

ЛАБОРАТОРНАЯ 5

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(x)$ задана таблично, либо вычисление ее требует громоздких выкладок. Заменим приближенно функцию $f(x)$ на какую-либо функцию $F(x)$, так, чтобы отклонение $f(x)$ от $F(x)$ было в заданной области в некотором смысле минимальным. Подобная замена называется

аппроксимацией функции $f(x)$, а функция $F(x)$ – аппроксимирующей (приближающей) функцией.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений $f(x)$ и $F(x)$ в точках x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), т. е.

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (3.1)$$

В этом случае нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или интерполированием), точки x_0, x_1, \dots, x_n – узлами интерполяции.

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + \dots + y_n \cdot l_n(x)$$

$$\text{где } l_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot (x_i-x_1) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)}$$

Интерполяция сплайнами:

Учитывая, что $a_i = y_{i-1}$:

$$\begin{cases} b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 + d_i \cdot h_i^3 = y_i - y_{i-1} & i = 1, 2, \dots, n \\ b_{i+1} - b_i - 2c_i \cdot h_i - 3d_i \cdot h_i^2 = 0 & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ c_{i+1} - c_i - 3d_i \cdot h_i^2 = 0 & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ c_1 = 0 \\ c_n + 3d_n \cdot h_n = 0 \end{cases}$$

Данная система состоит из $3n$ уравнений с $3n$ неизвестными. Решив ее, получим значения неизвестных b_i, c_i, d_i . Учитывая, что $a_i = y_{i-1}$, получим значения всех коэффициентов для искомого сплайна.

Задание

Написать программу, которая строит интерполяционный многочлен по заданной пользователем функции

1. Вычислить значения заданной функции $y_i = f(x_i)$ в узлах интерполяции.

Число узлов определяется следующим образом:

$n = N + 2$, где N – номер варианта с 1 до 8

$n = N - 2$, где N – номер варианта с 9 до 16

Узлы неравноотстоящие, задаются пользователем

№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$	№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sin(x^2)$	$[0, 2]$	9	$x \cos(x + \ln(1 + x))$	$[1, 5]$
2	$\cos(x^2)$	$[0, 2]$	10	$10 \ln \frac{2x}{1+x}$	$[1, 5]$
3	$e^{\sin(x)}$	$[0, 5]$	11	$\sin x^2 \cdot e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$	$[0, 3]$
4	$\frac{1}{0.5 + x^2}$	$[0, 2]$	12	$\cos(x + \cos^3 x)$	$[0, 2]$
5	$e^{-(x + \sin x)}$	$[2, 5]$	13	$\cos(x + e^{\cos x})$	$[3, 6]$
6	$\frac{1}{1 + e^{-x}}$	$[0, 4]$	14	$\cos(2x + x^2)$	$[0, 1]$
7	$\sin(x + e^{\sin x})$	$[0, 3]$	15	$e^{\cos x} \cos x^2$	$[0, 2]$
8	$e^{-(x + \frac{1}{x})}$	$[1, 3]$	16	$\sin(x + e^{x+2})$	$[1, 2]$

- По вычисленной таблице значений провести интерполяцию многочленам Лагранжа
- По этой же таблице значений провести интерполяцию кубическими сплайнами. Способ решения системы уравнений для нахождения сплайна — на выбор студента
- Построить график, на котором отобразить исходную функцию, полученный интерполяционный многочлен Лагранжа и график кубического сплайна.