

三种插值方法的应用与比较

张丽娟

(呼伦贝尔学院 数学科学学院, 内蒙古 呼伦贝尔 021008)

摘 要: 早在 6 世纪, 中国的刘焯已将等距二次插值用于天文计算. 17 世纪之后, 牛顿, 拉格朗日分别讨论了等距和非等距的一般插值公式. 在近代, 插值法仍然是数据处理和编制函数表的常用工具, 又是数值积分、数值微分、非线性方程求根和微分方程数值解法的重要基础, 许多求解计算公式都是以插值为基础导出的. 本文详述了拉格朗日插值、分段线性插值与三次样条插值三种插值法在处理问题时的应用比较及分析策.

关键词: 拉格朗日插值; 分段线性插值; 三次样条插值

中图分类号: O15 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-260X(2010)03-0001-03

插值问题的提法是: 已知 $f(x)$ (可能未知或非常复杂函数) 在彼此不同的 $n+1$ 个实点 x_0, x_1, \dots, x_n 处的函数值是 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, 这时我们简单的说 $f(x)$ 有 $n+1$ 个离散数据对 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. 要估算 $f(x)$ 在其它点 \bar{x} 处的函数值, 最常见的一种办法就是插值, 即寻找一个相对简单的函数 $y(x)$, 使其满足下列插值条件 $y(x_i) = f(x_i)$ $i=0, 1, \dots, n$. 并以 $y(\bar{x})$ 作为 $f(\bar{x})$ 的近似值. 其中 $y(x)$ 称为插值函数, $f(x)$ 称为被插函数.^[1,2,3]

选用不同类型的插值函数, 逼近的效果不同, 下面给出拉格朗日多项式插值、分段线性插值及三次样条插值在处理问题时的应用比较分析.

多项式插值是最常见的一种函数插值. 在一般插值问题中, 由插值条件可以唯一确定一个次数不超过 n 的插值多项式满足上述条件. 从几何上看可以理解为: 已知平面上 $n+1$ 个不同点, 要寻找一条次数不超过 n 的多项式曲线通过这些点. 插值多项式一般有两种常见的表达形式, 一个是拉格朗日 (Lagrange) 插值多项式, 另一个是牛顿 (Newton) 插值多项式. 且 Lagrange 插值公式恒等于 Newton 插值公式.

分段线性插值与三次样条插值可以避免高次插值可能出现的大幅度波动现象, 在实际应用中通常采用分段低次插值来提高近似程度, 比如可用分

段线性插值或分段三次埃尔米特插值来逼近已知函数, 但它们的总体光滑性较差. 为了克服这一缺点, 一种全局化的分段插值方法——三次样条插值成为比较理想的工具.

1 拉格朗日 (Lagrange) 插值

已知 $f(x)$ 的 $n+1$ 个离散数据对 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. 求作次数不超过 n 的多项式 $y(x)$, 使满足条件 $y(x_i) = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$. 这就是多项式插值问题. 点 x_0, x_1, \dots, x_n 称为插值基点. $[\min\{x_i\}, \max\{x_i\}]$ 叫做插值区间.^[1,2]

用几何语言来表述这类插值, 就是通过曲线上给定的 $n+1$ 个点, 求作一条次数不超过 n 的代数曲线 $y(x)$, 作为 $f(x)$ 的近似.

例题: 给出 $f(x) = \ln x$ 下面的数值表, 用 Larange 插值计算 $\ln(0.54)$ 的近似值.

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

在 Matlab 命令窗口中输入:

```
x=[0.4:0.1:0.8];
y= [-0.916291 -0.693147 -0.510826 -0.356675
-0.223144];
lagrange(x,y,0.54)[3]
ans=
```

-0.6161

说明 :同精确解 $\ln(0.54)=-0.616186$ 比较起来 ,误差还是可以接受的 ,特别是在工程应用中.

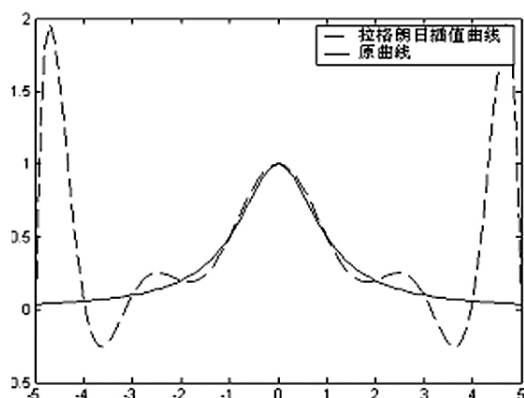
但 Lagrange 插值会发生 Runge 现象上面根据给出的点做插值多项式 $y(x)$,一般总认为 $y(x)$ 的次数越高逼近 $\ln x$ 的精度越好 ,但是事实并非如此 ,下面给出了一个等距节点插值多项式不收敛的例子.给出函数为 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,它在区间 $[-5, 5]$ 上各导数存在 ,但是在此区间上取 n 个插值基点构造的 Lagrange 插值多项式在全区间内并非都收敛的 ,而且分散得很厉害看如下例子

取 $n=10$,用 Lagrange 插值法进行插值计算.

在 Matlab 命令窗口中输入 :

```
x=[-5:1:5];
y=1./(1+x.^2);
x0=[-5:0.1:5];
y0=lagrange(x,y,x0);
y1=1./(1+x0.^2);
plot(x0,y0,'-r')
hold on
plot(x0,y1,'-b')
legend('拉格朗日插值曲线','原曲线')
y2=interp1(x,y,x0);
plot(x0,y2,'*m')
legend('拉格朗日插值曲线','原曲线','分段插值曲线')[4]
```

Runge 现象的产生



2 分段线性插值

作分段线性插值的目的在于克服 Lagrange 插值方法可能发生的不收敛性缺点.所谓分段线性插值就是利用每两个相邻插值基点作线性插值 ,即可得如下分段线性插值函数 $y(x)=l_i(x)f_i+l_{i+1}(x)f_{i+1}$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,n$.其中 $l_i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}$, $l_{i+1}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$.^[2]特点 :插值函数序列具有一致收敛性 ,克服了高次 Lagrange 插值方法的缺点 ,故可通过增加插值基点的方法提高其插值精度. 但存在基点处不光滑、插值精度低的缺点.从几何上看所谓分段线性插值就是通过插值基点用折线段连接起来逼近原曲线 ,这也是计算机绘制图形的基本原理.

Matlab 实现 :实现分段线性插值不需要编制函数程序 ,它自身提供了内部的功能函数 :interp1(一维插值) ,interp2(二维) ,interp3(三维) ,interpz(n 维) ;
 $y_i=\text{interp1}(x,y,x_i)$ 对基点 (x,y) 插值 ,求插值点的函数值.

$y_i=\text{interp1}(x,y,x_i,\text{'method'})$

method 指定插值的算法 ,默认为线性算法.其值可为 :

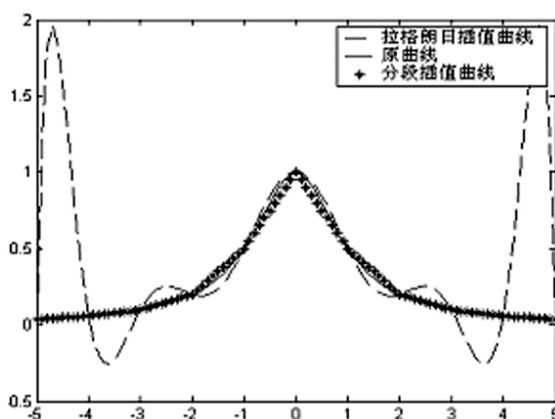
'nearest' 线性最近项插值

'linear' 线性插值

'spline' 立方样条插值

'cubic' 立方插值^[4]

一维线性插值解决 Runge 现象发生



用分段线性插值可能有时精度要差一些 ,但是不会出现不收敛的现象 ,这在实际计算中很重要 ,因此分段线性插值在实际科研和工程计算中应用也是很广泛的.

3 三次样条插值

三次样条插值的目的在于克服 Lagrange 插值的不收敛性和提高分段线性插值函数在节点处的光滑性.所谓三次样条插值方法就是在满足下列条件 :

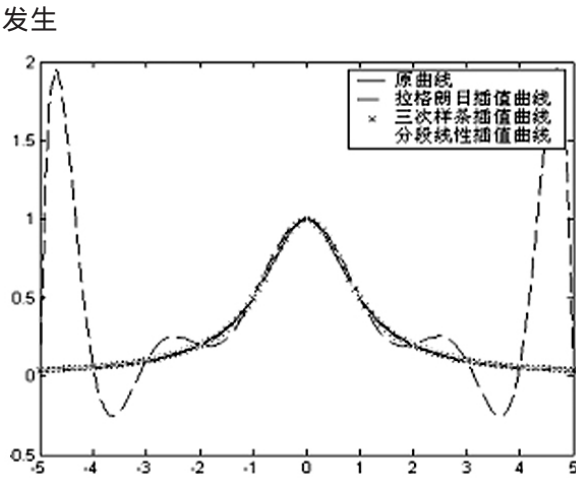
- a. $y(x)$ 在每个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ ($i=0,1,\cdots n$)上都是次数不超过 3 的多项式 ;
- b. $y(x)、y'(x)、y''(x)$ 在插值区间上都连续 ,的三次样条函数中寻找满足下列插值条件 :
- c. $y(x_i)=f(x_i)$ ($i=1,2,\cdots n$) ;
- d.一般形如 $y''(a)=y''(b)=0$ 等边界条件 ,的插值函数 $y(x)$ 的方法.^[1,2,3]

特点 :三次样条插值函数序列一致收敛于被插函数 ,因此可通过增加节点的方法提高插值的精度.

以函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 为例 ,用三种不同的插值方法画图进行比较. $x\in[-5,5]$

```
程序如下 :
x=[-5:1:5];
y=1./(1+x.^2);
x0=[-5:0.1:5];
y0=lagrange(x,y,x0);
y1=1./(1+x0.^2);
y2=interp1(x,y,x0,'spline');
y3=interp1(x,y,x0);
plot (x0,y1,'-b',x0,y0,'--r',x0,y2,'xk',x0,y3,'-y');
legend('原曲线','拉格朗日插值曲线','三次样条插值曲线','分段线性插值曲线')[4]
```

图形如下 :
三次样条插值、一维线性插值解决 Runge 现象



上面介绍的分段线性插值 ,其总体光滑程度不够.在数学上 ,光滑程度的定量描述是函数(曲线)的 k 阶导数存在且连续 ,则称该曲线具有 k 阶光滑性.自然 ,阶数越高光滑程度越好.分段线性插值具有零阶光滑性 ,也就是不光滑 ;三次样条插值就是较低次数的多项式而达到较高阶光滑性的方法.

参考文献 :

- [1]王能超.数值分析简明教程[M].北京 :高等教育出版社,2001.
- [2]陈公宁,沈嘉骥.计算方法[M].北京 :高等教育出版社,2002.
- [3]李有法.数值计算方法[M].北京 :高等教育出版社,2002.
- [4]王沫然.MATLAB 5.X 与科学计算[M].北京 :清华大学出版社,2000.
- [5]姜启源,谢金星,叶俊.数学模型(第三版)[M].北京 :高等教育出版社,2005.