n-m}x_0^{m-1} + \cdots + x_0^{n-1})$ e a derivada é a imagem de $x^{n-1} + \cdots + x^{n-m}x_0^{m-1} + \cdots + x_0^{n-1}$ em x_0.
- Para este cálculo, basta observar que cada somando é da forma $x_0^{n-m}x_0^{m-1} = x_0^{n-1}$ e há n somandos.
- Usaremos este resultado duas vezes, para $((\sqrt[q]{x})^{q-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x})^{q-m}(\sqrt[q]{x_0})^{m-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x_0})^{q-1})$ e para $(\sqrt[q]{x})^{p-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x})^{p-m}(\sqrt[q]{})x_0{}^{m-1} + \cdots + (\sqrt[q]{})x_0{}^{p-1})$, como descrito a seguir.

- Vejamos que a derivada de $\sqrt[q]{x^p}$ será obtida da mesma forma que x^n, quando $n \in \mathbb{N}$.
- Vimos ser suficiente a fatoração $(x - x_0)^n = (x - x_0)(x^{n-1} + \cdots + x^{n-m}x_0^{m-1} + \cdots + x_0^{n-1})$ e a derivada é a imagem de $x^{n-1} + \cdots + x^{n-m}x_0^{m-1} + \cdots + x_0^{n-1}$ em x_0.
- Para este cálculo, basta observar que cada somando é da forma $x_0^{n-m}x_0^{m-1} = x_0^{n-1}$ e há n somandos.
- Usaremos este resultado duas vezes, para $((\sqrt[q]{x})^{q-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x})^{q-m}(\sqrt[q]{x_0})^{m-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x_0})^{q-1})$ e para $(\sqrt[q]{x})^{p-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x})^{p-m}(\sqrt[q]{})x_0{}^{m-1} + \cdots + (\sqrt[q]{})x_0{}^{p-1})$, como descrito a seguir.

- Vejamos que a derivada de $\sqrt[q]{x^p}$ será obtida da mesma forma que x^n, quando $n \in \mathbb{N}$.
- Vimos ser suficiente a fatoração $(x - x_0)^n = (x - x_0)(x^{n-1} + \cdots + x^{n-m}x_0^{m-1} + \cdots + x_0^{n-1})$ e a derivada é a imagem de $x^{n-1} + \cdots + x^{n-m}x_0^{m-1} + \cdots + x_0^{n-1}$ em x_0.
- Para este cálculo, basta observar que cada somando é da forma $x_0^{n-m}x_0^{m-1} = x_0^{n-1}$ e há n somandos.
- Usaremos este resultado duas vezes, para $((\sqrt[q]{x})^{q-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x})^{q-m}(\sqrt[q]{x_0})^{m-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x_0})^{q-1})$ e para $(\sqrt[q]{x})^{p-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x})^{p-m}(\sqrt[q]{})x_0{}^{m-1} + \cdots + (\sqrt[q]{})x_0{}^{p-1})$, como descrito a seguir.

- Vejamos que a derivada de $\sqrt[q]{x^p}$ será obtida da mesma forma que x^n, quando $n \in \mathbb{N}$.
- Vimos ser suficiente a fatoração $(x - x_0)^n = (x - x_0)(x^{n-1} + \cdots + x^{n-m}x_0^{m-1} + \cdots + x_0^{n-1})$ e a derivada é a imagem de $x^{n-1} + \cdots + x^{n-m}x_0^{m-1} + \cdots + x_0^{n-1}$ em x_0.
- Para este cálculo, basta observar que cada somando é da forma $x_0^{n-m}x_0^{m-1} = x_0^{n-1}$ e há n somandos.
- Usaremos este resultado duas vezes, para $((\sqrt[q]{x})^{q-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x})^{q-m}(\sqrt[q]{x_0})^{m-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x_0})^{q-1})$ e para $(\sqrt[q]{x})^{p-1} + \cdots + (\sqrt[q]{x})^{p-m}(\sqrt[q]{})x_0{}^{m-1} + \cdots + (\sqrt[q]{})x_0{}^{p-1})$, como descrito a seguir.

- Para fixar, inicialmente vamos calcular $(\sqrt{x})'$ pelo limite $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$, usando a igualdade a seguir: $x - x_0 = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$.
- Assim, $(\sqrt{x})'$ em x_0 será $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ que é a imagem de $\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ em x_0, isto é, $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
- Portanto $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ou $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
- A derivada $(\sqrt[4]{x^3})'$ pelo limite $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x_0^3}}{x-x_0}$, se calculada de modo semelhante, necessita de duas passagens, como a seguir.

- Para fixar, inicialmente vamos calcular $(\sqrt{x})'$ pelo limite $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$, usando a igualdade a seguir: $x-x_0=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x_0})^2=(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})$.
- Assim, $(\sqrt{x})'$ em x_0 será $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ que é a imagem de $\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ em x_0, isto é, $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
- Portanto $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ou $(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
- A derivada $(\sqrt[4]{x^3})'$ pelo limite $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x_0^3}}{x-x_0}$, se calculada de modo semelhante, necessita de duas passagens, como a seguir.

- Para fixar, inicialmente vamos calcular $(\sqrt{x})'$ pelo limite $\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$, usando a igualdade a seguir: $x - x_0 = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$.
- Assim, $(\sqrt{x})'$ em x_0 será $\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ que é a imagem de $\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ em x_0, isto é, $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
- Portanto $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ou $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
- A derivada $(\sqrt[4]{x^3})'$ pelo limite $\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x_0^3}}{x-x_0}$, se calculada de modo semelhante, necessita de duas passagens, como a seguir.

- Para fixar, inicialmente vamos calcular $(\sqrt{x})'$ pelo limite $\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$, usando a igualdade a seguir: $x - x_0 = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$.
- Assim, $(\sqrt{x})'$ em x_0 será $\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ que é a imagem de $\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ em x_0, isto é, $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
- Portanto $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ou $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
- A derivada $(\sqrt[4]{x^3})'$ pelo limite $\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x_0^3}}{x-x_0}$, se calculada de modo semelhante, necessita de duas passagens, como a seguir.

- Temos $\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x_0^3}}{x-x_0}$. Usamos a igualdade a seguir: $x - x_0 = (\sqrt[4]{x})^4 - (\sqrt[4]{x_0})^4 =$ $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x_0}) * ((\sqrt[4]{x})^3 + (\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0} + \sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2 + (\sqrt[4]{x_0})^3)$.
- Assim, será $\lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt[4]{x^3})^4-(\sqrt[4]{x_0^3})^4}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x_0})*((\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2+(\sqrt[4]{x_0})^3)}$ A indeterminação permanece e temos que fatorar o termo $(\sqrt[4]{x^3}) - (\sqrt[4]{x_0^3}) = (\sqrt[4]{x})^3 - (\sqrt[4]{x_0})^3$ e substituir no limite $(\sqrt[4]{x})^3-(\sqrt[4]{x_0})^3 = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x_0}) * ((\sqrt[4]{x})^2 + (\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x_0} + (\sqrt[4]{x_0})^2)$. $\lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x_0})*((\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x_0}+(\sqrt[4]{x_0})^2)}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x_0})*((\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2+(\sqrt[4]{x_0})^3})$

- Temos $\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x_0^3}}{x-x_0}$. Usamos a igualdade a seguir:
  $x - x_0 = (\sqrt[4]{x})^4 - (\sqrt[4]{x_0})^4 =$
  $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x_0}) * ((\sqrt[4]{x})^3 + (\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0} + \sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2 + (\sqrt[4]{x_0})^3)$.
- Assim, será
  $\lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt[4]{x^3})^4-(\sqrt[4]{x_0^3})^4}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x_0})*((\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2+(\sqrt[4]{x_0})^3)}$
  A indeterminação permanece e temos que fatorar o termo
  $(\sqrt[4]{x^3}) - (\sqrt[4]{x_0^3}) = (\sqrt[4]{x})^3 - (\sqrt[4]{x_0})^3$ e substituir no limite
  $(\sqrt[4]{x})^3 - (\sqrt[4]{x_0})^3 = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x_0}) * ((\sqrt[4]{x})^2 + (\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x_0} + (\sqrt[4]{x_0})^2)$.
  $\lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x_0})*((\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x_0}+(\sqrt[4]{x_0})^2)}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x_0})*((\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2+(\sqrt[4]{x_0})^3})$

- O limite acima será a imagem de x_0 em $\frac{(\sqrt[4]{x})^2+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x_0}+(\sqrt[4]{x_0})^2}{(\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2+(\sqrt[4]{x_0})^3} =$ $= \frac{3(\sqrt[4]{x_0})^2}{4(\sqrt[4]{x_0})^3} = \frac{3}{4}x_0^{\frac{2}{4}-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$
- A derivada de $\sqrt[4]{x^3}$ em x_0 será $\frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$ ou $\frac{3}{4\sqrt[4]{x_0}}$.
- Observe que vale, neste caso a fórmula $(x^n)' = nx^{n-1}$, de fato $(\sqrt[4]{x^3})' = (x^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$
- Assim, prova-se que $(x^n)' = nx^{n-1}$ quando $n \in \mathbb{Q}$ de modo análogo ao acima.

- O limite acima será a imagem de x_0 em $\frac{(\sqrt[4]{x})^2+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x_0}+(\sqrt[4]{x_0})^2}{(\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2+(\sqrt[4]{x_0})^3} =$ $= \frac{3(\sqrt[4]{x_0})^2}{4(\sqrt[4]{x_0})^3} = \frac{3}{4}x_0^{\frac{2}{4}-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$
- A derivada de $\sqrt[4]{x^3}$ em x_0 será $\frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$ ou $\frac{3}{4\sqrt[4]{x_0}}$.
- Observe que vale, neste caso a fórmula $(x^n)' = nx^{n-1}$, de fato $(\sqrt[4]{x^3})' = (x^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$
- Assim, prova-se que $(x^n)' = nx^{n-1}$ quando $n \in \mathbb{Q}$ de modo análogo ao acima.

- O limite acima será a imagem de x_0 em $\frac{(\sqrt[4]{x})^2+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x_0}+(\sqrt[4]{x_0})^2}{(\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2+(\sqrt[4]{x_0})^3} =$ $= \frac{3(\sqrt[4]{x_0})^2}{4(\sqrt[4]{x_0})^3} = \frac{3}{4}x_0^{\frac{2}{4}-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$
- A derivada de $\sqrt[4]{x^3}$ em x_0 será $\frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$ ou $\frac{3}{4\sqrt[4]{x_0}}$.
- Observe que vale, neste caso a fórmula $(x^n)' = nx^{n-1}$, de fato $(\sqrt[4]{x^3})' = (x^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$
- Assim, prova-se que $(x^n)' = nx^{n-1}$ quando $n \in \mathbb{Q}$ de modo análogo ao acima.

- O limite acima será a imagem de x_0 em $\frac{(\sqrt[4]{x})^2+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x_0}+(\sqrt[4]{x_0})^2}{(\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^2\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x_0})^2+(\sqrt[4]{x_0})^3} =$
$= \frac{3(\sqrt[4]{x_0})^2}{4(\sqrt[4]{x_0})^3} = \frac{3}{4}x_0^{\frac{2}{4}-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$
- A derivada de $\sqrt[4]{x^3}$ em x_0 será $\frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$ ou $\frac{3}{4\sqrt[4]{x_0}}$.
- Observe que vale, neste caso a fórmula $(x^n)' = nx^{n-1}$, de fato $(\sqrt[4]{x^3})' = (x^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}$
- Assim, prova-se que $(x^n)' = nx^{n-1}$ quando $n \in \mathbb{Q}$ de modo análogo ao acima.

Esboço do cálculo de $x^{\frac{p}{q}}$: na definição de limites, teremos o quociente de duas expressões como no caso anterior. Após remover a indeterminação, no numerador teremos $p\sqrt[q]{x_0^{p-1}}$ e no denominador $q\sqrt[q]{x_0^{p-1}}$, assim $\frac{p}{q}x_0^{\frac{p-1}{q}-\frac{q-1}{q}} = \frac{p}{q}x_0^{\frac{p-1-q+1}{q}} = \frac{p}{q}x_0^{\frac{p}{q}-1}$ é o limite procurado e $\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$ a função derivada de $x^{\frac{p}{q}}$.

Teorema

Seja $n \in \mathbb{R}$, se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$

Por exemplo $(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

Propriedade

Sejam u e v funções deriváveis em todo seu domínio, isto é, são conhecidas as funções u' e v'.

- (Multiplicação por constante K) $(K * u)' = K * u'$, isto é, a derivada de $5x^3$ é $(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 * 3x^{3-1} = 15x^2$
- (regra da soma) $(u + v)' = u' + v'$, isto é, $(3x^4 - 10\sqrt[5]{x^2})'$ será $(3x^4)' + (-10x^{\frac{5}{2}})' = 12x^3 + (-10 * \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}) = 12x^3 - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}$

Propriedade

Sejam u e v funções deriváveis em todo seu domínio, isto é, são conhecidas as funções u' e v'.

- (Multiplicação por constante K) $(K * u)' = K * u'$, isto é, a derivada de $5x^3$ é $(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 * 3x^{3-1} = 15x^2$
- (regra da soma) $(u + v)' = u' + v'$, isto é, $(3x^4 - 10\sqrt[5]{x^2})'$ será $(3x^4)' + (-10x^{\frac{5}{2}})' = 12x^3 + (-10 * \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}) = 12x^3 - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}$

- Vimos então que $(x^n)' = nx^{n-1}$;
- Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + x_0$, então $f'(x) = n * a_n x^{n-1} + (n-1) * a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2 * a_2 x + a_1$, que é a derivada de um polinômio.
- Isto é, se $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$, então $f'(x) = 12x^3 - 10x + 2$

- Vimos então que $(x^n)' = nx^{n-1}$;
- Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + x_0$, então $f'(x) = n * a_n x^{n-1} + (n-1) * a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2 * a_2 x + a_1$, que é a derivada de um polinômio.
- Isto é, se $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$, então $f'(x) = 12x^3 - 10x + 2$

- Vimos então que $(x^n)' = nx^{n-1}$;
- Se $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + x_0$, então $f'(x) = n * a_nx^{n-1} + (n-1) * a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2 * a_2x + a_1$, que é a derivada de um polinômio.
- Isto é, se $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$, então $f'(x) = 12x^3 - 10x + 2$

subject

Vimos que há determinados limites que surgem naturalmente. Um destes casos é o cálculo da taxa instantânea de variação.

Definição

Seja f uma função. O limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, quando existe é definido como a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0. Tal limite será denotado por $f'(x_0)$, isto é

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Assim, $f'(x_0)$ é a derivada de f no ponto x_0 e dizemos que f é derivável em x_0

Lembremos que o processo acima equivale a calcular a taxa instantânea de variação no ponto x_0. Assim, a derivada é também o coeficiente angular da reta tangente a uma curva.

- Aplicação teórica: estudo do crescimento ou decrescimento local de funções contínuas.
- Aplicação prática: aproximação local de funções contínuas pela equação da reta tangente.

- Aplicação teórica: estudo do crescimento ou decrescimento local de funções contínuas.
- Aplicação prática: aproximação local de funções contínuas pela equação da reta tangente.

Seja a função $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Vimos que para esta função, a coordenada $x_v = 1$ do vértice determina que:
na região $x < 1$ a função é decrescente, enquanto que:
na região $1 < x$, f é crescente.
Veremos que o mesmo ocorre para funções contínuas, ou seja, podemos calcular regiões em que f é crescente ou decrescente.
Para isso, inicialmente vamos estudar o que ocorre com relação ao crescimento de uma função próximo de um valor fixado x_0.

Seja $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$, próximo a um ponto $x_0 = 2$ é possível afirmar que esta função seja crescente ou decrescente? Primeiro, devemos entender o termo *próximo a* 2. Este significa um intervalo do tipo $[2 - \delta, 2 + \delta]$, ou seja valores que estejam dentro de um intervalo centrado em 2, podendo este intervalo ser aberto ou fechado.

Usando o conceito de derivada como coeficiente angular da reta tangente r, isto é, $r(x) = f'(x_0)x + b$, lembrando que esta reta é crescente quando seu coeficiente angular é positivo, então se $f'(x_0)$ for positivo a reta tangente ao gráfico de f em x_0 será crescente. Ora, mas a reta tangente, para valores próximos de x_0 é também muito próxima à função f, assim a função tem comportamento semelhante à reta r, ou seja:

$$\begin{array}{ccc} f \text{ é CRESCENTE} & \text{LOCALMENTE EM } x_0, & \text{se } f'(x_0) > 0, \text{ e} \\ f \text{ é DECRESCENTE} & \text{LOCALMENTE EM } x_0, & \text{se } f'(x_0) < 0. \end{array}$$

Exemplo

Voltamos ao exemplo $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$, $f'(x) = 6x - 3$, *logo* $f(2) = 9 > 0$, *então* f *é crecente próximo a* $x_0 = 2$. *Se ocorrer de* f *representar a massa de bactérias, em uma certa cultura em função do tempo,* $f'(2)$ *dá uma estimativa da velocidade de crescimento da quantidade (expressa pela massa) de bactérias, além disso, próximo a* $x_0 = 2$, *esta velocidade será crescente.*

Exemplo

Se $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 20$ *próximo a* $x_0 = 1$ *ocorre que* f *tem um comportamento diferente à esquerda ou a direita de* 1. *Isso ocorre porque* $f'(x) = 12x^2 - 12x$ *e deste modo* $f'(1) = 0$, *ora isso pode ter a mesma propriedade do vértice da parábola, cuja parte à esquerda do* x_v *tem crescimento oposta ao da direita. Veremos que será necessário estudar outro conceito para definir o comportamento nestes casos particulares.*

Exemplo

Seja $m(t) = 8\sqrt{t} + \frac{1}{2t} + 5$ *a função que representa o crescimento em miligramas de uma certa cultura em função do tempo t em dias. Sanbendo-se que esta função está definida no intervalo* $[\frac{1}{24}, 2]$. *Determine o instante em* t_0 *que o crescimento desta cultura é nulo, bem como a quantidade da cultura neste instante. Avalie* 18*h após este instante a velocidade e explique se está irá aumentar ou diminuir próximo a este instante.*

Solução: vimos que $m'(t) = \frac{4}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t^2}$ *é a velocidade de crescimento. Assim* $\frac{4}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t^2} = 0$ *é o instante de crescimento nulo. Resolvemos a equação* $\frac{8t^2 - \sqrt{t}}{2t^2\sqrt{t}} = 0$, *então* $8t^2 = \sqrt{t}$ *e* $64t^4 = t$, *sendo* $t \neq 0$, $t^3 = \frac{1}{64}$ *e* $t = \frac{1}{4}$ *de dia ou* 6*h. Assim no instante* 6*h a velocidade da cultura será nula. A quantidade desta cultura neste instante é* $8 * \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + 5 = 4 + 2 + 5 = 11$ *miligramas.*

continuação do exemplo

Assim $18h$ após o instante $6h$ de velocidade nula será $24h$ ou 1 dia. No instante $t = 1$ a derivada $m'(t) = \frac{4}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t^2}$ será $m'(1) = \frac{4}{1} - \frac{1}{2(1^2)} = 4 - 0,5$ isto é $2,5$ miligramas por dia. Como $m'(1) > 0$ indica que próximo a 1 dia o crescimento da cultura deve ser crescente.

Vimos que para uma funçao f, $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente r ao gráfico de f em x_0. Nestes casos, sempre são conhecidos o coeficiente angular da reta e um ponto da reta, que é o ponto de tangência. Por exemplo:

Exemplo

Seja $f(x) = -2x^3 - 7x^2 - 5x + 3$, *a reta tangente ao gráfico de* f *em* $x_0 = -2$ *tem coeficiente angular* $f'(-2)$ *e passa pelo ponto* $(-2, f(-2))$. *Podemos calcular estes valores:* $f'(x) = -6x^2 - 14x - 5$, *logo* $f'(-2) = -24 + 28 - 5 = -1$ *é o coeficiente angular e* $(-2, 1)$ *um ponto da reta, pois* $f(-2) = 16 - 28 + 10 + 3 = 1$. *Podemos determinar a equação da reta* $r(x) = -x + b$, *sendo* $r(-2) = 1$ *(0 ponto de coordenadas* $(-2, 1)$*), calculamos* $r(-2) = (-1) * (-2) + b = 1$ *e obtemos* $b = -1$. *Logo* $r(x) = -x - 1$

Seja f uma função derivável em x_0. A equação da reta tangente r é:

$$r(x) = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$$

Podemos ver isso do seguinte modo, $r(x) = ax + b$, sendo $f'(x_0) = a$ e $(x_0, f(x_0))$ um ponto da reta, temos a equação $r(x_0) = f'(x_0) * x_0 + b$, e determinamos $b = r(x_0) - f'(x_0) * x_0$, mas $r(x_0) = f(x_0)$, pois $((x_0, f(x_0))$ é um ponto da reta), assim $b = f(x_0) - f'(x_0) * x_0$. Substituindo na equação, obtemos $r(x) = f'(x_0)x - f'(x_0) * x_0 + f(x_0)$.

Exemplo (Cálculo da reta tangente a uma curva)

Seja $f(x) = \sqrt{x}$. *Qual a equação da reta tangente à curva no ponto* $x_0 = 4$? *Inicialmente calculamos* $f'(4)$. *Vimos, utilizando as propriedades de derivada que* $f'(x) = \frac{1}{2*\sqrt{x}}$, *logo* $f'(4) = 0,25$. *Assim, obtemos a taxa instantânea de variação em* $x_0 = 4$, *que representa o coeficiente angular da reta* r. *Assim,* $r(x) = 0.25x + b$. *Como conhecemos um ponto de* r *(O PONTO ONDE* r *TANGENCIA O GRÁFICO DE* f*), temos* $r(4) = f(4) = \sqrt{4} = 2 = 0.25 * 4 + b$, *logo* $b = 1$ *e* $r(x) = 0.25x + 1$ *é a equação da reta tangente.*

Suponha que queremos calcular um valor aproximado de $\sqrt{37}$ que seja um número racional. Para tanto, podemos utilizar o conceito de reta tangente como aproximação local. Neste caso, consideramos $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 36$, o número mais próximo de 36 que é um quadrado. Assim, a equação da reta tangente será $r(x) = f'(36)x + b$, calculamos $f'(36) = \frac{1}{2\sqrt{36}} = \frac{1}{12}$ e o ponto de tangência $(36, 6)$. Assim $6 = \frac{1}{12} * 36 + b$, logo $b = 3$ e $r(x) = \frac{1}{12} * x + 3$, ora como aproximação, $r(37) \cong \sqrt{37}$, daí, $\sqrt{37} \cong \frac{37}{12} + 3 = \frac{73}{12}$

Podemos agora considerar $x_0 = \frac{73^2}{12^2}$, um racional próximo de $\sqrt{37}$ e repetir o processo acima. $f'(x_0) = \frac{12}{146}$, o ponto de tangência é $(\frac{73^2}{12^2}, \frac{73}{12})$ e $b = \frac{73}{12} - \frac{12}{146} * \frac{73^2}{12^2} = \frac{73}{12} - \frac{73}{24} = \frac{73}{24}$. A equação da reta será $r(x) = \frac{12}{146}x + \frac{73}{24}$ e $\sqrt{37} \cong r(37) = \frac{10657}{1752}$, esta última aproximação tem precisão de 10^{-7}, ou seja, a reta r é uma aproximação, local, de f em 37.

Calcule um valor racional aproximado de $\sqrt[10]{1200}$.
solução: Inicialmente devemos obter uma solução inteira, que é um racional conhecido, próxima a $\sqrt[10]{1200}$. Ou seja procuramos x_0 próximo a 1200, tal que $\sqrt[10]{x_0} = n$, sendo n um número inteiro. Assim $x_0 = n^{10}$ e procuramos uma potência de 10 próxima a 1200. Uma boa aproximação é $x_0 = 1024 = 2^{10}$. Consideramos $f(x) = \sqrt[10]{x}$ e a solução é aproximada pela reta tangente de f em $x_0 = 1024$. Calculamos $f'(x) = \frac{1}{10}x^{\frac{1}{10}-1} = \frac{1}{10}x^{\frac{-9}{10}}$ assim $f'(x_0) = f'(1024) = \frac{1}{10}1024^{\frac{-9}{10}} = \frac{1}{10(\sqrt[10]{x})^9} = \frac{1}{10*2^9}$, assim $f'(1024) = \frac{1}{5120}$ e o ponto de tangência é $(1024, 2)$. Pelo que vimos $r(x) = \frac{x}{5120} + b$, $r(1024) = f(1024) = 2$ então $2 = r(1024) = \frac{1024}{5120} + b$ e $b = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$. Determinamos $r(x) = \frac{x}{5120} + \frac{9}{5}$ e
$\sqrt[10]{1200} \cong r(1200) = \frac{1200}{5120} + \frac{9}{5} = \frac{15}{64} + \frac{9}{5} = \frac{75+576}{64*5} = \frac{651}{320}$,
chegamos a aproximação $\sqrt[10]{1200} \cong \frac{651}{320}$.

Resumo da aplicação de derivadas

- As aplicações de derivadas são extensas nas mais diversas áreas.
- Podemos nos perguntar, para que calcular a reta tangente à uma curva?
- Observando, geometricamente a curva do exemplo anterior e a reta tangente no ponto $x_0 = 2$, vemos que, para valores próximos de x_0, os dois gráficos ficam próximos, mas o que isso significa?
- A reta tangente é uma boa aproximação local da função f.
- Podemos, assim, calcular $\sqrt{3,8}$, aproximando pela reta tangente à $f(x) = \sqrt{x}$ com $x_0 = 2$. Assim $r(3.8) = 0.25 * 3.8 + 1 = 1.95 \cong \sqrt{3,8}$, enquanto que $\sqrt{3,8} \cong 1.9493589$ (com o uso de calculadora).

Resumo da aplicação de derivadas

- As aplicações de derivadas são extensas nas mais diversas áreas.
- Podemos nos perguntar, para que calcular a reta tangente à uma curva?
- Observando, geometricamente a curva do exemplo anterior e a reta tangente no ponto $x_0 = 2$, vemos que, para valores próximos de x_0, os dois gráficos ficam próximos, mas o que isso significa?
- A reta tangente é uma boa aproximação local da função f.
- Podemos, assim, calcular $\sqrt{3,8}$, aproximando pela reta tangente à $f(x) = \sqrt{x}$ com $x_0 = 2$. Assim $r(3.8) = 0.25 * 3.8 + 1 = 1.95 \cong \sqrt{3,8}$, enquanto que $\sqrt{3,8} \cong 1.9493589$ (com o uso de calculadora).

Resumo da aplicação de derivadas

- As aplicações de derivadas são extensas nas mais diversas áreas.
- Podemos nos perguntar, para que calcular a reta tangente à uma curva?
- Observando, geometricamente a curva do exemplo anterior e a reta tangente no ponto $x_0 = 2$, vemos que, para valores próximos de x_0, os dois gráficos ficam próximos, mas o que isso significa?
- A reta tangente é uma boa aproximação local da função f.
- Podemos, assim, calcular $\sqrt{3,8}$, aproximando pela reta tangente à $f(x) = \sqrt{x}$ com $x_0 = 2$. Assim $r(3.8) = 0.25 * 3.8 + 1 = 1.95 \cong \sqrt{3,8}$, enquanto que $\sqrt{3,8} \cong 1.9493589$ (com o uso de calculadora).

Resumo da aplicação de derivadas

- As aplicações de derivadas são extensas nas mais diversas áreas.
- Podemos nos perguntar, para que calcular a reta tangente à uma curva?
- Observando, geometricamente a curva do exemplo anterior e a reta tangente no ponto $x_0 = 2$, vemos que, para valores próximos de x_0, os dois gráficos ficam próximos, mas o que isso significa?
- A reta tangente é uma boa aproximação local da função f.
- Podemos, assim, calcular $\sqrt{3,8}$, aproximando pela reta tangente à $f(x) = \sqrt{x}$ com $x_0 = 2$. Assim $r(3.8) = 0.25 * 3.8 + 1 = 1.95 \cong \sqrt{3,8}$, enquanto que $\sqrt{3,8} \cong 1.9493589$ (com o uso de calculadora).

Resumo da aplicação de derivadas

- As aplicações de derivadas são extensas nas mais diversas áreas.
- Podemos nos perguntar, para que calcular a reta tangente à uma curva?
- Observando, geometricamente a curva do exemplo anterior e a reta tangente no ponto $x_0 = 2$, vemos que, para valores próximos de x_0, os dois gráficos ficam próximos, mas o que isso significa?
- A reta tangente é uma boa aproximação local da função f.
- Podemos, assim, calcular $\sqrt{3,8}$, aproximando pela reta tangente à $f(x) = \sqrt{x}$ com $x_0 = 2$. Assim $r(3.8) = 0.25 * 3.8 + 1 = 1.95 \cong \sqrt{3,8}$, enquanto que $\sqrt{3,8} \cong 1.9493589$ (com o uso de calculadora).

subject

A seguir veremos mais regras que permitem cálculo de derivadas o produto de funções ou mesmo para funções que são composição de outras funções.

Propriedade

Sejam u e v funções deriváveis em todo seu domínio, isto é, são conhecidas as funções u' e v'.

- (regra do produto) $(u * v)' = u' * v + u * v'$
- (regra da divisão)Para todo x_0, tal que, $v(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' * v - u * v'}{v^2}$

Propriedade

Sejam u e v funções deriváveis em todo seu domínio, isto é, são conhecidas as funções u' e v'.

- (regra do produto) $(u * v)' = u' * v + u * v'$
- (regra da divisão)Para todo x_0, tal que, $v(x_0) \neq 0$, $(\frac{u}{v})' = \frac{u' * v - u * v'}{v^2}$

Exemplos

- Se $f(x) = (3x^3 + 1) * (-x + 1)$, então $f(x) = (9x^2) * (-x + 1) + (3x^3 + 1) * (-1) = -9x^3 + 9x^2 - 3x^3 - 1 = -12x^3 + 9x^2 - 1$
- Veja que se estamos interessando em calcular $f'(-1)$ podemos usar a expressão $f(x) = (9x^2)(-x + 1) + (3x^3 + 1)(-1)$ que resulta em $9 * 2 + (-2 * (-1)) = 20$
- Se $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3+2x-1}$, então f' é obtida observando que $f = \frac{u}{v}$, $u(x) = x^2 + x + 1$, $v(x) = x^3 + 2x - 1$, cujas derivadas são $u'(x) = 2x + 1$ e $v'(x) = 3x^2 + 2$, assim
$f'(x) = \frac{(2x+1)*(x^3+2x-1)-(x^2+x+1)*(3x^2+2)}{(x^3+2x-1)^2}$
$f'(x) = \frac{-x^4-2x^3-x^2-2x-3}{x^6+4x^4-2x^3+4x^2-4x+1}$

Exemplos

- Se $f(x) = (3x^3+1)*(-x+1)$, então $f(x) = (9x^2)*(-x+1)+(3x^3+1)*(-1) = -9x^3+9x^2-3x^3-1 = -12x^3+9x^2-1$
- Veja que se estamos interessando em calcular $f'(-1)$ podemos usar a expressão $f(x) = (9x^2)(-x+1)+(3x^3+1)(-1)$ que resulta em $9*2+(-2*(-1)) = 20$
- Se $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3+2x-1}$, então f' é obtida observando que $f = \frac{u}{v}$, $u(x) = x^2+x+1$, $v(x) = x^3+2x-1$, cujas derivadas são $u'(x) = 2x+1$ e $v'(x) = 3x^2+2$, assim $f'(x) = \frac{(2x+1)*(x^3+2x-1)-(x^2+x+1)*(3x^2+2)}{(x^3+2x-1)^2}$ $f'(x) = \frac{-x^4-2x^3-x^2-2x-3}{x^6+4x^4-2x^3+4x^2-4x+1}$

Exemplos

- Se $f(x) = (3x^3 + 1) * (-x + 1)$, então $f(x) = (9x^2) * (-x + 1) + (3x^3 + 1) * (-1) = -9x^3 + 9x^2 - 3x^3 - 1 = -12x^3 + 9x^2 - 1$
- Veja que se estamos interessando em calcular $f'(-1)$ podemos usar a expressão $f(x) = (9x^2)(-x + 1) + (3x^3 + 1)(-1)$ que resulta em $9 * 2 + (-2 * (-1)) = 20$
- Se $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3+2x-1}$, então f' é obtida observando que $f = \frac{u}{v}$, $u(x) = x^2 + x + 1$, $v(x) = x^3 + 2x - 1$, cujas derivadas são $u'(x) = 2x + 1$ e $v'(x) = 3x^2 + 2$, assim $f'(x) = \frac{(2x+1)*(x^3+2x-1)-(x^2+x+1)*(3x^2+2)}{(x^3+2x-1)^2}$ $f'(x) = \frac{-x^4-2x^3-x^2-2x-3}{x^6+4x^4-2x^3+4x^2-4x+1}$

No exemplo acima, podemos determinar os polinômios usando a propriedade distributiva do produto e obter:
$f'(x) = \frac{-x^4-2x^3-x^2-2x-3}{x^6+4x^4-2x^3+4x^2-4x+1}$. Mas nem sempre estamos interessados em simplificar as operações. Por exemplo, para a função $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3+2x-1}$ podemos querer saber se próximo a $x_0 = -2$, f é uma função crescente ou decrescente. Assim, estamos interessados em calcular $f'(-2)$ e isso pode ser feito na forma $f'(x) = \frac{(2x+1)*(x^3+2x-1)-(x^2+x+1)*(3x^2+2)}{(x^3+2x-1)^2}$, calculamos cada um dos fatores da expressão, por exemplo $2x+1$ será $2*(-2)+1 = -3$. Procedendo deste modo obtemos $f'(x) = \frac{-3*(-13)-(3*14)}{(-13)^2} = \frac{-3}{169}$, assim $f'(-2)$ é um número negativo e a função é decrescente próximo a $x = -2$.

Utilizando a regra do produto acima, podemos mostrar de outro modo o resultado que vimos de $(x^n)'$, quando n é um número natural. A seguir temos uma prova por indução deste fato.

Exemplo

Se $f(x) = x^n$, *podemos calcular* $f'(x) = n * x^{n-1}$ *por indução finita. De fato, se* $n = 1$, $f(x) = x$, *vimos que* $f'(x) = 1$*(lembrem derivada é o coeficiente angular da reta tangente), se* $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. *Supomos por hipótese que se* $f(x) = x^{k-1}$ $f'(x) = (k-1)x^{k-2}$. *Usando a hipótese de indução podemos calcular a derivada de* x^k, *isto é,* $(x^k)'$. *Para isso consideramos as funções* $u(x) = x$ *e* $v(x) = x^{k-1}$, *cujas derivadas são conhecidas:* $u'(x) = 1$ *e* $v'(x) = (k-1)x^{k-2}$ *(por hipótese de indução). Ora,* $f(x) = x^k = x * x^{k-1} = u(x) * v(x)$. *Podemos aplicar a regra do produto:* $f' = u' * v + u * v'$, *assim* $f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x) = 1 * x^{k-1} + x * (k-1)x^{k-2} = x^{k-1} * (1 + k - 1) = k * x^{k-1}$, *que é exatamente a expressão dada pela fórmula* $(x^n)' = n * x^{n-1}$ *com* $n = k$, *ou seja, a indução vale para o sucessor de* $k - 1$.

Suponha que desejamos saber se quando a derivada da função $f(x) = (x-1)^8(x-2)^6(x+3)$ se anula? Ou mesmo qual a derivada da função $u(x) = (x^2 - 3x + 2)^6$? A seguir, veremos que é possível calcular derivadas desta natureza, pelo fato de ser $u(x) = (x^2 - 3x + 2)^6$ a composição das funções $f(x) = x^6$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2)^6$, isto é, $f(g(x)) = (x^2 - 3x + 2)^6 = u(x)$

- Sejam f, g funções deriváveis. Se $f \circ g$ está definida, então

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' =$$

  é a derivada da função composta, denominada regra da cadeia.

- A regra da cadeia tem aplicações no cálculo de derivadas de funções que são expressas, de modo mais natural, pela composição de funções. Por exemplo, a função
- Se $u(x) = (x^2 - 3x + 2)^6$ e queremos $u'(x)$, incialmente identificamos as composições $f(x) = x^6$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$, cujas derivadas são $f'(x) = 6x^5$ e $g'(x) = 2x - 3$
- Vemos que $u(x)$ é a composição das funções, isto é, $f(g(x)) = (x^2 - 3x + 2)^6 = u(x)$
- Assim $u'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$, a composição $f'(g(x)) = 6(g(x))^5 = 6(x^2 - 3x + 2)^5$, portanto $u(x) = 6(x^2 - 3x + 2)^5(2x - 3)$

- Sejam f, g funções deriváveis. Se $f \circ g$ está definida, então
$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' =$$
é a derivada da função composta, denominada regra da cadeia.
- A regra da cadeia tem aplicações no cálculo de derivadas de funções que são expressas, de modo mais natural, pela composição de funções. Por exemplo, a função
- Se $u(x) = (x^2 - 3x + 2)^6$ e queremos $u'(x)$, incialmente identificamos as composições $f(x) = x^6$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$, cujas derivadas são $f'(x) = 6x^5$ e $g'(x) = 2x - 3$
- Vemos que $u(x)$ é a composição das funções, isto é, $f(g(x)) = (x^2 - 3x + 2)^6 = u(x)$
- Assim $u'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$, a composição $f'(g(x)) = 6(g(x))^5 = 6(x^2 - 3x + 2)^5$, portanto $u(x) = 6(x^2 - 3x + 2)^5(2x - 3)$

- Sejam f, g funções deriváveis. Se $f \circ g$ está definida, então
$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' =$$
é a derivada da função composta, denominada regra da cadeia.
- A regra da cadeia tem aplicações no cálculo de derivadas de funções que são expressas, de modo mais natural, pela composição de funções. Por exemplo, a função
- Se $u(x) = (x^2 - 3x + 2)^6$ e queremos $u'(x)$, incialmente identificamos as composições $f(x) = x^6$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$, cujas derivadas são $f'(x) = 6x^5$ e $g'(x) = 2x - 3$
- Vemos que $u(x)$ é a composição das funções, isto é, $f(g(x)) = (x^2 - 3x + 2)^6 = u(x)$
- Assim $u'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$, a composição $f'(g(x)) = 6(g(x))^5 = 6(x^2 - 3x + 2)^5$, portanto $u(x) = 6(x^2 - 3x + 2)^5(2x - 3)$

- Sejam f, g funções deriváveis. Se $f \circ g$ está definida, então
$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' =$$
é a derivada da função composta, denominada regra da cadeia.
- A regra da cadeia tem aplicações no cálculo de derivadas de funções que são expressas, de modo mais natural, pela composição de funções. Por exemplo, a função
- Se $u(x) = (x^2 - 3x + 2)^6$ e queremos $u'(x)$, incialmente identificamos as composições $f(x) = x^6$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$, cujas derivadas são $f'(x) = 6x^5$ e $g'(x) = 2x - 3$
- Vemos que $u(x)$ é a composição das funções, isto é, $f(g(x)) = (x^2 - 3x + 2)^6 = u(x)$
- Assim $u'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$, a composição $f'(g(x)) = 6(g(x))^5 = 6(x^2 - 3x + 2)^5$, portanto $u(x) = 6(x^2 - 3x + 2)^5(2x - 3)$

- Sejam f, g funções deriváveis. Se $f \circ g$ está definida, então
$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' =$$
é a derivada da função composta, denominada regra da cadeia.
- A regra da cadeia tem aplicações no cálculo de derivadas de funções que são expressas, de modo mais natural, pela composição de funções. Por exemplo, a função
- Se $u(x) = (x^2 - 3x + 2)^6$ e queremos $u'(x)$, incialmente identificamos as composições $f(x) = x^6$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$, cujas derivadas são $f'(x) = 6x^5$ e $g'(x) = 2x - 3$
- Vemos que $u(x)$ é a composição das funções, isto é, $f(g(x)) = (x^2 - 3x + 2)^6 = u(x)$
- Assim $u'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$, a composição $f'(g(x)) = 6(g(x))^5 = 6(x^2 - 3x + 2)^5$, portanto $u(x) = 6(x^2 - 3x + 2)^5(2x - 3)$

- Podemos calcular os valores de x para os quais a derivada de $f(x) = (x-1)^8(x-2)^6(x+3)$ se anula.
- Inicialmente calculamos $((x-1)^8(x-2)^6(x+3))'$ que é o produto das funções $u(x) = (x-1)^8$ e $v(x) = (x-2)^6(x+3)$.
- Pelo que vimos acima, pela regra da cadeia: $((x-1)^8)' = 8(x-1)^7$ e $((x-2)^6)' = 6(x-2)^5$.
- Pela regra do produto $f' = u'v + uv'$, falta apenas calcular $v'(x) = 6(x-2)^5(x+3) + (x-2)^6$, podemos simplificar $v'(x) = (x-2)^5(6(x+3)+x-2) = (x-2)^5(7x+16)$
- Daí, $f'(x) = 8(x-1)^7 * (x-2)^6(x+3) + (x-1)^8(x-2)^5(7x+16)$. E podemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Mas para o momento, apenas calculamos f'.

- Podemos calcular os valores de x para os quais a derivada de $f(x) = (x-1)^8(x-2)^6(x+3)$ se anula.
- Inicialmente calculamos $((x-1)^8(x-2)^6(x+3))'$ que é o produto das funções $u(x) = (x-1)^8$ e $v(x) = (x-2)^6(x+3)$.
- Pelo que vimos acima, pela regra da cadeia: $((x-1)^8)' = 8(x-1)^7$ e $((x-2)^6)' = 6(x-2)^5$.
- Pela regra do produto $f' = u'v + uv'$, falta apenas calcular $v'(x) = 6(x-2)^5(x+3) + (x-2)^6$, podemos simplificar $v'(x) = (x-2)^5(6(x+3)+x-2) = (x-2)^5(7x+16)$
- Daí, $f'(x) = 8(x-1)^7 * (x-2)^6(x+3) + (x-1)^8(x-2)^5(7x+16)$. E podemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Mas para o momento, apenas calculamos f'.

- Podemos calcular os valores de x para os quais a derivada de $f(x) = (x-1)^8(x-2)^6(x+3)$ se anula.
- Inicialmente calculamos $((x-1)^8(x-2)^6(x+3))'$ que é o produto das funções $u(x) = (x-1)^8$ e $v(x) = (x-2)^6(x+3)$.
- Pelo que vimos acima, pela regra da cadeia: $((x-1)^8)' = 8(x-1)^7$ e $((x-2)^6)' = 6(x-2)^5$.
- Pela regra do produto $f' = u'v + uv'$, falta apenas calcular $v'(x) = 6(x-2)^5(x+3) + (x-2)^6$, podemos simplificar $v'(x) = (x-2)^5(6(x+3) + x - 2) = (x-2)^5(7x+16)$
- Daí, $f'(x) = 8(x-1)^7 * (x-2)^6(x+3) + (x-1)^8(x-2)^5(7x+16)$. E podemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Mas para o momento, apenas calculamos f'.

- Podemos calcular os valores de x para os quais a derivada de $f(x) = (x-1)^8(x-2)^6(x+3)$ se anula.
- Inicialmente calculamos $((x-1)^8(x-2)^6(x+3))'$ que é o produto das funções $u(x) = (x-1)^8$ e $v(x) = (x-2)^6(x+3)$.
- Pelo que vimos acima, pela regra da cadeia: $((x-1)^8)' = 8(x-1)^7$ e $((x-2)^6)' = 6(x-2)^5$.
- Pela regra do produto $f' = u'v + uv'$, falta apenas calcular $v'(x) = 6(x-2)^5(x+3) + (x-2)^6$, podemos simplificar $v'(x) = (x-2)^5(6(x+3) + x - 2) = (x-2)^5(7x+16)$
- Daí, $f'(x) = 8(x-1)^7 * (x-2)^6(x+3) + (x-1)^8(x-2)^5(7x+16)$. E podemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Mas para o momento, apenas calculamos f'.

- Podemos calcular os valores de x para os quais a derivada de $f(x) = (x-1)^8(x-2)^6(x+3)$ se anula.
- Inicialmente calculamos $((x-1)^8(x-2)^6(x+3))'$ que é o produto das funções $u(x) = (x-1)^8$ e $v(x) = (x-2)^6(x+3)$.
- Pelo que vimos acima, pela regra da cadeia: $((x-1)^8)' = 8(x-1)^7$ e $((x-2)^6)' = 6(x-2)^5$.
- Pela regra do produto $f' = u'v + uv'$, falta apenas calcular $v'(x) = 6(x-2)^5(x+3) + (x-2)^6$, podemos simplificar $v'(x) = (x-2)^5(6(x+3) + x - 2) = (x-2)^5(7x+16)$
- Daí, $f'(x) = 8(x-1)^7 * (x-2)^6(x+3) + (x-1)^8(x-2)^5(7x+16)$. E podemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Mas para o momento, apenas calculamos f'.

A função $u(x) = \sqrt{x^2+1}$ é a composição da função $f(x) = \sqrt{x}$ com a função $g(x) = x^2 + 1$. Desse modo, $u(x) = f(g(x))$ e $(\sqrt{x^2+1})' = u'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$, de modo que calculamos $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = 2x$, e as composições determinam $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} * 2x$ que simplificando resulta $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Aplicação da Regra da Cadeia

- Uma das aplicações da regra da cadeia é o cálculo da derivada de funções inversas $(f^{-1})'$, a partir da função f e sua derivada f'.
- Tal aplicação também está relacionada com o conceito de função implícita, que veremos mais à frente.
- Seja f uma função invertível cuja inversa é f^{-1}. Então $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.
- Por um lado, deve ser evidente que $(f(f^{-1}(x)))' = (x)' = 1$, pois $(x)' = 1$ (o coeficiente angular da reta tangente).

Aplicação da Regra da Cadeia

- Uma das aplicações da regra da cadeia é o cálculo da derivada de funções inversas $(f^{-1})'$, a partir da função f e sua derivada f'.
- Tal aplicação também está relacionada com o conceito de função implícita, que veremos mais à frente.
- Seja f uma função invertível cuja inversa é f^{-1}. Então $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.
- Por um lado, deve ser evidente que $(f(f^{-1}(x)))' = (x)' = 1$, pois $(x)' = 1$ (o coeficiente angular da reta tangente).

Aplicação da Regra da Cadeia

- Uma das aplicações da regra da cadeia é o cálculo da derivada de funções inversas $(f^{-1})'$, a partir da função f e sua derivada f'.
- Tal aplicação também está relacionada com o conceito de função implícita, que veremos mais à frente.
- Seja f uma função invertível cuja inversa é f^{-1}. Então $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.
- Por um lado, deve ser evidente que $(f(f^{-1}(x)))' = (x)' = 1$, pois $(x)' = 1$ (o coeficiente angular da reta tangente).

Aplicação da Regra da Cadeia

- Uma das aplicações da regra da cadeia é o cálculo da derivada de funções inversas $(f^{-1})'$, a partir da função f e sua derivada f'.
- Tal aplicação também está relacionada com o conceito de função implícita, que veremos mais à frente.
- Seja f uma função invertível cuja inversa é f^{-1}. Então $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.
- Por um lado, deve ser evidente que $(f(f^{-1}(x)))' = (x)' = 1$, pois $(x)' = 1$ (o coeficiente angular da reta tangente).

Aplicação da Regra da Cadeia

Vimos que a derivada da função $x^{\frac{p}{q}}, q \neq 0$ e $p, q \in \mathbb{Z}$ pode ser calculada diretamente pela definição. A seguir, mostramos como calcular esta derivada pela regra da cadeia.

- Por outro lado, $(f(f^{-1}(x)))'$ é a derivada de uma função composta, onde $u = f$ e $v = f^{-1}$. Aplicando a regra da cadeia $(f(f^{-1}(x)))' = (u(v(x)))' = u'(v(x)) * v'(x) = f'(f^{-1}(x)) * (f^{-1}(x))'$, mas esta derivada é 1, então $f'(f^{-1}(x)) * (f^{-1}(x))' = 1$, logo, obtemos:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- Ou seja, $(f^{-1}(x_0))'$ a imagem da derivada da função inversa em x_0 é o inverso da imagem da derivada da função f em $f^{-1}(x_0)$.

- Por outro lado, $(f(f^{-1}(x)))'$ é a derivada de uma função composta, onde $u = f$ e $v = f^{-1}$. Aplicando a regra da cadeia $(f(f^{-1}(x)))' = (u(v(x)))' = u'(v(x)) * v'(x) = f'(f^{-1}(x)) * (f^{-1}(x))'$, mas esta derivada é 1, então $f'(f^{-1}(x)) * (f^{-1}(x))' = 1$, logo, obtemos:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- Ou seja, $(f^{-1}(x_0))'$ a imagem da derivada da função inversa em x_0 é o inverso da imagem da derivada da função f em $f^{-1}(x_0)$.

Exemplo

Sabemos que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ *é a inversa da função* $f(x) = x^2$*.*
Podemos calcular $(\sqrt{x})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
Ora $f'(x) = 2x$*, assim* $f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt{x}) = 2 * \sqrt{x}$*. Invertendo, obtemos*

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 * \sqrt{x}}.$$

Exercício

Calcule a derivada da função $\sqrt[3]{x}$, sabendo-se que sua inversa é a função x^3.

- Vamos calcular $(x^n)'$, quando $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- Escrevendo $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, podemos calcular esta derivada em dois passos.
- Primeiro, calculamos a derivada da função $x^{\frac{1}{q}}$, isto é, a função $\sqrt[q]{x}$, acima nos fizemos este cálculos para $q = 3$.
- Em seguida, utilizamos a regra da cadeia para a função $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, sendo $u(x) = \sqrt[q]{x}$ e $v(x) = x^p$, cuja derivada $v'(x) = p * x^{p-1}$ e a derivada de u calculamos a seguir.

- Vamos calcular $(x^n)'$, quando $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- Escrevendo $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, podemos calcular esta derivada em dois passos.
- Primeiro, calculamos a derivada da função $x^{\frac{1}{q}}$, isto é, a função $\sqrt[q]{x}$, acima nos fizemos este cálculos para $q = 3$.
- Em seguida, utilizamos a regra da cadeia para a função $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, sendo $u(x) = \sqrt[q]{x}$ e $v(x) = x^p$, cuja derivada $v'(x) = p * x^{p-1}$ e a derivada de u calculamos a seguir.

- Vamos calcular $(x^n)'$, quando $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- Escrevendo $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, podemos calcular esta derivada em dois passos.
- Primeiro, calculamos a derivada da função $x^{\frac{1}{q}}$, isto é, a função $\sqrt[q]{x}$, acima nos fizemos este cálculos para $q = 3$.
- Em seguida, utilizamos a regra da cadeia para a função $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, sendo $u(x) = \sqrt[q]{x}$ e $v(x) = x^p$, cuja derivada $v'(x) = p * x^{p-1}$ e a derivada de u calculamos a seguir.

- Vamos calcular $(x^n)'$, quando $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- Escrevendo $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, podemos calcular esta derivada em dois passos.
- Primeiro, calculamos a derivada da função $x^{\frac{1}{q}}$, isto é, a função $\sqrt[q]{x}$, acima nos fizemos este cálculos para $q = 3$.
- Em seguida, utilizamos a regra da cadeia para a função $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, sendo $u(x) = \sqrt[q]{x}$ e $v(x) = x^p$, cuja derivada $v'(x) = p * x^{p-1}$ e a derivada de u calculamos a seguir.

Cálculo de $(\sqrt[q]{x})'$

- A função $\sqrt[q]{x}$ é a inversa da função x^q.
- Assim $f(x) = x^q$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$. Claramente $f'(x) = q * x^{q-1}$.
- Calculamos $f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[q]{x}) = q * (\sqrt[q]{x})^{q-1} = q * \sqrt[q]{x^{q-1}}$
- Assim $(\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$
- Observe que $\frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}} = \frac{1}{q} * x^{\frac{1}{q}-1}$, ou seja $(x^n)' = n * x^{n-1}$, é válida quando $n = \frac{1}{q}$

Cálculo de $(\sqrt[q]{x})'$

- A função $\sqrt[q]{x}$ é a inversa da função x^q.
- Assim $f(x) = x^q$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$. Claramente $f'(x) = q * x^{q-1}$.
- Calculamos $f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[q]{x}) = q * (\sqrt[q]{x})^{q-1} = q * \sqrt[q]{x^{q-1}}$
- Assim $(\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$
- Observe que $\frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}} = \frac{1}{q} * x^{\frac{1}{q}-1}$, ou seja $(x^n)' = n * x^{n-1}$, é válida quando $n = \frac{1}{q}$

Cálculo de $(\sqrt[q]{x})'$

- A função $\sqrt[q]{x}$ é a inversa da função x^q.
- Assim $f(x) = x^q$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$. Claramente $f'(x) = q * x^{q-1}$.
- Calculamos $f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[q]{x}) = q * (\sqrt[q]{x})^{q-1} = q * \sqrt[q]{x^{q-1}}$
- Assim $(\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{q* \sqrt[q]{x^{q-1}}}$
- Observe que $\frac{1}{q* \sqrt[q]{x^{q-1}}} = \frac{1}{q} * x^{\frac{1}{q}-1}$, ou seja $(x^n)' = n * x^{n-1}$, é válida quando $n = \frac{1}{q}$

Cálculo de $(\sqrt[q]{x})'$

- A função $\sqrt[q]{x}$ é a inversa da função x^q.
- Assim $f(x) = x^q$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$. Claramente $f'(x) = q * x^{q-1}$.
- Calculamos $f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[q]{x}) = q * (\sqrt[q]{x})^{q-1} = q * \sqrt[q]{x^{q-1}}$
- Assim $(\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$
- Observe que $\frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}} = \frac{1}{q} * x^{\frac{1}{q}-1}$, ou seja $(x^n)' = n * x^{n-1}$, é válida quando $n = \frac{1}{q}$

Cálculo de $(\sqrt[q]{x})'$

- A função $\sqrt[q]{x}$ é a inversa da função x^q.
- Assim $f(x) = x^q$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$. Claramente $f'(x) = q * x^{q-1}$.
- Calculamos $f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[q]{x}) = q * (\sqrt[q]{x})^{q-1} = q * \sqrt[q]{x^{q-1}}$
- Assim $(\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$
- Observe que $\frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}} = \frac{1}{q} * x^{\frac{1}{q}-1}$, ou seja $(x^n)' = n * x^{n-1}$, é válida quando $n = \frac{1}{q}$

- Podemos agora calcular $(x^{\frac{p}{q}})'$, a partir de $u(v(x))$, com $u(x) = x^p$, $v(x) = \sqrt[q]{x}$, $u'(x) = p * x^{p-1}$ e $v'(x) = \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$
- $(x^{\frac{p}{q}})' = (u(v(x))' = u'(v(x))v'(x)$, falta apenas calcular $u'(v(x)) = u'(\sqrt[q]{x}) = p(\sqrt[q]{x})^{p-1} = p\sqrt[q]{x^{p-1}}$.
- Como vimos, a derivada será $p\sqrt[q]{x^{p-1}} * \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$ o quociente entre $p\sqrt[q]{x^{p-1}}$ e $q\sqrt[q]{x^{q-1}}$, que resulta em $\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$.

- Podemos agora calcular $(x^{\frac{p}{q}})'$, a partir de $u(v(x))$, com $u(x) = x^p$, $v(x) = \sqrt[q]{x}$, $u'(x) = p * x^{p-1}$ e $v'(x) = \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$
- $(x^{\frac{p}{q}})' = (u(v(x))' = u'(v(x))v'(x)$, falta apenas calcular $u'(v(x)) = u'(\sqrt[q]{x}) = p(\sqrt[q]{x})^{p-1} = p\sqrt[q]{x^{p-1}}$.
- Como vimos, a derivada será $p\sqrt[q]{x^{p-1}} * \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$ o quociente entre $p\sqrt[q]{x^{p-1}}$ e $q\sqrt[q]{x^{q-1}}$, que resulta em $\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$.

- Podemos agora calcular $(x^{\frac{p}{q}})'$, a partir de $u(v(x))$, com $u(x) = x^p$, $v(x) = \sqrt[q]{x}$, $u'(x) = p * x^{p-1}$ e $v'(x) = \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$
- $(x^{\frac{p}{q}})' = (u(v(x))' = u'(v(x))v'(x)$, falta apenas calcular $u'(v(x)) = u'(\sqrt[q]{x}) = p(\sqrt[q]{x})^{p-1} = p\sqrt[q]{x^{p-1}}$.
- Como vimos, a derivada será $p\sqrt[q]{x^{p-1}} * \frac{1}{q * \sqrt[q]{x^{q-1}}}$ o quociente entre $p\sqrt[q]{x^{p-1}}$ e $q\sqrt[q]{x^{q-1}}$, que resulta em $\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$.

subject

Assunto para a próxima aula