合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2018～2019 学年第 二 学期　课程代码 1400071B　课程名称 线性代数 学分 2.5　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________　考试日期 2019 年 5 月 7 日 8:00-10:00　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $\left\| A \right|A\right|$ = __________.

2. 设方阵 A 满足 $A^2+2A-3E=O$，则 $(A+4E)^{-1}==$ __________ .

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为= __________ .

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，且秩 $r(A)=3$, $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $x==$ __________ .

5. 二次型 $a(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经过正交变换后化为 $6y_1{}^2$，则 $a==$ __________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times n$ 矩阵，则必有（　）
   (A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　(B) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
   (C) $(AB)^2=A^2B^2$　　(D) $|AB|=|BA|$

2. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是（　）
   (A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$

3. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系, 下列结论正确的是（　）

   (A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的一组基础解系

   (B) ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等秩, 则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是 $Ax=0$ 的一组基础解系

   (C) $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价, 则 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 也是 $Ax=0$ 的一组基础解系

   (D) ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价, 则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是 $Ax=0$ 的一组基础解系

4. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有（　）
   (A) 当 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{a}$　　(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq \boldsymbol{0})$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-\boldsymbol{a}$
   (C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq \boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{0}$　　(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{0}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值之一是（　）
   (A) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$　(B) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|^n$　(C) $\lambda|\boldsymbol{A}|$　(D) $\lambda|\boldsymbol{A}|^n$

三、(8 分) 求行列式 $\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}$.

四、(**10** 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

五、(**12** 分) a,b 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ \quad x_2-x_3+2x_4=1\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多个解？

六、(**14** 分) 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 是否可对角化，若能对角化，求一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$（Λ 为对角阵）.

七、(**10** 分) 已知向量 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，证明：α_3 可由 α_1,α_2 线性表示且表示式惟一.

八、(6 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}^T$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵，试证：$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(B)=n$.

2018～2019 学年第二学期《线性代数》试卷（A）评分细则

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 625　　2. $\dfrac{2E-A}{5}$　　3. **1**　　4. $(1,2,3,4)^T+c(2,3,4,5)$　　5. **2**

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. (D)　　2. (B)　　3. (D)　　4. (D)　　5. (A)

三、（8 分）解：$D=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^7\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+1)\cdot\lambda^3+2\lambda^2+4+3\lambda$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$$

四、（10 分）解：由已知有 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 因为 $|\boldsymbol{A}|=-1$，知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}$

又 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，从而 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

五、（12 分）解：用初等行变换把增广矩阵化为行阶梯形矩阵，

$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3\\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0\end{pmatrix}$，由此可知：

（1）当 $a\neq-1$ 时，$r(A)=r(A\,|\,b)=4$，方程组有唯一解；

（2）当 $a=-1,\ b\neq0$ 时，$r(A)=2,\ r(A\,|\,b)=3$，方程组无解；

（3）当 $a=-1,\ b=0$ 时，$r(A)=r(A\,|\,b)=2$，方程组有无穷多个解.

六、（14 分）解：（1）A 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=0$；

当 $\lambda_1=1$ 时，$r(A-E)=r\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=2=3-1$，

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，$r(A)=r\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1=3-2$，由定理可知，$A$ 可对角化.

(2) 当 $\lambda_1=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $\left(A-E\right)x=0$ 的基础解系，

即线性无关的特征向量 $\alpha_1=(1,0,0)^T$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $Ax=0$ 的基础解系，即线性无关的特征向量

$\alpha_2=(-1,1,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,1)^T$.

令 $P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$.

七、（10 分）证：因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故存在不同时为零的数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0.$$

若 $k_3=0$，则因为 α_1,α_2 线性无关，可推出 $k_1=k_2=0$ 矛盾，故 $k_3\neq0$，从而 $\alpha_3=-\dfrac{1}{k_3}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$，

即 α_3 由 α_1,α_2 线性表示.

若 $\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，$\alpha_3=\lambda_1'\alpha_1+\lambda_2'\alpha_2$，两式相减得 $0=(\lambda_1-\lambda_1')\alpha_1+(\lambda_2-\lambda_2')\alpha_2$，

因为 α_1,α_2 线性无关，故 $\lambda_1=\lambda_1',\lambda_2=\lambda_2'$. 从而 α_3 由 α_1,α_2 线性表示且表示式唯一.

八、（6 分）证：必要性：设 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵，由定义，$\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$

即 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $(\boldsymbol{Bx})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$. 即 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$. 因此，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $r\,(\boldsymbol{B})=n$

充分性：因 $(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{B}^T)^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$，

知 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为实对称矩阵，若 $r\,(\boldsymbol{B})=n$，则齐次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，即对 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 必有 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq0$，恒有 $(\boldsymbol{Bx})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$，即当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$，故 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.