文章编号：1001-7402(2019)01-0058-08

模糊 Lagrange 插值及其误差分析*

李洲洲，魏 媛，郭晓斌

（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘 要：本文基于 LR 模糊插值基函数，构造了模糊数值函数的 Lagrange 插值公式，并对模糊插值余项进行了分析。两个数值算例表明，我们所建的插值方法是有效的。

关键词：模糊数；模糊插值方法；模糊插值余项

中图分类号：O159 文献标识码：A

在生产实践和科学研究中所遇到的大量函数中，许多是通过测量或实验得到的。虽然函数关系式 $y=f(x)$ 是在某个区间上客观存在的，但却不能确切的写出其解析式，只能通过观察，测量或实验得到函数在区间上某些离散点的函数值，因此，我们希望对这样的函数用一个比较简单的函数表达式来近似地给出整体上的描述，于是，插值法是非常重要的方法之一。

但是在实际模型中许多参数存在着模糊性和不确定性，而这种不确定性表现为一类特殊的模糊集[1]即模糊数[2]。涉及模糊数的系统的研究，近年来引起许多学者的关注[3-8]。为解决离散点上因变量为模糊值的插值问题与计算性差的模糊数值函数的逼近问题，建立有效的模糊插值方法显得非常重要。1990 年，R.Lowen[9]提出了一个模糊拉格朗日插值定理。1994 年，O.Kaleva[10]介绍了模糊数值插值。2005 年，T.Allahiranloo 和 T.Hajari[11]研究了模糊数逼近的数值方法，并且通过扩张定理引进了模糊牛顿有限微分插值公式和模糊泰勒插值问题的唯一性和收敛性定理。2006 年，T.Allahiranloo 和 T.Hajari[12]利用模糊多项式来讨论模糊函数的数值逼近。O.Valenzuela 和 M.Pasadas[13]提出了用模糊数估计插值误差的一种新方法。2014 年，M.A.Fariborzi Araghi 和 A.Fallahzadeh [14] 应用继承 LU 分解法来求得继承模糊插值多项式。

本文基于 LR-模糊数，利用拉格朗日插值法，提出了一种求模糊插值多项式和模糊插值余项的方法，两个数值算例表明，这个方法是有效的。

1 预备知识

定义 1.1[2]（模糊数） 记 $E^1=\{u \mid u:R\to I=[0,1]\}$ 满足以下性质(1)～(4)：

(1) u 是正规的模糊集，即有 $x_0\in R$ 使得 $u(x_0)=1$；

(2) u 是凸模糊集，即 $\forall x,y\in R$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$u(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant min(u(x),u(y))$$

* 收稿日期：2018-06-11(中国模糊数学与模糊系统第十九届学术会议论文)

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11761062)；西北师范大学青年教师科研创新团队计划项目(nwnu-lkqn-17-5)

作者简介：李洲洲(1993-)，男，甘肃陇南人，西北师范大学数学与统计学院研究生；魏媛(1994-)，女，甘肃兰州人，西北师范大学数学与统计学院研究生；郭晓斌(通讯作者)(1972-)，男，甘肃陇南人，副教授，博士，研究方向：不确定数学问题的数值计算。

（3）u 是上半连续函数；

（4）$[u]^0=\overline{\{x\in R\ :u(x)>0\}}$ 是紧集。

对 $u\in E^1$，称为模糊数，而 E^1 称为模糊数空间。

定义 1.2[2]　模糊数 $\widetilde{A}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ 为 LR-模糊数，若它的隶属函数 $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ 如下：

$$u_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}L(\dfrac{m-x}{\alpha}), & x\leqslant m,\ \alpha>0\\ R(\dfrac{x-m}{\beta}), & x\geqslant m,\ \beta>0\end{cases}$$

这里 m 是 $\widetilde{A}$ 的主值，α、β 分别是的 $\widetilde{A}$ 左、右展形。左形状函数 $L(\cdot)$ 满足：

(1) $L(x)=L(-x)$，

(2) $L(0)=1$ 且 $L(1)=0$，

(3) $L(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非增且逐段连续。

类似的，右形状函数 $R(\cdot)$ 满足：

(1) $R(x)=R(-x)$，

(2) $R(0)=1$ 且 $R(1)=0$，

(3) $R(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 非减且逐段连续。

定义 1.3[2]　设 $\widetilde{M}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$，$\widetilde{N}=(n,\gamma,\delta)_{LR}$ 是 LR-模糊数，$\widetilde{L}=(l,s,t)_{RL}$ 是 RL-模糊数，则有

(1) 加法

$$\widetilde{M}\oplus\widetilde{N}=(m,\alpha,\beta)_{LR}\oplus(n,\gamma,\delta)_{LR}=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}$$

(2) 减法

$$\widetilde{M}=-(m,\alpha,\beta)_{LR}=(-m,\beta,\alpha)_{RL}$$

$$\widetilde{M}\ominus\widetilde{L}=(m,\alpha,\beta)_{LR}\ominus(l,s,t)_{RL}=(m-l,\alpha+t,\beta+s)_{LR}$$

(3) 乘法

若 $\widetilde{M}>0$，$\widetilde{N}>0$，则

$$\widetilde{M}\otimes\widetilde{N}=(m,\alpha,\beta)_{LR}\otimes(n,\gamma,\delta)_{LR}\cong(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)_{LR}$$

若 $\widetilde{M}<0$，$\widetilde{N}>0$，则

$$\widetilde{M}\otimes\widetilde{N}=(m,\alpha,\beta)_{RL}\otimes(n,\gamma,\delta)_{LR}\cong(mn,n\alpha-m\delta,n\beta-m\gamma)_{RL}$$

若 $\widetilde{M}<0$，$\widetilde{N}<0$，则

$$\widetilde{M}\otimes\widetilde{N}=(m,\alpha,\beta)_{LR}\otimes(n,\gamma,\delta)_{LR}\cong(mn,-n\beta-m\delta,-n\alpha-m\gamma)_{RL}$$

(4) 数乘

$$\lambda\otimes\widetilde{M}=\lambda\otimes(m,\alpha,\beta)_{LR}\cong\begin{cases}(\lambda m,\lambda\alpha,\lambda\beta)_{LR}, & \lambda>0\\ (\lambda m,-\lambda\beta,-\lambda\alpha)_{RL}, & \lambda<0\end{cases}$$

2　模糊插值多项式

设模糊函数 $\widetilde{f(x)}=(f(x),f^l(x),f^r(x))$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，$\widetilde{f_0},\widetilde{f_1},\cdots,\widetilde{f_n}$ 是模糊函数 $\widetilde{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的函数值，其中 $x_i\in R$，$\widetilde{y_i}$ 是 LR-模糊数。如果存在一个函数 $\widetilde{p(x)}=(p(x),p^l(x),p^r(x))$，使其经过 $\widetilde{f(x)}$ 上的这 $n+1$ 个已知点 $(x_0,\widetilde{y_0})$，$(x_1,\widetilde{y_1})$，…，

$(x_n, \widetilde{y_n})$。

即得到$\widetilde{p(x_i)}=\widetilde{y_i}=(y_i, y_i^l, y_i^r)$，其中 $i=0,1,\cdots,n$. 则称$\widetilde{p(x)}$为模糊插值函数，点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为插值节点，$(x_0, \widetilde{y_0}), (x_1, \widetilde{y_1}), \cdots, (x_n, \widetilde{y_n})$称为插值点。

引理 2.1[15]　设节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互异，则在次数不超过 n 的多项式集合 H_n 中，满足条件 $p(x_i)=y_i$ 的插值多项式，$p_n(x)$存在且唯一。

定理 2.1　设节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互异，则在次数不超过 n 的多项式集合中，满足条件$\widetilde{p(x_i)}=\widetilde{y_i}$的模糊插值多项式，$\widetilde{p_n(x)}$存在且唯一。

证明　设$\widetilde{p_n(x)}=(p(x), p^l(x), p^r(x))=(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, b_0+b_1x^l+\cdots+b_n(x^l)^n, c_0+c_1x^r+\cdots+c_n(x^r)^n)$。

即有：

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \tag{1}$$

$$p^l(x)=b_0+b_1x^l+\cdots+b_n(x^l)^n \tag{2}$$

$$p^r(x))=c_0+c_1x^r+\cdots+c_n(x^r)^n \tag{3}$$

首先，将式(1)式(2)、式(3)代入$\widetilde{p(x_i)}=\widetilde{y_i}$中得

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \tag{4}$$

可以看得出式(4)是关于 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的 $n+1$ 元非齐次线性方程组，其系数矩阵的行列式为：

$$V(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

这是一个范德蒙德行列式，且 $x_i \neq x_j (i,j=0,1,\cdots,n)$。故

$$V(x_0, x_1, \cdots, x_n) \neq 0$$

由克拉默法则可知，方程(4)存在唯一解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$. 故 $p(x)$存在且唯一。

同理可知，$b_0, b_1, \cdots, b_n$ 与 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 存在且唯一。

于是可知，$\widetilde{p_n(x)}=(p(x), p^l(x), p^r(x))$存在且唯一。

为了获得一个模糊插值多项式，我们利用经典的 Lagrange 插值方法，来确定其模糊插值多项式。

设模糊函数在区间$[a,b]$上的 $n+1$ 个互异节点如下：

x	x_0	$\cdots$	x_n
$\widetilde{f(x)}$	$(f(x_0), f^l(x_0), f^r(x_0))$	$\cdots$	$(f(x_n), f^l(x_n), f^r(x_n))$

求模糊插值多项式$\widetilde{p_n(x)}$，满足条件

$$\widetilde{p(x_i)}=\widetilde{f(x_i)}, \quad i=0,1,\cdots,n$$

令$\widetilde{p_n(x)}=(p(x), p^l(x), p^r(x))$，$\widetilde{f(x_i)}=(f(x_i), f^l(x_i), f^r(x_i))$，则求$\widetilde{p_n(x_i)}$可转化为求三个不超过 n 次的多项式 $p(x), p^l(x), p^r(x)$。

我们分以下几个步骤：

Step1：求 $L_n(x)$

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

利用 Lagrange 插值方法可知：

$$L_n(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+\cdots+f(x_n)l_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(x)$$

Step2：求 $L_n{}^l(x)$

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f^l(x)$	$f^l(x_0)$	$f^l(x_1)$	$\cdots$	$f^l(x_n)$

利用 Lagrange 插值方法可知：

$$L_n^l(x)=f^l(x_0)l_0(x)+f^l(x_1)l_1(x)+\cdots+f^l(x_n)l_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f^l(x_i)l_i(x)$$

Step3：求 $L_n^r(x)$

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f^r(x)$	$f^r(x_0)$	$f^r(x_1)$	$\cdots$	$f^r(x_n)$

同 Step1 和 Step2 可知：

$$L_n^r(x)=f^r(x_0)l_0(x)+f^r(x_1)l_1(x)+\cdots+f^r(x_n)l_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f^r(x_i)l_i(x)$$

其中 $L_n(x),L_n^l(x),L_n^r(x)$ 中 $l_i(x)$ 确定如下：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\quad i=0,1,\cdots,n$$

于是得到模糊 Lagrange 插值多项式：

$$\widetilde{L_n(x)}=(L_n(x),L_n^l(x),L_n^r(x))$$

由定理 1 模糊插值多项式的的存在唯一性可知：

$$\widetilde{L_n(x)}=\widetilde{p_n(x)}$$

3　模糊插值余项

若在 $[a,b]$ 上用 $\widetilde{L_n(x)}$ 近似 $\widetilde{f(x)}$，其截断误差为 $\widetilde{R_n(x)}=\widetilde{f(x)}-\widetilde{L_n(x)}$，$\widetilde{R_n(x)}=(R_n(x),R_n^l(x),R_n^r(x))$ 也称为模糊插值多项式的余项或模糊插值余项。关于模糊插值余项估计有以下定理。

引理 3.1[16]　设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在，节点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$，$L_n(x)$ 是满足条件式 $L_n(x_j)=y_j(j=0,1,\cdots,n)$ 的插值多项式，则对于任何 $x\in[a,b]$，插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

这里，$\xi\in(a,b)$ 且依赖于 x，$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$。

定理 3.1　设模糊函数 $\widetilde{f(x)}=(f(x),f^l(x),f^r(x))$ 在 $[a,b]$ 上有定义，$f^{(n)}(x)$，$f^{l(n)}(x)$，$f^{r(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$，$f^{l(n+1)}(x)$，$f^{r(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在，节点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$，$\widetilde{L_n(x)}$ 是满足条件式 $\widetilde{L_n(x_j)}=\widetilde{y_j}(j=0,1,\cdots,n)$ 的模糊插值多项式，则对于任何 $x\in[a,b]$，模糊插值余项 $\widetilde{R_n(x)}=(R_n(x),R_n^l(x),R_n^r(x))$ 为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\quad \xi\in(a,b) \tag{5}$$

$$R_n^l(x)=f^l(x)-L_n^l(x)=\frac{f^{l(n+1)}(\xi^l)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\quad \xi^l\in(a,b) \tag{6}$$

$$R_n^r(x)=f^r(x)-L_n^r(x)=\frac{f^{r(n+1)}(\xi^r)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\quad \xi^r\in(a,b) \tag{7}$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$。

证明 由给定条件可知 $R_n(x)$ 在节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上为零，即

$$R_n(x_k)=0,\quad k=0,1,\cdots,n$$

于是，

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x) \tag{8}$$

其中 $K(x)$ 是与 x 有关的待定函数。

现把 x 看成 $[a,b]$ 上的一个固定点，作函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

根据插值条件及余项的定义，$\varphi(t)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 及 x 处均为零，故 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个零点，由 Rolle 定理可知，$\varphi'(t)$ 在 $\varphi(t)$ 的两个零点间至少有一个零点，故 $\varphi'(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点。对 $\varphi'(t)$ 再应用 Rolle 定理，可知 $\varphi''(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 n 个零点。依此类推，$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点，记作 $\xi\in(a,b)$，使

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K(x)=0$$

于是，$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，$\xi\in(a,b)$ 且依赖于 x.

将上式代入式(8)，就得到了式(5)。

同理可证得式(6)、式(7)。

于是得到模糊 Lagrange 插值余项：

$$\widetilde{R_n(x)}=(R_n(x),R_n^l(x),R_n^r(x))$$

4 数值算例

例 4.1 考虑下面一组数据：

x	0	1	2
$\widetilde{f(x)}$	(1,1,1)	(2,1,1)	(5,1,1)

求 $\widetilde{f(x)}$ 的模糊插值多项式 $\widetilde{L_2(x)}$ 及其余项 $\widetilde{R_2(x)}$。

解 由 Lagrange 插值多项式求解方法知，以 $x_0=0,x_1=1,x_2=2$ 为节点的基函数分别为：

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}=-x(x-2)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\frac{1}{2}x(x-2)$$

于是有

$$L_2(x)=\sum_{i=0}^{2}f(x_i)l_i(x)=1\times\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+2\times[-x(x-2)]+5\times\frac{1}{2}x(x-2)=x^2-4x+5$$

$$L_2^l(x)=\sum_{i=0}^{2}f^l(x_i)l_i(x)=1\times\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+1\times[-x(x-2)]+1\times\frac{1}{2}x(x-2)=1$$

$$L_2^r(x)=\sum_{i=0}^{2}f^r(x_i)l_i(x)=1\times\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+1\times[-x(x-2)]+1\times\frac{1}{2}x(x-2)=1$$

因此模糊插值多项式为：

$$\widetilde{p_2(x)}=\widetilde{L_2(x)}=(x^2-4x+5,1,1)$$

由定理 3.1 可得

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}(x-1)(x-2)(x-5),\quad \xi\in(0,2)$$

$$R_2^l(x)=\frac{f^{l(3)}(\xi^l)}{(3)!}(x-1)^3,\quad \xi^l\in(0,2)$$

$$R_2^r(x)=\frac{f^{r(3)}(\xi^r)}{(3)!}(x-1)^3,\quad \xi^r\in(0,2)$$

故模糊插值余项为

$$\widetilde{R_2(x)}=(\frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}(x-1)(x-2)(x-5),\frac{f^{l(3)}(\xi^l)}{(3)!}(x-1)^3,\frac{f^{r(3)}(\xi^r)}{(3)!}(x-1)^3),\quad \xi,\xi^l,\xi^r\in(0,2)$$

例 4.2　考虑下面一组数据：

x	1	2	3	4
$\widetilde{f(x)}$	(3,2,2)	(2,1,1)	(3,1,2)	(4,1,1)

求 $\widetilde{f(x)}$ 的模糊插值多项式 $L_3(x)$ 及其余项 $\widetilde{R_3(x)}$。

解　以 $x_0=1,x_1=2,x_2=3,x_3=4$ 为节点的基函数分别为：

$$l_0(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}=-\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}=-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$l_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

于是有

$$\begin{aligned}
&L_3(x)\\
&=\sum_{i=0}^{3}f(x_i)l_i(x)\\
&=3\times[-\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4)]+2\times\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)\\
&\quad+3\times[-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4)]+4\times\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\\
&=-\frac{5}{6}x^3-\frac{41}{2}x^2-\frac{5}{3}x+8
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& L_3^l(x) \\
&= \sum_{i=0}^{3} f^l(x_i) l_i(x) \\
&= 2 \times [-\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4)] + 1 \times \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4) \\
&\quad + 1 \times [-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4)] + 1 \times \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= -\frac{17}{6}x^3 + \frac{51}{2}x^2 - \frac{221}{3}x + 69 \\
& L_3^r(x) \\
&= \sum_{i=0}^{3} f^r(x_i) l_i(x) \\
&= 2 \times [-\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4)] + 1 \times \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4) \\
&\quad + 2 \times [-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4)] + 1 \times \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= -\frac{10}{3}x^3 - 29x^2 - \frac{242}{3}x + 73
\end{aligned}
$$

因此模糊插值多项式为：

$$
\widetilde{p_3(x)} = \widetilde{L_3(x)} = (-\frac{5}{6}x^3 - \frac{41}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 8, -\frac{17}{6}x^3 + \frac{51}{2}x^2 - \frac{221}{3}x + 69, -\frac{10}{3}x^3 - 29x^2 - \frac{242}{3}x + 73)
$$

由定理 3.1 可得

$$
R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{(4)!}(x-2)(x-3)^2(x-4), \quad \xi \in (1,4)
$$

$$
R_3^l(x) = \frac{f^{l(4)}(\xi^l)}{(4)!}(x-1)^3(x-2), \quad \xi^l \in (1,4)
$$

$$
R_3^r(x) = \frac{f^{r(4)}(\xi^r)}{(4)!}(x-1)^2(x-2)^2, \quad \xi^r \in (1,4)
$$

故模糊插值余项为

$$
\widetilde{R_3(x)} = (\frac{f^{(4)}(\xi)}{(4)!}(x-2)(x-3)^2(x-4), \frac{f^{l(4)}(\xi^l)}{(4)!}(x-1)^3(x-2), \frac{f^{r(4)}(\xi^r)}{(4)!}(x-1)^2(x-2)^2)
$$

其中

$$
\xi, \xi^l, \xi^r \in (1,4)
$$

参考文献：

[1] Zadeh L A. Fuzzy set[J], Inf.Control, 1965, 8: 338～353.

[2] Dubois D, Prade H. Operations on fuzzy number[J]. J.Systems Sci., 1978, 9: 613～626.

[3] Gong Z T, Guo X B, Liu K. Approximate solution of dual fuzzy matrix equations[J]. Information Sciences, 2014, 266: 112～133.

[4] Guo X B, Han Y L. Further investigation to dual fuzzy matrix equation[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 33: 2617～2629.

[5] Guo X B, Zhang K. Solving fuzzy matrix equation of the form $XA=B$[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 32: 2771～2778.

[6] Guo X B, Zhang K. Minimal solution of complex fuzzy linear systems[J]. Advances in Fuzzy Systems,2016.

[7] Behera D, Chakraverty S. Solving fuzzy complex system of linear equtions[J]. Information Sciences,2014,277:154～162.

[8] 吴从炘，马明. 模糊分析学基础[M]. 北京：国防工业出版社，1991:55～58.

[9] Lowen R. A fuzzy Lagrange interpolation theorem[J]. Fuzzy sets and Systems,1990,34(1):33～38.

[10] Kaleva O. Interpolation of fuzzy date[J]. Fuzzy Sets and Systems,1994,61:63～70.

[11] Allahviranloo T, Hajari T. Numerical methods for approximation of fuzzy date[J]. Applied Mathematics and Computation,2005,169:16～33.

[12] Abbasbandy S, Amirfakhrian M. Numerical approximation of fuzzy functions by fuzzy polynomials[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,174:1001～1006.

[13] Valenzuela O, Pasades M. A new approach to estimate interpolation error of fuzzy date using similarity measures of fuzzy number[J]. Computers and Mathematics with Applications,2011,61:1633～1645.

[14] Araghi M A F, Fallahzadeh A. Inherited fuzzy interpolation based on the inherited lower-upper factorization[J]. Fuzzy Information and Engineering,2014,6:427～434.

[15] 魏毅强，张建国，张洪斌. 数值计算方法[M]. 北京：科学出版社，2004.

[16] 李庆扬，王能超，易大义. 数值分析[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2006.

Fuzzy Lagrange Interpolation and Its Error Analysis

LI Zhou-zhou, WEI Yuan, GUO Xiao-bin

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, the fuzzy Lagrange interpolation polynomial and interpolation remainder based on LR-fuzzy numbers is investigated, and two numerical examples are given to show that our proposed interpolation method is effective.

Key words: Fuzzy Numbers; Fuzzy Interpolation Problem; Fuzzy Lagrange Interpolation; Fuzzy Interpolation Remainder