МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий

Отчёт по лабораторной работе

Тема :

Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выполнил:
студент гр. 381706-1
Митягина Дарья Сергеевна
Проверил:
Эгамов Альберт Исмаилович

Нижний Новгород 2020

Содержание

1 Постановка задачи

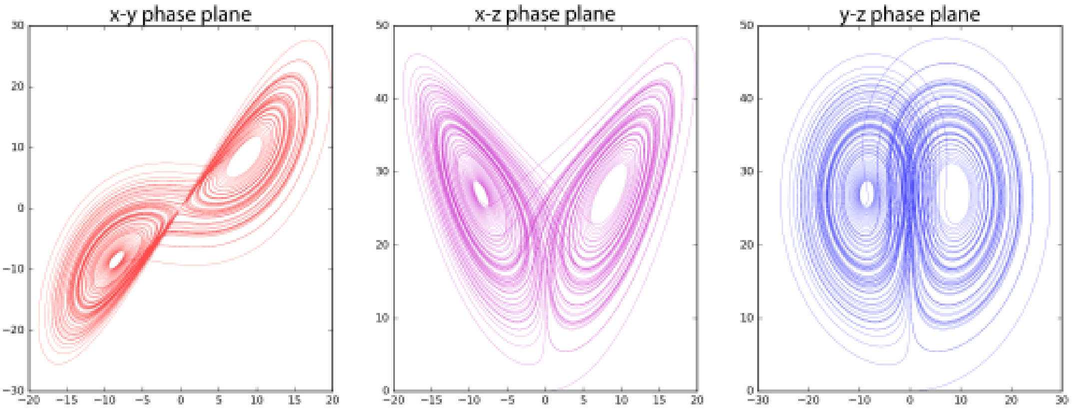
Лабораторная работа заключается в численном решении задачи Коши для автономного ОДУ с использованием компьютера.
Требуется разработать программу на удобном языке программирования

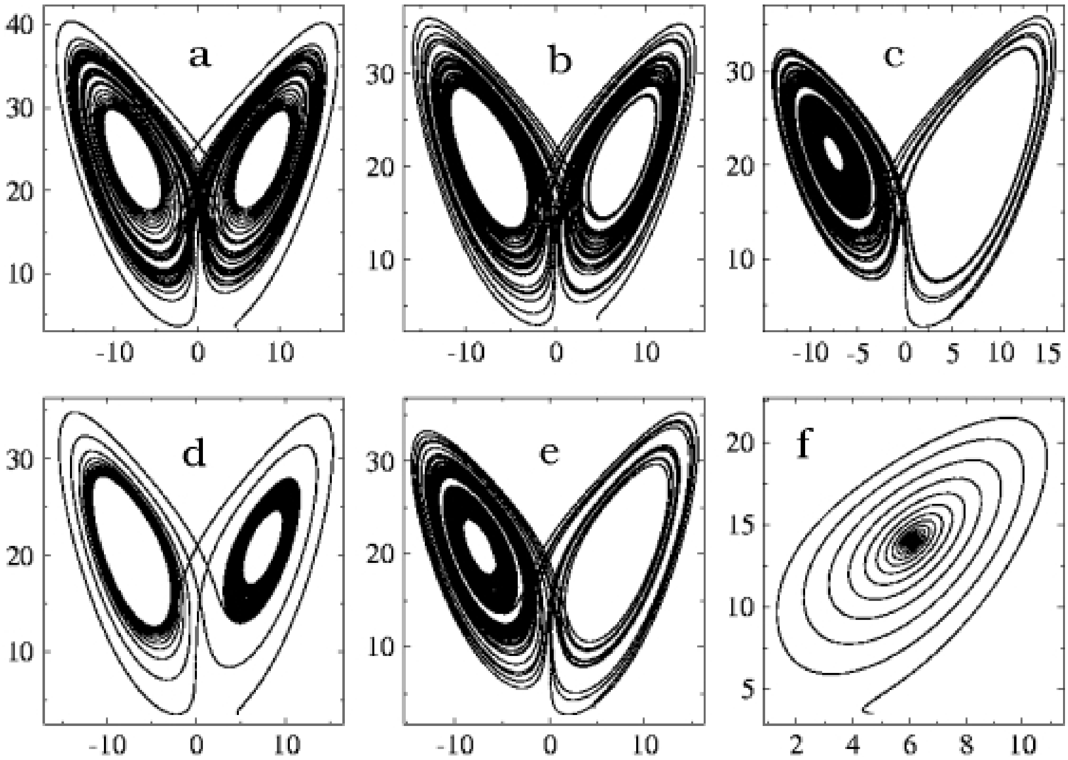
Интерфейс программы должен включать:
- окно вывода графической информации (проекции решения на фазовую плоскость).
- поля для ввода информации: параметры ДУ, локальная погрешность, задание шага
- поля для начальных условий

2 Выбор модели

Динамической системой Лоренца является автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1)\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$





Эта система возникла в задаче о моделировании конвективного течения жидкости, подогреваемой снизу.
В результате численного интегрирования системы (1) Э. Лоренц обнаружил, что при s = 10, b = 8/3 и r = 28 у этой динамической системы, с одной стороны, наблюдается хаотическое, нерегулярное поведение всех траекторий, а, с другой стороны, все траектории притягиваются к некоторому сложно устроенному множеству — аттрактору.

При r < 1 система Лоренца имеет асимптотически устойчивую в целом стационарную точку — начало координат. К ней притягиваются все траектории. Аттрактором является начало координат, других устойчивых точек нет.

r < 1,345 равновесия – узлы, r > 1,345 – фокусы.

$1 < r < 13{,}927$ — траектории спирально приближаются (это соответствует наличию затухающих колебаний) к двум точкам, положение которых определяется формулами:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{b(r-1)} \\ y = \pm\sqrt{b(r-1)} \\ z = r - 1 \end{cases}$$

$r = 13{,}927$ — если траектория выходит из начала координат, то, совершив полный оборот вокруг одной из устойчивых точек, она вернется обратно в начальную точку — возникают две гомоклинические петли. Понятие гомоклинической траектории означает, что она выходит и приходит в одно и то же положение равновесия.

$r > 13{,}927$ — в зависимости от направления траектория приходит в одну из двух устойчивых точек. Гомоклинические петли перерождаются в неустойчивые предельные циклы, также возникает семейство сложно устроенных траекторий, не являющееся аттрактором, а скорее наоборот, отталкивающее от себя траектории. Иногда по аналогии эта структура называется «странным репеллером» (англ. to repel — отталкивать).

$r = 24{,}06$ — траектории теперь ведут не к устойчивым точкам, а асимптотически приближаются к неустойчивым предельным циклам — возникает собственно аттрактор Лоренца. Однако обе устойчивые точки сохраняются вплоть до значений r24,74.

$24{,}06 < r < 24{,}74$ – в системе сосуществуют сразу три аттрактора: два устойчивых состояния, возникших ещё раньше в результате бифуркации вил, и странный аттрактор.

$24{,}76 < r < 30{,}1$ – в системе есть только странный аттрактор.

$r > 30{,}1$ – возможно чередование интервалов, в которых хаотический аттрактор сменяется придельным циклом и наоборот.

$r = 99{,}96$ система – торический узел.

При больших значениях параметра траектория претерпевает серьезные изменения.
Модель Лоренца является реальным физическим примером динамических систем с хаотическим поведением.
Данная модель была выбрана для рассмотрения так как показалась весьма интересной для изучения.

3 Описание метода

Задача сводится к численному решению системы уравнений по известным начальным условиям, то есть по известным значениям x(t=0), y(t=0), z(t=0).
Это – задача Коши для соответствующего дифференциального уравнения второго порядка. В данной задаче применяются метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка — наиболее распространенный метод из семейства методов Метод Рунге-Кутта численных алгоритмов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.
Идея методов Рунге-Кутта (РК) – построить формулу вида

$v_{i+1} = v_i + \mathrm{h}\phi(\mathrm{x}_i, u_i, h_i)$

где $\phi(x_i, u_i, h_i)$ – функция, приближающая отрезок ряда Тейлора до p-го порядка и не содержащая частных производных f(x,u).
Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$k_1 = \mathrm{f}(x_i,\ v_i)$
$k_2 = \mathrm{f}(x_i + (h/2),\ v_i + (h/2)*\ \mathrm{k}_1)$
$\mathrm{k}_3 = \mathrm{f}(x_i + (h/2),\ v_i + (h/2)*\ \mathrm{k}_2)$
$\mathrm{k}_4 = \mathrm{f}(x_i + h,\ v_i + h*\ \mathrm{k}_3)$

$\mathrm{v}_{i+1} = v_i + (\mathrm{h}/6)*(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
Метод является четырехэтапным (4 раза вычисляется f(x,u))

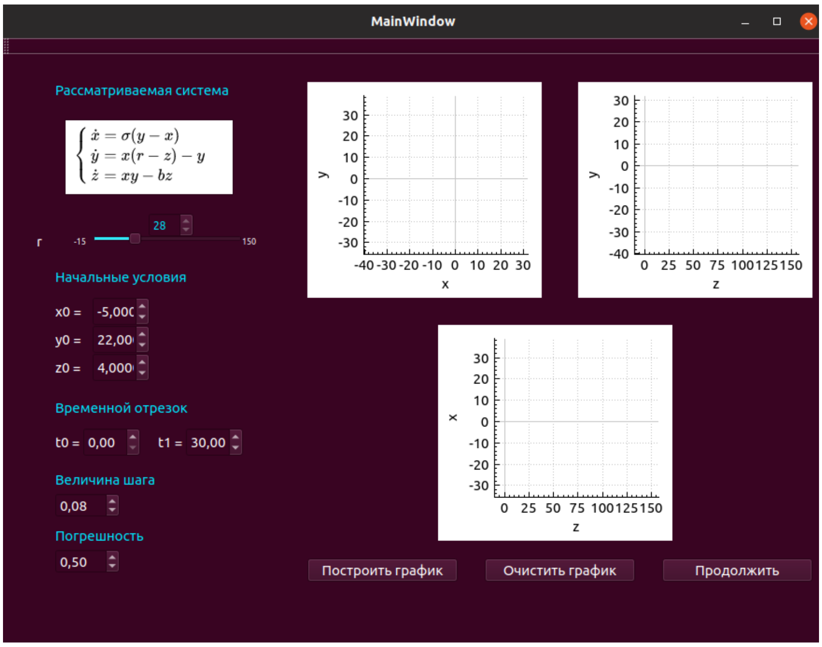
Контроль локальной погрешности:
Одной и той же погрешности можно достичь, если вести интегрирование с большим шагом в области, где решение изменяется плавно, и с малым шагом – в области резкого изменения решения.
Расчет следующей точки производится в два этапа
– за один шаг длины h, получаем значение v_{i+1};
– за два шага длины h/2, получаем значение v'_{i+1}.

Вычисляется величина $\mathrm{S} = (v'_{i+1} - v_i) / 15$

- Если $|\mathrm{S}| > \mathrm{eps}$, то положить $\mathrm{h} = \mathrm{h}/2$, и провести расчет из i-й точки заново.
- Если $2^{p+1} < |\mathrm{S}| < \mathrm{eps}$, то оставить шаг неизменным, и перейти к расчету следующей точки.
- Если $|\mathrm{S}| < 2^{p+1}$, то положить $\mathrm{h} = 2\mathrm{h}$, и перейти к расчету следующей точки.

4 Руководство пользователя

Интерфейс приложения выглядит следующим образом :



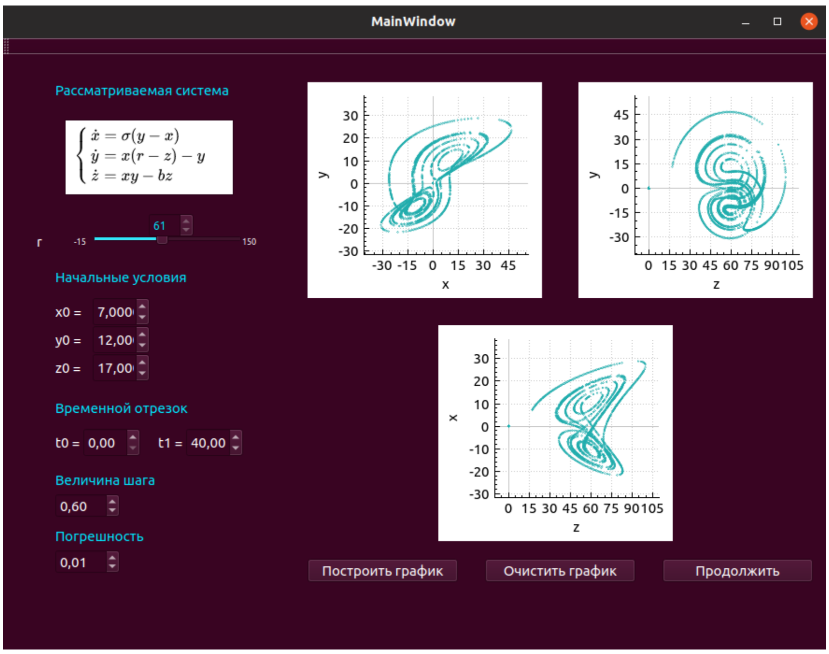
Есть несколько сценариев работы :

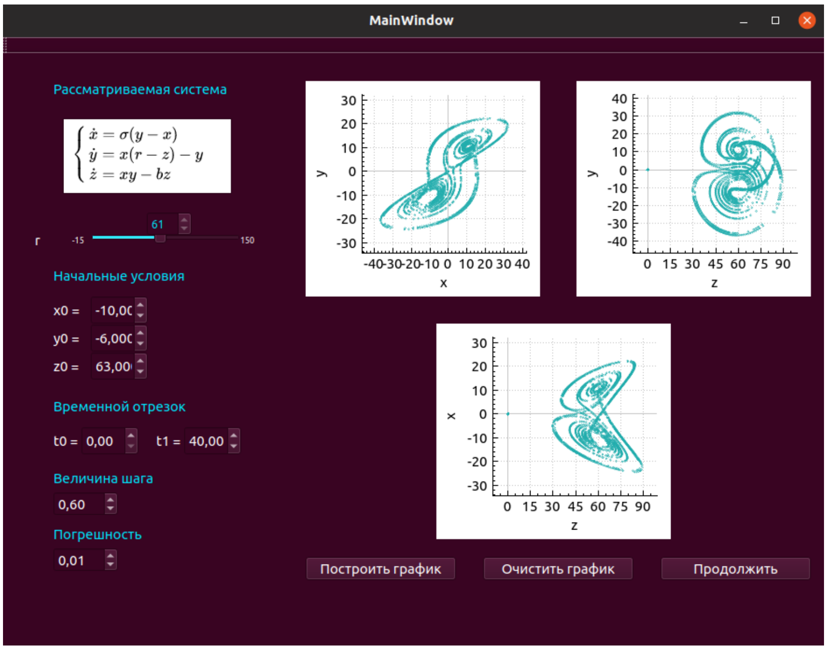
- пользователь оставляет параментры неизменными, заданными автоматически
- пользователь вводит другие значения параметров, благодаря чему может экспериментировать и наблюдать за эволюцией системы в различных условиях

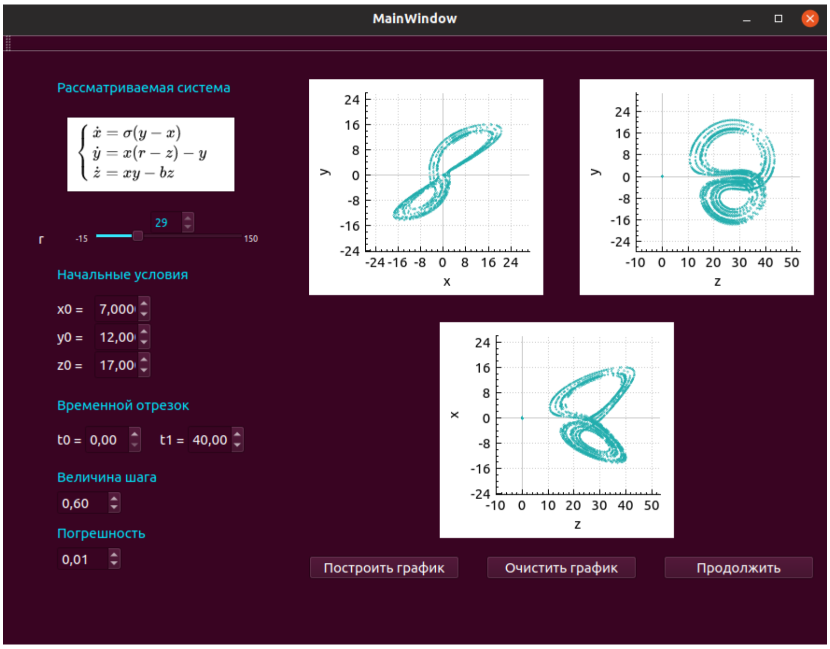
Названия клавиш отражают основное их назначение :

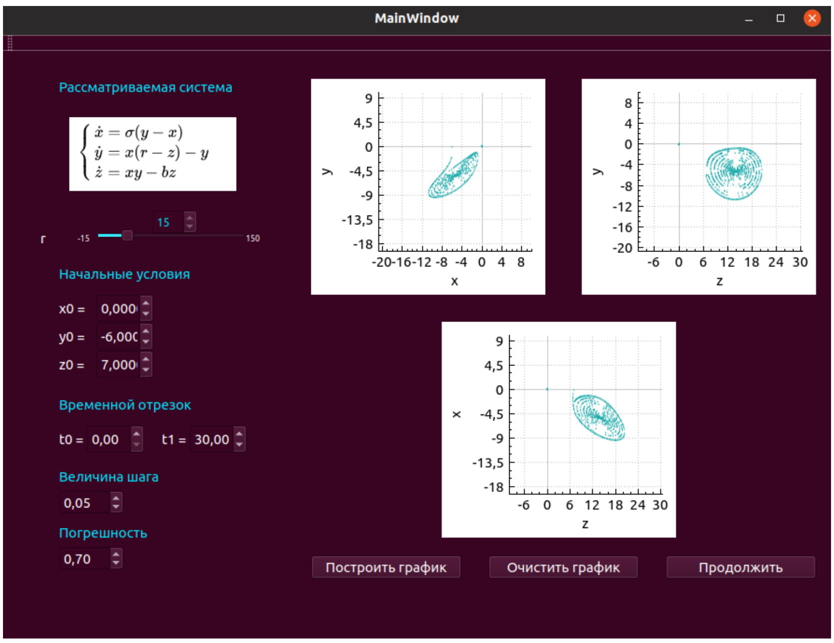
- при нажатии кнопки "Построить график"пользователь увидит построенный фазовый портрет интересующей его системы (в данном случае проекции на оси)
- при нажатии кнопки "Продолжить"в качестве начальных условий используются значения фазовых переменных, полученные при предыдущем вычислении

Немного примеров :




MainWindow
Рассматриваемая система
$\dot{x} = \sigma(y - x)$
$\dot{y} = x(r - z) - y$
$\dot{z} = xy - bz$
r
61
-15
150
Начальные условия
x0 = -10,0(
y0 = -6,00(
z0 = 63,00
Временной отрезок
t0 = 0,00
t1 = 40,00
Величина шага
0,60
Погрешность
0,01
Построить график
Очистить график
Продолжить


MainWindow
Рассматриваемая система
$\dot{x} = \sigma(y - x)$
$\dot{y} = x(r - z) - y$
$\dot{z} = xy - bz$
r
29
-15
150
Начальные условия
x0 = 7,000
y0 = 12,00
z0 = 17,00
Временной отрезок
t0 = 0,00
t1 = 40,00
Величина шага
0,60
Погрешность
0,01
Построить график
Очистить график
Продолжить


MainWindow
Рассматриваемая система
$\dot{x} = \sigma(y - x)$
$\dot{y} = x(r - z) - y$
$\dot{z} = xy - bz$
r
15
-15
150
Начальные условия
x0 = 0,000
y0 = -6,00(
z0 = 7,000
Временной отрезок
t0 = 0,00
t1 = 30,00
Величина шага
0,05
Погрешность
0,70
Построить график
Очистить график
Продолжить

5 Руководство программиста

Программа написана на языке C++.
Интерфейс построен с помощью Qt Creator.

Программа содержит следующие файлы(рассматриваем только функционально важные, т.е. содержащие реализацию алгоритма):
- mainwindow.cpp
По сути, большая часть работы производится именно здесь.

- Получение данных из полей, содержащих параметры.
- Обработка полученной информации.
- Визуализация результата.

Функции :
// Work with files
istream operator»(istream is, coordinates v);
istream operator»(istream is, vector<coordinates> vv);
int demonstration();

//Getting needed data and call other functions in the right order
int manager(vector<long double> D, double step);

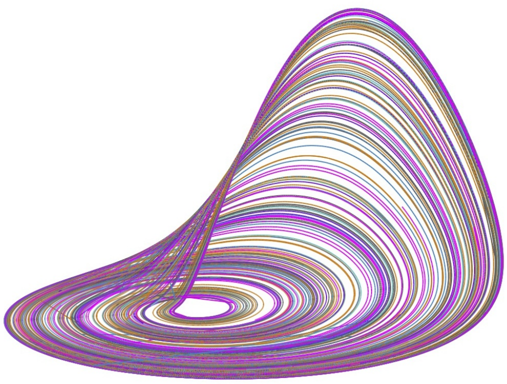
//Lorenz Attractor
vector<long double> lorenz(vector<long double> x);
vector<long double> rungekutta(long double t0, vector<long double> u0, long double h, double eps);

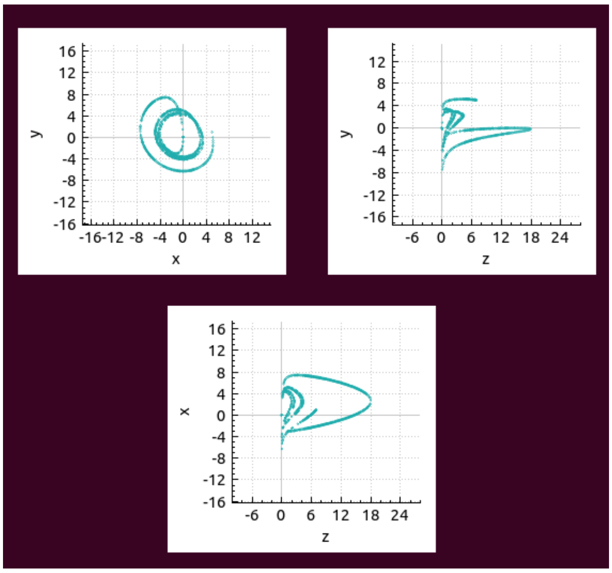
// GUI
void MainWindow::on$_{d}oubleSpinBox_{6v}alueChanged(doublearg1);$
$voidMainWindow :: on_{d}oubleSpinBox_{5v}alueChanged(doublearg1);$
$voidMainWindow :: on_{d}oubleSpinBox_{7v}alueChanged(doublearg1);$
$voidMainWindow :: on_{d}oubleSpinBox_{8v}alueChanged(doublearg1);$
$voidMainWindow :: on_{d}oubleSpinBox_{v}alueChanged(doublearg1);$
$voidMainWindow :: on_{d}oubleSpinBox_{2v}alueChanged(doublearg1);$
$voidMainWindow :: on_{d}oubleSpinBox_{9v}alueChanged(doublearg1);$
$voidMainWindow :: on_{p}lot_{gb}tn_{c}licked();$
$voidMainWindow :: PrintPhasePlanes();$
$voidMainWindow :: on_{rs}lide_{v}alueChanged(intvalue);$
$voidMainWindow :: on_{c}lear_{b}tn_{c}licked();$
$voidMainWindow :: on_{p}lot_{c}ont_{c}licked();$

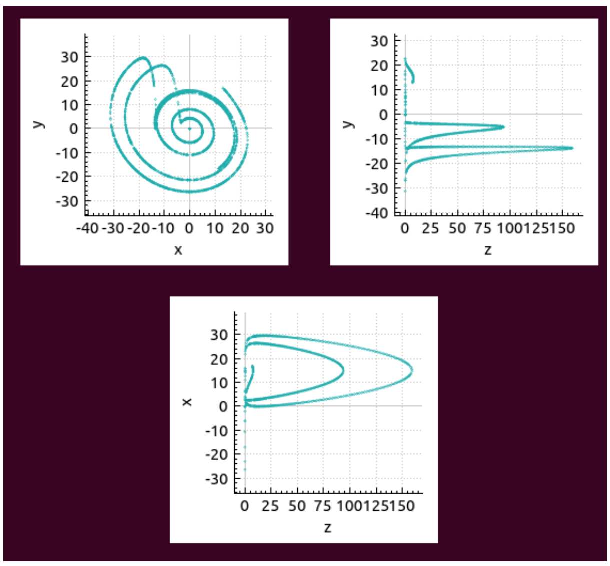
6 Эксперименты

Кроме того был рассмотрен пример Аттрактор Рёсслера.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases};$$







7 Заключение

В результате выполнения работы была исследована модель Аттрактор Лоренца.
Была написана программа для численного решения этой системы, в которой использовался метод и Рунге-Кутта 4 порядка.
Полученные графики неплохо согласуются с теоретическими предположениями.

8 Список литературы

1. Аттрактор Рёсслера [https://ru.wikipedia.org/wiki/]

2. Метод Рунге-Кутты [https://ru.wikipedia.org/wiki/]

3. "Нелинейная динамика сложных систем : теория и практика Игорь Н. фон Бекман, д.х.н., профессор, заслуженный профессор МГУ

4. "Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Параллельные численные методы Баркалов К.А.

5. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. – М.: КомКнига, 2006. 208 с.

6. Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 264 с