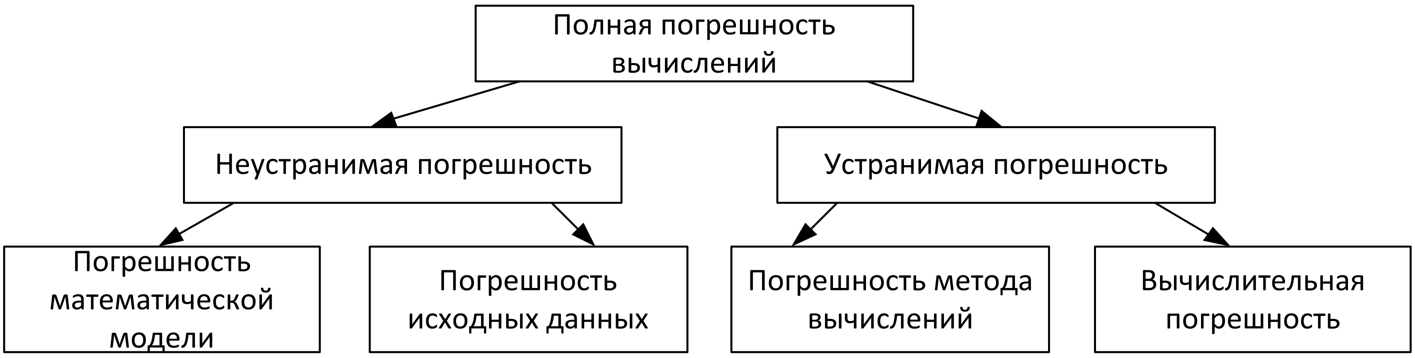
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1.Источники и классификация погрешностей компьютерных вычислений

Компьютерные вычисления, как правило, производятся с приближенными числами. Уже исходные данные для расчета обычно даются с некоторыми погрешностями; в процессе расчета еще накапливаются погрешности от округления, от применения приближенных формул и т.д.

Погрешностью называют отклонение истинного значения от приближенного. Полная погрешность компьютерных вычислений состоит из неустранимой и устранимой погрешностей.



К неустранимым погрешностям относят:

1) Погрешность математической модели, связанную с приближенным описанием реального объекта.

2) Погрешность исходных данных. Причины возникновения погрешности: погрешность применяемых средств измерений (данные неточно измерены); исходные данные являются результатом решения некоторых вспомогательных задач.

Неустранимая погрешность никаким образом не может быть уменьшена в процессе вычислений.

К устранимым погрешностям относят:

1) Погрешность метода вычислений – погрешность, обусловленная несовершенством метода, а также упрощениями, положенными в основу методики.

2) Вычислительная погрешность, связанная с форматом хранения чисел в памяти компьютера. В соответствие со стандартом арифметики с плавающей точкой **IEEE 754-2008** все числа преобразуются к виду:

$$F = (-1)^S \times 2^E \times 1.M$$

Полученное число с плавающей точкой представляется в виде набора битов, часть из которых кодирует собой мантиссу числа, другая часть – показатель степени, и ещё один бит используется для указания знака числа (0 – если число положительное, 1 – если число отрицательное):

Длина мантиссы конечна, поэтому компьютерные вычисления оперируют числами с ограниченным количеством знаков после запятой, в то время множество действительных чисел бесконечно и непрерывно. Поэтому в компьютере практически все числа представляются некоторыми их приближениями. Большинство значений с плавающей запятой не могут быть точно представлены как конечное двоичное значение. Так, десятичное число 0,1 в двоичной системе счисления превращается в бесконечную последовательность 0,000110011... и не может быть точно представлено в нормализованной форме с плавающей запятой. Невозможно представить и иррациональное число

Устранимая погрешность может быть уменьшена выбором более точных методов и увеличением разрядности вычислений. Чем больше разрядов отводится под запись мантиссы, тем выше точность представления действ. числа.

В целом у погрешностей есть одно свойство: при вычислениях они накапливаются, порождая новые погрешности. Поэтому при вычислении с одиночной и двойной точностью результат обычно не будет более точным, чем одна точность. Алгоритм, в котором погрешность, допущенная в начальных данных или допускаемая при вычислениях, с каждым шагом не увеличивается или увеличивается незначительно, называется *устойчивым*

1.2. Абсолютная и относительная погрешности

Пусть A - точное значение величины (точное число), a - приближенное значение величины (приближенное число).

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется величина $\Delta = |A - a|$. Как правило, точное число A неизвестно. В этом случае используют оценку сверху абсолютной погрешности, так называемую предельную абсолютную погрешность, под которой понимается всякое число Δ_a, такое, что. $\Delta \le \Delta_a$. Для краткости записывают $A = a \pm \Delta_a$.

Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется величина $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$, ($A \ne 0$). Предельной относительной погрешностью приближенного числа a называют всякое число δ_a, такое, что $\delta \le \delta_a$. Обычно полагают $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

1.3. Верные знаки числа. Значащие цифры. Округление чисел

При округлении приближенных чисел используют такие понятия, как верные и значащие цифры. Цифра α_i приближенного числа a называется **верной**, если имеет место неравенство $\Delta_a \le \omega \cdot \beta^i$, где $0{,}5 \le \omega \le 1$. В противном случае α_i - сомнительная цифра. Обычно полагают $\omega = 0{,}5$.

Например, дано десятичное число $a = 32{,}0457$ с абсолютной погрешностью $\Delta_a = 0{,}03$. Найти все верные цифры числа, полагая $\omega = 0{,}5$.

Расставим разряды: $a = 3^1 2^0, 0^{-1} 4^{-2} 5^{-3} 7^{-4}$.

Первая цифра этого числа «3». Проверяем неравенство: $0{,}03 \le 0{,}5 \cdot 10^1$. Неравенство выполняется, значит, данная цифра верная.

Следующая цифра – «2», неравенство $0{,}03 \le 0{,}5 \cdot 10^0$ также верное, значит цифра «2» – верная.

Цифра «0». Соответствующее неравенство $0{,}03 \le 0{,}5 \cdot 10^{-1}$, $0{,}03 \le 0{,}05$ выполняется, а значит и сама цифра верная.

Рассмотрим следующую цифру «4»: для нее неравенство $0{,}03 \le 0{,}5 \cdot 10^{-2}$, $0{,}03 \le 0{,}005$ уже не выполняется, следовательно, эта цифра, а также все последующие будут сомнительными.

Т/о, верными цифрами числа будут цифры «3», «2», «0».

Приближенные числа следует записывать, сохраняя только верные знаки.

Значащими цифрами приближенного числа называют все его верные цифры, начиная с первой ненулевой слева. **Округление числа** представляет собой отбрасывание значащих цифр справа до определенного разряда с возможным изменением цифры этого разряда.

1.4. Погрешности функции

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке X. Пусть a - приближенное значение аргумента x, Δ_a - предельная абсолютная погрешность значения a. Тогда предельная абсолютная погрешность вычисления функции $\Delta_y = |f'(a)| \cdot \Delta_a$.

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ - точные числа;

$a_1, a_2, ..., a_n$ - приближенные числа;

$\Delta_{a_1}, \Delta_{a_2}, ..., \Delta_{a_n}$ - соответствующие предельные абсолютные погрешности.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $y = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Тогда $\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{a_i}$.
2. Пусть $y = a_1 - a_2$. Тогда $\Delta_y = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}$, $\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{|a_1 - a_2|}$. (3)
3. Пусть $y = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$, причем $a_i \neq 0$ $(i = \overline{1,n})$. Тогда $\delta_y = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + ... + \delta_{a_n}$.
4. Если $y = a^k$, где $k \in R$, то $\delta_y = |k| \cdot \delta_a$
5. Пусть $y = \frac{a_1}{a_2}$. Тогда $\delta_y = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$.

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена и дифференцируема в некоторой области D. Пусть a_i - приближенные значения аргументов x_i; Δ_{a_i} - предельные абсолютные погрешности значений a_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда предельная абсолютная погрешность вычисления функции

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(a_1, a_2, ..., a_n)}{\partial a_i} \right| \cdot \Delta_{a_i}.$$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Пример 1.1.

Определить, какое равенство точнее: $9/11 = 0{,}818$; $\sqrt{18} = 4{,}24$.

Решение

1) Найдем значения данных выражений с большим числом десятичных знаков. Для этого выполним следующие действия:

$a = \frac{9}{11} =$ 0.8181818182

$b = \sqrt{18} =$ 4.2426406871

2) Вычислим предельные абсолютные погрешности:

$\Delta_a = |a - 0.818| = 0.0001818182$

$\Delta_b = |b - 4.24| =$ 0.0026406871

3) Вычислим предельные относительные погрешности:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{0.0001818182}{0{,}818} = 0{,}00022 = 0{,}022\%;$$

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = \frac{0.0026406871}{4{,}24} = 0{,}0006224 = 0{,}062\%.$$

Так как $\delta_a < \delta_b$, то равенство $9/11 = 0{,}818$ является более точным.

Пример 1.2.

Вычислить значение функции и определить погрешность результата, используя:

а) оценки погрешностей для арифметических операций;

б) общую формулу погрешностей.

$y = \frac{ab^3}{c}$, $a = 0.643\ (\pm 0.0005)$, $b = 2.17\ (\pm 0.002)$, $c = 5.84\ (\pm 0.001)$

Решение

Вычислим значение функции и определим погрешность результата, используя оценки погрешностей для арифметических операций

1) Вычислим значение функции:

$$x = \frac{0{,}643 \cdot 2{,}17^3}{5{,}84} = 1{,}124486609$$

2) Вычислим относительные погрешности аргументов:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{0.0005}{0.643} = 0.00077605$$

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = \frac{0.002}{2.17} = 0.000921659$$

$$\delta_c = \frac{\Delta_c}{|c|} = \frac{0.001}{5.84} = 0{,}000171233$$

3) Оценим относительную погрешность функции:

Первое действие: b^3 – возведение в степень.

$$\delta_{b^3} = 3\delta_b = 3 \cdot 0.000921659 = 0.002764977$$

Второе действие: ab^3 – произведение.

$$\delta_{ab^3} == 0{,}00077605 + 0{,}002764977 = 0.003542582$$

Третье действие: $\frac{ab^3}{c}$ - частное.

$$\delta_{\frac{ab^3}{c}} = \delta_{ab^3} + \delta_c = 0.003542582 + 0{,}000171233 = 0.0037138148$$

Получили $\delta_y = 0.0037138148$.

3) Вычислим абсолютную погрешность функции:

$$\Delta_y = \delta_y \cdot |\,y\,|$$

$$\Delta_y = 0.0037138148 \cdot 1.124486609 = 0.0041782803$$

Можно принять $\Delta_y = 0{,}004$

$$y = 1.124486609 \pm 0.004$$

Округлим значение функции до верных знаков:

0,5 $\geq$ 0.004

0,05 $\geq$ 0.004

0,005 $\geq$ 0.004

0,0005 $\leq$ 0.004

Отсюда y = 1.124 $\pm$ 0.004 .

Определим погрешность результата, используя общую формулу погрешностей.

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(a_1, a_2, ..., a_n)}{\partial a_i} \right| \cdot \Delta_{a_i}$$

$$\Delta_y = \left| \frac{\partial y}{\partial a} \right| \cdot \Delta_a + \left| \frac{\partial y}{\partial b} \right| \cdot \Delta_b + \left| \frac{\partial y}{\partial c} \right| \cdot \Delta_c = \left| \frac{b^3}{c} \right| \cdot \Delta_a + \left| \frac{3ab^2}{c} \right| \cdot \Delta_b + \left| \frac{-ab^3}{c^2} \right| \cdot \Delta_c = \Delta_y = 0{,}0042$$

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|\,y\,|} = 0.0037138148.$$

3. ЗАДАНИЕ

1. Определить, какое равенство точнее.
2. Вычислить значение функции и определить погрешность результата, используя:
а) оценки погрешностей для арифметических операций;

б) общую формулу погрешностей.
Задание выполнить с использованием математического пакета Mathcad.

Варианты заданий.

№ варианта	Задание
1	1) $\sqrt{44}=6{,}63$; $19/41=0{,}463$. 2) $X=\left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, где $a=4{,}3(\pm0{,}05)$, $b=17{,}21(\pm0{,}02)$, $c=8{,}2(\pm0{,}05)$, $m=12{,}417(\pm0{,}003)$, $n=8{,}37(\pm0{,}005)$.
2	1) $\sqrt{30}=5{,}48$; $7/15=0{,}467$. 2) $X=\dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, где $a=13{,}5(\pm0{,}02)$, $b=3{,}7(\pm0{,}02)$, $c=34{,}5(\pm0{,}02)$, $m=4{,}22(\pm0{,}004)$, $d=23{,}725(\pm0{,}005)$.
3	1) $\sqrt{10{,}5}=3{,}24$; $4/17=0{,}235$. 2) $X=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, где $a=2{,}754(\pm0{,}001)$, $b=11{,}7(\pm0{,}04)$, $c=10{,}536(\pm0{,}002)$, $m=0{,}56(\pm0{,}005)$, $d=6{,}32(\pm0{,}008)$.
4	1) $\sqrt{10}=3{,}16$; $15/7=2{,}14$. 2) $X=\dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, где $a=23{,}16(\pm0{,}02)$, $b=8{,}23(\pm0{,}005)$, $c=145{,}5(\pm0{,}08)$, $m=0{,}28(\pm0{,}006)$, $d=28{,}6(\pm0{,}1)$.
5	1) $\sqrt{4{,}8}=2{,}19$; $6/7=0{,}857$. 2) $X=\dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, где $a=27{,}16(\pm0{,}006)$, $b=5{,}03(\pm0{,}01)$, $c=3{,}6(\pm0{,}02)$, $m=12{,}375(\pm0{,}004)$, $n=86{,}2(\pm0{,}05)$.
6	1) $\sqrt{6{,}8}=2{,}61$; $12/11=1{,}091$. 2) $X=\dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$, где $a=16{,}342(\pm0{,}001)$, $b=2{,}5(\pm0{,}03)$, $c=38{,}17(\pm0{,}002)$, $m=3{,}6(\pm0{,}04)$, $d=9{,}14(\pm0{,}005)$.
7	1) $\sqrt{22}=4{,}69$; $2/21=0{,}095$. 2) $S=\pi\sqrt{D^4-d^4}$, где $D=36{,}5(\pm0{,}1)$, $d=26{,}35(\pm0{,}005)$, $\pi=3{,}14$.
8	1) $\sqrt{9{,}8}=3{,}13$; $23/15=1{,}53$. 2) $X=\dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$, где $a=9{,}542(\pm0{,}001)$, $b=3{,}128(\pm0{,}002)$, $c=0{,}172(\pm0{,}001)$, $m=2{,}8(\pm0{,}03)$, $d=5{,}4(\pm0{,}02)$.
9	1) $\sqrt{83}=9{,}11$; $6/11=0{,}545$. 2) $y=\dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, где $a=10{,}82(\pm0{,}03)$, $b=2{,}786(\pm0{,}0006)$, $m=0{,}28(\pm0{,}006)$, $n=14{,}7(\pm0{,}06)$.

10	1) $\sqrt{52} = 7{,}21;\ 17/19 = 0{,}895.$ 2) $Q = \dfrac{n^2(x+y)}{x-y}$, где $n = 2{,}0435(\pm 0{,}0001),\ x = 4{,}2(\pm 0{,}05),$ $y = 0{,}82(\pm 0{,}01).$