МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Национальный исследовательский университет

Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

ОТЧЕТ ПО УЧЕБНОЙ ПРАКТИКЕ
«Интерполяция кубическим сплайном»

Выполнил:
студент группы 381706-1
Митягина Дарья Сергеевна

Научный руководитель:
профф. каф. ДУМЧА ИИТММ,
Эгамов Альберт Исмаилович

Нижний Новгород
2019

Содержание

1. Введение....................................3
2. Постановка задачи....................................4
3. Теория....................................4
    Изложение метода....................................4
4. Описание программы....................................6
    4.1. Руководство пользователя....................................6
    4.2. Руководство программиста....................................7
5. Заключение....................................8
6. Литература....................................8

1. Введение

Интерполя́ция, **интерполи́рование** (*от* лат. *inter-polis* — «*разглаженный, подновлённый, обновлённый; преобразованный*») — в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений. Термин «интерполяция» впервые употребил Джон Валлис в своём трактате «Арифметика бесконечных» (1656).

В функциональном анализе интерполяция линейных операторов представляет собой раздел, рассматривающий банаховы пространства как элементы некоторой категории.

Многим из тех, кто сталкивается с научными и инженерными расчётами, часто приходится оперировать наборами значений, полученных опытным путём или методом случайной выборки. Как правило, на основании этих наборов требуется построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения. Такая задача называется аппроксимацией. Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.

Сплайны позволяют эффективно решать задачи обработки экспериментальных зависимостей между параметрами, имеющих достаточно сложную структуру.

Широкое практическое применение нашли кубические сплайны.

Цель лабораторной работы : изучение метода построения сплайна-интерполяции и создание приложения для реализации данного метода.

2. Постановка задачи

В данной лабораторной работе было необходимо :

- Изучить метод интерполирования функции кубическим сплайном.
- Реализовать алгоритм построения кубического сплайна.

3. Теория

Пусть на отрезке $a \le \xi \le$ задана сетка
$\omega = \{x_i : x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b\}$

и в её узлах заданы значения функции $y(x)$, равные
$y(x_0) = y_0, \cdots, y(x_i) = y_i, \cdots, y(x_n) = y_n$.

Требуется построить *интерполянту* – функцию $f(x)$, совпадающую с функцией $y(x)$ в узлах сетки:

$$f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

Основная цель интерполяции – получить быстрый (экономичный) алгоритм вычисления значений $f(x)$ для значений x, не содержащихся в таблице данных.

Изложение метода

Интерполяция кубическими сплайнами является частным случаем кусочно-полиномиальной интерполцией. В этом специальном случае между любыми двумя соседними узлами функция интерполируется кубическим полиномом. его коэффициенты на каждом интервале определяются из условий сопряжения в узлах:

$$f_i = y_i, f'(x_i - 0) = f'(x_i + 0), f''(x_i - 0) = f''(x_i + 0), i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Кроме того, на границе при $x = x_0$ и $x = x_n$ ставятся условия

$$f''(x_0) = 0, f''(x_n) = 0.$$

Будем искать кубический полином в виде

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, x_{i-1} \le \xi \le \xi_i.$$

Из условия $f_i = y_i$ имеем

$$f(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, f(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Вычислим производные:

$$f'(x)=b_i+2c_i(x-x_{i-1})+3d_i(x-x_{i-1})^2, f''(x)=2c_i+6d_i(x-x_{i-1}), x_{i-1}\le\xi\le\xi_i,$$

и потребуем их непрерывности при $x=x_i$:

$$b_{i+1}=b_i+2c_ih_i+3d_ih_i^2, c_{i+1}=c_i+3d_ih_i, i=1,2,\cdots,n-1.$$

Общее число неизвестных коэффициентов, очевидно, равно $4n$, число уравнений (4) и (5) равно $4n-2$. Недостающие два уравнения получаем из условия (2) при $x=x_0$ и $x=x_n$:

$$c_1=0, c_n+3d_nh_n=0.$$

Выражение из (5) $d_i=\frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$, подставляя это выражение в (4) и исключая $a_i=y_{i-1}$, получим

Подставив теперь выражения для b_i, b_{i+1} и d_i в первую формулу (5), после несложных преобразований получаем для определения c_i разностное уравнение второго порядка

$$h_ic_i+2(h_i+h_{i+1})c_{i+1}+h_{i+1}c_{i+2}=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right), i=1,2,\cdots,n-1.$$

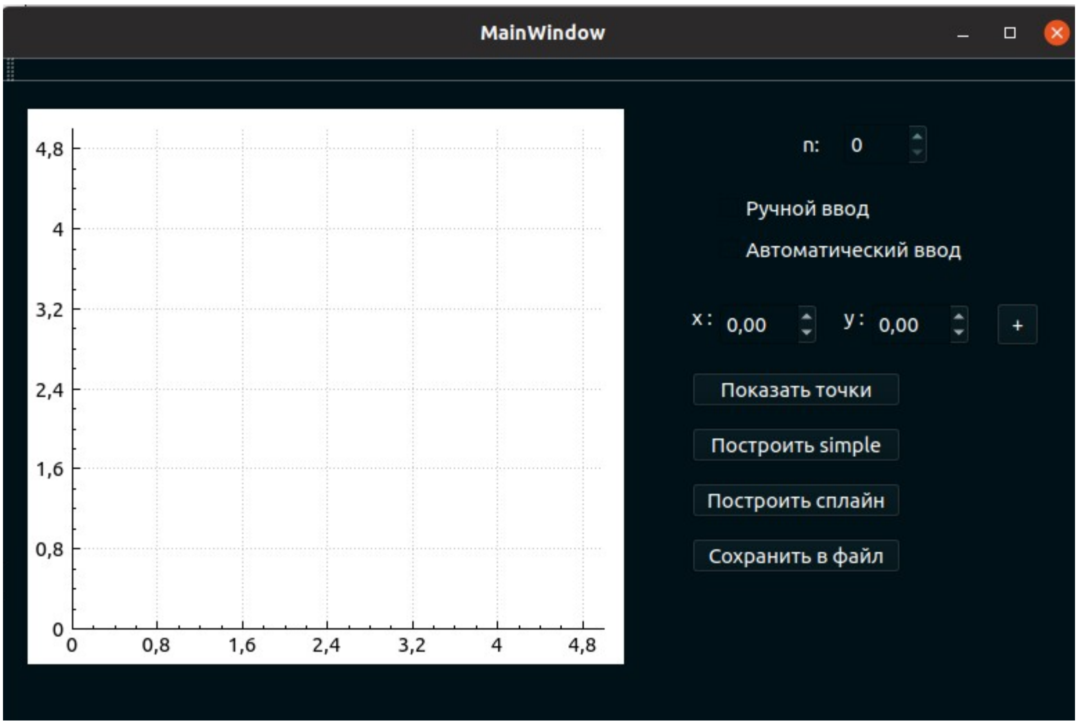
С краевыми условиями

$$c_1=0, c_{n+1}=0.$$

Условие $c_{n+1}=0$ эквивалентно условию $c_n+3d_nh_n=0$ и уравнению $c_{i+1}=c_i+d_ih_i$.

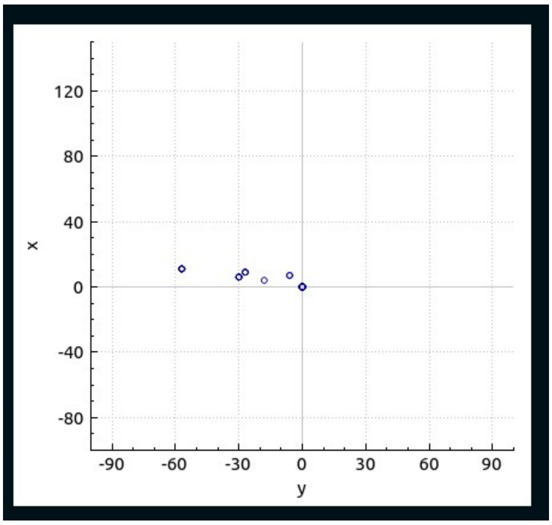
4. Описание программы

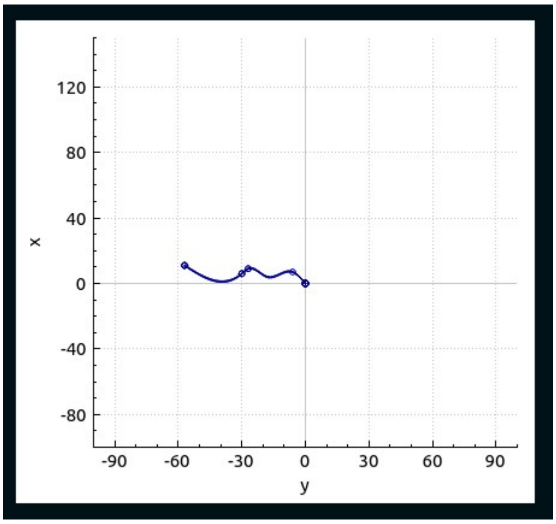
4.1. Руководство пользователя

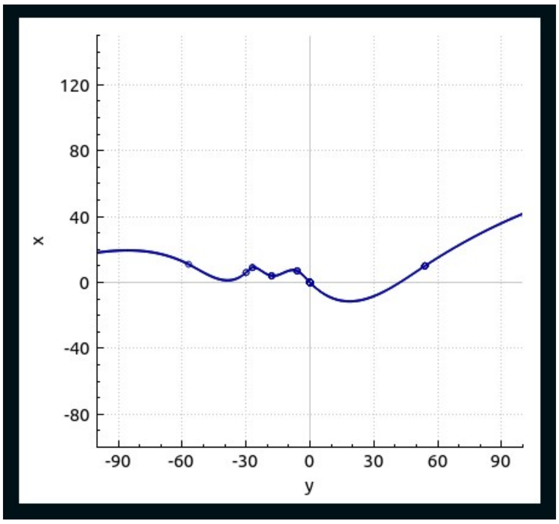


После запуска программы перед пользователем открывается интерфейс приложения. Поддерживаются :

- Автоматический ввод (заданного количества точек)
- Ручной ввод
- Вывод на координатную плоскость заданных точек
- Построение сплайна-интерполяции
- Сохранение координат точек в файл







4.2. Руководство программиста

Структура программы

Проект содержит 4 основных файла:

– “cubic_spline.h” и “cubic_spline.cpp”, предназначенные для реализации интерполяции кубическим сплайном.

– “mainwindow.h” и “mainwindow.cpp”, предназначенные для обеспечения работы графического интерфейса и обработки действий пользователя.

5. Заключение

В ходе выполнения данной лабораторной работы было достигнуто :

- Более глубокое понимание метода
- Создано приложение, демонстрирующее работу метода.

6. Литература

1. [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%81%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%BD]

2. Самарский А.А. «Введение в численные методы». Москва: Издательство «Наука», 1982г.