本次作业的第一部分是根据课上给的公式，完成在终端位置固定而速度和加速度不固定情况下的边界最优控制问题求解的公式推导

$$H(s,u,\lambda)=\frac{1}{T}u^2+\lambda^T f(s,u)$$
$$=\frac{1}{T}u^2+\lambda_1 v+\lambda_2 a+\lambda_3 u \tag{1}$$
$$\dot{\lambda}=-\nabla_s H(s^*,u^*,\lambda)=(0,-\lambda_1,-\lambda_2) \tag{2}$$
$$\lambda(t)=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}-2\alpha\\ 2\alpha t+2\beta\\ -\alpha t^2-2\beta t-2\gamma\end{bmatrix} \tag{3}$$

此处假设最终位置为固定值p_f，但最终的速度和加速度为自由的，则：

$$h(T)=0 \tag{4}$$

根据上式：

$$\lambda_2(T)=0,\lambda_3(T)=0 \tag{5}$$

代入公式(3)，可得：

$$\lambda(t)=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}-2\alpha\\ 2\alpha(t-T)\\ -\alpha t^2+2\alpha Tt-\alpha T^2\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$u^*(t)=argmin_u H\big(s^*(t),u(t),\lambda(t)\big)$$
$$=\frac{1}{2}\alpha t^2-\alpha Tt+\frac{1}{2}\alpha T^2 \tag{7}$$

根据最优控制量可以获得状态的解析表达式：

$$s^*(t)=\begin{bmatrix}\frac{\alpha}{120}t^5-\frac{\alpha T}{24}t^4+\frac{\alpha T^2}{12}t^3+\frac{a_0}{2}t^2+v_0 t+p_0\\ \frac{\alpha}{24}t^4-\frac{\alpha T}{6}t^3+\frac{\alpha T^2}{4}t^2+a_0 t+v_0\\ \frac{\alpha}{6}t^3-\frac{\alpha T}{2}t^2+\frac{1}{2}\alpha T^2 t+a_0\end{bmatrix} \tag{8}$$

代价函数可以表达为：

$$J=\frac{\alpha^2}{4}T^4-\frac{\alpha^2}{2}T^4+\frac{\alpha^2}{3}T^4+\frac{\alpha^2}{6}T^4-\frac{\alpha^2}{4}T^4+\frac{\alpha^2}{20}T^4$$
$$=\frac{\alpha^2}{20}T^4 \tag{9}$$

在公式（8）的第一行中代入位置的终值条件可得：

$$\frac{\alpha}{120}T^5-\frac{\alpha T^5}{24}+\frac{\alpha T^5}{12}+\frac{a_0T^2}{2}+v_0T+p_0$$
$$=\frac{\alpha T^5}{20}+\frac{a_0T^2}{2}+v_0T+p_0=p_f \tag{10}$$

根据公式（10）可以得到：

$$\alpha=\frac{20\left(p_f-p_0-v_0T-\frac{a_0T^2}{2}\right)}{T^5} \tag{11}$$

将公式（11）代入公式（9）可得：

$$J=\frac{20\left(\frac{a_0^2T^4}{4}+a_0v_0T^3+(v_0^2-a_0\Delta p)T^2-2v_0\Delta pT+\Delta_p^2\right)}{T^6} \tag{12}$$

式（12）对 T 求导，并令其为 0，可得：

$$-a_0T^4-6a_0v_0T^3-8(v_0^2-a_0\Delta p)T^2+20v_0\Delta pT-12\Delta_p^2=0$$

求解式（13）可得 T，代入式（12）可以计算代价，代入式（11）和（8）可以计算在$0\rightarrow T$时间内的状态变化。

本次作业的第二部分为完成 ROS 环境下的带简单动力学约束的控制空间采样代码，并计算相应的边界最优控制问题的解。

此处使用解析方式求解，首先使用 Matlab 的符号工具箱求得含 T 的多项式方程，之后在 ROS 环境中使用特征值分解的方法求得对应的根，最后代回优化函数，获得最优代价值。

相应的 Matlab 代码在压缩包中提供，此处展示代码完成后的测试结果：