CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO: MATEMÁTICA DISCRETA

PROF. ANTONIO F. CANUTO – CAMPUS TIANGUÁ

INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ

MATEMÁTICA DISCRETA

INSTITUTO FEDERAL CEARÁ

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS
TEORIA DOS CONJUNTOS
• Teoria de conjuntos e relações entre conjuntos.
RELAÇÕES E FUNÇÕES
• Definição, propriedades, tipos de funções.

- Propriedades dos números inteiros.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

- Permutação, arranjo e combinação.

INDUÇÃO MATEMÁTICA

- O Princípio de Indução Matemática
- Definição por Recorrência
- Progressões
- Somatórios
- Binômio de Newton

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

- Propriedades básicas
- Teorema Fundamental da Aritmética
- Relação de equivalência
- Noções Básicas de Aneis.

Num grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei; 20 jogam vôlei e xadrez; 22 jogam xadrez e tênis; 18 jogam vôlei e tênis; 11 jogam as três modalidades. O número de pessoas que jogam xadrez é igual ao número de pessoas que jogam tênis. Pergunta-se:

a) quantos jogam tênis e não jogam vôlei?

b) quantos jogam xadrez ou tênis e não jogam vôlei?

c) quantos jogam vôlei e não jogam xadrez?

Num grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei; 20 jogam vôlei e xadrez; 22 jogam xadrez e tênis; 18 jogam vôlei e tênis; 11 jogam as três modalidades. O número de pessoas que jogam xadrez é igual ao número de pessoas que jogam tênis. Pergunta-se:

a) quantos jogam tênis e não jogam vôlei?

b) quantos jogam xadrez ou tênis e não jogam vôlei?

c) quantos jogam vôlei e não jogam xadrez?

Resp) a) 36 b) 59 c) 20

Numa escola de 630 alunos, 350 deles estudam Matemática, 210 estudam Física e 90 deles estudam as duas matérias (Matemática e Física).

Pergunta-se:

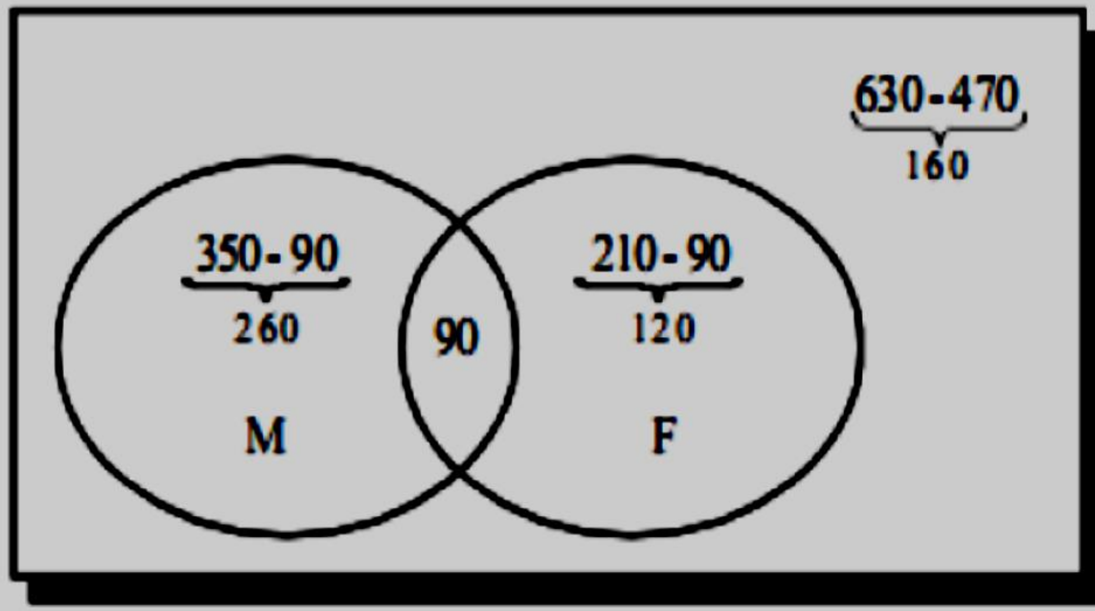
a) quantos alunos estudam apenas Matemática? (Estudam Matemática mas não estudam Física.)

b) quantos alunos estudam apenas Física? (Estudam Física mas não estudam Matemática.)

c) quantos alunos estudam Matemática ou Física?

d) quantos alunos não estudam nenhuma das duas matérias?

Vamos fazer um diagrama:



a) Se 350 alunos estudam Matemática e 90 deles estudam Matemática e Física, então o número de alunos que estudam apenas Matemática é: 350 – 90 = 260.

b) Se 210 alunos estudam Física e 90 deles estudam Matemática e Física, então o número de alunos que estudam apenas Física é: 210 – 90 = 120.

c) Se 260 alunos estudam apenas Matemática, 120 estudam apenas Física e 90 estudam Matemática e Física, então o número de alunos que estudam Matemática ou Física é: 260 + 120 + 90 = 470.

d) Se a escola tem 630 alunos e 470 estudam Matemática ou Física, então o número de alunos que não estudam nenhuma das duas matérias é: 630 – 470 = 160.

1 - (ENEM 2000) Um boato tem um público alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhece o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhece. Em outras palavras, sendo R a rapidez e propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhece o boato, tem-se: $R(x) = kx(P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato. Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11000
b) 22000
c) 33000
d) 38000
e) 44000

Solução: Sendo P = 44 000 temos R(x) = kx(44 000 – x)

$R(x) = -kx^2 + 44\,000kx$

Para se obter o número de pessoas onde teremos a máxima rapidez de propagação, basta utilizar o xv = - b/2a = -44 000/-2 = 22 000

Letra B.

Questão 2 (UNIT-SE). Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado pela lei abaixo, onde k é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.

$$v(t) = k.2^{-0,2t}$$

a) 48000

b) 48500

c) 64000

d) 45900

e) 84000

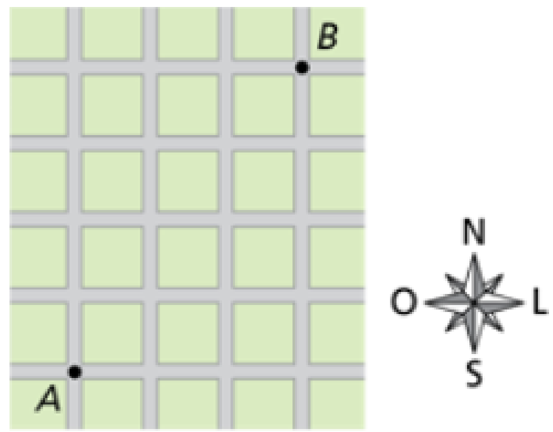
Pela lei da função v(t), é fácil perceber que v(0) = k, ou seja, o valor de compra da máquina é justamente k. Nosso objetivo será descobrir o valor dessa constante.

Pelo enunciado, temos que v(10) = 12 000. Temos então:

$$v(t) = k.2^{-0,2t}$$
$$12000 = k.2^{-0,2.10}$$
$$12000 = k.2^{-2}$$
$$12000 = k.\frac{1}{4}$$
$$k = 12000.4$$
$$k = 48000$$

Resposta: A

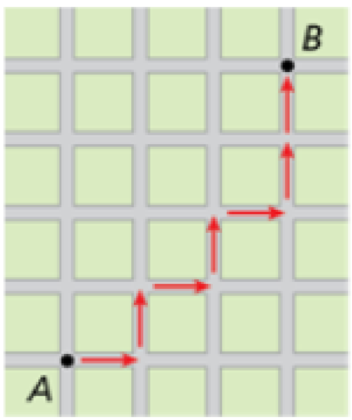
R11. Na figura abaixo, que representa parte do mapa de uma cidade, as ruas são indicadas com a cor cinza.



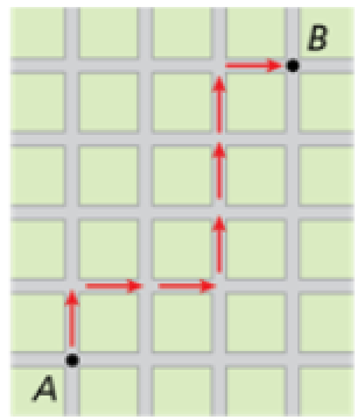
Pedro sai de carro do ponto *A* e vai até o ponto *B*, dirigindo-se sempre para o norte (N) ou para o leste (L), realizando, desse modo, trajetórias de comprimento mínimo. Quantas são as possíveis trajetórias que Pedro pode fazer?

Resolução

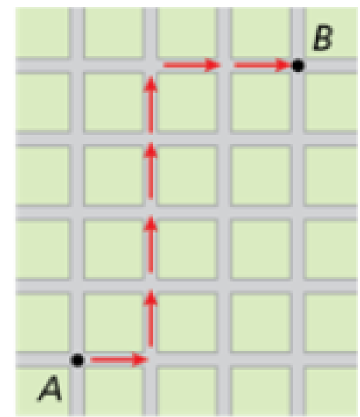
Observe algumas das trajetórias possíveis:



(L, N, L, N, L, N, N)



(N, L, L, N, N, N, L)



(L, N, N, N, N, L, L)

Resolução

Note que, qualquer que seja o caminho, Pedro fará sempre 4 movimentos para o norte e 3 para o leste, só alterando a ordem em que realiza esses movimentos. Assim, cada trajetória pode ser representada por uma sequência de 7 termos, sendo 4 iguais a N e 3 iguais a L.

Para determinar o número de trajetórias, basta calcular o número de permutações de 7 elementos com repetição de 4 e de 3. $P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{6}} = 7 \cdot 5 = 35$

Cristina e Pedro vão com outros seis amigos, três moças e três rapazes, para uma excursão. No ônibus que vai fazer a viagem sobraram apenas quatro bancos vagos, cada um deles com dois assentos, todos numerados. Ficou acertado que cada banco vago será ocupado por uma moça e um rapaz, e que Cristina e Pedro se sentarão juntos. Respeitando-se esse acerto, de quantas maneiras o grupo de amigos pode se sentar nos assentos vagos do ônibus? Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO:

Primeiro vê-se de quantas maneiras os casais podem ser formados. Ordenando os rapazes, o primeiro rapaz tem 3 possibilidades entre as moças, o segundo tem 2 e o terceiro fica determinado pelos outros. Assim, são 6 possíveis formações de casais. Para cada formação há várias maneiras de escolher seus bancos. Sendo 4 bancos para os 4 casais, são $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades. Mas cada casal pode escolher os assentos de seu banco de duas maneiras, então para cada escolha dos casais nos bancos ainda temos $2^4 = 16$ posicionamentos possíveis.

São, portanto, $6 \cdot 24 \cdot 16 = 2304$ maneiras de o grupo se sentar, nas condições impostas.

INSTITUTO FEDERAL CEARÁ

MATEMÁTICA DISCRETA

CALCULE OS VALORES DAS SOMAS

A) $1+2+3+4+ \ldots + 1000 =$

B) $21+28+35+ \ldots + 777 =$

C) $0,7+0,07+,0007+ \ldots =$

D) $\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{10000}+\ldots=$

P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ — $+R$

1) $\boxed{R = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = K}$ (razão)

2) Fórmula: $\boxed{a_n = a_b + (n-b).R}$

3) Soma dos termos: $\boxed{S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}}$

4) $(a_1, a_2, a_3) = (x-R, x, x+R)$

P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ — $\times q$

1) $\boxed{q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = K}$ (razão)

2) Fórmula: $\boxed{a_n = a_b . q^{n-b}}$

3) Soma dos termos: $\boxed{S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}}$

4) $(a_1, a_2, a_3) = (x/q, x, x.q)$

5) $\boxed{S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}}$

01) (UEL) A seqüência ($2x + 5$, $x + 1$, $x/2$), com $x \in \Re$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo desta seqüência é:

01) (UEL) A seqüência ($2x+5$, $x+1$, $x/2$), com $x \in \Re$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo desta seqüência é:

a) 2
b) 3^{-10}
c) 3
d) 3^{10}
e) 3^{12}

Lembrem, se 3 números estão em PG então:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \qquad \frac{x+1}{2x+5} = \frac{x/2}{x+1} \qquad \cancel{x^2} + 2x + 1 = \cancel{x^2} + 5x/2$$

$x=2$

$a_1 = 2.2+5 = 9$

$a_2 = 2+1 = 3$

$a_3 = 2/2 = 1$

$q = a_2/a_1 = 3/9 = 1/3$

A fórmula do termo geral de uma PG é dado por:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

$a_{13} = a_1.q^{12} = 9.(1/3)^{12}$

$a_{13} = 3^{-10}$

Prove por indução matemática que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, n \geq 1.$$

Prove por indução matemática que

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, n\geq 1.$$

Resposta:

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n=1$, $1=1^2$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n=k, k\geq 1$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2, k\geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2, k\geq 1$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) &= k^2+(2k+1)\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Prove por indução matemática que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

INSTITUTO FEDERAL CEARÁ

MATEMÁTICA DISCRETA

(a) Passo base: Para $n = 1$, $1^2 = 1$ e $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

A sequência de Fibonacci $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definida recursivamente pleas equações

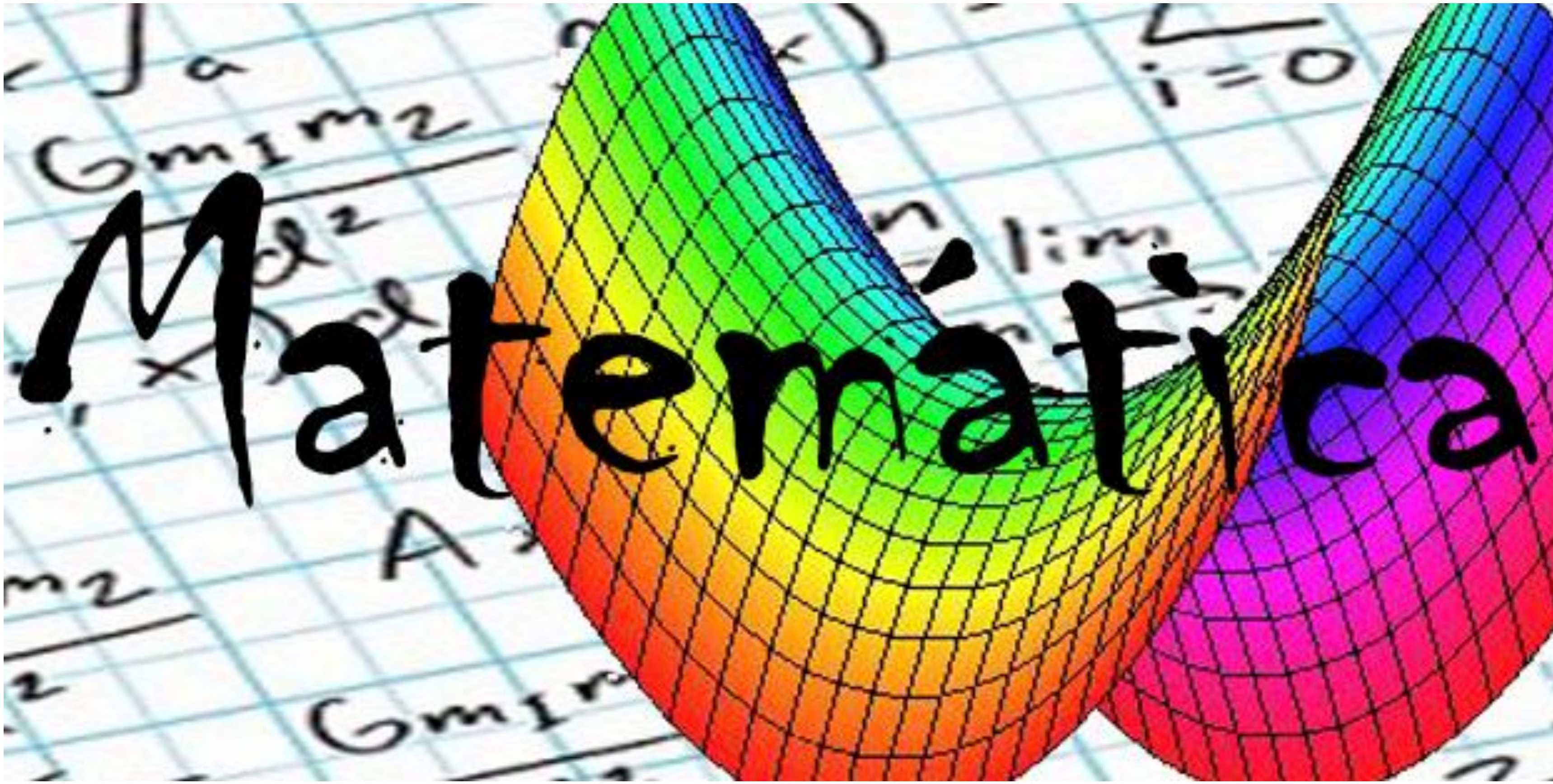
$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 \quad \text{e} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

A sequência é

$$\{1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}.$$

Um fato bastante conhecido sobre a sequência de Fibonacci é a sua forma fechada, denotada por *Fórmula de Binet*. Em outras palavras, podemos calcular os termos de $(F_n)_n$ sem recorrermos aos seus dois termos anteriores:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$


Matemática