# 合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）



2019～2020 学年第 一 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2019 年 12 月 1 日 19:00-21:00 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

**一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）**

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-\dfrac{1}{3}$，则 $\left|(4\boldsymbol{A})^{-1}+3\boldsymbol{A}^*\right|=$________.

2. 已知 4 阶行列式第三行元素依次为 $-1,0,2,4$，第四行元素对应的代数余子式依次为 $5,10,\boldsymbol{a},4$，则 $a=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\vec{\alpha}_1=\vec{0},\boldsymbol{A}\vec{\alpha}_2=2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

5. 若二次型 $f=2x_1^2+tx_2^2+t^2x_3^2+2x_1x_3$ 是正定的，则 $t$ 的取值范围是________.

**二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）**

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，则（ ）.

(A) 当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$ (B) 当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

(C) 当 $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$ (D) 当 $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵，且 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，则下列命题正确的是（ ）.

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ (B) $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$ (D) $(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$

3. 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\cdots,\ \vec{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{B}=(\vec{\beta}_1,\ \vec{\beta}_2,\cdots,\ \vec{\beta}_n)$, $\boldsymbol{AB}=(\vec{\gamma}_1,\ \vec{\gamma}_2,\cdots,\ \vec{\gamma}_n)$，记向量组

Ⅰ：$\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\cdots,\ \vec{\alpha}_n$； Ⅱ：$\vec{\beta}_1,\ \vec{\beta}_2,\cdots,\ \vec{\beta}_n$； Ⅲ：$\vec{\gamma}_1,\ \vec{\gamma}_2,\cdots,\ \vec{\gamma}_n$.

如果向量组Ⅲ线性相关，则（ ）.

(A) 向量组Ⅰ线性相关 (B) 向量组Ⅱ线性相关

(C) 向量组Ⅰ与Ⅱ都线性相关 (D) 向量组Ⅰ与Ⅱ中至少有一个线性相关

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则下述命题正确的是（ ）.

(A) 若 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解

(B) $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$

(D) 若 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ 有两个不同的解，则 $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解

5. 下列矩阵中，不能相似对角化的矩阵是（ ）.

(A) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&1&0\\4&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

**三、（8 分）** 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&1\\1&1+a_2&1&1\\1&1&1+a_3&1\\1&1&1&1+a_4\end{vmatrix}$，$a_1a_2a_3a_4\neq 0$.

**四、（10 分）** 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

**五、（12 分）** 设向量组：$\vec{\alpha}_1=(1,2,1,0)^T$，$\vec{\alpha}_2=(4,5,0,5)^T$，$\vec{\alpha}_3=(1,-1,-3,5)^T$，$\vec{\alpha}_4=(0,3,1,1)^T$，求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

**六、（12 分）** 设 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1,\end{cases}$ 问 $\lambda$ 取何值时，此方程组：

（1）有唯一解？（2）无解？（3）有无穷多解？

**七、（14 分）** 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4ax_2x_3\,(a>0)$ 通过正交变换 $\vec{x}=\boldsymbol{P}\vec{y}$ 化为标准形 $f=5y_1^2+2y_2^2+y_3^2$，求（1）常数 $a$ 的值；（2）正交变换 $\vec{x}=\boldsymbol{P}\vec{y}$.

**八、（4 分）** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明：$R(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

# 2019-2010 第一学期线代期末试卷（A）参考答案

**一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）**

1. $\frac{81}{64}$； 2. $-\frac{11}{2}$； 3. $t=-3$； 4. 1； 5. $t>\frac{\sqrt{2}}{2}$

**二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）**

**1. A 2. D 3.D 4.D 5.C**

**三、（8 分）解：**

$$D_4=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&1\\1&1+a_2&1&1\\1&1&1+a_3&1\\1&1&1&1+a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&1\\-a_1&a_2&0&0\\-a_1&0&a_3&0\\-a_1&0&0&a_4\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2a_3a_4\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a_1}&\frac{1}{a_2}&\frac{1}{a_3}&\frac{1}{a_4}\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)$$

四、（10 分）解：因 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$, 则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$得

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^{n+1}\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-2+2^{n+1}\\0&2^n\end{pmatrix}$$

五、（12 分）解：

因

$$(\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\vec\alpha_3,\vec\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&5&-1&3\\1&0&-3&1\\0&5&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&1&0\\0&-3&-3&3\\0&-4&-4&1\\0&5&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&1&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $R(\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\vec\alpha_3,\vec\alpha_4)=3$, $\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\vec\alpha_4$ 为其一个极大无关组，

且 $\vec\alpha_3=-3\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+0\vec\alpha_4$。

六、（12 分）解：

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

（1）当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq10$时，方程有唯一解；

（2）当$\lambda=10$时，$(A,\vec b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-5&-4&2\\0&1&1&1\\0&0&0&3\end{array}\right)$

因$R(A)=2<R(A,\vec b)$，方程组无解。

（3）当$\lambda=1$时，

$(A,\vec b)=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 因$R(A)=1=R(A,\vec b)<3$,

则方程有无穷多解。

七、（14 分）解：（1）二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\boldsymbol{a}\\0&2\boldsymbol{a}&3\end{pmatrix}$,

由已知得 $\lambda_1$=5, $\lambda_2$=2, $\lambda_3$=1 是 $A$ 的三个特征值，则$|\boldsymbol{A}|=1\times2\times5$,

因$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&2\boldsymbol{a}\\0&2\boldsymbol{a}&3\end{vmatrix}=2(9-4\boldsymbol{a}^2)$，则$2(9-4\boldsymbol{a}^2)=10$，所以$\boldsymbol{a}=1$ $(\boldsymbol{a}>0)$.

（2）由（1）知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$,且其特征值为 $\lambda_1$=5, $\lambda_2$=2, $\lambda_3$=1

当 $\lambda_1$=5 时，解$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\vec{\boldsymbol{x}}=\vec0$

因 $\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\vec\xi_1=(0,1,1)^T$；

当$\lambda_2=2$时，解$\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)\vec{x}=\vec{0}$

因$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\vec{\xi}_2=\left(\mathbf{1,0,0}\right)^T$；

当$\lambda_3=1$时，解$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\vec{x}=\vec{0}$

因$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\vec{\xi}_3=\left(\mathbf{0,-1,1}\right)^T$；

因 A 是实对称矩阵，则$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$正交，单位化得

$$\vec{p}_1=\frac{\vec{\xi}_1}{\left|\vec{\xi}_1\right|}=\left(\mathbf{0},\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}},\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right)^T,\vec{p}_2=\frac{\vec{\xi}_2}{\left|\vec{\xi}_2\right|}=\left(\mathbf{1,0,0}\right)^T,\vec{p}_3=\frac{\vec{\xi}_3}{\left|\vec{\xi}_3\right|}=\left(\mathbf{0},\ -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}},\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right)^T.$$

令$\boldsymbol{P}=\left(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}&\mathbf{0}&-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\\\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}&\mathbf{0}&\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{P}$为正交矩阵，且当$\vec{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}\vec{\boldsymbol{y}}$时，可化二次型为标准型：

$$\boldsymbol{f}=\mathbf{5}\boldsymbol{y}_1^2+\mathbf{2}\boldsymbol{y}_2^2+\boldsymbol{y}_3^2$$

.八、（4 分）证：$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$，只需证 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$ 与 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$同解。

若 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$, 则 $\boldsymbol{A}^T\left(\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\boldsymbol{A}^T\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$，即$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$的解也是$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$的解；

若 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$, 则 $\vec{\boldsymbol{x}}^T\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\vec{\boldsymbol{x}}^T\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$，即$\left(\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}\right)^T\left(\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\vec{\mathbf{0}}$, 所以$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$,

从而$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$的解也是$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$的解；,

综上得$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$ 与 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\mathbf{0}}$同解，所以$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$.