ЛАБОРАТОРНАЯ 4
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть дана некоторая функция $f(x)$, непрерывная на некотором промежутке X. Требуется найти все или некоторые значения $x \in X$, для которых

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

Приближенное нахождение корней уравнения (1) состоит из двух этапов:

1. Отделение корней, то есть установление возможно тесных отрезков $[a_i, b_i] \subset X$, в которых содержится один и только один корень уравнения (1).

2. Уточнение приближенных корней, то есть получение приближенных значений корней с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Это означает, что вычисленное значение корня x_n должно отличаться от корня c не более, чем на величину ε:

$$| c - x_n | \le \varepsilon$$

Аналитический способ отделения корней

Шаг 1. Выбрать достаточно большой отрезок $[A, B]$, в котором заключен корень уравнения (1).

Шаг 2. Разбить отрезок $[A, B]$ на n равных частей.

Шаг 3. С шагом $h = \dfrac{B - A}{n}$ вычислить значения $f(x)$ в точках $x_k = A + k \cdot h$, $k = \overline{0, n}$.

Шаг 4. Если окажется, что

$$f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0, \ i = \overline{0, n-1},$$

то в в интервале (x_k, x_{k+1}) имеется корень уравнения (1).

Замечание. Шаг h должен быть достаточно малым, чтобы в интервал длины h не могло попасть более одного корня.

Метод половинного деления

Пусть на отрезке $[a, b]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень c. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Сначала надо задать начальное приближение. В качестве начального приближения искомого корня принять середину отрезка, т.е. $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

Если $f(x_0) = 0$, то x_0 – корень уравнения (1).

Если $f(x_0) \ne 0$, то из двух полученных отрезков $[a, x_0]$ или $[x_0, b]$ выбрать тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки; новый суженый отрезок обозначить как $[a_1, b_1]$, т.е.

$[a_1, b_1] = [a, x_0]$, если $f(a) \cdot f(x_0) < 0$

или

$[a_1, b_1] = [x_0, b]$, если $f(x_0) \cdot f(b) < 0$

Новый отрезок $[a_1, b_1]$ снова разделить пополам и провести тот же анализ.

Итерационный процесс продолжать до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $|b_k - a_k| \le \varepsilon$. Тогда за искомое значение корня c принимается полученное приближение x_k: $c = x_k$.

Количество итераций k можно определить заранее. Каждое очередное вычисление середины отрезка x_i и значения функции $f(x_i)$ сужает отрезок поиска вдвое, поэтому $k \approx \log_2\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)$.

Метод Ньютона (метод касательных)

Требуется решить уравнение

$$f(x) = 0.$$

Расчетная формула метода Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Сходимость метода Ньютона устанавливает следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Если $f(a) \cdot f(b) < 0$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки при $\forall\, x \in [a, b]$, то исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, удовлетворяющему неравенству

$$f(x_0) f''(x_0) > 0,$$

можно вычислить методом Ньютона по его расчетной формуле единственный корень уравнения с любой степенью точности.

При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$.

Метод секущих

Расчетная формула метода секущих:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k)$$

Метод секущих является двухшаговым, то есть новое приближение x_{k+1} определяется двумя предыдущими итерациями x_k и x_{k-1}. Поэтому в методе необходимо задавать два начальных приближения корня. Можно выбрать

$x_0 = a$

$x_1 = x_0 + \varepsilon$

Условия сходимости метода секущих аналогичны условиям сходимости метода Ньютона.

При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$.

ЗАДАНИЯ

Написать программу решения нелинейного уравнения, которая:

1. Отделяет корни уравнения алгебраическим способом
2. Уточняет корни уравнения методом половинного деления с методом Ньютона (нечетный вариант). Сравнить скорость сходимости методов
3. Уточняет корни уравнения половинного деления и методом секущих (четный вариант). Сравнить скорость сходимости методов

Результаты решения на каждой итерации представить в виде таблицы

Варианты заданий

1) $\cos x - 4x = 0$,
2) $x \ln x - 14 = 0$,
3) $10x - e^{-x} = 0$,
4) $\ln x - \frac{1}{x} = 0$,
5) $\ln x - \frac{1}{x+1} = 0$,
6) $x\, 2^{x} + x - 3{,}1 = 0$,
7) $e^{x} + 3x - 4{,}2 = 0$,
8) $e^{x} + 2{,}4x - 3{,}7 = 0$,
9) $\cos x - 3{,}6x + 1{,}2 = 0$,
10) $\sin x - 2{,}3x - 2{,}8 = 0$,
11) $\sin 2x + 5{,}2x + 0{,}3 = 0$,
12) $e^{1{,}5x} + 3x - 4{,}5 = 0$,
13) $x \ln x - 3{,}2 = 0$,
14) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$
15) $\sin 3x - 2{,}5x + 6{,}2 = 0$,
16) $e^{-x} - \sqrt{x} + 1{,}5 = 0$,
17) $e^{-2x} - \sqrt{x} + 1{,}8 = 0$,
18) $\cos x - x^3 = 0$,
19) $e^{-x} - 2{,}6x + 4{,}3 = 0$,
20) $e^{-3x} - 4{,}7x + 1{,}6 = 0$,
21) $e^{x} - x^2 + 1{,}7 = 0$,
22) $x \ln x - 5{,}3 = 0$,
23) $x^2 \ln x - 4{,}9 = 0$,
24) $x^3 - 3x^2 + 7{,}5x + 1{,}7 = 0$,
25) $x^3 - 2{,}5x^2 + 9{,}3x - 4{,}3 = 0$,
26) $x \lg x - 7{,}2 = 0$,
27) $x^2 \lg x - 3{,}8 = 0$,
28) $e^{x} - x^2 - 3{,}4 = 0$,
29) $e^{-3x} - \sqrt{x} + 2{,}3 = 0$,
30) $e^{-x} - 3{,}4x + 5{,}7 = 0$.