合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2016～2017 学年第 二 学期　课程代码 1400071B　课程名称 线性代数　学分 2.5　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）____________　考试日期 2017 年 5 月 2 日 8:00-10:00　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名____________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\2&2&3&4\end{vmatrix}$，设 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 是 $|A|$ 中元素 a_{4j} 的代数余子式，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$______.

2. 已知三阶方阵 A 满足 $|A|=0$，$|A-E|=0$ 及 $|2A+E|=0$，且 A 与 B 相似，则 $|B+E|=$_______.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B\neq O$，且 $AB=O$，则 $t=$_________.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，则 $\lambda\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系的充要条件是________________.

5. 当 t 值取_________时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定的.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 下列说法错误的是（　　）.

（A）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则其中任意两个向量线性无关

（B）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任意两个向量线性无关，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

（C）向量组 $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关

（D）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组 α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 也线性无关

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵，则下列关系正确的有（　　）个.

（I）$AA^*=A^*A$　（II）$(AB)^T=B^TA^T$

（III）$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　（IV）$(A+E)(A-E)=A^2-E$

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

3. 已知 β_1,β_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $Ax=b$ 的通解是（　　）.

（A）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)$　（B）$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{1}{4}\beta_1+\frac{3}{4}\beta_2$

（C）$k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_1)+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$　（D）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_2-\beta_1)$

4. 已知 ξ_1，ξ_2 是齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 的两个不同解向量，则下列向量中，必是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量为（　　）.

（A）ξ_1　（B）ξ_2　（C）$\xi_1+\xi_2$　（D）$\xi_1-\xi_2$

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&a&-2\\a&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$（$a$ 为整数）与 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似，则 a 及 b 的值分别为（　　）.

（A）$a=2,\ b=-6$　（B）$a=0,\ b=-6$　（C）$a=-2,\ b=6$　（D）$a=0,\ b=-3$

三、（10 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\7\\-1\\8\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\\-5\end{pmatrix}$，求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

四、（10 分）设三阶方阵 A，B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$，求矩阵 B，其中 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$.

五、（14 分）已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\x_1-x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=b.\end{cases}$

（1）常数 a，b 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解.

六、（8 分）设 A 为三阶实对称矩阵，特征值是 $0,1,-1$，而 $\lambda_2=1$ 和 $\lambda_3=-1$ 的特征向量分别是 $p_2=\begin{pmatrix}0\\2a-1\\1\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}a\\1\\1-3a\end{pmatrix}$.（1）求 a 的值；（2）求矩阵 A 及 A^{100}.

七、（14 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形的正交变换，并指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

八、（4 分）已知 A 与 $A-E$ 均为正定矩阵，判定 $E-A^{-1}$ 是否为正定矩阵？说明理由.

2016～2017 学年第二学期《线性代数》试卷（A）参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\underline{-3}$；　2、$\underline{1}$；　3、$\underline{-3}$；　4、$\underline{\lambda \neq 1}$；　5、$\underline{>2}$．

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、B；　2、C；　3、B；　4、D；　5、A.

三、（10 分）

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\2&1&7&0\\-1&2&-1&5\\3&-1&8&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&1&1&2\\0&2&2&4\\0&-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

则 $R(\boldsymbol{A})=2$，从而 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}=2$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为该向量组的一个极大线性无关组，并且

$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

四、（10 分）

解 将 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$，右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}=6\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&&\\&3&\\&&\frac{6}{7}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}.$$

五、（14 分）

解 （法 1）$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&a&1\end{vmatrix}=a-2.$

当 $a\neq 2$ 时，该方程组有唯一解；

当 $a=2$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&-1&1\\1&2&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&-1&0\\0&1&1&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&b-1\end{pmatrix}$,

则当 $a=2$，$b\neq 1$ 时 $R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解；

当 $a=2$，$b=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，该方程组有无穷多解，且其同解

方程组为 $\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，其导出组 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$ 的一个基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，于是原方程组的通解为

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

（法 2）$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&-1&1\\1&a&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&-1&0\\0&a-1&1&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&2-a&b-1\end{pmatrix}$，则

当 $a\neq 2$ 时，该方程组有唯一解；

当 $a=2$，$b\neq 1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解；

当 $a=2$，$b=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，该方程组有无穷多解，后同法 1.

六、（8 分）

证 （1）由 $[\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]=0$ 得 $a=0$；

（2）此时 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. 设 $\lambda_1=0$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，根据 $[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2]=0$ 及

$[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3]=0$ 得方程组为 $\begin{cases}-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

七、（14 分）

解 （1）二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，解得 $a=0$.

（2）$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 因为 ξ_1 与 ξ_2 已正交，故只需将 ξ_1 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=0$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-0\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. 单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$. 所求正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

并将二次型 f 化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2$.

显然方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示圆柱面.

八、（4 分）

证 显然 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 为实对称矩阵. 又设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，由于 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 正定，则它们的特征值均大于 0，即 $\lambda>1$，从而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 的任一特征值 $1-\frac{1}{\lambda}>0$，因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定的.