2014-2015 学年(宣城)第一学期《线性代数》试卷(A)

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\beta_1,\beta_2),\boldsymbol{B}=(\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_i(i=1,2),\beta_j(j=1,2)$ 均为 3 维列向量，已知 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=-1$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$________ .

2.设 $\boldsymbol{E}[i+j(k)]$ 为 n 阶初等阵,则 $\boldsymbol{E}^{-1}[i+j(k)]=$________ .

3.已知 β_1,β_2,β_3 线性无关,若 $\beta_1+\beta_2,\beta_2+\beta_3,k\beta_3-\beta_1$ 线性相关,则 $k=$________ .

4.若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AB})=$ _______ .

5.已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1,-1,2$,相应的特征向量依次是 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$，令 $\boldsymbol{P}=(-\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3,-2\boldsymbol{x}_2)$，则 $\boldsymbol{AP}=$ ________ .

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1.已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，则必有(　　).

(A)行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$ 的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$，或 $|\boldsymbol{B}|=0$，

(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，

(C) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，

(D) $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$.

2.已知 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则下列关系式正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　(B) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$　(C) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$　(D) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$.

3.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则下列关系式正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，　(B) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，　(C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，　(D) $\boldsymbol{A}^{2014}=\boldsymbol{A}$.

4.设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵,则方程组 $\boldsymbol{Bx}=0$ 与 $\boldsymbol{ABx}=0$ 同解的一个充分条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=m$，　(B) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=s$，　(C) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=s$，　(D) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=n$.

5.若向量组 $\boldsymbol{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出,则下列结论正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$　(B) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$　(C) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$　(D) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

三、（10 分）计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&1\\0&1&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&n\\-1&-2&\cdots&-2&0\end{vmatrix}$.

四、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

五、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，又 $\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，试求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\beta$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

六、（12 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1+a\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\3+a\\3\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-5\\-5\\-5+a\\-5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}7\\7\\7\\7+a\end{pmatrix}$，

(1)问 a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？

(2)当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

七、（12 分）求一正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形,并指出此二次型的正、负惯性指数 p 、q 各是多少？

八、（6 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵 ,证明 :$\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零 .

2014-2015 学年(宣城)第一学期《线性代数》试卷(A)参考答案

一、1．$\underline{4}$；2．$\underline{E[i+j(-k)]}$；3．$\underline{1}$；4．$\underline{3}$；5．$\underline{(-x_1,-x_3,-4x_2)}$ ．

二、1．A；2．C；3．D；4．B；5．B．

三、（10 分）解：$D_{n+1} \overset{c_{n+1}-(c_1\times 1+\cdots+c_n\times n)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -2 & \cdots & -n & \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \end{vmatrix} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$．

四、（10 分）解：$AB = A + 2B \Rightarrow (A-2E)B = A$，$\because \left|A-2E\right| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，所以可逆，从

而 $(A-2E\,|\,A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{行}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array}\right)$，

$\therefore B = (A-2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

五、（10 分）解:此题为求解抽象的非齐次线性方程组.

$\because \beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\therefore Ax = \beta$ 有一个特解为 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\because \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且

$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$，$\therefore r(A) = r(A,\beta) = 3 < 4 = n$，从而 $Ax = 0$ 的基础解系只含一个非零解向量 ξ．注意到

$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$，可得 $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$，故可取 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 由解的结构定理可得 $Ax = \beta$

的通解为 $x = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (k \in \mathrm{R})$．

六、（12 分）解:(1)观察易知：这是四个 4 维向量，可以构成方阵，且富有规律，因此，可从行列式入手．

$\because |A| = |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4| = \begin{vmatrix} -1+a & 3 & -5 & 7 \\ -1 & 3+a & -5 & 7 \\ -1 & 3 & -5+a & 7 \\ -1 & 3 & -5 & 7+a \end{vmatrix}$

$\underset{j=2,3,4}{\overset{c_1+c_j}{=}} (4+a)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 3+a & -5 & 7 \\ 1 & 3 & -5+a & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 7+a \end{vmatrix} \underset{j=2,3,4}{\overset{c_j-(-1)^j(2j-1)c_1}{=}} (4+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (4+a)a^3$，

$\therefore$ 当 $a=0$ 或 $a=-4$ 时，$|A|=0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

（2）当 $a=0$ 时，显然，$r(A)=1$，α_1 就是一个最大无关组，且 $\alpha_j = (-1)^j(2j-1)\alpha_1, j=2,3,4$；

当 $a=-4$ 时,注意到 $|A|=0$，而代数余子式 $A_{44} = \begin{vmatrix} -1+a & 3 & -5 \\ -1 & 3+a & -5 \\ -1 & 3 & -5+a \end{vmatrix} = (-3+a)a^2 \neq 0$，故 $r(A)=3$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 就是一个最大无关组，又 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$，所以 $\alpha_4 = -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$．

七、（12 分）解：二次型 f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,由 $\left|A-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$，

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时,由 $A+E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，正交化，令

$\alpha_1 = \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \xi_2 - \dfrac{[\alpha_1,\xi_2]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3 = 5$ 时,由 $A-5E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得特征向量 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,再令 $\alpha_3 = \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已正交，再单位化 $p_i = \dfrac{p_i}{\|p_i\|}, i=1,2,3$，得，$p_1 = \dfrac{\alpha_1}{\sqrt{2}}, p_2 = \dfrac{2\alpha_2}{\sqrt{6}}, p_3 = \dfrac{\alpha_3}{\sqrt{3}}$，

令 $Q = (p_1,p_2,p_3)$，则 $x = Qy$,$Q^TAQ = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$，

所以 $f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$，$p=1, q=2$．

八、（6 分）证：$\because A,B$ 都是 n 阶正定矩阵，$\therefore$ 存在可逆矩阵 P 和 Q ,使得 $A = P^TP$，$B = Q^TQ$，于是 $AB = P^TPQ^TQ = Q^{-1}(PQ^T)^T(PQ^T)Q = Q^{-1}(U^TU)Q = Q^{-1}DQ$，其中 $U = PQ^T$，$D = U^TU$.又 $U = PQ^T$ 是可逆阵 ,从而 AB 相似于正定矩阵 $D = U^TU$,故 AB 的特征值全大于零．