Elementos de Cálculo I - 2016 - Notas de Aulas 6
Prof Carlos Alberto S Soares

1 Apresentação e Exemplos

1.1 Definição e Primeiros Exemplos

Definição 1.1 *Seja x_0 um ponto no domínio de uma função f. Definimos a derivada de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, o número dado por*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \qquad (*)$$

se tal limite existe, isto é, se tal limite é um número real. Diremos, neste caso, que f é derivável em x_0.

Exemplo 1.2 *Determine a derivada de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 1$.*

Solução 1.3 *Teremos*

$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(2+h) = 2.$

Logo, $f'(1) = 2$.

Observação 1.4 *Na definição 1 poderíamos fazer uma mudanção de varável do tipo $x = x_0+h$ e o limite seria dado, então, por*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (**).$$

Exemplo 1.5 *Determine a derivada de $f(x) = x^2$ num ponto x_0 qualquer.*

Solução 1.6 *Teremos*

$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0.$

Logo, $f'(x_0) = 2x_0$.

Muitas vezes, a derivada pode não existir num certo ponto x_0 pertencente ao domínio de uma função f. Vejamos dois exemplos clássicos onde tal situação acontece.

Exemplo 1.7 *Determine a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ em $x_0 = 0$.*

Solução 1.8 *Neste exemplo, utilizaremos a fórmula (**) apresentada na observação acima. Então, teremos*

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Logo, para esta função, não existe $f'(0)$, isto é, f não é derivável em $x_0 = 0$.

Exemplo 1.9 *Determine $f'(0)$, sendo $f(x) = |x|$.*

Solução 1.10

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Como $|h| = \begin{cases} h & se \quad h \geq 0 \\ -h & se \quad h < 0 \end{cases}$, *devemos determinar os limites laterais e, portanto, temos*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Como os limites laterais são diferentes, o limite não existe, isto é, para a função $f(x) = |x|$ não existe $f'(0)$, ou ainda, f não é derivável em $x_0 = 0$.

1.2 Interpretação Geométrica - A reta tangente

Observemos que, se x_0 e $x_0 + h$ são dois números no domínio de uma função f, os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ estarão no gráfico de f e, portanto, o coeficiente angular da reta que passa por estes dois pontos será dado por

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Logo, a derivada é simplesmente o limite destes coeficientes angulares quando h tende a zero e, daí, definiremos a reta tangente ao gráfico de uma função no ponto de abscissa x_0, ou $(x_0, f(x_0))$, como sendo a reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e tem coeficiente angular dado por

$$m = f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}.$$

Logo, é simples ver que a equação da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto de abscissa x_0 ou $(x_0, f(x_0))$ será dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

desde que exista $f'(x_0)$.

Exemplo 1.11 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* $f(x) = x^2$ *no ponto de abscissa* $x_0 = 1$.

Solução 1.12 *A reta procurada deve passar pelo ponto* $(1, f(1))$ *que, neste caso, será* $(1, 1)$ *e deve ter coeficiente angular dado por* $f'(1) = 2$*(determinado no exemplo anterior) e, daí, a equação da reta tangente será*

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou, ainda, } y = 2x - 1.$$

Observe que, pelo exemplo 4, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto de abscissa x_0 será dada por

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0).$$

Exemplo 1.13 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ *no ponto de abscissa* $x_0 = 3$.

Solução 1.14 *Enfatizamos que a reta procurada deve passar pelo ponto* $(3, \sqrt{3})$ *e ter coeficiente angular* $f'(3)$*. Determinemos* $f'(3)$*. Teremos*

$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} \frac{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. *A equação da tangente será*

$$y - \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x - 3) \text{ ou, ainda, } y = \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

Observe que, usando o limite (**) teríamos

$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Exemplo 1.15 *Se existir, determine uma reta tangente ao gráfico de* $f(x) = x^3$ *que seja paralela à reta de equação* $y - 6x + 1 = 0$

Solução 1.16 *A reta a ser determinada deve satisfazer:*

1) Ter coeficiente angular igual a 6, que é o coeficiente angular da reta dada (retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular)

2) A reta deve ser tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$*, isto é, deve existir um número* x_0 *tal que a reta passe e seja tangente ao gráfico no ponto* $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0^3)$*. Existindo tal número* x_0*, sabemos que o coeficiente angular da tangente deve ser dado por* $f'(x_0)$ *e, daí, devemos encontrar um número* x_0 *tal que* $f'(x_0)$ *seja igual a 6.(coeficiente angular da reta procurada)*

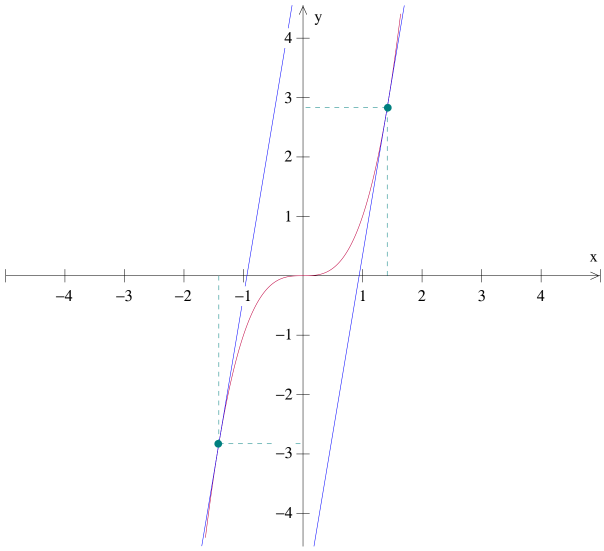
Para um número x_0 *qualquer temos*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{((x_0+h) - x_0)((x_0+h)^2 + (x_0+h)x_0 + x_0^2)}{h} = 3x_0^2$$

Devemos encontrar x_0 tal que $3x_0^2 = 6$ e, portanto, $x_0 = \pm\sqrt{2}$. Teremos duas retas, ambas de coeficiente angular igual a 6 tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3$, uma passando pelo ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}^3)$ e outra passando pelo ponto $(-\sqrt{2}, (-\sqrt{2}^3))$. Observando que $\sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$, teremos as retas

$$y - 2\sqrt{2} = 6(x - \sqrt{2}) \ \ e \ \ y + 2\sqrt{2} = 6(x + \sqrt{2}).$$

Veja a figura a seguir.



2 Propriedades Operatórias da Derivada

2.1 A função derivada

Determinamos, anteriormente, para a função $f(x) = x^2$, a derivada em um ponto x_0 qualquer de seu domínio, encontrando $f'(x_0) = 2x_0$. Neste caso, temos a função derivada de f dada por $f'(x) = 2x$. Bem entendido, a função derivada de uma função f será a função $f'(x)$ que para cada x nos fornece a derivada de f no ponto x e, portanto, se quisermos determinar a derivada num ponto particular x_0 basta substituí-lo na função derivada e tomarmos o resultado. O domínio da função original f e de sua derivada f' pode não ser o mesmo, isto é, ao passarmos à derivada o domínio pode diminuir. Derivar uma função f é, simplesmente, determinar sua função derivada, isto é, $f'(x)$.

Exemplo 2.1 *Para a função $f(x) = |x|$ teremos*

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Como mostrado acima, para esta função não existe $f'(0)$ e, portanto, 0 não pertence ao domínio de f', apesar de pertencer ao domínio de f. (Mostre que a derivada de f é realmente a função acima, isto é, determine $f'(x)$ num ponto x qualquer.)

Exemplo 2.2 *Sendo $f(x) = \sqrt{x}$, teremos*

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Note que domínio de f é o intervalo $[0, \infty[$, mas o domínio de f' é o intervalo $]0, \infty[$.

Exemplo 2.3 *Por um exemplo anterior, sabemos que a derivada de $f(x) = x^3$ é $f'(x) = 3x^2$ e, neste caso, o domínio de ambas as funções é $\mathbb{R}$.*

2.2 Primeiras regras de derivação

Determinemos a derivada de algumas funções particulares.

Exemplo 2.4 *Derivada da função $f(x) = x^4$.*

Solução 2.5 $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 = 4x^3$

De maneira geral, poderíamos mostrar que se $f(x) = x^n$, com n um número natural não nulo, então

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Exemplo 2.6 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^{500}$ no ponto de abscissa $x_0 = 20$.*

Solução 2.7 *Pela fórmula obtida acima temos que $f'(x) = 500x^{499}$ e, portanto, $f'(20) = 500.20^{499}$. A equação da reta procurada será*

$$y - 20^{500} = 500.20^{499}(x - 20)$$

Exemplo 2.8 (Derivada da função constante) *Seja f uma função constante, isto é, $f(x) = k$ e determinemos sua derivada.*

Solução 2.9 $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$. *Logo, para qualquer função constante teremos,*

$$f'(x) = 0 \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{R}$$

.

Exemplo 2.10 (Derivada de uma soma ou diferença de duas funções) *Suponhamos que, de alguma forma, conhecemos a derivada de duas funções f e g num ponto x_0, isto é, conhecemos $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$. Como determinar a derivada da função $H(x) = f(x) \pm g(x)$ no ponto x_0? Vejamos!*

Solução 2.11 $H'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{H(x_0+h)-H(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\pm g(x_0+h)-(f(x_0)\pm g(x_0))}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x-0)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x-0)}{h} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

Logo,

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Exemplo 2.12 *Determine a derivada da função* $f(x) = x^5 - x^4 + x^2 + 1$.

Solução 2.13 $f'(x) = (x^5)' - (x^4)' + (x^2)' + (1)' = 5x^4 - 4x^3 + 2x$.

Tal como fizemos acima, poderíamos mostrar que, sendo k um número real e f uma função, teremos

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Exemplo 2.14 *Determine a derivada da função* $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 4$.

Solução 2.15 $f'(x) = (5x^3)' - (2x^2)' + (4)' = 5(x^3)' - 2(x^2)' = 5.3x^2 - 2.2x = 15x^2 - 4x$.

Resumindo, até o momento, temos as seguintes fórmulas para derivadas:

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$, n um número natural não nulo.

2) $(k)' = 0$

3) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

4) $(kf(x))' = kf'(x)$

2.3 Exercícios

1. (a) Use a definição para determinar a derivada da função $f(x) = x^{1/3}$ em $x_0 = 4$.

   (b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^{1/3}$ no ponto de abscissa 4.

2. Determine a derivada das funções abaixo:

   (a) $f(x) = x^{20}$

   (b) $f(x) = 20x^5$

   (c) $f(x) = 1$

   (d) $f(x) = 7x^5 + 4x^3 - 2$

3. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \leq 2 \\ 2x - 2 & x \quad > 2 \end{cases}$$

   pede-se:

   (a) Determine $\lim_{x\to 2} f(x)$

   (b) f é contínua em $x = 2$? Justifique!

   (c) Determine, se existir, a derivada de f em $x_0 = 2$? Justifique!

4. Determine, se existir, a equação de uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^5$ que seja paralela à reta $y - 5x + 1 = 0$.

5. Determine, se existir, a equação de uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^4$ que seja perpendicular à reta $y - 2x + 1 = 0$.

6. A função $f(x) = |x - 1|$ é derivável em $x_0 = 1$? (Em outras palavras, existe $f'(1)$ sendo $f(x) = |x - 1|$?)

7. Sendo
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se \quad x < 3 \\ 8 - x & se \quad x \geq 3 \end{cases}$$
pede-se:
(a) Determine $\lim_{x \to 3} f(x)$
(b) f é contínua em $x = 3$? Justifique!
(c) f é derivável em $x = 3$? Justifique!
(d) f é derivável em $x = 2$? Justifique!

2.4 Derivada do produto ou quociente de duas funções

Sabemos que conhecendo a derivada de duas funções f e g, é muito simples determinarmos a derivada das funções $f - g$ e $f + g$ pois

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{e} \quad (f - g)' = f' - g'.$$

O que dizer sobre a derivada do produto ou quociente, isto é, como determinarmos

$$(fg)' \quad \text{ou} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'$$

se conhecemos f' e g'?

O teorema abaixo, que admitiremos sem demonstração, nos mostrará como resolver tal problema.

Teorema 2.16 *Sejam f e g duas funções deriváveis em x_0. Então:*

1) A função fg é derivável em x_0 e teremos

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Em outras palavras,

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

2) Estando bem definida, a função $(\frac{f}{g})$ é derivável em x_0 e teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Em outras palavras,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.17 *Determine a derivada da função* $f(x) = (x^2+1)(3x^3+4x)$.

Solução 2.18 *Sabemos que*

$(x^2+1)' = 2x$ *e* $(3x^3+4x)' = 9x^2+4$. *Utilizando 1, acima, teremos*

$f'(x) = [(x^2+1)(3x^3+4x)]' = 2x(3x^3+4x) + (x^2+1)(9x^2+4)$

Exemplo 2.19 *Determine a derivada da função* $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(3x^3+4x)}$.

Solução 2.20 *Tal como acima teremos*

$(x^2+1)' = 2x$ *e* $(3x^3+4x)' = 9x^2+4$. *Utilizando 2, teremos*

$f'(x) = [\frac{(x^2+1)}{(3x^3+4x)}]' = \frac{2x(3x^3+4x)-(x^2+1)(9x^2+4)}{(3x^3+4x)^2}$

Exemplo 2.21 *Determine a derivada da função* $f(x) = \frac{(x^2+1)(3x^3+4x)}{x^4+2x}$.

Solução 2.22 *Neste caso, temos um quociente onde no numerador temos um produto e, aplicando a derivada do quociente, teremos*

$f'(x) = (\frac{(x^2+1)(3x^3+4x)}{x^4+2x})' = \frac{[(x^2+1)(3x^3+4x)]'(x^4+2x)-(x^2+1)(3x^3+4x)(x^4+2x)'}{(x^4+2x)^2}$

Observe que ainda não derivamos, somente indicamos as derivadas a serem realizadas. Talvez, neste início, seja aconselhável agir desta forma visando minimizar as chances de erro. Do primeiro exemplo acima sabemos que $[(x^2+1)(3x^3+4x)]' = 2x(3x^3+4x)+(x^2+1)(9x^2+4)$ *e, daí, teremos*

$f'(x) = \frac{[2x(3x^3+4x)+(x^2+1)(9x^2+4)](x^4+2x)-(x^2+1)(3x^3+4x)(4x^3+2)}{(x^4+2x)^2}$.

Salvo casos extremamente necessários podemos deixar o resultado tal como encontrado.

Exemplo 2.23 *Sendo* $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$, *determine as números* x *tais que* $f'(x) > 0$.

Solução 2.24 *Aplicando a derivada do quociente, teremos*

$f'(x) = (\frac{x-2}{x+2})' = \frac{1.(x+2)-(x-2).1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$ *e, portanto,* $f'(x) > 0$ *pata todo número* x.

Exemplo 2.25 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ *no ponto de abscissa* $x_0 = 3$.

Solução 2.26 *Lembramos que a reta tangente ao gráfico de uma função $f(x)$ num ponto de abscissa x_0 será a reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem coeficiente angular igual a $f'(x_0)$. Neste caso, como $f(3) = 1/5$, a reta tangente procurada deverá passar pelo ponto $(3, \frac{1}{5})$ e ter coeficiente angular $f'(3) = \frac{4}{(3+2)^2} = \frac{4}{25}$. Portanto, a reta tangente terá equação*

$$y - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}(x - 3)$$

Observação 2.27 *Anteriormente mostramos que, sendo n um número natural, a derivada da função $f(x) = x^n$ é dada por $f'(x) = nx^{n-1}$. Utilizando a regra da derivada do quociente é simples mostrar que este resultado ainda permanece verdadeiro se n é um número inteiro não nulo, ainda que negativo. Teremos, ainda, o resultado válido se $n = \frac{1}{p}$ com p um número inteiro não nulo, desde que verificadas as condições de existência. Vejamos alguns exemplos.*

Exemplo 2.28 *Determine a derivada da função $f(x) = \frac{1}{x^3}$.*

Solução 2.29 *Note que $f(x) = x^{-3}$ e, usando a observação anterior, teremos*

$$f'(x) = (-3)x^{-3-1} = -3x^{-4}, \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Exemplo 2.30 *Determine a derivada da função $f(x) = \sqrt[5]{x}$.*

Solução 2.31 *De maneira análoga ao anterior teremos*

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-1/4}, \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Exemplo 2.32 *Determine a derivada da função $f(x) = \sqrt[4]{x}$.*

Solução 2.33 *Utilizando, novamente, a observação acima teremos*

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \forall\, x > 0.$$

2.5 Exercícios

1. Em cada item abaixo determine a derivada da função dada.

$(a) y = x^\pi$	$(b) f(x) = 5x^{\pi+2}$	$(c) y = \frac{3}{5}x^{15}$
$(d) f(x) = \frac{3}{5}x^{5/3}$	$(e) f(x) = 2x^2\sqrt{x}$	$(f) y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
$(g) y = x^{-7/8}/\sqrt{x}$	$(h) f(x) = x^7 - \frac{5x^6}{3} + \frac{3x^5}{5} - x^4 + 2x - 3$	$(i) y = \sqrt{x}(x-1)$
$(j) f(x) = (3x^2 - 1)(x^2 + 2)$	$(k) y = (ax + b)(\alpha x + \beta)$	
$(l) f(x) = y = (x + a)/(x - a)$	$(m) f(x) = (\sqrt{x} + a)/(\sqrt{x} - a)$	
$(n) f(x) = (x^2 - 3x + 1)/(x^2 - 1)$	$(o) y = (ax^2 + bx + c)/(Ax^2 + Bx + C)$	

2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = (5x-1)(4+3x)$ no ponto de abscissa $x_0 = 0$.

3. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \frac{x}{2x+3}$ no ponto de abscissa $x_0 = -1$.

4. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = (3\sqrt{x}+x)(2-x^2)$ no ponto de abscissa $x_0 = 1$.

5. Determine a equação da reta tangente à curva de equação $y = x^3 - x^2 + 2x$ no ponto de abscissa 1. Encontre, se existir, um outro ponto onde essa tangente toca a curva.

3 Derivada da composta de duas funções (Regra da cadeia)

3.1 Função composta

Sabemos que, sendo f e g duas funções, podemos determinar a composta de f e g $(f \circ g)$ fazendo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Lembremos que a composta $f \circ g$ está bem definida se, e somente se, o conjunto imagem da função g está contido no domínio da função f.

Exemplo 3.1 *Detemine $f \circ g$ e $g \circ f$ sendo $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x^3 + x^2 + 4$.*

Solução 3.2 *Teremos*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^3 + x^2 + 4) = (3x^3 + x^2 + 4)^2 + 1 \ \ e$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(x^2+1)^3 + (x^2+1)^2 + 4$$

Observamos que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo 3.3 *Escrever a função $f(x) = (\frac{x-2}{x+2})^5$ como composta de duas funções.*

Solução 3.4 *Observe que a função f acima pode ser obtida tomando a função x^5 e colocando no lugar de x a função $\frac{x-2}{x+2}$, daí teremos que*

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^5 = x^5 \circ \frac{x-2}{x+2}$$

3.2 A regra da cadeia

Vejamos como encontrar a derivada da composta de duas funções se conhecemos a derivada de cada uma, isto é temos o teorema.

Teorema 3.5 (Derivada da composta ou regra da cadeia) *Suponhamos g uma função derivável em x_0 e f uma função derivável em $g(x_0)$. Se a função $f \circ g$ está bem definida teremos*

$$(f \circ g)'(x_0) = (f'(g(x_0))g'(x_0)$$

ou, ainda,

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g',$$

isto é,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Exemplo 3.6 *Determine a derivada da função $f(x) = (\frac{x-2}{x+2})^5$.*

Solução 3.7 *Sabemos que $f(x) = (\frac{x-2}{x+2})^5 = x^5 \circ \frac{x-2}{x+2}$ e, pelo teorema anterior, teremos*

$$f'(x) = ((x^5)' \circ \tfrac{x-2}{x+2})(\tfrac{x-2}{x+2})' = (5x^4 \circ \tfrac{x-2}{x+2})(\tfrac{4}{(x+2)^2}) = 5(\tfrac{x-2}{x+2})^4 \tfrac{4}{(x+2)^2} = \tfrac{20(x-2)^4}{(x+2)^6}$$

Observação 3.8 *Conhecendo a regra para derivada da função composta, podemos generalizar a regra de derivação para potência de uma função. Sendo f uma função derivável e n um número natural, temos que $(f(x))^n = x^n \circ f(x)$ e, portanto, temos*

$$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

Vale abservar que, com os devidos cuidados, a fórmula ainda é válida para qualquer número inteiro não nulo ou mesmo números racionais da forma $\frac{1}{p}$ com p um número inteiro.

Exemplo 3.9 *Determine a derivada da função $f(x) = (3x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)^9$.*

Solução 3.10 *Usando diretamente a fórmula acima, teremos*

$$f'(x) = 9(3x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)^8(12x^3 + 3x^2 - 4x).$$

Se usássemos a regra da cadeia, teríamos,

$$(3x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)^9 = x^9 \circ (3x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)$$

e, daí, teríamos

$$f'(x) = (9x^8 \circ (3x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)).(12x^3 + 3x^2 - 4x) = 9(3x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)^8(12x^3 + 3x^2 - 4x).$$

Exemplo 3.11 *Considere a função $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.*

(a) Determine o domínio de f

(b) Determine $f'(x)$.

Solução 3.12 *(a) Para obetremos o domínio devemos exigir que* $x^2 - 1 \geq 0$, *o que nos leva a* $x \leq -1$ *ou* $x \geq 1$.

(b) Temos $f(x) = (x^2 - 1)^{1/2}$ *e, através da observação anterior, obtemos*

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1/2} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \; \forall \; x < -1 \text{ ou } x > 1.$$

3.3 Exercícios

1. Determine a derivada de cada função abaixo.

   $(a) f(x) = (x^4 - 1)^5$ $\quad (b) f(x) = (x^5 - 4x^2 + 2x - 3)^8$ $\quad (c) f(x) = (3x^2 - 1)^{9/2}$

   $(d) f(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ $\quad (e) f(x) = \sqrt[5]{x^5 - 4x^3 + 1}$ $\quad (f) f(x) = x^2\sqrt{x^2 + 1}$

   $(g) f(t) = 1/\sqrt{t^2 - 1}$ $\quad (h) f(u) = (u^2 + 1)^{-10}$

   $(i) f(t) = (1 - 1/t)^5$ $\quad (j) f(x) = (x^2 + \frac{1}{x^2})^4$ $\quad (k) f(t) = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^4$

2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = (x^2 - 1)^{-2}$ no ponto de abscissa $x = 2$.

3. Determine a equação da reta tangente à curva $h(x) = f(g(x))$, em $x = 1$, sabendo que $f(1) = -2, f'(1) = 2, g(1) = 1$ e $g'(1) = -1$.

4. Determine a equação da reta tangente à curva $h(x) = g(f(x))$, em $x = -1$, sabendo que $f(-1) = 2, f'(-1) = -1/3, g(2) = -3$ e $g'(2) = 6$.

4 Derivação Implícita

Sabemos que a equação de uma circunferência de raio 1 e centro na origem é dada por

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Se queremos determinar a equação da reta tangente a esta circunferência no ponto $P(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, usando derivadas, devemos olhar esta circunferência como gráfico de uma função, de forma a determinar o coeficiente angular da tangente. Mas qual função usar? Note que a circunferência não é o gráfico de nenhuma função! (Lembre-se que se uma curva é o gráfico de alguma função, qualquer reta vertical tocará esta curva no máximo em um ponto!!!) Neste caso, podemos isolar y na equação acima obtendo as funções

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

Qual destas funções usamos? A função que representa a parte da circunferência que passa pelo ponto P em questão é a primeira função e, portanto, devemos usá-la. Sendo assim, teremos

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

e substituindo as coordenadas do ponto P temos

$$y'(\sqrt{2}/2) = -\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{1-2/4}} = -1$$

A equação da tangente será

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{ou} \quad y = -x + \sqrt{2}$$

Mas, suponhamos que nosso problema agora seja determinar a equação da reta tangente à curva de equação

$$2x^3y + 3xy^3 = 5$$

num certo ponto $P(x_0, y_0)$ sobre a curva. Como proceder para isolar y visando determinar a derivada? Neste caso, o mais indicado é usar o procedimento denominado derivação implícita. Este processo consiste em considerar, neste caso, y como uma função de x sem isolá-lo. Vejamos como fazê-lo.

Tomamos a equação $2x^3y+3xy^3 = 5$ e derivamos ambos os lados da igualdade. No segundo lado da igualdade não temos problema, pois temos uma constante e sua derivada é 0. Já, no primeiro membro, devemos tomar um certo cuidado, lembrando que estamos admitindo y ser uma função de x e, portanto, $(y^n)' = ny^{n-1}y'$ para todo n inteiro não nulo ou do tipo $n = \frac{1}{p}$. Vejamos:

$$(2x^3y + 3xy^3)' = (2x^3y)' + (3xy^3)' = (2x^3)'y + 2x^3y' + (3x)'y^3 + 3x(y^3)' =$$
$$6x^2y + 2x^3y' + 3y^3 + 3x(3y^2y') = 6x^2y + 3y^3 + (2x^3 + 9xy^2)y'.$$

Note que para derivarmos, por exemplo, $2x^3y$, utilizamoa a regra para derivar um produto de funções.

Agora, igualando as derivadas de ambos os lados da igualdade (segundo lado foi zero), teremos,

$$6x^2y + 3y^3 + (2x^3 + 9xy^2)y' = 0$$

o que nos leva a

$$y' = \frac{-(6x^2y + 3y^3)}{2x^3 + 9xy^2} \text{ ,desde que, } 2x^3 + 9xy^2 \neq 0$$

e estamos prontos para determinar a derivada em qualquer ponto (x_0, y_0) sobre a curva que satisfaça $2x_0^3 + 9x_0y_0^2 \neq 0$.

Exemplo 4.1 *Determine a equação da reta tangente à curva de equação $2x^3y + 3xy^3 = 5$ no ponto P(1,1).*

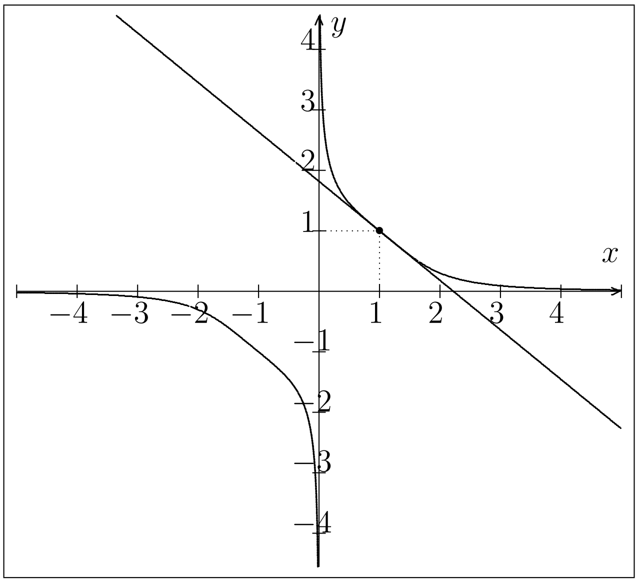
Solução 4.2 *Usando derivação implícita (feito acima) encontramos $y' = \frac{-(6x^2y+3y^3)}{2x^3+9xy^2}$ e, substituindo as coordenadas do ponto P, teremos*

$$y'(1,1) = -\frac{(6+3)}{2+9} = -\frac{9}{11}.$$

Portanto a reta tangente será

$$y - 1 = -\frac{9}{11}(x-1) \quad ou \quad 11y + 9x - 20 = 0.$$

Abaixo temos representada a curva e a tangente.



Exemplo 4.3 *Determine a equação da reta tangente à curva de equação* $16x^4 + y^4 = 32$ *no ponto (1,2).*

Solução 4.4 *Derivando ambos os membros da equação teremos*

$$(16x^4 + y^4)' = 0 \quad ou \quad 64x^3 + 4y^3y' = 0$$

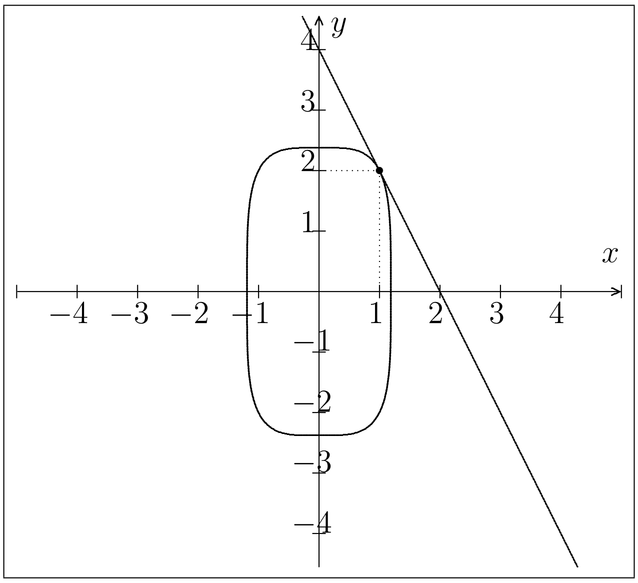
Daí, temos

$$y' = \frac{-64x^3}{4y^3} = \frac{-16x^3}{y^3}.$$

Substituindo as coordenadas do ponto teremos $y' = -16/8 = -2$ *e a equação da tangente será*

$$y - 2 = -2(x-1) \quad ou \quad y = -2x + 4.$$

Observe a representação da curva e da tangente abaixo.



4.1 Exercícios

1. Determine y' usando derivação implícita em cada caso abaixo.

$(a) 5x\sqrt{y} - 3 = 0$	$(b) x^3 + y^3 = 3$	$(c) (x+y)^2 = x^4 + y^4$
$(d) x^3 + y^3 = xy + y^2$	$(e) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$	$(f) x^2 + y^2 = 3xy$
$(g) x^4y^3 = 3x^2y + 1$	$(h) y^3 = x + y$	$(i) \sqrt{x}(x-y) - y^2 = 0$
$(j) \sqrt{x+y} = \sqrt{y} + 1$	$(k) x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - x - y = 0$	$(l) (y+x)(y+\sqrt{x}) = x$
$(m) \sqrt{y} + y = 1 + x^2$	$(n) 1 + x = \sqrt{xy} + \sqrt{x}$	$(o) x + y = \sqrt{xy}$

2. Determine a equação da reta tangente à elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ num ponto (x_0, y_0) pertencente à curva.

3. Determine a equação da reta tangente à hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ num ponto (x_0, y_0) pertencente à curva.

4. Determine a equação da reta tangente à circunferência de centro $(1, 0)$ e raio 2 nos pontos de abscissa $x = 0$.

5. Em cada um dos exercícios abaixo, determine a equaçao da reta tangente à curva dada no ponto indicado

$(a) 3x + 4y + 2 = 0 \; em \; (-2, 1)$	$(b) x^2 + y^2 = 9 \; em \; (2, \sqrt{5})$
$(c) 3x^2 = y^2 + 1 \; em \; (-1, \sqrt{2})$	$(d) x^2 + y^2 = 2y \; em \; (1/2, (2+\sqrt{3})/2)$
$(e) x^2 - xy + y^2 = 7 \; em \; (2, -1)$	$(f) x^3 + y^3 = xy^2 + 5 \; em \; (1, 2)$

5 Tópicos Adicionais

5.1 Derivadas Sucessivas

Definição 5.1 *Sendo f uma função, indicamos a derivada de f por f'. A derivada segunda de f, ou de ordem 2 será definida por $f'' = (f')'$ e assim sucessivamente.*

Exemplo 5.2 *Determine as derivadas de ordem 2 e 3 da função $f(x) = x^4 + 2x^2$.*

Solução 5.3 $f'(x) = 4x^3 + 4x$, $f''(x) = 12x^2 + 4$ *e* $f'''(x) = 24x$.

5.2 Formas Indeterminadas

Quando estudamos limites vimos que um caso que sempre nos dava trabalho era quando o limite era do tipo $\frac{0}{0}$ ou do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Com o uso de derivadas, o teorema abaixo nos mostra que, em muitos casos, poderemos resolver facilmente um limite que se enquadre nos casos citados.

Teorema 5.4 (Regra de L'Hospital) *Sejam f e g duas funções deriváveis em um intervalo aberto contendo o número x_0, tais que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Então, teremos*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 5.5 *Determine*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}.$$

Solução 5.6 *Sendo o limite do tipo $\frac{0}{0}$ e, portanto, podemos utilizar o teorema acima. Teremos*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{2x} = 3.$$

Exemplo 5.7 *Determine*

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{h^2 + 1}}{h^2}.$$

Solução 5.8 *Sendo o limite do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ teremos*

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{h^2 + 1}}{h^2} = \lim_{h\to\infty} \frac{1/2(h^2 + 1)^{-1/2}.2h}{2h} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{h^2 + 1}} = 0.$$

Observação 5.9 *Ressaltamos que o teorema anterior ainda continua válido para limites laterais!*

5.3 Exercícios

1. Calcule os limites abaixo:
   $(a)\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-4x+1}{x^3-3x^2+5x-3}$ $(b)\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3-x^2+2}$

   $(c)\lim_{x\to 3}\frac{x^3-6x-9}{x^3-8x-3}$ $(d)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3-4x^2+8x-5}$

   $(e)\lim_{x\to 2}\frac{x^4-10x+4}{x^3-2x^2}$ $(f)\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$
2. Calcule os limites:
   $(a)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ $(b)\lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+x^2-12x-12}{2x^3+7x^2+4x-4}$

   $(c)\lim_{x\to -1}\frac{x^4-x^3-x^2+5x+4}{x^3+4x^2+5x+2}$ $(d)\lim_{x\to -2}\frac{x^4+2x^3-5x^2-12x-4}{2x^4+7x^3+2x^2-12x-8}$
3. Calcule os limites:
   $(a)\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$ $(d)\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$

   $(b)\lim_{x\to -a}\frac{a^2-x^2}{a^3+x^3}$ $(e)\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$

   $(c)\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$ $(f)\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$
4. Calcule os limites:
   $(a)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $(d)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$

   $(b)\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ $(e)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

   $(c)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ $(f)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}$
5. Sendo $f(x)=\frac{1}{x}$, determine:
   $(a)f'(x)$ $(b)f''(x)$ $(c)f'''(x)$
   (d) Sendo n um número natural determine uma fórmula para $f^{(n)}(x)$

6 Respostas dos Exercícios

6.1 Subseção 2.3

$2)(a)f'(x)=20x^{19}$ $(b)f'(x)=100x^4$ $(c)f'(x)=0$ $(d)f'(x)=35x^4+12x^2$

$3)(a)2$ $(b)Sim,\ pois\ \lim_{x\to 2}=f(2)=2$ $(c)\nexists f'(2)$

$4)y-1=5(x-1)\ ou\ y+1=5(x+1)$

$5)y-\frac{1}{16}=-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})$

$6)\nexists f'(1)$

$7)(a)5$ $(b)Sim,\ pois\ \lim_{x\to 3}=f(3)=5$ $(c)Nao$ $(d)Sim,\ f'(2)=2$

6.2 Subseção 2.5

1)

$(a)\pi x^{\pi-1}$	$(b)5(\pi+2)x^{\pi+1}$	$(c)9x^{14}$
$(d)x^{2/3}$	$(e)5x\sqrt{x}$	$(f)\frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$
$(g)\frac{-11}{8x^2\sqrt[8]{x^3}}$	$(h)7x^6-10x^5+3x^4-4x^3+2$	$(i)\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$
$(j)2x(6x^2+5)$	$(k)2a\alpha x+a\beta+\alpha b$	$(l)\frac{-2a}{(x-a)^2}$
$(m)\frac{-a}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-a)^2}$	$(n)\frac{3x^2-4x+3}{(x^2-1)^2}$	$(o)\frac{(aB-Ab)x^2+2(aC-Ac)+bC-Bc}{(Ax^2+Bx+C)^2}$

2) $y+4=11x$

3) $y-\frac{1}{5}=3(x+1)$

4) $y-4=\frac{-11}{2}(x-4)$

5) $y=3x-1;\ (-1,-4)$

6.3 Subseção 3.3

1)

$(a)20x^3(x^4-1)^4$	$(b)8(x^5-4x^2+2x-3)(5x^4-8x+2)$	$(c)27x(3x^2-1)^{7/2}$
$(d)\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$	$(e)\frac{x^2(5x^2-12)}{3(x^5-4x^3+1)^{2/3}}$	$(f)\frac{3x^3+2x}{\sqrt{x^2+1}}$
$(g)\frac{-t}{(t^2-1)^{3/2}}$	$(h)\frac{-20u}{(u^2+1)^{11}}$	$(i)\frac{5(t-1)^4}{t^6}$
$(j)8\left(x^2+\frac{1}{x^2})^3\right)\left(x-\frac{1}{x^3}\right)$	$(k)\frac{-8(t+1)^3}{(t-1)^5}$	

2) $8x+27y-19=0$

3) $y=-2x$

4) $2x+y+5=0$

6.4 Subseção 4.1

1)

$(a) y' = -\frac{1}{8} 25x^3$ $(b) y' = \frac{-x^2}{y^2}$ $(c) y' = \frac{x+y-2x^3}{2y^3-x-y}$

$(d) y' = \frac{y-3x^2}{3y^2-x-2y}$ $(e) y' = \frac{y^2}{x^2}$ $(f) y' = \frac{3y-2x}{2y-3x}$

$(g) y' = \frac{2y(3-2x^2y^2)}{3x(x^2y^2-1)}$ $(h) y' = \frac{1}{3y^2-1}$ $(i) y' = \frac{x-y}{2(x+2y\sqrt{x})}$

$(j) y' = \sqrt{y}$ $(k) y' = \frac{2\sqrt{y}(1-\sqrt{y})}{x+2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}$ $(l) y' = \frac{2\sqrt{x}(1-y)-y-3x}{x+\sqrt{x}+2y}$

$(m) y' = \frac{2\sqrt{y}(1+2x)}{1+2\sqrt{y}}$ $(n) y' = \sqrt{y}(2\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1)/x$ $(o) y' = \frac{-2x-y}{x+2y}$

2) $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

3) $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

4) $x + \sqrt{3}y + 3 = 0$ e $x - \sqrt{3}y + 3 = 0.$

5)

$(a) 3x + 4y + 2 = 0$ $(b) 2x - \sqrt{5}y - 9 = 0$ $(c) 3x + \sqrt{2}y + 1 = 0$

$(d) x + \sqrt{3}y - 2 - \sqrt{3} = 0$ $(e) 5x - 4y - 14 = 0$ $(f) x - 8y + 15 = 0$

6.5 Subseção 5.3

1)

$(a) 2$ $(b) -\frac{4}{5}$ $(c) \frac{21}{19}$

$(d) 1$ $(e) \frac{11}{2}$ $(f) \frac{5}{3}$

2)

$(a) 1/2$ $(b) -1/5$ $(c) 8$ $(d) 7/8$

3)

$(a) 2a$ $(b) 2/3a$ $(c) n$
$(d) m/n$ $(e) na^{n-1}$ $\frac{m}{n} a^{m-n}$

4)

$(a) 1/2$ $(b) 1/2$ $(c) 1/4$ $(d) -1$ $(e) 1$ $(f) \sqrt{2}/4$

5)

$(a) -\frac{1}{x^2}$ $(b) \frac{2}{x^3}$ $(c) \frac{-3.2}{x^4}$

$(d) f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};\ n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 2$