2013-2014 学年第一学期《线性代数》(宣城)卷(A2)

一．填空题（每小题 4分，共 20分）

1.α,β,γ 为三维列向量，已知三阶行列式$|4\gamma-\alpha,\beta-2\gamma,2\alpha|=40$，则行列式$|\alpha,\beta,\gamma|=$ ＿－5＿ .

2. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}=$ ＿$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$＿ .

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_2x_3$ 正定，则a的取值范围为 ＿$-1<a<1$＿ .

4.设n阶行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，其伴随阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^*)=$ ＿1＿ .

5.设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ＿0＿ .

二．选择题（每小题 4分，共 20分）

1.设$\boldsymbol{A}$为 3 阶方阵，将$\boldsymbol{A}$的第 2 行加到第 3 行得$\boldsymbol{B}$，再把$\boldsymbol{B}$的第 1 行与第 2 行交换得$\boldsymbol{C}$，则满足$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{C}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$等于（ C ）.

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

2.设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为n阶方阵，且$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$，则（ D ）.

(A)$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$，　(B)$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$，

(C)$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$，　(D)$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$

3.设矩阵$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则下列说法正确的是（ B ）.

(A) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$有相同的行最简型　(B) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$有相同的标准型

(C) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的行向量组等价　(D) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的列向量组等价

4.设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$阶实矩阵，则存在$n\times s$阶非零矩阵$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$的充要条件是（ A ）.

(A）$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})<n$　(B）$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=n$　(C）$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})<m$　(D）$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=m$

5.设n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,(m<n)$线性无关，则$n$维向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关的充要条件为（ D ）.

(A)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示；

(B)向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示；

(C)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价；

(D)矩阵$\boldsymbol{A}=$（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$）与矩阵$\boldsymbol{B}=$（$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$）等价 .

三、（10 分）计算行列式$|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|,\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}$，

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n+x\\1&2&\cdots&n-1+x&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&2+x&\cdots&n-1&n\\1+x&2&\cdots&n-1&n\end{vmatrix}$. $\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-1&0\\0&0&\cdots&0&n\end{vmatrix}$.

四、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 且$\boldsymbol{B}(2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{X}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$

五、（10 分）已知向量组$\alpha_1=(1,-2,-2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,-1,-3,-2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(5,0,-4,-5)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(2,1,-1,-3)^{\mathrm{T}}$，

(1)求该向量组的秩及其一个极大线性无关组；

(2)当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时，将其余向量用该极大无关组线性表示.

六、（12 分）$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，试讨论$a,b$为何值时

（1）β不能用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

（2）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地表示，并求出表达式；

（3）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示，但表达式不唯一，并求出表达式 .

七、（12 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2+x_3)^2$，

(1)写出二次型f的矩阵$\boldsymbol{A}$；

(2)求一正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{y}$，化二次型$f$为标准型 .

八、（6 分）设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$均为n阶方阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

2013－2014 学年第二学期《线性代数》试卷(A)参考答案

一、1．$\underline{-5}$；2．$\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$；3．$\underline{-1<a<1}$；4．$\underline{1}$；5．$\underline{0}$.

二、1．C；2．D； 3．B； 4．A；5．D.

三、（10 分）解： $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\frac{n(n+1)}{2}+x)x^{n-1}$，$|\boldsymbol{B}|=n!$，

$\boldsymbol{D}=(-1)^{n^2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n^2}(\frac{n(n+1)}{2}+x)n!x^{n-1}$.

四、（10 分）解：$(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，因为$2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$可逆，

所以 $\boldsymbol{X}=(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-4&8\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&11\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$.

五、（10 分）解：(1) $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&3&5&2\\-2&-1&0&1\\-2&-3&-4&-1\\1&-2&-5&-3\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=2$ ，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为其一个极大无关组；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ ，$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

六、（12 分）解 :问题转化为求方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3\\-3ax_2+2bx_3=-3\end{cases}$，的解，

增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&2b&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&a&0&1\\0&0&b&0\end{array}\right)$，

（1）$a=0$时，(若$b=0$，则$R(\boldsymbol{A})=1\neq R(\boldsymbol{B})=2$；若$b\neq0$，则$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\boldsymbol{B})=3$)方程组无解，即$\boldsymbol{\beta}$不能用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示 .

（2）当$a\neq0,b\neq0$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，方程组有唯一解，即$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一地表示，求表达式 .

$\boldsymbol{B}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&a&0&1\\0&0&b&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&a&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1-1/a\\0&1&0&1/a\\0&0&1&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}=(1-\frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2$

（3）当$a\neq0,b=0$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示，但表示式不唯一，求表示式 .

$\boldsymbol{B}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&a&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1-1/a\\0&1&0&1/a\\0&0&0&0\end{array}\right)$，$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-1/a\\1/a\\0\end{pmatrix}$，

$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}=(1-\frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，其中$k$为任意常数 .

七、（12分）解：(1)由题意 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$

（2）$\boldsymbol{A}$的特征方程为$\begin{vmatrix}4-\lambda&-2&2\\-2&1-\lambda&-1\\2&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-6)=0$ ，

所求特征值为$\lambda_1=6$,$\lambda_2=\lambda_3=0$ ，

当$\lambda_1=6$时，$\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-2&-5&-1\\2&-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，得对应的特征向量$\xi_1=(2,-1,1)^T$，

当$\lambda_2=\lambda_3=0$时，$\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，得特征向量$\xi_2=(0,1,1)^T,\xi_3=(1,1,-1)^T$，

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3已正交，再单位化得，$\boldsymbol{q}_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}2/\sqrt6\\-1/\sqrt6\\1/\sqrt6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{q}_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt2\\1/\sqrt2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{q}_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt3\\1/\sqrt3\\-1/\sqrt3\end{pmatrix}$，取

正交阵$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，得$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{y}$，所以$f=6y_1^2$.

八、（6 分）证：因为$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，所以

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，又$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}$，所以

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$可逆，从而$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.