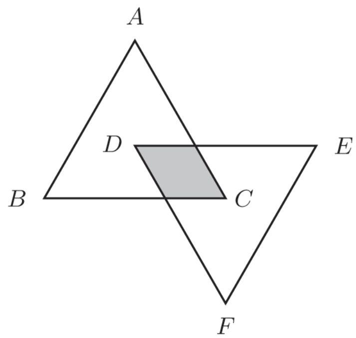
50. Na figura a seguir, **ABC** e **DEF** são triângulos equiláteros, ambos de área **S**.



O ponto **D** é o baricentro do triângulo **ABC** e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. A área da região sombreada na figura é

a) $\dfrac{S}{9}$

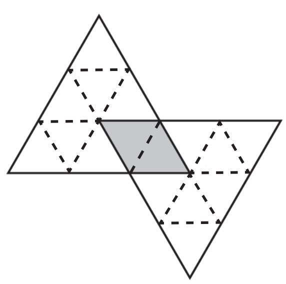
b) $\dfrac{S}{8}$

c) $\dfrac{S}{6}$

d) $\dfrac{2S}{9}$

e) $\dfrac{3S}{8}$

Resolução:
Observe a figura do enunciado, agora divida em 16 triângulos equiláteros congruentes:



Assim, a área da região sombreada é $\dfrac{2S}{9}$.

Alternativa D

51. Dois irmãos gêmeos, Gilberto e Roberto, apesar de fisicamente idênticos, têm uma característica que os diferencia: um deles sempre fala a verdade, enquanto o outro sempre mente. Uma pessoa precisa descobrir qual deles é Gilberto, fazendo uma única pergunta a apenas um dos dois irmãos, que deverá responder com somente uma dentre duas palavras: sim ou não. Nessas condições, dentre as perguntas abaixo, a única que, respondida por qualquer um dos dois irmãos, permite identificar quem é Gilberto é

a) “Você é Gilberto?”.
b) “Seu irmão gêmeo se chama Gilberto?”.
c) “O Brasil fica na América do Sul?”.
d) “Gilberto é mentiroso?”.
e) “O Brasil fica na Europa?”.

Resolução:

Trata-se de uma questão de **simulação de situações** com **análise de veracidade**.

Não sabemos quem mente e também não sabemos a quem fazemos diretamente a pergunta, pois os dois são gêmeos. Assim, temos quatro possibilidades a considerar:

Cenário 1: perguntamos ao “verdadeiro” Gilberto (Roberto é “mentiroso”)
Cenário 2: perguntamos ao “mentiroso” Gilberto (Roberto é “verdadeiro”)
Cenário 3: perguntamos ao “verdadeiro” Roberto (Gilberto é “mentiroso”)
Cenário 4: perguntamos ao “mentiroso” Roberto (Gilberto é “verdadeiro”)

Note que a pergunta apresentada na **alternativa D** — “Gilberto é mentiroso?” — apresentaria a seguinte distribuição de respostas:

C1: “NÃO”
C2: “NÃO”
C3: “SIM”
C4: “SIM”

Ou seja, caso a resposta seja negativa, estaremos diante de Gilberto; caso afirmativa, estaremos diante de Roberto (note que, em ambos os casos, não é possível saber quem é “verdadeiro” e quem é “mentiroso”, mas o enunciado não exige essa informação).

Alternativa D

52. A função **f**, de domínio real, é dada pela lei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 3x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

em que $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais. O número total de soluções reais da equação f (x) = 7 é

a) 4.
b) 3.
c) 2.
d) 1.
e) 0.

Resolução:

Para $x \in Q$, temos:

$f(x) = 7 \iff x^2 - 2x + 5 = 7 \iff x^2 - 2x - 2 = 0$
$\iff x = 1 + \sqrt{3}$ ou $x = 1 - \sqrt{3}$

Como $1 \pm \sqrt{3} \notin Q$, a equação f (x) = 7 não tem solução neste caso.

Já para $x \notin Q$, temos: $f(x) = 7 \iff 3^x = 7 \iff x = \log_3 7$.

Como $\log_3 7 \notin Q$, a equação f (x) = 7 tem essa única solução neste caso.

Logo a equação f (x) = 7 tem uma única solução.

Alternativa D

53. Em um campeonato de futebol, foram realizadas mais de 300 partidas. Em 60% dessas partidas, não foram marcados gols no 1º tempo. Já em 40% delas, não foram marcados gols no 2º tempo. Nessas condições, é correto afirmar que, necessariamente,

a) o placar de nenhuma das partidas foi 0 x 0.
b) a média de gols marcados foi de, no mínimo, 1 gol por partida.
c) o total de gols marcados no 2º tempo foi maior do que o total de gols marcados no 1º tempo.
d) não foram marcados mais do que 5 gols em uma mesma partida.
e) em pelo menos uma partida, foram marcados gols tanto no 1º quanto no 2º tempo.

Resolução:

Vamos fazer a análise a partir de uma amostra representativa de 100 jogos.

Temos que, em 60 deles, não houve gol no primeiro tempo ($\overline{G1} = 60 \iff G1 = 40$).

Já em 40, não foi marcado gol no segundo tempo ($\overline{G2} = 40 \iff G2 = 60$).

Assim, podemos prever algumas situações:

Alternativa A: NÃO-INFERÍVEL
O número de jogos que terminaram com 0 x 0 corresponde ao número de jogos na categoria $\overline{G1} \cap \overline{G2}$. Note que **é possível** haver jogos sem gols, pois $0 \leq n(\overline{G1} \cap \overline{G2}) \leq 40$.

Alternativa B: VERDADEIRA
Vamos supor que, nos tempos em que houve gol, tenha havido somente um (o que deve minimizar a média). Assim, teríamos um total de 40 gols marcados em um primeiro tempo, e outros 60 marcados em um segundo tempo, o que corresponderia a um total de 100 gols, na amostra de 100 jogos. Isso indica que a média foi de ao menos um gol por partida.

Alternativas C e D: NÃO-INFERÍVEL
Os dados apresentados no enunciado apenas informam se houve ou não gols por período, e não a quantidade de gols marcados. Assim, as informações propostas nessas alternativas podem ser tanto falsas, como verdadeiras.

Alternativa E: NÃO-INFERÍVEL
O número de jogos que tiveram gol em ambos os períodos corresponde ao número de jogos na categoria $G1 \cap G2$. Note que **é possível** haver jogos sem gols em ambos os períodos, pois $0 \leq n(G1 \cap G2) \leq 40$.

54. Leia o texto a seguir.

Fifa aprova fim do sistema de rodízio para Copa do Mundo

ZURIQUE (Suíça) — O Comitê da Federação Internacional de Futebol (Fifa) aprovou nesta segunda-feira (29) o fim do sistema de rod´ızio de continentes para a Copa do Mundo.

A partir de 2018, será escolhido o país que apresentar o melhor projeto para a realização do mundial. Porém, ficam de fora da disputa os continentes que sediaram jogos dos dois últimos mundiais. Assim, estarão descartadas para 2018 as candidaturas de países da África e da América do Sul, já que estes continentes sediarão as Copas de 2010 e 2014, respectivamente.

Fonte: http://www.ipcdigital.com/br/Esportes
(acessado em 19/10/2009)

Considerando a divisão em seis continentes adotada pela Fifa (América do Sul, América do Norte/Central, África, Europa, Ásia e Oceania) e as regras acima descritas, o número de maneiras diferentes de escolher os continentes que sediarão as Copas do Mundo de 2018, 2022 e 2026 é igual a

a) 24.
b) 64.
c) 80.
d) 120.
e) 216.

Resolução:

Para a copa do mundo de 2018 temos 6 – 2 = 4 opções para escolher o continente, uma vez que há 6 continentes considerados e 2 que não poderão sediar pois sediarão as 2 copas imediatamente anteriores a 2018, a saber, as copas de 2010 e 2014.

Analogamente, temos 4 opções para escolher o continente que sediará a copa do mundo de 2022 e 4 opções para a copa de 2026.

Logo há $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ maneiras distintas de escolher os continentes que sediarão as copas do mundo de 2018, 2022 e 2026.

Alternativa B

55. Na figura, feita fora de escala, as duas circunferências, ambas de raio **r**, são tangentes entre si e tangenciam os lados do paralelogramo ABCD nos pontos indicados. O ângulo $B\hat{A}D$ mede 28°.

Assim, considerando que tg 76º = 4, conclui-se que a área do paralelogramo **ABCD** vale

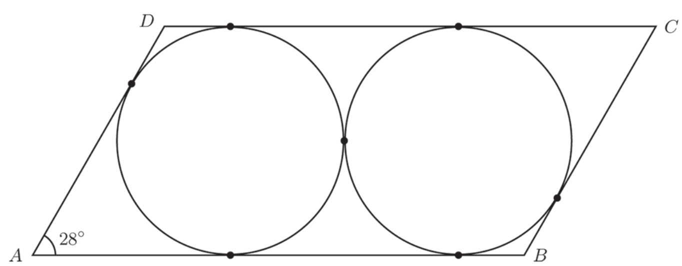
a) $\dfrac{25r^2}{2}$

b) $\dfrac{25r^2}{4}$

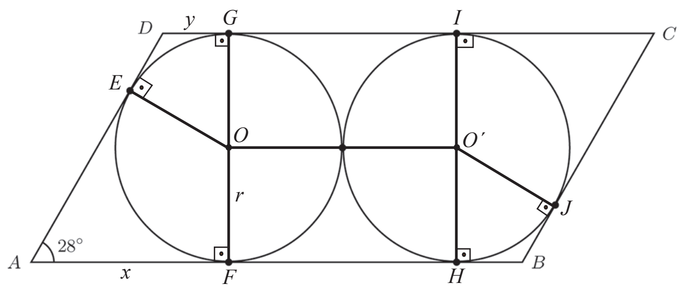
c) $\dfrac{16r^2}{5}$

d) $10r^2$

e) $20r^2$

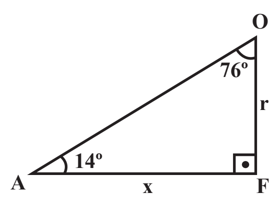


Resolução:



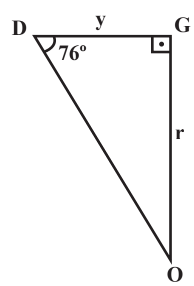
Na figura acima, $\overleftrightarrow{AO}$ é bissetriz do ângulo $E\hat{A}F$ e $\overleftrightarrow{DO}$ e bissetriz de $G\hat{D}E$, cuja medida é 152º.

No triângulo AOF:



$$\frac{AF}{r} = \text{tg } 76º \Rightarrow \frac{x}{r} = 4 \Rightarrow x = 4r$$

No triângulo GOD:



$$\frac{r}{DG} = \text{tg } 76º \Rightarrow \frac{r}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{r}{4}$$

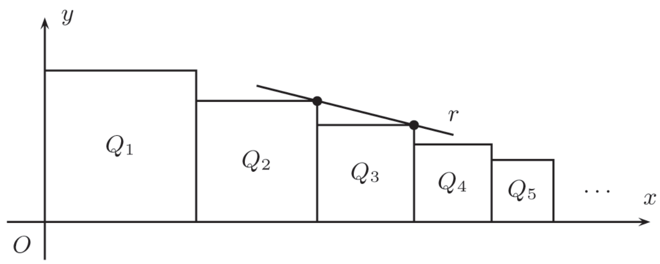
Os triângulos EDO, GDO, HBO´ e JBO´ são congruentes e a área de cada um deles é $\dfrac{y \cdot r}{2} = \dfrac{\frac{r}{4} \cdot r}{2} = \dfrac{r^2}{8}$.

Os triângulos AOE, AOF, CO´I e CO´J são congruentes e a área de cada um deles é $\dfrac{x \cdot r}{2} = \dfrac{4r \cdot r}{2} = 2r^2$.

A área do retângulo GIHF é $2r \cdot 2r = 4r^2$.

Área do paralelogramo: $4 \cdot \dfrac{r^2}{8} + 4 \cdot 2r^2 + 4r^2 = \dfrac{r^2 + 16r^2 + 8r^2}{2} = \dfrac{25r^2}{2}$ **Alternativa A**

56. A figura mostra uma sequência infinita de quadrados (Q_1, Q_2, Q_3, ... , Q_n, ...) do plano cartesiano.



Sabe-se que:

- o lado do quadrado Q_1 mede 1;
- as medidas dos lados dos quadrados Q_1, Q_2, Q_3, ... formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão positiva **q**;
- a reta **r**, que passa pelos vértices dos quadrados Q_2 e Q_3 assinalados na figura, intercepta o eixo das abscissas no ponto $\left(\frac{9}{2}; 0\right)$

Nessas condições, **q** é igual a

a) $\frac{7}{9}$

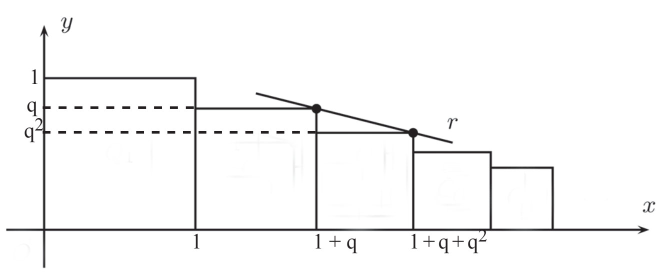
b) $\frac{7}{8}$

c) $\frac{5}{7}$

d) $\frac{5}{6}$

e) $\frac{3}{5}$

Resolução:



A reta r passa pelos pontos $\left(\frac{9}{2}; 0\right)$, $(1 + q; q)$ e $(1 + q + q^2; q^2)$.

Logo: $\begin{vmatrix} \frac{9}{2} & 0 & 1 \\ 1+q & q & 1 \\ 1+q+q^2 & q^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9q^2 + 7q = 0 \Rightarrow q = \frac{7}{9}$ ou $q = 0$ (não convém)

Alternativa A

57. Uma cantora compôs 25 músicas para seu novo álbum. Entretanto, somente podem ser gravadas no CD 14 músicas. Além disso, ela pode escolher outras 6 que não forem gravadas no CD para deixar no site oficial do álbum como faixas bônus. Desconsiderando a ordem em que as músicas serão gravadas no CD e a ordem em que aparecerão no site, a quantidade de maneiras distintas que ela pode escolher quais irão para o CD, quais irão para o site e quais ficarão de fora é

a) $\dfrac{20!}{11!\,.\,6!\,.\,5!}$

b) $\dfrac{20!}{14!\,.\,11!\,.\,6!}$

c) $\dfrac{25!}{11!\,.\,6!\,.\,5!}$

d) $\dfrac{25!}{20!\,.\,11!\,.\,6!}$

e) $\dfrac{25!}{14!\,.\,6!\,.\,5!}$

Resolução:

Total de maneiras de escolher as músicas do álbum: $C_{25,14}$

Total de maneiras de escolher outras 6 músicas restantes para o site: $C_{11,6}$

Total: $C_{25,14} \, . \, C_{11,6} = \dfrac{25!}{14!11!} \cdot \dfrac{11!}{6!5!} = \dfrac{25!}{14!6!5!}$

Alternativa E

58. Numa noite das férias escolares, Leo, Gil e Bia disputaram diversas partidas de um jogo pela internet. Em cada partida, apenas um deles fazia a jogada inicial, os três disputavam, mas apenas um ganhava, sem empates. Eles combinaram que o vencedor da noite seria aquele que acumulasse três partidas ganhas. Foi uma noite bastante competitiva, dado que:

I. Ninguém que tenha feito a jogada inicial de uma partida, o que conferia vantagem ao jogador que o fizesse, conseguiu ganhar a respectiva partida.
II. Leo fez a primeira jogada inicial, depois foi a vez de Gil, seguido de Bia, voltando a Leo e repetindo-se esta sequência até alguém ser o vencedor da noite.
III. O ganhador da primeira partida não conseguiu ser o vencedor da noite.
IV. Ninguém conseguiu ganhar duas partidas consecutivas.

Conclui-se corretamente das informações acima que

a) Gil ganhou a terceira partida e foi o vencedor da noite.
b) Bia ganhou a segunda partida e foi a vencedora da noite.
c) Leo ganhou a terceira partida e foi o vencedor da noite.
d) Gil não ganhou a primeira partida e não foi o vencedor da noite.
e) Bia não ganhou a quarta partida e não foi a vencedora da noite.

Resolução:

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
L	não			não			não
G		não			não		
B			não			não	

Nota-se que no máximo serão realizadas 7 partidas (caso de 2 jogadores com 2 vitórias e 1 com 3 vitórias).
Pela disposição das partidas e afirmação (IV), Leo não pode ser campeão.
Caso Bia ganhe a 1ª rodada, pela afirmação **IV** Gil também não seria campeão, sobrando apenas Bia para ser campeã, contradizendo a afirmação **III**.
Portanto, Gil ganhou a primeira rodada, sobrando apenas Bia para ser a campeã e obrigatoriamente ganhando a 2ª rodada

Alternativa B

59. Numa família, tem-se os seguintes parentescos:

- João é avô de Tiago e de Felipe, mas não de Jorge.
- Antonio é avô de Felipe e de Jorge, mas não de Tiago.
- Tiago, Jorge e Felipe são filhos únicos.
- Antonio e João têm apenas dois filhos cada um.

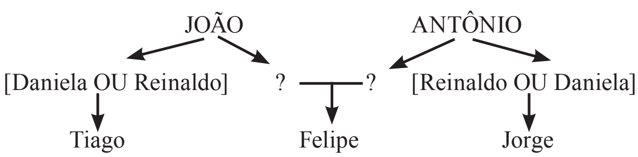
Sabendo-se que Daniela e Reinaldo são tios consanguíneos de Felipe, é correto afirmar que, necessariamente,

(Considere que tio ou tia consanguíneo de uma pessoa é aquele ou aquela que é irmão ou irmã de um dos pais da pessoa. Esposas e maridos de tios consaguíneos não se incluem nesta categoria.)

a) Daniela é mãe de Jorge e tia consanguínea de Tiago.
b) Se Reinaldo é pai de Jorge, então Daniela é mãe de Tiago.
c) Se Daniela não é mãe de Jorge, então é filha de Antonio.
d) Reinaldo e Daniela são irmãos.
e) Reinaldo e Daniela têm o mesmo parentesco com Jorge.

Resolução:

Há dois únicos modos possíveis de relacionar os elementos apresentados, em vista das restrições do enunciado:



A única alternativa compatível com esses dois possíveis cenários é a B – "Se Reinaldo é pai de Jorge, então Daniela é mãe de Tiago".

Alternativa B

60. Numa festa:

(A1) Rita viu todos que não viram Teo e mais ninguém.
(A2) Teo viu todos que não viram Rita e mais ninguém.
(A3) Cris viu todas as pessoas que viram Rita e viram Teo.

Considere as seguintes afirmações:

I. Se Cris viu Teo, então não viu Rita.
II. Se Teo e Rita viram Robson, então Robson não os viu.
III. Cris viu Teo e Rita, mas não se viu.

Seguem-se necessariamente de (A1), (A2) e (A3)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) apenas II e III.

Resolução:

Diagramando os condicionais lógicos apresentados, temos:

A1. X não viu Teo $\leftrightarrow$ Rita viu X
A2. X não viu Rita $\leftrightarrow$ Teo viu X
A3. (X viu Teo $\wedge$ X viu Rita) $\rightarrow$ Cris viu X

Logo, podemos analisar as informações sugeridas:

I. não-inferível (verifique A3; "Cris viu Teo" não implica automaticamente nada)
II. correto, "Rita viu Robson" bi-implica "Robson não viu Teo" (conforme A1); e "Teo viu Robson" bi-implica "Robson não viu Rita" (conforme A2).
III. não-inferível (sem falsos condicionais, não é possível avaliar qual informação é verdadeira, apenas especular sobre quais pares de informações podem ser verdadeiras).

Alternativa B