INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CEARÁ

COMPUTAÇÃO

DISCIPLINA: Cálculo I

Carga Horária Total:80h

Número de Créditos : 04

PROF:LUCAS CAMPOS

NOÇAO DE LIMITE

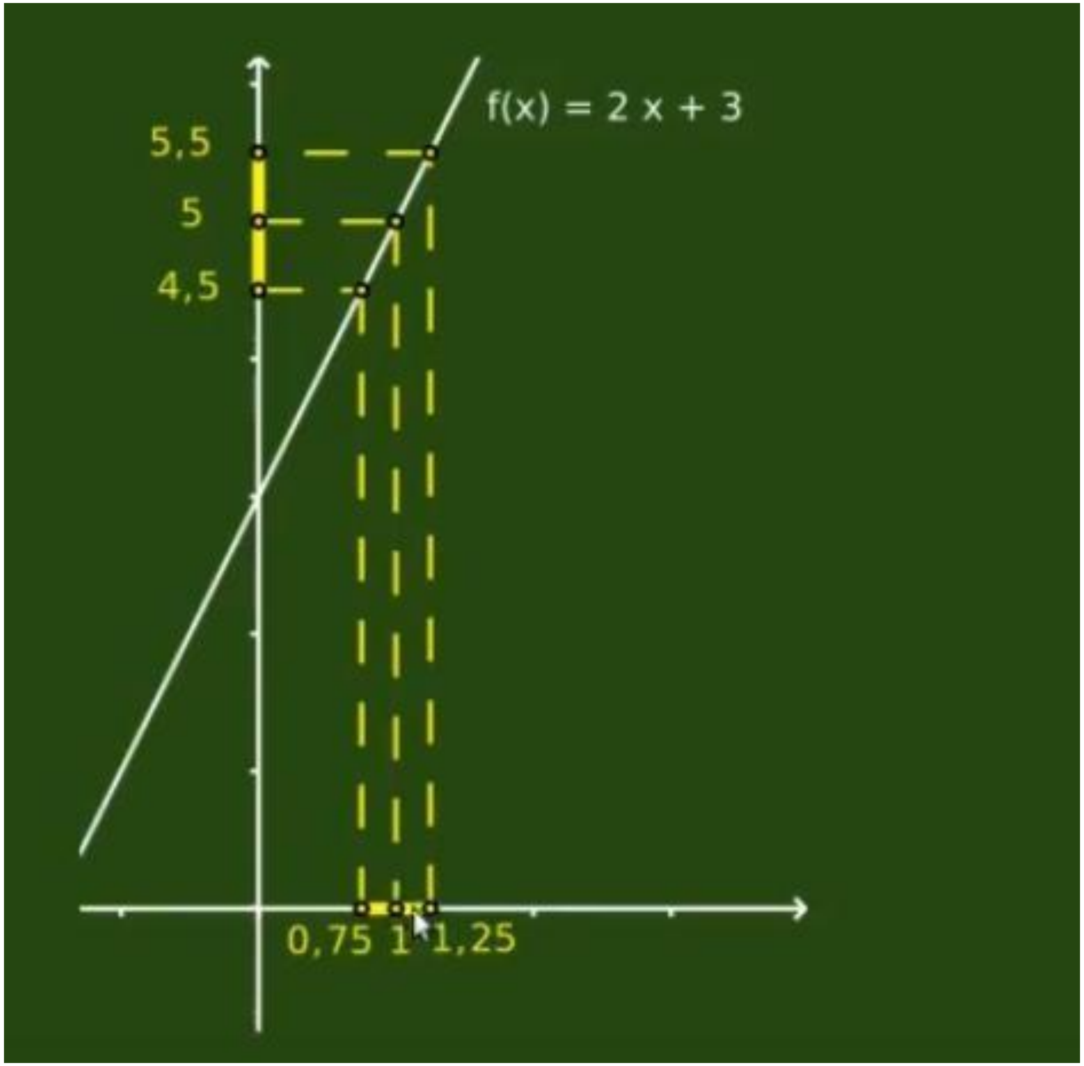
Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. Imagine que você tivesse que responder a seguinte pergunta:

Para que valor a função f se aproxima quando x se aproxima de 1?

x	f(x)
0,95	4,9
0,96	4,92
0,97	4,94
0,98	4,96
0,99	4,98

x	f(x)
1,006	5,012
1,007	5,014
1,008	5,016
1,009	5,018
1,01	5,02

NOÇÃO DE LIMITE



NOÇÃO DE LIMITE

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Nós lemos essa notação da seguinte maneira: "Limite de f(x) quando x tende a 1 é igual a 5".

NOÇÃO DE LIMITE

Considere agora a função $f : \mathbb{R} - \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

Para que valor a função f se aproxima quando x se aproxima de 2?

NOÇÃO DE LIMITE

x	f(x)
1,95	0,25316
1,96	0,25253
1,97	0,25189
1,98	0,25126
1,99	0,25063

x	f(x)
2,006	0,24963
2,007	0,24956
2,008	0,24950
2,009	0,24944
2,01	0,24938

Parece razoável afirmar que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0,25$$

NOCÃO DE LIMITE

Assim, por exemplo, na função

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se} \quad x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \\ x - 2 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, (à esquerda de 1), temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	4	3,5	3,25	3,1	3,01	3,001

e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, (à direita de 1), temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	0	-0,5	-0,75	-0,9	-0,99	-0,999

NOÇÃO DE LIMTE

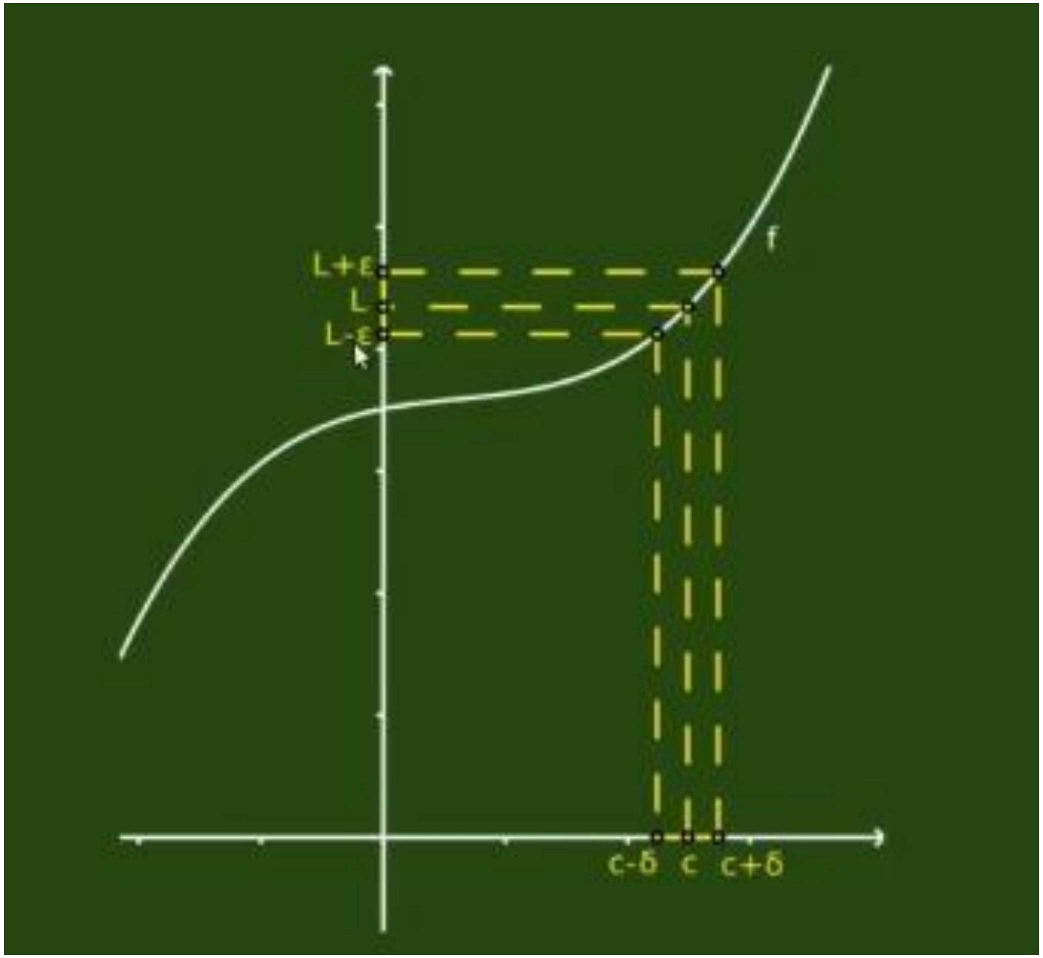
Seja uma função f e um número qualquer c no intervalo (a, b). Suponha que f esteja definida em (a, b), mas não necessariamente em c. Dizemos que o limite de f quando x aproxima-se de c é igual a L, representando por

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ correspondente de tal modo que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta.$$

NOÇÃO DE LIMITE



NOÇÃO DE LIMITE

Usando a definição demonstre que $\lim_{x \to 1} (3x + 2) = 5$.

NOÇÃO DE LIMITE

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ então:

L₁. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

L₂. $\lim\limits_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \cdot L$

L₃. $\lim\limits_{x \to a} [(f + g)(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$

L₄. $\lim\limits_{x \to a} [(f - g)(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = L - M$

L₅. $\lim\limits_{x \to a} [(f \cdot g)(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

L₆. $\lim\limits_{x \to a} [(f)^n (x)] = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n$

L₇. $\lim\limits_{x \to a} \left[\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$

L₈. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (se $n \in N^*$ e $L \geqslant 0$ ou se n é ímpar e $L \leqslant 0$)

NOÇÃO DE LIMITE

LIMITES LATERAIS

Quando faz-se ***x*** tender para ***a***, por valores menores que ***a***, está-se calculando o limite lateral esquerdo. $x \rightarrow a^-$

Quando faz-se ***x*** tender para ***a***, por valores maiores que ***a***, está-se calculando o limite lateral direito. $x \rightarrow a^+$

Para o limite existir, os limites laterais devem ser iguais:

$$\lim_{x \to a^-} [f(x)] = \lim_{x \to a^+} [f(x)]$$

NOÇÃO DE LIMITE

LIMITES LATERAIS

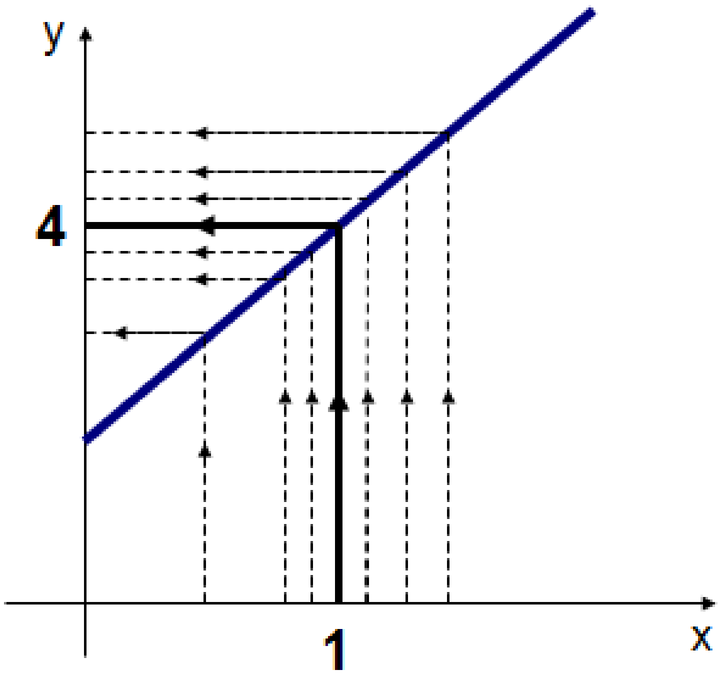
Dada a função ***f: IR → IR***, definida por ***f(x) = x + 3***.

Estudemos o comportamento da função ***f(x)*** quando ***x*** estiver próximo de ***1***, mas não for igual a ***1***.

Pela esquerda

x	f(x) = x + 3
0	3
0,25	3,25
0,75	3,75
0,9	3,9
0,99	3,99
0,999	3,999

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 4$$



Pela direita

x	f(x) = x + 3
2	5
1,5	4,5
1,25	4,25
1,1	4,1
1,01	4,01
1,001	4,001
1,0001	4,0001

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 4$$

NOÇÃO DE LIMITE

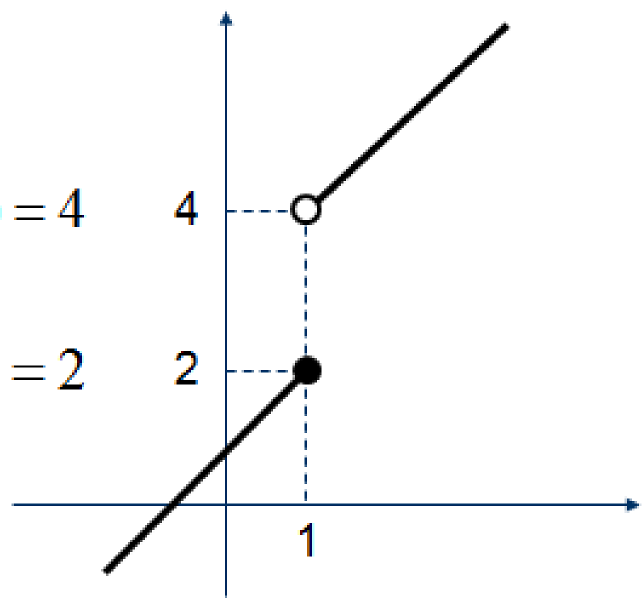
LIMITES LATERAIS

Dada a função f: IR → IR, definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, & para\ x \leq 1 \\ x+3, & para\ x > 1 \end{cases}$

Determinar, graficamente, $\lim_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$



Não existe limite de f(x), quando x tende para 1

NOÇÃO DE LIMITE

CONTINUIDADE

Sejam f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I.

Dizemos que f é contínua em a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notemos que para falarmos em continuidade de uma função em um ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que se f é contínua em $a \in$ I então as três condições deverão estar satisfeitas:

- Existe $f(a)$;
- Existe $\lim_{x \to a} f(x)$;
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

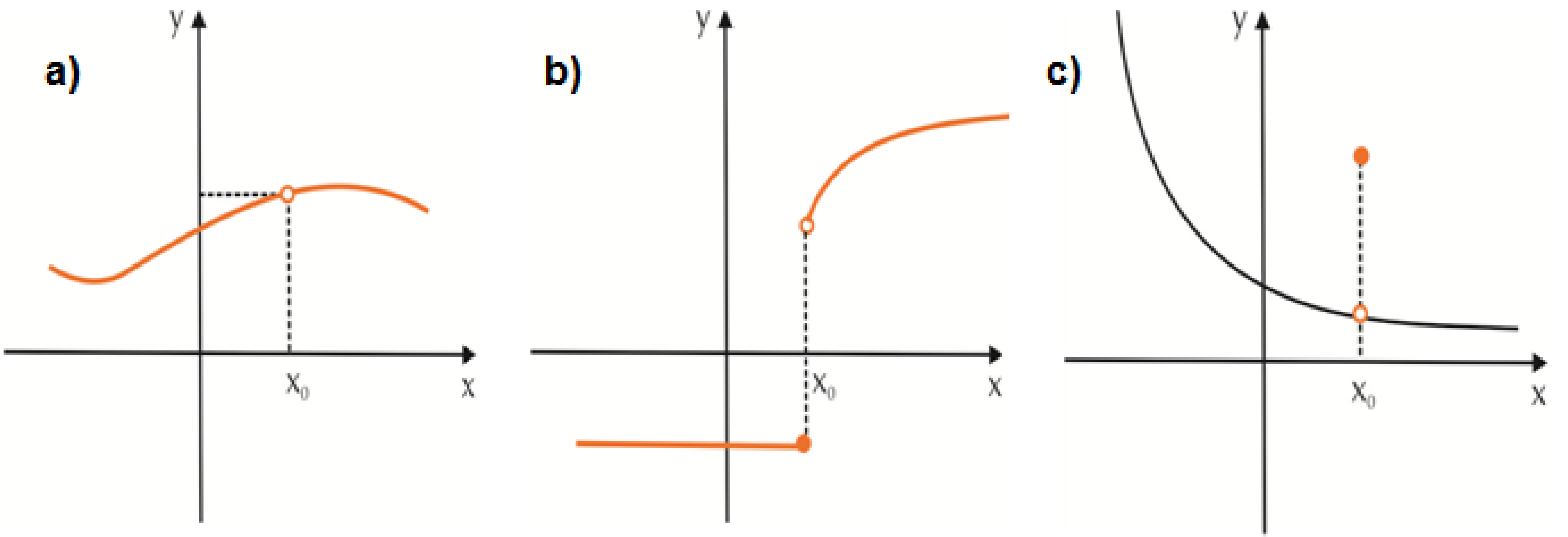
NOÇÃO DE LIMITE

CONTINUIDADE

Uma função *f* é contínua em um número x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nenhuma destas funções é contínua em $x = x_o$.

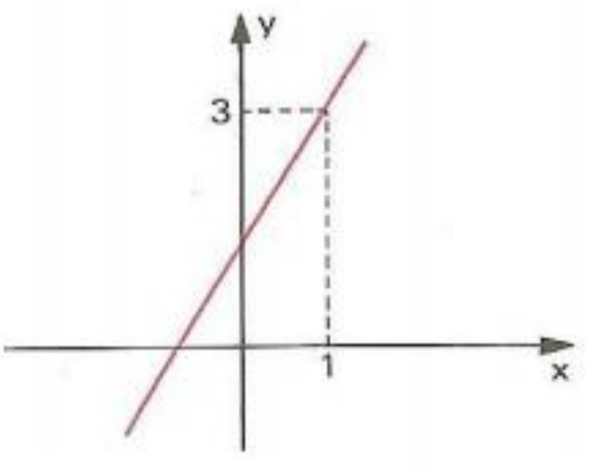


NOÇÃO DE LIMITE
CONTINUIDADE

EXEMPLO 01

A função $f(x) = 2x + 1$ definida em R é contínua em 1, pois $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3 = f(1)$.

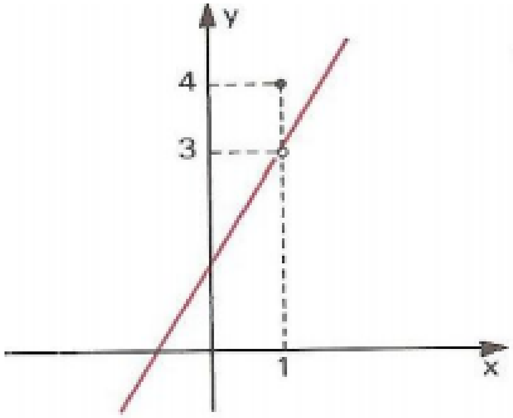
Note que f é contínua em R, pois para todo $a \in$ R, temos: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a}(2x+1) = 2a + 1 = f(a)$.



NOÇÃO DE LIMITE
CONTINUIDADE

EXEMPLO 02

- A função $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \neq 1 \\ 4, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ definida em R é descontínua em 1, pois $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(2x+1) = 3 \neq 4 = f(1)$. Note que f é contínua em R − {1} pois, para todo $a \in$ R − {1}, temos: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(2x+1) = 2a+1 = f(a)$.



NOÇÃO DE LIMITE
CONTINUIDADE

EXEMPLO 03

A função $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ 1-x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ definida em R é descontínua em 1, pois $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (1-x) = 0$ e, portanto, não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.