PROJETO
Newton

CÁLCULO I

Prof. Edilson Neri Júnior | Prof. André Almeida

Aula nº 08: Regra da Cadeia. Derivação Implícita. Derivada da Função Inversa.

Objetivos da Aula

- Conhecer e aplicar a regra da cadeia;
- Utilizar a notação de Leibniz para escrever a regra da cadeia.
- Apresentar a técnica de derivação implícita;
- Determinar a derivada da função inversa;

1 Regra da Cadeia

Considere a função $F(x) = (x^2 + 3x)^2$. Sabemos que $F(x)$ é a composta das funções $y = x^2 + 3x$ e $g(y) = y^2$ e que $F(x) = (g \circ f)(x)$. Pelo o que foi ministrado em aulas anteriores, sabemos derivar separadamente $f(x)$ e $g(y)$, contudo, ainda não sabemos derivar uma função composta. A regra de derivação para uma função composta é a chamada **regra da cadeia**, enunciada abaixo:

Teorema 1 (Regra da Cadeia). *Sejam $g(y)$ e $y = f(x)$ duas funções deriváveis, com $Im_g \subset D_f$. Então a função composta $g(f(x))$ é derivável e vale a regra:*

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)).f'(x) \tag{1}$$

Em notação de Leibniz, temos:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Vejamos alguns exemplos de utilização e aplicação da regra da cadeia.

Exemplo 1. *Calcule a derivada de $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.*

Vamos resolver esse exemplo de duas formas.

Solução(1): Determinamos as funções $y = f(x)$ e $g(y)$ tais que $F = (g \circ f)(x)$. E observando a função F, observamos que $f(x) = x^2 + 1$ e $g(y) = \sqrt{y}$. Logo, utilizando a fórmula (1), obtemos que

$$F'(x) = g'(f(x)).f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

■

Solução(2): Uma outra forma de resolver esse exemplo é chamando $y = x^2 + 1$ e assim, obtemos que $F(y) = \sqrt{y}$. Assim, pela fórmula (2), obtemos que

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.2x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

■

Portanto, podemos utilizar qualquer uma das fórmulas no teorema 1 para calcular a derivada de uma função composta. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 2. *Derive* $y = sen\, x^2$ *e* $z = sen^2 x$.

Solução: Escrevendo $t = x^2$ e $y = \operatorname{sen} t$. Logo, por (1), obtemos que

$$y' = y'(t(x)).t'(x) = \cos(t(x)).2x = 2x\cos(x^2)$$

Agora, escrevendo $y = \operatorname{sen} x$, obtemos que $z = y^2$. Logo, utilizando (2) obtemos que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 2y.\cos x = 2\operatorname{sen} x\cos x = \operatorname{sen} 2x$$

■

Exemplo 3. *Derive* $y = (x^3 - 1)^{100}$.

Solução: Escrevendo $u = x^3 - 1$, obtemos que $y = u^{100}$. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 100u^{99}.3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

■

Exemplo 4. *Calcule* $f'(x)$, *sendo que* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

Solução: Fazendo $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{u}}$ e $u(x) = x^2 + x + 1$, temos que

$$f'(x) = f'(u(x)).u'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{u^4}}(2x + 1) = -\frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^4}}$$

■

Exemplo 5. *Encontre a derivada da função* $g(t) = \left(\dfrac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$.

Solução: Fazendo $y = \dfrac{t - 2}{2t + 1}$, obtemos que $g(y) = y^9$. Logo, pela regra da cadeia, obtemos que

$$\frac{dg}{dt} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dt} = 9y^8\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

Calculando $\dfrac{dy}{dt}$, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{t - 2}{2t + 1}\right] = \frac{(t - 2)'(2t + 1) - (t - 2)(2t + 1)'}{(2t + 1)^2} = \frac{\cancel{2t} + 1 - \cancel{2t} + 4}{(2t + 1)^2} = \frac{5}{(2t + 1)^2}$$

Logo, (3) torna-se

$$\frac{dg}{dt} = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8\frac{5}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

■

Exemplo 6. *Se* $h(x) = sen\,(\cos(tg\, x))$, *determine* $f'(x)$.

Solução (1): Fazendo $y = f(x) = \cos(\operatorname{tg} x)$ e $g(y) = \operatorname{sen} y$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = g'(f(x)).f'(x) = \cos(f(x)).(\cos(\operatorname{tg} x))' = \cos(\cos(\operatorname{tg} x)).(\cos(\operatorname{tg} x))'$$

Considerando agora que $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ e $g(y) = \cos\, y$, aplicamos a regra da cadeia novamente e obtemos que

$$[\cos(\operatorname{tg} x)]' = -\operatorname{sen}(f(x)).\sec^2 x = -\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x).\sec^2 x$$

logo,

$$h'(x) = -\cos(\cos(\operatorname{tg} x)).\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x).\sec^2 x$$

■

Solução (2): Escrevendo $y = \cos(\operatorname{tg} x)$ então $h(y) = \operatorname{sen} y$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{4}$$

Como $y = \cos(\operatorname{tg} x)$ é uma função composta, então podemos escrever $u = \operatorname{tg} x$, temos que $y = \cos u$. Logo, pela regra da cadeia, obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), obtemos que

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos(y).(-\operatorname{sen} u).\sec^2 x = -\cos(\cos(\operatorname{tg} x)).\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x).\sec^2 x$$

Exemplo 7. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável e seja* $g(x) = f(\cos x)$. *Calcule* $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *supondo* $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

Solução: Utilizando a regra da cadeia, obtemos que

$$g'(x) = f'(\cos x).(\cos x)' = -f'(\cos x)\operatorname{sen} x$$

logo,

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -f'\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -f'\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

■

Exemplo 8. *Calcule* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *sabendo que* $y = \cos 5x$.

Solução: Chamando $u = 5x$, segue da regra da cadeia que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} u.5 = -5\operatorname{sen}(5x)$$

Derivando novamente, temos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-5\operatorname{sen} 5x) = -5\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 5x)$$

Chamando novamente $u = 5x$, temos que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 5x) = 5\cos(5x)$$

logo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -25\cos(5x)$$

■

Exemplo 9. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável até* 2^a *ordem e seja* g *dada por* $g(x) = f(x^2)$. *Calcule* $g''(2)$, *supondo que* $f'(4) = 2$ *e* $f''(4) = 3$.

Solução: Segue da regra da cadeia que

$$g'(x) = f'(x^2).2x = 2x.f'(x^2)$$

e que

$$g''(x) = (g'(x))' = (2x.f'(x^2))' = 2f'(x^2) + 2x.(f'(x^2))' = 2f'(x^2) + 2x.(f''(x^2).2x) = 2f'(x^2) + 4x^2.f''(x^2)$$

Sendo assim,

$$g''(2) = 2f'(2^2) + 4.2^2.f''(2^2) = 2.f'(4) + 16f''(4) = 2.2 + 16.3 = 52$$

■

Exemplo 10. *A função diferenciável $y = f(x)$ é tal que, para todo $x \in D_f$,*

$$xf(x) + sen(f(x)) = 4 \tag{6}$$

Mostre que

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{x + \cos(f(x))}$$

Solução: Derivando a equação (6) em relação a x, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[xf(x) + \operatorname{sen}(f(x))\right] &= \frac{d}{dx}[4] \\
\frac{d}{dx}\left[xf(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen} f(x)\right] &= 0 \\
f(x) + xf'(x) + \cos\, f(x).f'(x) &= 0 \\
f'(x)\left[x + \cos\, f(x)\right] &= -f(x) \\
f'(x) &= \frac{-f(x)}{x + \cos\, f(x)}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 11. *Seja $y = x^3$, em que $x = x(t)$ é uma função derivável até 2^a ordem. Verifique que*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\frac{d^2x}{dt^2}$$

Solução: Derivando em relação a t e utilizando a regra da cadeia, obtemos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

Derivando mais uma vez em relação t, obtemos que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[3x^2\frac{dx}{dt}\right]$$

Utilizando a regra do produto, temos que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[3x^2\right]\frac{dx}{dt} + 3x^2\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[3x^2\right]\frac{dx}{dt} + 3x^2\frac{d^2x}{dt^2}$$

Pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[3x^2\right] = 6x\frac{dx}{dt}$$

Assim,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\frac{d^2x}{dt^2}$$

■

2 Derivação Implícita

As funções apresentadas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitaente em termos de outras. Por exemplo:

$$y = x^2 - 3x + 1 \qquad \text{ou} \qquad y = \operatorname{sen}(x)$$

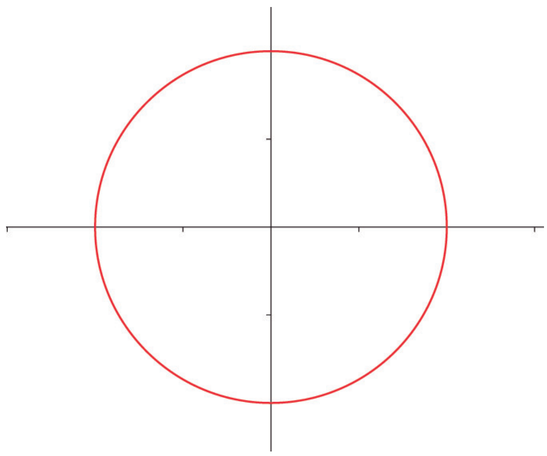
ou, em geral, $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tais como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^3 + y^3 = 6xy.$$

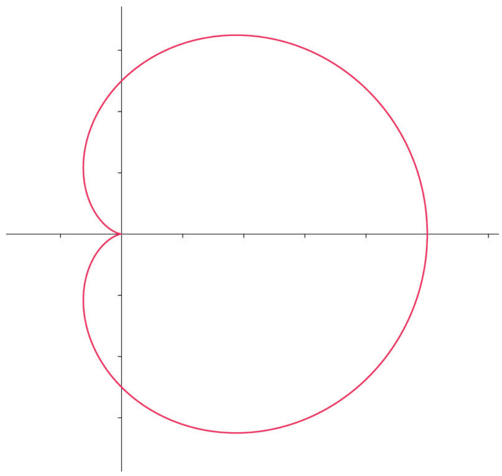
Observe que o gráfico da equação $x^2+y^2 = 1$ é uma curva chamada circunferência de raio 1 com centro na origem. Se você separar y da equação, é possível escrever explicitamente em relação a x, porém temos duas funções, uma positiva e outra negativa:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{ou} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

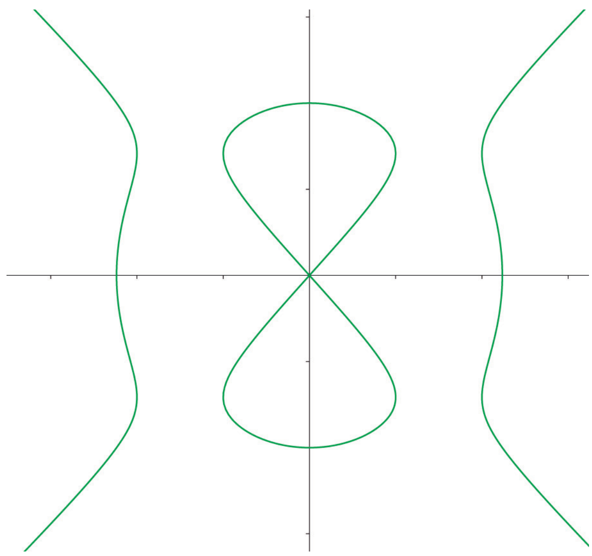
Apresentaremos a seguir, algumas curvas definidas implicitamente.



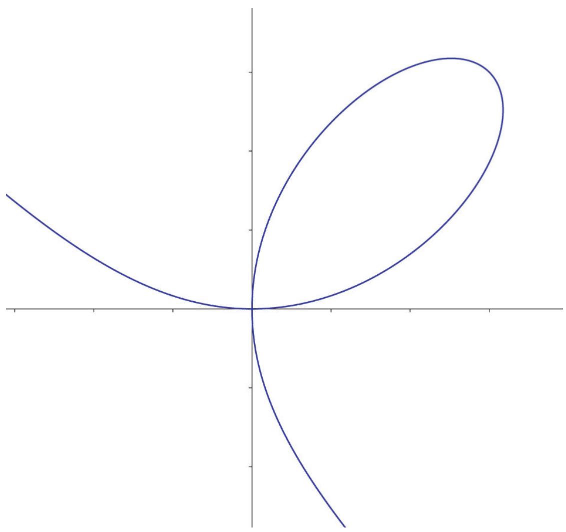
(a) Círculo:$x^2 + y^2 = 1$



(b) Cardióide: $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$



(c) Curva do Diabo: $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$



(d) Fólio de Descartes: $x^3 + y^3 = 6xy$

Definição 1. *Dizemos que uma função $y = f(x)$ é dada implicitamente pela equação $Q(x, y) = 0$, se para todo x no domínio de f, o ponto $(x, f(x))$ for solução da equação, isto é, $Q(x, y) = 0$.*

Exemplo 12. *A função* $f(x) = \dfrac{sen^2(x)}{3x-1}$ *é dada implicitamente pela equação* $sen^2(x) + y = 3xy$, *uma vez que para todo* $x \neq \dfrac{1}{3}$, *o par* $\left(x, \dfrac{sen^2(x)}{3x-1}\right)$ *é solução desta equação.*

■

2.1 Derivação Implícita

Suponha $y = f(x)$ uma função diferenciável e dada implicitamente pela equação:

$$Q(x, y) = 0.$$

Usando a regra da cadeia podemos derivar $Q(x, y) = 0$, isto é, derivamos os dois lados desta equação em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[Q(x, y)] = 0,$$

considerando x como variável independente e lembrando que y é função de x. Desta forma, é possível obeter a derivada das funções implícitas, mesmo não conhecendo explicitamente a função $f(x)$. Basta achar a derivada usando as propriedades e a regra da cadeia para y. Este processo é chamado de **derivação implícita**.

Exemplo 13. *Seja* $y = f(x)$ *uma função dada implicitamente pela equação* $-3x^2 + 6y + 2x = 6$. *Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando a equação dada em relação a x, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(-3x^2 + 6y + 2x) &= \frac{d}{dx}(6) \\
-6x + 6\frac{dy}{dx} + 2 &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= x - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 14. *Se* $g(x) + xsen(g(x)) = x^2$, *encontre* $g'(0)$.

Solução: Derivando a equação em relação a x, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[g(x) + x\mathrm{sen}(g(x))] &= \frac{d}{dx}[x^2] \\
g'(x) + \mathrm{sen}(g(x)) + x\cos(g(x)).g'(x) &= 2x \\
g'(x) &= \frac{2x - \mathrm{sen}(g(x))}{1 + x\cos(g(x))} \\
g'(0) &= -\mathrm{sen}(g(0)).
\end{aligned}$$

Como $g(x)$ satisfaz a equação dada, então fazendo $x = 0$ nesta equação:

$$g(0) + 0.\mathrm{sen}(g(0)) = 0 \;\Rightarrow\; g(0) = 0.$$

Substituindo este valor em $g'(0)$, obtemos:

$$g'(0) = -\mathrm{sen}(0) = 0.$$

■

Exemplo 15. *Encontre a da equação da reta tangente a curva* $x^2 + y^2 = 9$, *no ponto* $(2, \sqrt{5})$.

Solução: Derivando em relação x, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(9) \;\Rightarrow\; 2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}-\frac{x}{y},\; y\neq 0.$$

Para escrever a equação da reta, precisamos calcular m:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{y}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Assim:

$$y-\sqrt{5}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}(x-2) \;\Rightarrow\; 5y+2\sqrt{5}x=9\sqrt{5}.$$

■

Exemplo 16. *Use derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva* $sen(x+y)=2x-2y$*, no ponto de abscissa* (π,π).

Solução:

Considere $y=f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $\operatorname{sen}(x+y)=2x-2y$. Como já temos o ponto de tangência, resta determinar o coeficiente angular da reta, dado por $f'(\pi)$. Derivando implicitamente a equação dada e usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x+y)) &= \frac{d}{dx}(2x-2y)\\ \cos(x+y).\left(1+\frac{dy}{dx}\right) &= 2-2\frac{dy}{dx}\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2-\cos(x+y)}{2+\cos(x+y)}\end{aligned}$$

Aplicando no ponto (π,π), temos:

$$f'(\pi)=\frac{2-\cos(2\pi)}{2+\cos(2\pi)}=\frac{1}{3}.$$

Portanto, a equação da reta tangente é dada por

$$y-\pi=\frac{1}{3}(x-\pi) \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{3}x+\frac{2\pi}{3}.$$

■

Exemplo 17. *Encontre a equação das retas tangente e normal à Curva do Diabo, dada implicitamente por* $y^2(y^2-4)=x^2(x^2-5)$*, no ponto* $(0,-2)$.

Solução: Derivando implicitamente a equação dada, temos:

$$4y^3\frac{dy}{dx}-8y\frac{dy}{dx}=4x^3-10x \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-10x}{4y^3-8y} \;\Rightarrow\; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,-2)}=0.$$

Portanto, a reta tangente é a reta horizontal $y=-2$ e a reta normal é a reta vertical $x=0$.

■

Exemplo 18. *Se* $x^3+y^3=1$*, encontre* y'' *por derivação implícita.*

Solução: Derivando implicitamente, temos:

$$\frac{d}{dy}(x^3+y^3)=\frac{d}{dy}(1) \;\Rightarrow\; 3x^3+3y^2.y'=0.$$

Derivando implicitamente novamente, temos

$$\frac{d}{dy}(3x^3+3y^2.y')=0 \;\Rightarrow\; 6x+6y.y'+3y^2.y''=0 \;\Rightarrow\; y''=\frac{-2(x+y.y')}{y^2}.$$

■

3 Derivada da função inversa

Suponha f uma função inversível e derivável em um ponto x, com $f'(x) \neq 0$. Já vimos que:

$$y = f(x) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = [f(x)]'$$

e

$$x = f^{-1}(x) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy} = [f^{-1}(y)]'.$$

Da definição de função inversa, segue que para todo $x \in D_f$, temos:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Derivando esta última identidade em relação a x e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$[f^{-1}(f(x))]'.f'(x) = 1$$

Substituindo $f(x)$ por y na inversa, temos:

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{[f(x)]'}.$$

Ou ainda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Com isto, temos a seguinte proposição:

Proposição 1. *Seja f uma função inversível com inversa f^{-1}. Se f é derivável em um ponto x e $f'(x) \neq 0$, então sua inversa é também derivável em $y = f(x)$. Além disso:*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Exemplo 19 (Derivada da função arco-cosseno). *Calcule $f'(x)$ para $f(x) = \arccos(x)$.*

Solução: Da definição de inversa, temos que:

$$y = \arccos(x) \;\Rightarrow\; x = \cos(y),$$

com $y \in [0, \pi]$. Usando a derivada da inversa, segue que:

$$[\arccos(x)]' = \frac{1}{[\cos(y)]'} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(y)}.$$

Como $x = \cos(y)$ e $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, então $\operatorname{sen}(y) = \sqrt{1 - cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Substituindo este valor na equação anterior, temos:

$$[\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

■

Exemplo 20 (Derivada da função arco-seno). *Calcule $f'(x)$ para $f(x) = arcsen(x)$.*

Solução: Da definição de inversa, temos que:

$$y = \text{arcsen}(x) \;\Rightarrow\; x = \text{sen}(y),$$

com $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Usando a derivada da inversa, segue que:

$$[\text{arcsen}(x)]' = \frac{1}{[\text{sen}(y)]'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Portanto,

$$[\text{arcsen}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$$

■

Exemplo 21 (Derivada da função arco-tangente). *Calcule $f'(x)$ para $f(x) = arctg(x)$.*

Solução: Da definição de inversa, temos que:

$$y = \text{arctg}(x) \;\Rightarrow\; x = \text{tg}(y),$$

com $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Usando a derivada da inversa e a identidade $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$, segue que:

$$[\text{arctg}(x)]' = \frac{1}{[\text{tg}(y)]'} = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Portanto:

$$[\text{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2}.$$

■

Exemplo 22 (Derivada de e^x). *Mostre que a derivada da função $y = e^x$ é*

$$\frac{dy}{dx}(e^x) = e^x.$$

Solução: Como $y = \mathrm{e}^x$ é a inversa de $y = \ln x$ e esta é derivável, então a função $y = \mathrm{e}^x$ é derivável. Assim, utilizaremos o método da função inversa para calcular a derivada de $y = \mathrm{e}^x$. Seja

$$y = \mathrm{e}^x \implies \ln y = x$$

Derivando implicitamente a equação anterior, em relação a x, temos:

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 1$$

Logo:

$$\frac{dy}{dx} = y = \mathrm{e}^x.$$

■

Resumo

Faça um resumo dos principais resultados vistos nesta aula.

Aprofundando o conteúdo

Leia mais sobre o conteúdo desta aula nas páginas $179 - 185$ e $188 - 193$ do livro texto.

Sugestão de exercícios

Resolva os exercícios das páginas $185 - 188$ e $194 - 196$ do livro texto.