一、填空题(每小题 3 分)

1、$\underline{0.3}$，2、$\underline{0.7}$，3、$\underline{C_3^1(1-p)^2p^2}$，4、$\underline{\chi^2(1)}$，5、$\underline{1-\dfrac{1}{m}}$.

二、选择题(每小题 3 分)

1.D；2.B；3.D；4.A；5.C.

三、(12 分)【解】设 $A=\{$任意取出的零件是次品$\}$，$B=\{$取出的零件由甲机床加工$\}$,

(1) $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.3\times0.03+0.7\times0.02=0.023$,

(2) $P(B|A)=\dfrac{P(BA)}{P(A)}=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0.3\times0.03}{0.023}=\dfrac{9}{23}$.

$$P(\overline{B}|A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(\overline{B})P(A|\overline{B})}{P(A)}=\frac{0.7\times0.02}{0.023}=\frac{14}{23}.$$

所以为乙机床生产的可能性大.

四、(12 分)【解】$X\sim f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$,

$Y=1-e^{-2X}\Rightarrow X=-\dfrac{1}{2}\ln(1-Y)$,

$$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}2e^{\ln(1-y)}\dfrac{1}{2(1-y)}, 0<y<1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1, 0<y<1\\ 0, \text{其他}\end{cases},$$

五、(14 分)【解】(1) $\because \iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^x cxy\mathrm{d}y=1$,

$\therefore \dfrac{c}{2}\int_0^1(x-x^3)dx=\dfrac{c}{8}=1, c=8$,

(2) $P(X+Y<1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{1-y}8xydx=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

(3) $f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x 8xydy=4x^3, 0\le x\le 1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 8xydx=4y(1-y^2), 0\le y\le 1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$

由于 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以 X 与 Y 不独立.

六、(12 分)【解】(1)由 $P\{XY\ne 0\}=\dfrac{1}{4}$，得 $P\{X=1,Y=-1\}=\dfrac{1}{4}$,

所以 $P\{X=1,Y=0\}=P(X=1)-P(X=1,Y=-1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$,

$P\{X=0,Y=0\}=P\{Y=0\}-P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=0$,

从而 $P\{X=0,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$,

(X,Y) 的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0	1/4	1/4
-1	1/2	1/4	3/4
$p_{i\cdot}$	1/2	1/2	1

(2) $EX=\frac{1}{2}, EY=-\frac{3}{4}, EXY=-\frac{1}{4}, Cov(X,Y)=EXY-EXEY=(-\frac{1}{4})-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{4})=\frac{1}{8}$,

故 X 与 Y 线性相关；

$DX=\frac{1}{4}, DY=EY^2-(EY)^2=\frac{3}{4}-(-\frac{3}{4})^2=\frac{3}{16}, \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{1/8}{\sqrt{1/4\cdot 3/16}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

七、(12 分)【解】(1)矩估计 $EX=\int_{\theta}^{+\infty}x\frac{2\theta^2}{x^3}\mathrm{d}x=2\theta$，

令 $EX=A_1=\overline{X}$，因此 $\theta=\frac{1}{2}\overline{X}$，所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_M=\frac{1}{2}\overline{X}$,

(2)极大似然估计

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\theta^2}{x_i^3}=2^n\theta^{2n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^3}$，取对数可知

$\ln L=n\ln 2+2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$， $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}>0$,所以 $\ln L(\theta)>0$，

又 $x_1,x_2,\cdots,x_n\ge\theta$，故 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，即 $\hat{\theta}_{\mathrm{L}}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$；

八、(8 分)【解】(1)由 σ^2 未知，可知 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$,

于是置信区间长度为 $\frac{2S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1)$,由 $\frac{2S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1)\le L$,得 $n\ge\frac{4S^2(t_{\alpha/2}(n-1))^2}{L^2}$.

(2) 因为 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间：

$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$

代入 $n=5, s=0.8$ 得：$(\frac{4\times 0.8^2}{11.143},\frac{4\times 0.8^2}{0.484})\approx(0.224,5.289)$，则 σ^2 的 95%的置信区间为

$(0.224,5.289)$.