合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A）

共__1__页第__1__页

2016～2017 学年第__一__学期 课程代码__1400071B__ 课程名称__线性代数__ 学分__2.5__ 课程性质：必修þ、选修¨、限修¨ 考试形式 开卷¨、闭卷þ

专业班级（教学班）________ 考试日期________ 命题教师__集体__ 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题 4分，共 20分）

1.设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$________.

2.设 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=\frac{1}{3}$，则 $\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-15A^*\right|=$________.

3.设方阵 A 满足 $A^2+2A-3E=O$，则 $(A+4E)^{-1}=$________.

4. 设 A 是三阶矩阵，特征值为 $1,2,3$，则 $|A+2E|=$________.

5. 当常数 t 满足________时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2tx_2x_3$ 正定.

二、选择题（每小题 4分，共 20分）

1.设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则（ ）.

（A）当 $m>n$ 时，必有 $|AB|\neq 0$ （B）当 $m>n$ 时，必有 $|AB|=0$

（C）当 $n>m$ 时，必有 $|AB|\neq 0$ （D）当 $n>m$ 时，必有 $|AB|=0$

2.设 A 是 3阶方阵，将 A 的第 2行加到第 1行得 B，再将 B 的第 1列的 -1 倍加到第 2列得 C，记 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则（ ）.

（A）$C=P^{-1}AP$ （B）$C=PAP^{-1}$ （C）$C=P^TAP$ （D）$C=PAP^T$

3.α,β,γ 线性无关，α,β,δ 线性相关，则（ ）.

（A）α 必可由 β,γ,δ 线性表示 （B）β 必不可由 α,γ,δ 线性表示

（C）δ 必可由 α,β,γ 线性表示 （D）δ 必不可由 α,β,γ 线性表示

4.已知 A 是 4×5 的矩阵，ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，则（ ）

（A）$r(A)=2$ （B）$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_1$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系

（C）$\xi_1-\xi_2,\xi_2+\xi_1$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系 （D）$k(\xi_1+\xi_2),k\in R$ 是 $Ax=0$ 的通解

5.设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B（ ）.

（A）合同且相似 （B）合同但不相似 （C）不合同但相似 （D）不合同且不相似

三、（本题满分 8分） 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ $(x_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

四、（本题满分 10分） 设三阶方阵 A,B 满足关系式：$A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$，求 B.

五、（本题满分 12分） 设四维列向量组

$\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T$，$\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T$，$\alpha_4=(4,4,4,4+a,)^T$，

（I）问 a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？（II）当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组表示.

六、（本题满分 12分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ，求常数 a 的值.

七、（本题满分 14分） 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

（I）写出二次型 f 的矩阵表达式；

（II）用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

八、（本题满分 4分） 设 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ $(n>1)$ 为 n 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，若 $|A|=0$ 且 $|A|$ 有一个代数余子式 $A_{11}\neq 0$，求方程组 $A^*x=0$ 的通解.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A) 参 考 答 案

2016～2017 学年第 一 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修þ、选修¨、限修¨ 考试形式 开卷¨、闭卷þ

专业班级（教学班）__________ 考试日期__________ 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 4分，共 20分）

1. -12； **2.** $3\cdot(-2)^n$； **3.** $\frac{2E-A}{5}$； **4.** 60； **5.** $-\frac{4}{5}<t<0$．

二、选择题（每小题 4分，共 20分）

1. B； **2.** B； **3.** C； **4.** C； **5.** A.

三、（本题满分 8分）

解：
$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-\frac{1}{x_2}-\cdots-\frac{1}{x_n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$=x_2x_3\cdots x_n\left(x_1-\frac{1}{x_2}-\cdots-\frac{1}{x_n}\right)=\prod_{i=2}^{n}x_i\cdot\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i}\right).$$

四、（本题满分 10分）

解：在等式 $A^{-1}BA=6A+BA$ 两端右边乘以 A^{-1}，得 $A^{-1}B=6E+B$， $(A^{-1}-E)B=6E$，从而

$$B=6\cdot(A^{-1}-E)^{-1}=6\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

五、（本题满分 12分）

解：（I）记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则 $|A|=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}=(a+10)a^3$．

于是，当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

（II）（1）当 $a=0$ 时，取 α_1 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且

$$\alpha_2=2\alpha_1,\quad \alpha_3=3\alpha_1,\quad \alpha_4=4\alpha_1；$$

（2）当 $a=-10$ 时，对 A 施以初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4).$$

由于 β_1,β_2,β_3 线性无关，且 $\beta_4=-\beta_1-\beta_2-\beta_3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大线性无关组，并且

$$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3.$$

六、（本题满分 12分）

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 2-\lambda & a \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}=-(2+\lambda)(6-\lambda)^2=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$.

因为 A 可相似对角化，故对应单根 $\lambda_3=-2$ 可求出线性无关的特征向量恰有 1 个，而对应二重根 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有 2 个线性无关的特征向量，即方程组 $(A-6E)\ x=0$ 有 2 个线性无关解，所以 $r(A-6E)=1$.

当 $\lambda=6$ 时，$A-6E=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $a=0$.

七、（本题满分 14分）

解：（I） $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=x^TAx$，

（II） $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-36)=0$，得特征值为

$\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$，

命题教师注意事项：1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。 2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

当 $\lambda=1$ 时，$A-E: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，

当 $\lambda=6$ 时，$A-6E: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$，单位化得 $\eta_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$，

当 $\lambda=-6$ 时，$A+6E: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，单位化得 $\eta_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，从而令

$Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，通过 $x=Qy$，化二次型为 $f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$．

八、（本题满分 4分）

解：$A_{11}\neq 0$，所以 A 存在一个 $n-1$ 阶子式不等于 0，又 $|A|=0$，故 $r(A)=n-1$，

又因为 $r(A^*)=\begin{cases} n \Leftrightarrow r(A)=n, \\ 1 \Leftrightarrow r(A)=n-1, \\ 0 \Leftrightarrow r(A)<n-1, \end{cases}$ 故 $r(A^*)=1$，$A^*A=AA^*=|A|E=O$，即 $A^*(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=O$，

从而 $A^*\alpha_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$． A 的列向量均为 $A^*x=0$ 的解向量． 又 $A_{11}\neq 0$ 故 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 为 $A^*x=0$ 的一个基础解系．从而 $A^*x=0$ 的通解为

$$x=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots k_n\alpha_n,\quad (k_i\in R, i=2,3,\cdots,n).$$