Capítulo 4: Derivada

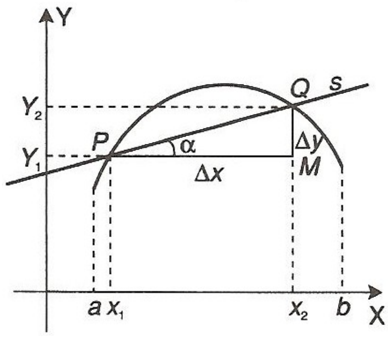
4.1- A Reta Tangente

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a,b) e sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$.

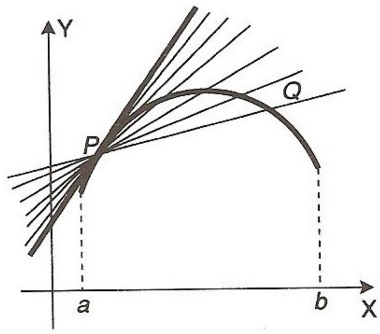
Seja *s* a reta secante que passa pelos pontos *P* e *Q*.

Considerando o triângulo retângulo PMQ, na figura ao lado, temos que a inclinação da reta *s*, ou coeficiente angular de *s*, é:

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Suponhamos agora que, mantendo *P* fixo, *Q* se mova sobre a curva em direção a *P*. Diante disto, a inclinação da reta secante *s* variará. A medida que *Q* vai se aproximando cada vez mais de *P*, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante. Esse valor limite é chamado *inclinação da reta tangente à curva no ponto P*, ou também *inclinação da curva em P*.



Definição:

Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela.
A inclinação da reta tangente à curva no ponto *P* é dada por

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$ quando o limite existe.

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ ou $x_2 = x_1 + h$ podemos escrever:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Equação da Reta Tangente

Se a função $f(x)$ é contínua em $x_1 \in D(f)$, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$ é:

a) A reta que passa por *P* tendo inclinação $m = m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$, se este limite existe. Neste caso, temos a equação: $y - f(x_1) = m(x - x_1)$.

b) A reta $x = x_1$, se $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ for infinito.

Exemplos:

1. Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1).

2. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2.

3. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$, que seja paralela à reta $8x - 4y + 1 = 0$.

Lembrete: Duas retas são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais.

4- Encontre a equação para a reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2,4)$.

Lembretes:

a) *Reta normal a uma curva no ponto P é a reta perpendicular à reta tangente à curva no ponto P;*

b) *Duas retas de coeficientes angulares m_1 e m_2 são perpendiculares se, e somente se, $m_1 \cdot m_2 = -1$.*

4.2- Velocidade e Aceleração

Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante *t*. Então, no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

1. Velocidade

Velocidade média do corpo no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ é o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo, isto é, $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$.

Velocidade instantânea do corpo no instante *t* ou velocidade no instante *t* é o limite das velocidades médias quando Δt se aproxima de zero, isto é, $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$.

2. Aceleração

Aceleração média do corpo no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ é dada por $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$.

Aceleração instantânea do corpo no instante *t* é o limite das acelerações médias quando Δt se aproxima de zero, isto é, $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$.

Exemplos:

1. No instante t = 0 um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dado por $s(t) = 16t - t^2$. Determine:

a) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo $[2,4]$;

b) a velocidade do corpo no instante t = 2;

c) a aceleração média no intervalo $[0,4]$;

d) a aceleração no instante t = 4.

2. A equação do movimento de um corpo em queda livre é $s = \frac{1}{2}gt^2$, onde $g \cong 9{,}8m/s^2$ é a aceleração da gravidade. Determine a velocidade e a aceleração do corpo em um instante qualquer t.

4.3- A Derivada de uma Função num Ponto

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, é definida pelo limite $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, quando este limite existe. Neste caso, dizemos que a função $f(x)$ é derivável (ou diferenciável) no ponto x_1.

Também podemos escrever: $f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Observação: Como vimos, este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1 representa a inclinação da curva neste ponto.

4.4- A Derivada de uma Função

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$ tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se este limite existir.

Dizemos que uma função é derivável (ou diferenciável) quando existe derivada em todos os pontos de seu domínio.

Outras notações podem ser usadas no lugar de $y' = f'(x)$:

a) $D_x f(x)$ (lê-se derivada de f(x) em relação a x);

b) $D_x y$ (lê-se derivada de y em relação a x);

c) $\frac{dy}{dx}$ (lê-se derivada de y em relação a x).

Exemplos:

1. Dada a função $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$, encontre $f'(2)$.

2. Dada a função $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$, encontre $f'(x)$.

3. Dada $f(x) = \sqrt{x}$, encontre $f'(4)$.

4. Dada $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, encontre $f'(x)$.

4.5- Continuidade de Funções Deriváveis

Teorema
Toda função $y = f(x)$ derivável num ponto $x_1 \in D(f)$ é contínua nesse ponto.

Demonstração:
Sendo *f* derivável em x_1 então $f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ existe.
Assim temos:
$$\lim_{x \to x_1}[f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1}\left[\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.(x - x_1)\right] = \lim_{x \to x_1}\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.\lim_{x \to x_1}(x - x_1) = f'(x_1).0 = 0.$$
Logo, $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = \lim\limits_{x \to x_1}[f(x) - f(x_1) + f(x_1)] = \lim\limits_{x \to x_1}[f(x) - f(x_1)] + \lim\limits_{x \to x_1} f(x_1) = 0 + f(x_1) = f(x_1)$.
Portanto, *f* é contínua em x_1.

4.6- Exercícios

Páginas 127 e 128 do livro texto.

4.7- Derivadas Laterais

Definições:
Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo (a,b) e $x_1 \in (a,b)$.

a) A derivada à direita de f em x_1, denotada por $f_+'(x)$, é definida por $f_+'(x_1) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim\limits_{x \to x_1^+} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$, caso este limite exista.

b) A derivada à esquerda de f em x_1, denotada por $f_-'(x)$, é definida por $f_-'(x_1) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim\limits_{x \to x_1^-} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$, caso este limite exista.

c) Uma função é derivável em um ponto x_1 se, e somente se, as derivadas à direita e à esquerda nesse ponto existem e são iguais.

d) Quando as derivadas laterais (direita e esquerda) existem e são diferentes em um ponto x_1, dizemos que o ponto $(x_1, f(x_1))$ é um ponto anguloso do gráfico de f.

e) Uma função *f* definida no intervalo $[a,b]$ é derivável em $[a,b]$ se é derivável no intervalo aberto (a,b) e se existem a derivada à direita e a derivada à esquerda da função *f* em *a* e *b*, respectivamente.

Observação: Para fazer uma análise gráfica da existência da derivada em um ponto, podemos traçar retas secantes que passam pelo ponto dado e por outro na sua vizinhança e observar a sua posição limite (posição de tangência). Quando as secantes não têm uma única posição limite ou se tornam verticais, a derivada não existe. No primeiro caso, estamos diante da situação em que as derivadas laterais existem, mas são diferentes (ponto anguloso) e não há reta tangente à curva neste ponto; no segundo caso, as retas secantes convergem para a posição vertical e, se $\lim\limits_{x \to x_1^+} f'(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_1^-} f'(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_1^+} f'(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_1^-} f'(x) = +\infty$, dizemos que estamos diante de um ponto cuspidal do gráfico de f, sendo $x = x_1$ a reta tangente neste caso.

Exemplos:

1. Seja *f* a função definida por $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.

a) Esboce o gráfico de *f*.
b) Mostre que *f* é contínua em 2.
c) Encontre $f_+'(2)$ e $f_-'(2)$.
d) A função *f* é derivável em 2? Justifique sua resposta.

2. Seja a função $f(x) = (x - 2).|x|$.

a) Encontre $f_+'(0)$ e $f_-'(0)$.
b) A função *f* é derivável em $x = 0$? Justifique sua resposta.

4.8- Exercícios

Páginas 132 e 133 do livro texto.

4.9- Regras de Derivação

As regras de derivação permitem determinar as derivadas das funções sem o uso da definição.

R1 – Derivada de uma Constante

Se c é uma constante e $f(x) = c$, para todo $x \in R$, então $f'(x) = 0$.

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

R2 – Regra da Potência (expoente positivo)

Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n-1} x h^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h} = \lim_{h \to 0}\left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n-1} x h^{n-2} + h^{n-1}\right] =$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} x^{n-1} = \frac{n\,(n-1)!}{1\,(n-1)!} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.$$

Exemplos:

a) Se $f(x) = x^5$ então $f'(x) = 5x^4$.

b) Se $g(x) = x$ então $g'(x) = 1$.

c) Se $h(x) = x^{10}$ então $h'(x) = 10x^9$.

R3 – Derivada do produto de uma constante por uma função

Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$.
Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = cf'(x)$.

Demonstração:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)$$

Exemplos:

a) Se $f(x) = 8x^2$ então $f'(x) = 8(2x) = 16x$.

b) Se $g(t) = -2t^7$ então $g'(t) = -2(7t^6) = -14t^6$.

R4 – Derivada de uma soma

Sejam *f* e *g* duas funções e *s* a função definida por $s(x) = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $s'(x) = f'(x)+g'(x)$.

Demonstração:

$$s'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

Exemplos:

a) Se $f(x) = 3x^4+8x+5$ então $f'(x) = 3(4x^3)+8.1+0 = 12x^3+8$.

b) Se $g(t) = 9t^5-4t^2+2t+7$ então $g'(t) = 45t^4-8t+2$.

R5 – Derivada de um produto

Sejam *f* e *g* duas funções e *p* a função definida por $p(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)$.
Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $p'(x) = f(x).g'(x)+f'(x).g(x)$.

Demonstração:

$$p'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h).g(x+h)]-[f(x).g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x+h).g(x)+f(x+h).g(x)-f(x).g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h} = \lim_{h\to 0}f(x+h).\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}g(x).\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= f(x).g'(x)+g(x).f'(x).$$

Exemplos:

a) Se $f(x) = (2x^3-1).(x^4+x^2)$ então $f'(x) = (2x^3-1).(4x^3+2x)+(6x^2).(x^4+x^2)$.

b) Se $g(t) = \frac{1}{2}(t^2+5).(t^6+4t)$ então $g'(t) = \frac{1}{2}(t^2+5).(6t^5+4)+\frac{1}{2}(2t).(t^6+4t)$.

R6 – Derivada de um quociente

Sejam *f* e *g* duas funções e *q* a função definida por $q(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$.

Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $q'(x) = \frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Demonstração:

$$q'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{q(x+h)-q(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{f(x+h).g(x)-f(x).g(x+h)}{g(x+h).g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{f(x+h).g(x)-f(x).g(x)+f(x).g(x)-f(x).g(x+h)}{g(x+h).g(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h).g(x)} =$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.\lim_{h\to 0}g(x)-\lim_{h\to 0}f(x).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0}g(x+h).\lim_{h\to 0}g(x)} = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Exemplos:

a) Se $f(x)=\dfrac{2x^4-3}{x^2-5x+3}$ então $f'(x)=\dfrac{(x^2-5x+3).(8x^3)-(2x^4-3).(2x-5)}{(x^2-5x+3)^2}$.

b) Se $g(x)=\dfrac{1}{x}$ então $g'(x)=\dfrac{x.0-1.1}{x^2}=\dfrac{-1}{x^2}$.

R7 – Regra da Potência (expoente negativo)

Se $f(x)=x^{-n}$, onde n é um número inteiro positivo e $x\neq 0$, então $f'(x)=-n\,x^{-n-1}$.

Demonstração:

Como $f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ então $f'(x)=\dfrac{x^n.0-1.n\,x^{n-1}}{(x^n)^2}=\dfrac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}}=-n\,x^{-n-1}$.

4.10- Exercícios

Páginas 138 e 139 do livro texto.

4.11- Derivada da Função Composta (Regra da Cadeia)

Teorema

Sejam $y=g(u)$ e $u=f(x)$ funções deriváveis, com Im(f) ⊂ D(g).
Então a composta $y=g(f(x))$ é derivável e vale a regra da cadeia:

$y'(x)=g'(u).f'(x)=g'(f(x)).f'(x)$, ou seja, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$.

Exemplos:

1. Dada a função $y=(x^2+5x+2)^7$, determinar $\dfrac{dy}{dx}$.

2. Dada a função $y=\left(\dfrac{3x+2}{2x+1}\right)^5$, encontrar y'.

3. Dada a função $y = (3x^2 + 1)^3.(x - x^2)^2$, determinar y'.

Proposição (Regra da Potência para Funções Quaisquer)

Se $u = g(x)$ é uma função derivável e n é um número inteiro não nulo, então $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}.g'(x)$.

Demonstração:
Fazendo $y = u^n$, onde $u = g(x)$, e aplicando a Regra da Cadeia, temos:
$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = n\,u^{n-1}.g'(x) = n\left[g(x)\right]^{n-1}.g'(x)$.

Observação: A Regra da Potência pode ser generalizada como segue e será demonstrada mais adiante:
Se $u = g(x)$ é uma função derivável e r é um número racional não nulo qualquer, então $\frac{d}{dx}[g(x)]^r = r[g(x)]^{r-1}.g'(x)$, ou seja, $\left(u^r\right)' = r\,u^{r-1}.u'$.

Exemplos:

1- Dada a função $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 5}$, determinar $f'(x)$.

2- Dada a função $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt[3]{t^3 + 1}}$, determinar $g'(t)$.

3- Determinar a derivada das seguintes funções:
a) $y = x^8 + \left(2x + 4\right)^3 + \sqrt{x}$

b) $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 3}}$

c) $y = \sqrt[3]{6x^2 + 7x + 2}$

4.12- Derivada da Função Inversa

Teorema

Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a,b). Suponhamos que $f(x)$ admita uma função inversa $x = g(y)$ contínua. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in (a,b)$, então $g = f^{-1}$ é derivável e vale $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(g(y))}$.

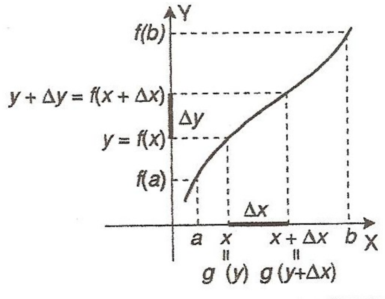
Demonstração:

Sejam $y = f(x)$ e $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Observamos que, como f possui uma inversa, se $\Delta x \neq 0$ temos que $f(x+\Delta x) \neq f(x)$ e, portanto, $\Delta y \neq 0$. Como f é contínua, quando $\Delta x \to 0$ temos que $\Delta y \to 0$.

Da mesma forma, quando $\Delta y \to 0$, então $\Delta x = g(y+\Delta y) - g(y)$ também tende a zero.

Por outro lado, para qualquer $y = f(x)$ vale a identidade:

$$\frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{(x+\Delta x) - x}{f(x+\Delta x) - f(x)} = \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} = \frac{1}{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$



Como $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in (a,b)$ obtemos

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Concluímos que $g'(y)$ existe e vale $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Exemplos:

1- Seja $y = f(x) = 4x - 3$. A sua inversa é dada por $x = g(y) = \dfrac{1}{4}(y+3)$. Temos $f'(x) = 4$ e $g'(y) = \dfrac{1}{4}$.

2- Seja $y = 8x^3$. Sua inversa é $x = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{y}$.

Como $y' = 24x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$ temos $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{24x^2} = \dfrac{1}{24\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{y}\right)^2} = \dfrac{1}{6y^{\frac{2}{3}}}$.

Para $x = 0$ temos $y = 0$ e $y' = 0$. Logo, não podemos aplicar o teorema para $x = 0$.

4.13- Derivadas das Funções Elementares

4.13.1 – Derivada da Função Exponencial

Se $y = a^x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = a^x.\ln a$. Em particular, se $y = e^x$, então $y' = e^x.\ln e = e^x$.

Demonstração:

Seja $y = f(x) = a^x$. Temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} a^x . \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x.\ln a.$$

4.13.2 – Derivada da Função Logarítmica

Se $y = \log_a x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = \frac{1}{x}\log_a e$. Em particular, se $y = \ln x$, então $y' = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$.

Demonstração:

Seja $y = f(x) = \log_a x$. Temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h/h}{x/h}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{x}}\right] =$$

$$= \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.\log_a e.$$

4.13.3 – Derivada da Função Exponencial Composta

Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de *x*, deriváveis num intervalo aberto I e $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, então $y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u\,.v'$.

Demonstração:

Usando as propriedades de logaritmos, podemos escrever $y = u^v = e^{\ln u^v} = e^{v.\ln u}$. Assim, $y = (gof)(x)$, onde $g(w) = e^w$ e $w = f(x) = v.\ln u$.

Como existem as derivadas $g'(w) = e^w$ e $f'(x) = v.\frac{1}{u.}.u' + \ln u\,.v'$, pela regra da cadeia temos:

$$y' = g'(w).f'(x) = e^w.\left(v.\frac{u'}{u} + \ln u\,.v'\right) = e^{v.\ln u}\left(v.\frac{u'}{u} + \ln u\,.v'\right) = u^v.v.\frac{u'}{u} + u^v.\ln u\,.v' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u\,.v'.$$

Observação: Usando a regra da cadeia obtemos as fórmulas gerais das derivadas das funções exponencial e logarítmica:

$y = a^u \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u.\ln a\,.u'$

$y = e^u \Rightarrow y' = e^u.u'$

$y = \log_a u \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1) \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\log_a e$

$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

Exemplos:

Determinar a derivada das seguintes funções:

a) $y = 3^{2x^2+3x-1}$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$

c) $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

d) $y = e^{x.\ln x}$

e) $y = \log_2(3x^2 + 7x - 1)$

f) $y = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$

g) $y = \left(x^2 + 1\right)^{2x-1}$

4.13.4 – Derivadas das Funções Trigonométricas

a) Derivada da Função Seno

Se $y = senx$, então $y' = \cos x$.

Demonstração:

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h) - senx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2sen\frac{x+h-x}{2}.\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2sen\frac{h}{2}.\cos\frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2sen\frac{h}{2}}{2.\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2} =$$

$$= 1.\cos x = \cos x.$$

b) Derivada da Função Cosseno

Se $y = \cos x$, então $y' = -senx$.

Demonstração:

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2sen\frac{x+h+x}{2}.sen\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2sen\frac{2x+h}{2}.sen\frac{h}{2}}{h} = -2\lim_{h\to 0}sen\frac{2x+h}{2}.\lim_{h\to 0}\frac{sen\frac{h}{2}}{2.\frac{h}{2}} =$$

$$= -2senx.\frac{1}{2}.1 = -senx.$$

c) Derivadas das demais Funções Trigonométricas

Como as demais funções Trigonométricas são definidas a partir do seno ou cosseno, podemos usar as regras de derivação para encontrar suas derivadas.

Por exemplo, se $y = tgx = \dfrac{senx}{\cos x}$ então $y' = \dfrac{\cos x.\cos x - senx(-senx)}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

Analogamente, encontramos:

$y = \cot gx \Rightarrow y' = -\cos\sec^2 x$

$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x.tgx$

$y = \cos\sec x \Rightarrow y' = -\cos\sec x.\cot gx$

Observação: Usando a regra da cadeia obtemos as fórmulas gerais das derivadas das funções trigonométricas:

$y = senu \Rightarrow y' = \cos u \ . \ u'$

$y = \cos u \Rightarrow y' = -senu \ . \ u'$

$y = tgu \Rightarrow y' = \sec^2 u \ . \ u'$

$y = \cot gu \Rightarrow y' = -\cos\sec^2 u \ . \ u'$

$y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \, .tgu \ . \ u'$

$y = \cos\sec u \Rightarrow y' = -\cos\sec u \, .\cot gu \ . \ u'$

Exemplos:

Determinar a derivada das seguintes funções:

a) $y = sen(x^2)$

b) $y = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $y = 3tg\sqrt{x} + \cot g3x$

d) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \cot gx}$

e) $y = \sec(x^2 + 3x + 7)$

f) $y = \cos\sec\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

4.13.5 – Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

a) Derivada da Função Arco Seno

Seja $f:[-1,1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = arc\,senx$.

Então $y = f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Demonstração:

Sabemos que: $y = arcsenx \Leftrightarrow x = seny,\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Como $(seny)'$ existe e é diferente de zero para todo $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, aplicando o teorema da função inversa obtemos:

$$y' = \frac{1}{(seny)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{para } x \in (-1,1).$$

b) Derivada da Função Arco Cosseno

Seja $f:[-1,1] \to [0,\pi]$ definida por $f(x) = arc\cos x$.

Então $y = f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Demonstração:

Usando a relação $arc\cos x = \dfrac{\pi}{2} - arc\,senx$ obtemos:

$$y' = (arc\cos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - arc\,senx\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{para } x \in (-1,1).$$

c) Derivada da Função Arco Tangente

Seja $f: R \to \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ definida por $f(x) = arc\,tgx$.

Então $y = f(x)$ é derivável e $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Demonstração:

Sabemos que: $y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy,\ y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Como $(tgy)'$ existe e é diferente de zero para todo $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, aplicando o teorema da função inversa obtemos:

$$y' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

d) Derivada da Função Arco Cotangente

Seja $f : R \to (0,\pi)$ definida por $f(x) = arc\,\text{cotg}x$.

Então $y = f(x)$ é derivável e $y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

Demonstração:

Usando a relação $arc\cot gx = \dfrac{\pi}{2} - arc\,tgx$ obtemos:

$$y' = (arc\cot gx)' = \left(\frac{\pi}{2} - arc\,tgx\right)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

e) Derivada da Função Arco Secante

Seja $f : (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \to \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ definida por $f(x) = arc\sec x$.

Então $y = f(x)$ é derivável em $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ e $y' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

Demonstração:

Usando a relação $arc\sec x = arc\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e a regra da cadeia obtemos:

$$y' = (arc\sec x)' = \left(arc\cos\left(\frac{1}{\text{x}}\right)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}.\left(\frac{1}{\text{x}}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}.\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2.\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{1}{\frac{x^2.\sqrt{x^2-1}}{|x|}} =$$

$$= \frac{|x|}{|x|^2.\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|.\sqrt{x^2-1}}$$, onde $|x| > 1$.

f) Derivada da Função Arco Cossecante

Seja $f : (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \to \left[-\dfrac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = arc\,\text{cossec}x$.

Então $y = f(x)$ é derivável em $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ e $y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

Demonstração:

Usando a relação $arc\,\text{cossec}x = arc\,sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e a regra da cadeia obtemos:

$$y' = (arc\,\text{cossec}x)' = \left(arc\,sen\left(\frac{1}{\text{x}}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}.\left(\frac{1}{\text{x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}.\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\frac{x^2.\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{-1}{\frac{x^2.\sqrt{x^2-1}}{|x|}} =$$

$$= \frac{-|x|}{|x|^2.\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{|x|.\sqrt{x^2-1}}$$, onde $|x| > 1$.

Observação: Usando a regra da cadeia obtemos as fórmulas gerais das derivadas das funções trigonométricas inversas:

$y = arc\,sen u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = arc\cos u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = arc\,tg u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$y = arc\cot g u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

$y = arc\sec u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u|.\sqrt{u^2-1}}$

$y = arc\cos\sec u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|.\sqrt{u^2-1}}$

Exemplos:

Determinar a derivada das seguintes funções:

a) $y = arc\,sen(x+1)$

b) $y = arc\,tg\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

4.13.6 – Derivadas das Funções Hiperbólicas

Como as Funções Hiperbólicas são definidas em termos da função exponencial, podemos determinar suas derivadas usando as regras de derivação já estabelecidas.

Por exemplo, se $y = senhx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ então $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-1)\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$.

Analogamente, obtemos as derivadas das demais funções hiperbólicas.

Observação: Usando a regra da cadeia obtemos as fórmulas gerais das derivadas das funções hiperbólicas:

$y = senhu \Rightarrow y' = \cosh u\ .\ u'$

$y = \cosh u \Rightarrow y' = senhu\ .\ u'$

$y = tghu \Rightarrow y' = \sec h^2 u\ .\ u'$

$y = \cot ghu \Rightarrow y' = -\cos\sec h^2 u\ .\ u'$

$y = \sec hu \Rightarrow y' = -\sec hu\,.\,tghu\ .\ u'$

$y = \cos\sec hu \Rightarrow y' = -\cos\sec hu\,.\,\cot ghu\ .\ u'$

Exemplos:

Determinar a derivada das seguintes funções:

a) $y = senh(x^3 + 3)$

b) $y = \sec h(2x)$

c) $y = \ln[tgh(3x)]$

d) $y = \cot gh(1 - x^3)$

4.13.7 – Derivadas das Funções Hiperbólicas Inversas

Vimos que $y = \arg senhx$ pode ser expresso na forma $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. Assim,

$$y' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}.2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}.\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Analogamente obtemos as derivadas das demais funções hiperbólicas inversas.

Observação: Usando a regra da cadeia obtemos as fórmulas gerais das derivadas das funções hiperbólicas inversas:

$$y = \arg senhu \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$y = \arg\cosh u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}},\ u > 1$$

$$y = \arg tghu \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2},\ |u| < 1$$

$$y = \arg\cot ghu \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2},\ |u| > 1$$

$$y = \arg\sec hu \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}},\ 0 < u < 1$$

$$y = \arg\cos\sec hu \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}},\ u \neq 0$$

Exemplos:

Determinar a derivada das seguintes funções:

a) $y = x^2.\arg\cosh x^2$

b) $y = \arg tgh(sen3x)$

c) $y = x.\arg senhx - \sqrt{x^2 + 1}$

4.14- Tabela Geral de Derivadas

Sejam u e v funções deriváveis de x e c, α e a constantes.

(1) $y = c \Rightarrow y' = 0$

(2) $y = x \Rightarrow y' = 1$

(3) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$

(4) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

(5) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

(6) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

(7) $y = u^{\alpha}, (\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$

(8) $y = a^u \; (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

(9) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$

(10) $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$.

(11) $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

(12) $\underset{(u > 0)}{y = u^v} \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$

(13) $y = \text{sen}\, u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$

(14) $y = \cos u \Rightarrow y' = -\text{sen}\, u \cdot u'$

(15) $y = \text{tg}\, u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$

(16) $y = \text{cotg}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosec}^2\, u \cdot u'$

(17) $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \text{tg}\, u \cdot u'$

(18) $y = \text{cosec}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosec}\, u \cdot \text{cotg}\, u \cdot u'$

(19) $y = \text{arc sen}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

(20) $y = \text{arc cos}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

(21) $y = \text{arc tg}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

(22) $y = \text{arc cotg}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

(23) $y = \text{arc sec}\, u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}}, \; |u| > 1$

(24) $y = \text{arc cosec}\, u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}}, \; |u| > 1$

(25) $y = \text{senh}\, u \Rightarrow y' = \cosh u \cdot u'$

(26) $y = \cosh u \Rightarrow y' = \text{senh}\, u \cdot u'$

(27) $y = \text{tgh}\, u \Rightarrow y' = \text{sech}^2\, u \cdot u'$

(28) $y = \text{cotgh}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosech}^2\, u \cdot u'$

(29) $y = \text{sech}\, u \Rightarrow y' = -\text{sech}\, u \cdot \text{tgh}\, u \cdot u'$

(30) $y = \text{cosech}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosech}\, u \cdot \text{cotgh}\, u \cdot u'$

(31) $y = \text{arg senh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$

(32) $y = \text{arg cosh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}, \; u > 1$

(33) $y = \text{arg tgh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}, \; |u| < 1$

(34) $y = \text{arg cotgh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}, \; |u| > 1$

(35) $y = \text{arg sech}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u \sqrt{1 - u^2}}, \; 0 < u < 1$

(36) $y = \text{arg cosech}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u| \sqrt{1 + u^2}}, \; u \neq 0$

4.15- Exercícios

Páginas 159, 160, 161, 162 e 163 do livro texto.

4.16- Derivadas Sucessivas

Definição

Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada derivada segunda de f e é representada por f'' (lê-se f duas linhas) ou $\frac{d^2f}{dx^2}$ (lê-se derivada segunda de f em relação a x).

Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada por f''', é chamada derivada terceira de *f*.

A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}$, é obtida derivando-se a derivada de ordem (n – 1) de *f*.

Exemplos:

1- Se $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$, então $f'(x) = 6x + 8$ e $f''(x) = 6$.

2- Se $f(x) = tgx$, então $f'(x) = \sec^2 x$ e $f''(x) = 2\sec x.\sec x.tgx = 2\sec^2 x.tgx$.

3- Se $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, então

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}.2x = x\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ e } f''(x) = x.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}.2x + \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}.1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

4- Se $f(x) = 3x^5 + 8x^2$, então

$f'(x) = 15x^4 + 16x$, $f''(x) = 60x^3 + 16$, $f'''(x) = 180x^2$, $f^{(4)}(x) = 360x$, $f^{(5)}(x) = 360$ e $f^{(n)}(x) = 0, n \geq 6$.

5- $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, então $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$, $f'''(x) = \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}$, $f^{(n)} = \frac{1}{2^n}e^{\frac{x}{2}}$.

6- Se $f(x) = senx$, então $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -senx$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)} = senx$, ou seja,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x \ , \text{ para } n = 1,5,9,... \\ -senx \ , \text{ para } n = 2,6,10,... \\ -\cos x \ , \text{ para } n = 3,7,11,... \\ senx \ , \text{ para } n = 4,8,12,... \end{cases}.$$

4.17- Derivação Implícita

Definição – Função na forma implícita

Consideremos a equação $F(x,y) = 0$. Dizemos que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y) = 0$, se substituirmos y por $f(x)$ em $F(x,y) = 0$, esta equação se transforma em uma identidade.

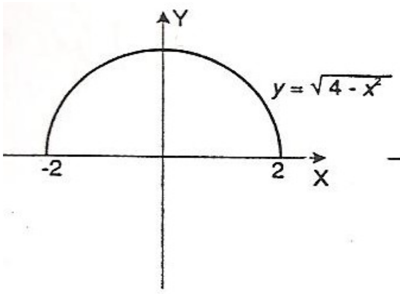
Exemplos:

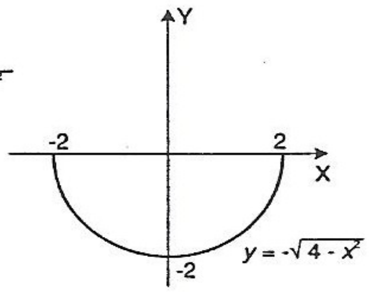
1- A equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ define implicitamente a função $y = 2(1 - x^2)$.

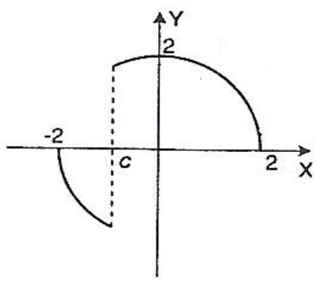
De fato, substituindo $y = 2(1 - x^2)$ na equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, obtemos a identidade $x^2 + \frac{1}{2}.2(1 - x^2) - 1 = 0$.

2- A equação $x^2 + y^2 = 4$ define implicitamente uma infinidade de funções.

Por exemplo, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $h_c(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & , \text{ se } \ c \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4 - x^2} & , \text{ se } -2 \leq x < c \end{cases}$, onde $c \in R$, $-2 < c < 2$.







3- Nem sempre é possível encontrar a forma explícita de uma função definida implicitamente, como por exemplo $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $y^4 + 3xy + 2\ln y = 0$.

A Derivada de uma Função na Forma Implícita

Suponhamos que $F(x,y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. Os exemplos que seguem mostram que, usando a regra da cadeia, podemos determinar y' sem explicitar y.

1- Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, determinar y'.

2- Sabendo que $y = f(x)$ é definida pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determinar y'.

3- Se $y = f(x)$ é definida por $x^2y^2 + x.seny = 0$, determinar y'.

4- Determinar a equação da reta tangente à curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ no ponto $(-1,0)$.

5- Determinar as equações da reta tangente e da reta normal à circunferência de centro $(2,0)$ e raio 2, nos pontos de abscissa 1.

4.18- Exercícios

Páginas 176 e 177 do livro texto (números 1 ao 22).