合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2015～2016 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________________ 考试日期 2016 年 5 月 6 日 10:20-12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名____________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 方程 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&x\\1&2^2&3^2&x^2\\1&2^3&3^3&x^3\end{vmatrix}=0$ 的根是______________________.

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，则 $\left|(5A^*)^{-1}\right|=$ ___________.

3. 设 A 为正交矩阵且 $|A|>0$，则 $\left|A^T\right|=$ _______.

4. 当 $\lambda=$ _____ 时，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有无穷解，通解为___________________.

5. 已知对不全为零的任何实数 $x,y,z,f(x,y,z)=-5x^2-6y^2-4z^2+2axy+2axz$ 都小于零，则 a 的取值范围是_____________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 A 是 n 阶方阵，k 是常数，若 $|A|=a$，则 $\left|kAA^T\right|=$ _____.

（A）ka^2 (B) k^2a (C) k^2a^2 (D) k^na^2

2. 设 A 和 B 都是 n 阶可逆矩阵，若 $C=\begin{pmatrix}O&B\\A&O\end{pmatrix}$，则 $C^{-1}=$ ______.

（A）$\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}O&A^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}B^{-1}&O\\O&A^{-1}\end{pmatrix}$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $B=P^{-1}AP$ 的三个特征值，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$ ______.

（A）11 (B) 5 (C) 10 (D) 12

4. 若 r 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，α 为任一 r 维向量，则_________.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 线性相关 (B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 线性无关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 线性相关性不确定 (D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 中一定有零向量

5. n 元齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是________.

（A）$R(A)\le n$ (B) $R(A)<n$ (C) $R(A)\ge n$ (D) $R(A)>n$

三、（8 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&n\end{vmatrix}$（行列式中未写出的其余元素均为 0）.

四、（10 分）已知 $AP=PB$，若 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A 和 A^5.

五、（8 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 的一个特征值为 3，求 y.

六、（8 分）设方阵 $A=(\alpha_1,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$B=(\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，且 $|A|=1$，$|B|=4$，求 $|A+B|$.

七、（8 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，

(1) α_1 是否可以由 α_2,α_3 线性表示？ (2) α_4 是否可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?试证明你的结论.

八、（12 分）已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$ 通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，试求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

九、（6 分）设 $B=(b_{ij})_{n\times k}$，$C=(c_{ij})_{k\times n}$，$A=BC$，$|A|\ne 0$，证明方程组 $B^Tx=0$ 只有零解.

命题教师注意事项：1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。 2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ A ） 参 考 答 案

2015～2016 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿ 考试日期＿＿＿＿＿＿ 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $x=1,2,3$; 2. $\dfrac{1}{125}$； 3. 1； 4. $1; k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$； 5. $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}.$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

D C D A B

三、(**8 分**)

解:方法一:由行列式定义

$$D_n=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&n\end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{t(n-1n-2\cdots1n)}n!=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

四、(**10 分**)

解: $|P|=-1\neq0, P$ 可逆，用初等行变换求出 P^{-1}

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&-1&0\\0&0&1&-4&1&1\end{pmatrix},\text{则 }P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix},$$

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

$A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$

五、(**8 分**)

解: $|A-3I|=\begin{vmatrix}-3&1&0&0\\1&-3&0&0\\0&0&y-3&1\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=8(2-y)=0$，所以 $y=2$.

六、(**8 分**)

解: $|A+B|=|\alpha_1+\alpha_2,2\beta_1,2\beta_2,2\beta_3|=8(|\alpha_1,\beta_1,\beta_2,\beta_3|+|\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3|)=8\times(1+4)=40.$

七、(**8 分**)

证明:(1) α_1 能由 α_2,α_3 线性表示.

因为已知向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 故其部分组 α_2,α_3 也线性无关, 又知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 所以 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示.

(2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

用反证法, 设 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 即存在常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得 $\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$,

又由(1)知 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示, 即有 $\alpha_1=\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3$, 代入上式得

$\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\lambda_1(\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3)+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=(\lambda_1\mu_2+\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_1\mu_3+\lambda_3)\alpha_3$，即 α_4 能由 α_2,α_3 线性表示, 从而向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关, 与已知矛盾, 所以 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

八、(**12 分**)

解: $f(x)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$, 特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$, 则 $|A|=1\times2\times5=10$，又

$|A|=18-2a^2$, 所以 $18-2a^2=10$, 得 $\alpha=\pm2$, 又 $\alpha>0$, 则 $\alpha=2$，此时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$,

$\lambda_1=1$，解 $(A-E)x=\theta$，得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，单位化 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

$\lambda_2=2$，解 $(A-2E)x=\theta$，得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，单位化 $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,

$\lambda_3=5$，解 $(A-5E)x=\theta$，得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化 $\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

2015～2016 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期__________ 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名__________

取 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$， 则 $P^TAP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$为所求正交变换矩阵。

九、（6 分）

证明：由 $A=BC$，则 $R(A)=R(BC)\le\min\{R(B),R(C)\}$，又 $|A|\ne 0$，所以 $R(A)=n\le R(B)\le\min(n,k)$

即 $R(B)=n$， B^T 为 $k\times n$ 矩阵， $R(B^T)=R(B)=n$，所以 $B^Tx=0$ 只有零解。