合　肥　工　业　大　学　试　卷（A）

2017～2018 学年第 一 学期　　课程代码 1400071B　　课程名称 线性代数　学分 2.5　课程性质：必修☑、选修☐、限修☐　考试形式：开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________　　考试日期 2017 年 12 月 3 日　　命题教师 集体　　系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&0&2\\1&4&-1\end{vmatrix}$，$M_{ij}$ 为 D 的 (i,j) 元的余子式，则 $2M_{31}-M_{32}-3M_{33}=$_____.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&-2\end{pmatrix}$，则 $2A^TB-A=$________.

3. 设向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关，$\overrightarrow{\alpha_1}+2\overrightarrow{\alpha_2},\ \overrightarrow{\alpha_2}-\overrightarrow{\alpha_3},\ \overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}+t\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性相关，则 $t=$______.

4．设 $\overrightarrow{\eta_1}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \overrightarrow{\eta_2}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ 为三元非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的两个解，A 的秩为 2，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解为________.

5．如果二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+(k-2)x_3^2+4x_1x_2$ 为正定二次型，则 k 一定满足条件_______.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 A,B 为 n 阶方阵，下列结论正确的是（　　）.
（A）$(A+B)^T=A^T+B^T$，并且 $(AB)^T=A^TB^T$
（B）当 A,B 均为可逆矩阵时，$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ 并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
（C）若 $AB=O$，则 $A=O$ 或 $B=O$
（D）若 $AB=O$，且 A 为可逆矩阵时，则 $B=O$

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times k$ 矩阵，$AB=O,B\neq O$，则下列命题中正确的是（　　）.
（A）A 的列向量组线性相关　　（B）A 的行向量组线性相关
（C）A 的列向量组线性无关　　（D）A 的行向量组线性无关

3. 下列矩阵中，不能相似对角化的矩阵为（　　）.
（A）$\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&3\\1&3&-1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

4. 齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 和 $B\vec{x}=0$ 同解的充分必要条件为（　　）.
（A）A 与 B 等价　　（B）A 与 B 相似
（C）A 与 B 的列向量组等价　　（D）A 与 B 的行向量组等价

5. 设向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关，向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性相关，则（　　）.
（A）$\vec{\beta}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性表示
（B）$\vec{\beta}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 不可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性表示
（C）$\vec{\beta}$ 不可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性表示
（D）$\vec{\beta}$ 不可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 不可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性表示

三、（8 分） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&7\end{vmatrix}$.

四、（10 分） 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^{-1}=2AB-E$，求 B.

五、（14 分） 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1-\lambda x_2-2x_3=-1,\\x_1-x_2+\lambda x_3=2,\\5x_1-5x_2-4x_3=1,\end{cases}$
（1）常数 λ 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？
（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解.

六、（8 分） 已知向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{bmatrix}$，求其秩并求一个极大线性无关组.

七、（15 分） 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 后化为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$，其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$.
（1）求 $\boldsymbol{a}$ 的值；
（2）求正交矩阵 P.

八、（5 分） A 为 n 阶对称矩阵，证明 A^2 为正定的充要条件是 A 为可逆阵.

2017～2018 学年第一学期《线性代数》试卷（A）参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\underline{-14}$；2、$\underline{\begin{pmatrix}2&0&4\\2&1&0\\0&-1&5\end{pmatrix}}$；3、$\underline{1}$；4、$\underline{\vec{x}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\text{或}\vec{x}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}}$；5、$\underline{k>4}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、D；　2、A；　3、C；　4、D；　5、B.

三、(**8 分**) 计算行列式$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&7\end{vmatrix}$.

解： $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\-1&2&0&0\\-1&0&3&0\\-1&0&0&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&6\end{vmatrix}=108$.

四、(**10 分**) 设$A=\begin{pmatrix}3&4&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^{-1}=2AB-E$，求$B$.

解： 由$ABA^{-1}=2AB-E$得$B=((2E-A^{-1})A)^{-1}=(2A-E)^{-1}$，

而$2A-E=\begin{pmatrix}5&8&0\\2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，对此矩阵进行初等行变换得：$B=\begin{pmatrix}-3&8&0\\2&-5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

五、(**14 分**) 已知线性方程组$\begin{cases}x_1-\lambda x_2-2x_3=-1,\\x_1-x_2+\lambda x_3=2,\\5x_1-5x_2-4x_3=1,\end{cases}$

（1）常数λ取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解.

解法一： 对增广矩阵实施初等行变换，得：

$$(A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-\lambda&-2&-1\\1&-1&\lambda&2\\5&-5&-4&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&\lambda&2\\0&1-\lambda&-2-\lambda&-3\\0&0&-4-5\lambda&-9\end{array}\right).$$

(1) i）当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-\frac{4}{5}$时，方程组有唯一解;

ii）当$\lambda=-\frac{4}{5}$时，$R(A|\vec{b})\neq R(A)$,方程组无解;

iii）当$\lambda=1$时，$R(A|\vec{b})=R(A)=2<3$,方程组有无穷多解.

（2）当$\lambda=1$时，$(A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&-1\\1&-1&1&2\\5&-5&-4&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，即$\begin{cases}x_1-x_2=1,\\x_3=1,\end{cases}$

得通解$\vec{x}=c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$（$c$为任意常数）.

解法二： 方程组系数行列式$D=\begin{vmatrix}1&-\lambda&-2\\1&-1&\lambda\\5&-5&-4\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(5\lambda+4)$，

以下讨论同解法一.

六、(8 分) 已知向量组$\overline{\alpha_1}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}$，$\overline{\alpha_2}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{bmatrix}$，$\overline{\alpha_3}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{bmatrix}$，求其秩并求一个极大线性无关组.

解： 设$A=(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3})=\begin{bmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{bmatrix}$,对$A$进行初等行变换，化为行阶梯形矩阵$B$,

$$A\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&4&1\\0&1&\frac{5}{9}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=B,$$

所以$\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3}$的秩为 2，$\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2}$为其一个极大线性无关组.

注：$\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3}$ 或 $\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 也为其一个极大线性无关组.

七、（15 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 后化为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$，其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$.

（1）求 $\boldsymbol{a}$ 的值；

（2）求正交矩阵 P.

解：（1）f 与标准型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

因为用正交变换化 f 为标准型，所以 f 与其标准型对应的矩阵相似，而相似矩阵的行列式相同，即由

$|A|=|B|$ 有 $\begin{vmatrix} a & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$，或由 $a+0+0=-2+1+1$ 得 $a=0$.

（2）（方法一）这时 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. 对于 A 的特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为

$\xi_1=\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.　　将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，

将 ξ_2,ξ_3 正交化：取 $\eta_2=\xi_2$，　$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{\|\eta_2\|^2}\eta_2=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}+\frac12\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac12\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，

再将 η_2,η_3 单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，　　$p_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

将 p_1,p_2,p_3 构成正交矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，

有 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

（方法二）这时 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. 对于 A 的特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为

$\xi_1=\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.　　将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，

ξ_2,ξ_3 已正交，单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，　　$p_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$. 将 p_1,p_2,p_3 构成正交矩阵

$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

八、（5 分）A 为 n 阶对称矩阵，证明 A^2 为正定的充要条件是 A 为可逆阵.

证明：易知 A^2 对称，设 λ 为 A 的特征值，则 λ^2 为 A^2 的特征值，则 $\lambda^2>0\Leftrightarrow\lambda\neq0$, 故得证.