

提出課題 I：確率分布

問題文中の空欄に入る数式を選択せよ。選択した解答 ((A)–(D)) は「機械学習 2024 KA240201-teams」の「一般」チャンネルに出現する課題へのリンクから提出すること。

問題 1, 2

ベルヌーイ分布 $\text{Bern}(x|\mu) = \mu^x(1-\mu)^{1-x}$ が次の性質を満たすことを確かめる。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x] &= \mu \\ \text{var}[x] &= \mu(1-\mu)\end{aligned}$$

ベルヌーイ分布の定義より,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x] &= \sum_{x \in \{0,1\}} xp(x|\mu) = 0 \cdot \boxed{(1)} + 1 \cdot \boxed{(2)} = \mu \\ \text{var}[x] &= \sum_{x \in \{0,1\}} (x-\mu)^2 p(x|\mu) = \mu^2 \boxed{(1)} + (1-\mu)^2 \boxed{(2)} \\ &= \mu^2(1-\mu) + (1-\mu)^2\mu = \mu(1-\mu)\end{aligned}$$

問題 1. 空欄 (1) に入る数式を選択せよ。

- (A) $p(x|\mu=0)$
- (B) $p(x=0|\mu)$
- (C) $p(x|\mu=1)$
- (D) $p(x=1|\mu)$

問題 2. 空欄 (2) に入る数式を選択せよ。

- (A) $p(x|\mu=0)$
- (B) $p(x=0|\mu)$
- (C) $p(x|\mu=1)$
- (D) $p(x=1|\mu)$

問題 3, 4

以下の恒等式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{a})$$

の両辺に

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (\text{b})$$

を左から掛け、また、次の定義 $\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$ を用いることで、式 (a) の恒等式を証明する。

式 (a) の左辺に式 (b) を掛けると単位行列となる。右辺については、分割された行列の 4 つのブロックを考える。

左上

$$\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M} = \left(\boxed{(3)} \right) \left(\boxed{(3)} \right)^{-1} = \mathbf{I}$$

右上

$$\begin{aligned} & -\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ &= -\left(\boxed{(3)} \right) \left(\boxed{(3)} \right)^{-1} \boxed{(4)} + \boxed{(4)} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

左下

$$\mathbf{C}\mathbf{M} - \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M} = \mathbf{C}\mathbf{M} - \mathbf{C}\mathbf{M} = \mathbf{0}$$

右下

$$-\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{I}$$

よって右辺も単位行列と等しくなる。

問題 3. 空欄 (3) に入る数式を選択せよ。

- (A) $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$
- (B) $\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$
- (C) $\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$
- (D) \mathbf{A}

問題 4. 空欄 (4) に入る数式を選択せよ。

- (A) $\mathbf{M}\mathbf{B}$

(B) $\mathbf{A}\mathbf{M}$

(C) $\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}$

(D) $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$