



深蓝学院
shenlanxueyuan.com

第四章作业思路分享



主讲人 赵勇



- 1. 最终状态 v, a 是free情况的OBVP
- 2. ros 部分lattice+OBVP问题

Homework 1

- For the OBVP problem stated in slides p.25-p.29, please get the optimal solution (control, state, and time) for **partially free final state** case.
- Suppose the position is fixed, velocity and acceleration are free here.

1. 公式推导

Define the Hamiltonian function:

$$\begin{aligned}
 H(s, u, \lambda) &= \frac{1}{T} j^2 + \lambda^T f_s(s, u) \\
 &= \frac{1}{T} j^2 + \lambda_1 v + \lambda_2 a + \lambda_3 j
 \end{aligned}$$

- 由Pontryagin's minimum principle:

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_s H(s^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 2\alpha t + 2\beta \\ -\alpha t^2 - 2\beta t - 2\gamma \end{bmatrix}$$

- 使用边界条件:

$$\lambda(T) = -\nabla h(s^*(T))$$

- 由于末状态v,a自由, 因此h的表达式与T时刻的v和a并不相关

- 因此:

$$\lambda_2(T) = 0, \lambda_3(T) = 0$$

- 因此 表达式可以化简为:

$$\begin{cases} \beta = -\alpha T \\ \gamma = \frac{\alpha}{2} T^2 \end{cases} \quad \lambda(t) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 2\alpha(t - T) \\ -\alpha t^2 + 2\alpha T t - \alpha T^2 \end{bmatrix}$$

1. 公式推导

The optimal input is solved as:

$$u^*(t) = j^*(t) = \arg \min_{j(t)} H(s^*(t), j(t), \lambda(t))$$

- 可以计得

$$u^*(t) = -\frac{\lambda_3 T}{2} = -\frac{T}{2} \frac{1}{T} (-\alpha t^2 + 2\alpha T t - \alpha T^2) = \frac{1}{2} (\alpha t^2 - 2\alpha T t + \alpha T^2)$$

- 积分可得

$$s^*(t) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{120} t^5 - \frac{\alpha T}{24} t^4 + \frac{\alpha T^2}{12} t^3 + \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + p_0 \\ \frac{\alpha}{24} t^4 - \frac{\alpha T}{6} t^3 + \frac{\alpha T^2}{4} t^2 + a_0 t + v_0 \\ \frac{\alpha}{6} t^3 - \frac{\alpha T}{2} t^2 + \frac{1}{2} \alpha T^2 t + a_0 \end{bmatrix}$$

1. 公式推导

- 在知道 $s^*(t)$ 后, 由于末状态的位置是已知的(p_f), 代入求 α

$$\frac{\alpha}{120}T^5 - \frac{\alpha T^5}{24} + \frac{\alpha T^5}{12} + \frac{a_0 T^2}{2} + v_0 T + p_0 = p_f$$

- 解得

$$\alpha = \frac{20\Delta p}{T^5} \quad \text{其中} \quad \Delta p = p_f - p_0 - v_0 T - \frac{1}{2}a_0 T^2$$

- 把 α 代入先前的 $u^*(t)$ 表达式, 再积分求出 J

$$u^*(t) = -\frac{\lambda_3 T}{2} = -\frac{T}{2} \frac{1}{T} (-\alpha t^2 + 2\alpha T t - \alpha T^2) = \frac{1}{2} (\alpha t^2 - 2\alpha T t + \alpha T^2)$$

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T (u^*(t))^2 dt = \frac{20(\Delta p)^2}{T^6} \quad \text{其中} \quad \Delta p = p_f - p_0 - v_0 T - \frac{1}{2}a_0 T^2$$

1. 公式推导

- 可以看出J是只关于T的函数
- 为了令J最小，对T求导，让求导表达式=0，

$$(p_f - p_0 - v_0 T - \frac{1}{2} a_0 T^2)(a_0 T^2 + 4v_0 T - 6p_f + 6p_0) = 0$$

可得

$$T^* = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2a_0(p_f - p_0)}}{a_0} \text{ 或 } T^* = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 + 6a_0(p_f - p_0)}}{a_0}$$

实际使用时，T不能为虚数和负数

比较剩下的T(正数)其cost的大小，令cost最小的T即为T*

2(1) forward integration

- 前向积分的公式是我们中学学到的恒加速度的运动公式:

$$v_1 = v_0 + a_0 t$$

$$p_1 = p_0 + v_0 t + 0.5 a_0 t^2$$

```
pos(0) = pos(0) + vel(0)*delta_time + 0.5*acc_input(0)*delta_time*delta_time;  
pos(1) = pos(1) + vel(1)*delta_time + 0.5*acc_input(1)*delta_time*delta_time;  
pos(2) = pos(2) + vel(2)*delta_time + 0.5*acc_input(2)*delta_time*delta_time;
```

```
vel(0) = vel(0) + acc_input(0)*delta_time;  
vel(1) = vel(1) + acc_input(1)*delta_time;  
vel(2) = vel(2) + acc_input(2)*delta_time;
```


2(2) find T^*

- 本题的cost function

$$J = T + \left(\frac{1}{3} \alpha_1^2 T^3 + \alpha_1 \beta_1 T^2 + \beta_1^2 T \right) + \left(\frac{1}{3} \alpha_2^2 T^3 + \alpha_2 \beta_2 T^2 + \beta_2^2 T \right) \\ + \left(\frac{1}{3} \alpha_3^2 T^3 + \alpha_3 \beta_3 T^2 + \beta_3^2 T \right)$$

- 其中 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3$ 如下所示:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{T^3} & 0 & 0 & \frac{6}{T^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{T^3} & 0 & 0 & \frac{6}{T^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{T^3} & 0 & 0 & \frac{6}{T^2} \\ \frac{6}{T^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{T^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{T^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_x \\ \Delta p_y \\ \Delta p_z \\ \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix}$$

2(2) find T*

- 把 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3$ 代入J后，J是只与T有关的函数
- 为了求得最优T，J对T求导，使得到的表达式=0(做法和第一题基本一致)
- 求导后让分子为0求极值。其中分子为关于T的四次多项式

$$\frac{d(J)}{d(T)} = \frac{T^4 - 4(\Delta_{v vx} + \Delta_{v vy} + \Delta_{v vz})T^2 + 24(\Delta_x \Delta_{vx} + \Delta_y \Delta_{vy} + \Delta_z \Delta_{vz})T - 36(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2)}{T^4}$$

$$\begin{cases} \Delta_{vvi} = V_{Ti}^2 + V_{Oi}^2 + V_{Ti}V_{Oi} \\ \Delta_{vi} = V_{Ti} + V_{Oi} \\ \Delta_i = P_{Ti} - P_{Oi} \end{cases}$$

- 把得到四个根T进行筛选，不要虚数和负数
- 把剩下的T代入cost表达式中，比较得出最小J值，其对应的T即为最优解。

2(2) 多项式求根的方法

- 1. 求根公式法
- 一元四次多项式的求解问题存在求根公式(费拉里法求根)
- 注意根的取舍，舍去负数和虚根
- 但解的结构十分复杂，不太建议使用

2(2) 多项式求根的方法

- 2. 伴随矩阵求特征值。定义多项式伴随矩阵 $C(p)$

In linear algebra, the Frobenius companion matrix of the monic polynomial

$$p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{n-1} + t^n,$$

is the square matrix defined as

$$C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- 对矩阵 $C(p)$ 求特征值，把正根代入J表达式中比较，从而得出最优T
- Eigen库可以去定义矩阵和计算特征值

2 (2) 多项式求根的方法

- 3. Eigen PolynomialSolver
- 使用Eigen内置的多项式求解器
- 十分简单，调用Eigen API即可

```
Eigen::PolynomialSolver<double, Eigen::Dynamic>::RootsType & r = solver.roots();
```

- 使用example见下连结，

<http://www.ce.unipr.it/people/medici/eigen-poly.html>

2(2) 多项式求根的方法

- 4. Root-Finder
- 连结如下所示:

<https://github.com/ZJU-FAST-Lab/Root-Finder>

- 包含了多种多项式求解的方法
- 使用简单, 只需要包含其hpp头文件和Eigen库
- 使用时直接调用RootFinder::solvePolynomial即可, 返回根的std::set
- 详情可查看README (包括使用方法和安装方法)

感谢各位聆听 !
Thanks for Listening

