

上证 50ETF 期权定价有效性的研究： 基于 B-S-M 模型和蒙特卡罗模拟

方 艳^{1,2}, 张元玺¹, 乔明哲¹

(1. 上海对外经贸大学 金融管理学院, 上海 201620; 2. 上海财经大学 统计与管理学院, 上海 200433)

摘 要: 上证 50ETF 期权作为中国资本市场上股票期权的第一个试点产品, 其定价问题尤为重要。本文分别运用 B-S-M 期权定价模型和蒙特卡罗模拟方法对其定价进行实证研究, 分析结果表明: 1) IGARCH 模型比传统的 GARCH 模型更能较好地拟合上证 50ETF 的波动率; 2) 当模拟次数为 1000 时, 蒙特卡罗方法的效率一致地高于 B-S-M 模型, 并且除了对偶变量技术的拟蒙特卡罗其他模型的精确度也都高于 B-S-M 模型; 3) B-S-M 模型和蒙特卡罗模拟方法都可以较为准确地、有效地模拟出上证 50ETF 期权价格。这些研究将为今后期权定价模型的发展和完善提供必要的参考和指引。

关键词: B-S-M 模型; 蒙特卡罗模拟; 拟蒙特卡罗模拟; 上证 50ETF 期权; IGARCH 模型

中图分类号: F830.9 **文章标识码:** A **文章编号:** 1007-3221(2017)08-0157-10 **doi:** 10.12005/orms.2017.0199

Study of the Effectiveness of Pricing for SSE 50ETF Option: Based on B-S-M Model and Monte Carlo Model

FANG Yan^{1,2}, ZHANG Yuan-xi¹, QIAO Ming-zhe¹

(1. School of Finance, Shanghai University of International Business and Economics, Shanghai 201620, China;
2. School of Statistics and Management, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: As the first pilot option product in China's capital market, the pricing of Shanghai Stock Exchange (SSE) 50ETF option is particularly important. In this paper, both Black-Scholes-Merton (B-S-M) method and Monte Carlo simulation method will be used for SSE 50ETF option pricing. The empirical analysis indicates that: 1, IGARCH model is better than the traditional GARCH model in characterizing the dynamic volatility for SSE 50ETF options return; 2, with 1000 simulation running, Monte Carlo simulation methods are consistently more efficient than B-S-M; furthermore, except for quasi-Monte-Carlo simulations with dual variable, all pricing obtained from other Monte Carlo methods are more accurate than the one from B-S-M; 3, both B-S-M method and Monte Carlo simulation method can accurately and effectively simulate the SSE 50ETF options pricing. This study will provide the essential reference and guidance for the development of future option pricing model.

Key words: black-scholes model; monte carlo; quasi monte carlo; shanghai 50ETF option; IGARCH

0 引言

2010 年 4 月 16 日, 沪深 300 股指期货正式上线交易, 这标志着我国金融衍生品市场正式起步。随着我国资本市场的逐步发展, 中金所先后推

出了沪深 300 和上证 50 股指期货仿真交易测试。随后在 2015 年 2 月 9 日, 我国境内首只股票期权——上证 50ETF (Exchange Traded Funds, 简称为 ETF 或 ETF 基金) 2 期权正式上市, 自此我国证券市场正式开启期权时代。

期权在金融衍生品市场中具有举足轻重的地

收稿日期: 2015-09-23

基金项目: 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501355, 71203139); 上海市浦江人才计划项目 (14PJ1404100); 上海市教育委员会科研创新项目 (14ZS147, 15ZZ090); 国家社科基金重大项目 (15ZDA058); 教育部人文社会科学项目 (15YJA790039); 教育部留学回国人员科研启动基金; 中国博士后科学基金第 59 批面上资助项目; 台州市哲学社会科学项目 (14GHZ01)

作者简介: 方艳 (1975-), 女, 安徽黄山人, 讲师、硕士生导师, 研究方向: 计量经济、数量经济和金融工程; 张元玺 (1993-), 山东聊城人, 男, 硕士研究生; 乔明哲 (1976-), 男, 安徽蚌埠人, 副教授、硕士生导师, 研究方向: 技术经济及管理。

位。譬如,2015年6月29日,在央行双降背景下市场并未出现大幅反弹,现货市场出现大幅杀跌。截止收盘,上证50ETF跌0.97%至2.660元。相反地,期权(认购、认沽期权)全面上涨。ETF期权成交量再创新高,其成交量和总持仓量较上一交易日分别增加了13.27%和13.71%。产生这一现象的主要原因是机构投资者可以通过期权对未来的风险进行对冲或套利。然而,期权作为一种金融衍生品,其价格是交易的前提。在有效市场假说(Efficient Markets Hypothesis, EMH)下,资产价格总是反映资产的真实价值,并且任何资产不可能获得系统的套利利润。因此,当我国证券市场开启期权时代时,如何对期权进行合理、有效的定价将是一个重要的研究方向,它将对整个证券市场体系的完善具有重要的指导意义。

本文通过 Black-Scholes-Merton (B-S-M) 模型和蒙特卡罗 (Monte Carlo, MC) 模拟方法对上证50ETF期权市场价格进行研究,进而对比分析上证50ETF期权的理论价值和实际价格,从而判断这两种定价方法在我国证券市场期权定价中的有效性。该分析不仅能够为投资者积累相当的理论经验,有助于投资者理性投资,还能为做市商开展做市业务提供指引,还为做市商维持市场流动性提供保障。

1 文献综述

期权具有悠久的历史,但是现代期权指的一种70年代中期在美国出现的金融创新工具。由于期权具有良好的风险规避、风险投资和价值发现功能,近些年来它已发展成为一种防范风险和投机的有效工具。关于期权的研究主要包含:一、如何构造出新的期权,以满足不断变化的市场投资需要;二、如何确定这些日趋复杂期权的价值。其中,期权定价不仅能为投资者提供了合理的期权价格,还可以使期权做市商更有效地开展做市业务。因此,期权定价在整个期权理论的研究中具有极其重要的地位。

关于期权定价理论的研究并非始于众所周知的 Black-Scholes (B-S) 模型, Bachelier 曾于1900年通过布朗运动来描述股票价格变动,提出了期权定价模型并求得了期权价格的解析解。Ito^[1]提出伊藤过程及伊藤引理。在此基础上, Fischer Black 和 Myron Scholes^[2]提出了著名的 B-S 期权定价模型,

B-S 模型的诞生标志着现代期权理论的建立。然而,由于 B-S 模型缺少对预期收益或风险厌恶的有效测度, Robert Merton^[3]在 B-S 模型上引入风险中性或鞅表示,从而将 B-S 模型进一步完善成 B-S-M 模型。

随着实践的深入,研究表明 B-S 期权定价模型中牵涉到的假设条件在真实市场应用中常常受到种种约束和局限。例如,许多实证研究用真实期权价格数据代入 B-S 公式中反推出隐含波动率,然而,一般情况下隐含波动率并不是简单的常数,而是一个呈现 U 型曲线(即,波动率微笑曲线)的变量。于是,股价变动过程中波动率为常数的假设常被违背。为此,学者们尝试在模型中适当增加新的因子对模型进行修正,如,常弹性波动率模型(CEV 模型)(Cox 和 Ross^[4])、跳跃扩散定价模型(Merton^[3])等等。

实际上, B-S 定价模型不仅存在大量事先无法确定的因素,而且也不能很好地适用于路径依赖型的期权定价。为了减少期权定价中不确定性因素对价格计算产生的影响,国内外学者开始着手于把蒙特卡罗模拟方法应用到期权定价中。最早将蒙特卡罗方法用于期权定价的学者应追溯到 Boyle^[5], 他运用蒙特卡罗方法对标的资产为单一资产的欧式股票期权进行定价。此后, Kemna 和 Vorst^[6]采用蒙特卡罗方法为算术平均亚式期权定价。相关参考文献有: Pellizzari^[7]; Glasserman^[8]; Korn 和 Zeytun^[9]等等。

为了进一步提高计算效率和收敛速度,人们将蒙特卡罗方法进一步发展成为拟蒙特卡罗 (Quasi Monte Carlo) 方法。Paskov 和 Traub^[10]首次提出拟蒙特卡罗方法,他们用低差异序列模拟法对维数高达360维的金融衍生产品进行定价,并将实证结果与传统蒙特卡罗方法的结果进行对比,分析结果充分显示了拟蒙特卡罗方法在模拟多维金融资产价格方面的相当优势。Joy 等^[11]再次验证了拟蒙特卡罗方法的快收敛速度和高估计精度。Glasserman^[8]更权威地介绍了有关期权定价的蒙特卡罗方法与拟蒙特卡罗方法,其中包括方差缩减技术、拟随机数序列等等。在拟蒙特卡罗法的完善进程中,随机化拟蒙特卡罗和降低有效维度技术法是其发展的两个方向。这方面研究的参考文献有: Cranley 和 Patterson^[12]; Boyle 等^[13]; Akesson 和 Lehoczky^[14]; Hiekkermell 等^[15]; 张普和吴冲锋^[16];

张丽花等^[17]等等。

在期权定价中,除了模型的选择,标的物波动率的精确估计对期权的定价也是非常重要的。在期权定价刚刚起步时,理论模型中标的物的波动率一般都设为常数(Merton^[18];Black和Scholes^[2])。随着期权定价模型的进一步发展,标的资产波动率开始朝时变性和可预测性(Andersen和Bollerslev^[19]方向发展。为了刻画波动率的时变性,Engle^[20]最早提出用条件异方差(Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, ARCH)模型来刻画标的物的波动率。尽管ARCH模型本身简单且直观,但是它需要借助大量的未知参数来精确描述波动率过程。于是Bollerslev^[21]将条件异方差ARCH模型拓展到广义条件异方差(Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, GARCH)模型。由于该模型充分地考虑了计量经济模型中关于波动率的持久性、尖峰厚尾性、时变性等等,所有这些优势使得它很快发展成为金融学界炙手可热的波动率研究工具。然而,尽管GARCH模型具有其独特的优点,但是它们不能充分地考虑到不对称情形下和不同分布假设下的波动。因此,人们对GARCH模型不断进行补充、完善,参考文献:Brandt and Jones^[22];Hung等^[23];Fang等^[24];等等。相应地,国内的参考文献有:郑振龙和黄慧舟^[25];朱信凯等^[26];吴恒煜等^[27];等等。

上证50ETF期权是规避市场风险的产物,它作为一种金融衍生品不仅能够完善多层次资本市场、降低现货市场波动,还能对冲杠杆资金带来的指数大幅波动。然而其价格是交易的前提,如何对上证50ETF期权进行合理定价是目前学术界的一个重要研究方向。本文分别基于B-S模型、蒙特卡罗模拟和拟蒙特卡罗模拟对上证50ETF期权定价,比较分析这三种不同定价方法的精确度,其分析结果将为今后的期权定价做出更为合理的指导。

本文章节的结构安排如下:第二部分为文献综述;第三部分为B-S-M模型和蒙特卡罗模拟方法介绍;第四部分为上证50ETF期权定价的实证分析;第五部分为结论及建议。

2 理论模型和方法

2.1 B-S-M 期权定价模型

B-S-M模型在期权定价中需满足以下几个

假设:

- 1) 标的资产价格 S 服从对数正态分布,即, $dS = \mu S dt + \sigma S dB$, 其中, μ 和 σ 为常数, B 服从布朗运动;
- 2) 市场是有效的;
- 3) 没有交易费用和税收,所有证券都是完全可分的;
- 4) 在衍生证券有效期内标的资产没有现金收益;
- 5) 不存在无风险套利机会;
- 6) 证券交易是连续的,价格变动也是连续的;
- 7) 在衍生证券有效期内,无风险连续复利利率 r 为常数。

其中,有关股票价格的对数正态分布是最为重要的假设条件。

B-S-M 期权定价模型为:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (1)$$

$$P = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

其中, S 为标的资产市场价格; X 为执行价格; r 为无风险利率; T 是以年为计算单位的期权期限; t 为当前日期; σ 为标的资产价格波动率,即,标的资产收益率的标准差; $N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积概率分布函数,且 $N(-x) = 1 - N(x)$; C 为欧式看涨期权的价格; P 为欧式看跌期权的价格。

对于欧式期权来说,期权的到期收益不依赖于标的资产价格的波动路径,同样,对于不支付红利的美式看涨期权来说,提早行权会丧失期权的时间价值,期权持有者通常会选择在期权到期日行权,因此可以用过B-S-M公式简单快捷的给出欧式期权以及无红利支付的美式看涨期权的价格,耗时较少,并且能通过求导快速的计算出期权的希腊字母值,清楚地了解到期权所存在的风险。而对于其他路径依赖型期权,仅靠B-S-M公式则很难进行定价,因此有学者把蒙特卡罗模拟方法应用到期权定价中。

2.2 蒙特卡罗模拟期权定价方法

由于B-S-M定价模型依赖于诸多假设,为此,有学者把蒙特卡罗模拟思想应用到期权定价中,其目的是通过统计方法来有效地消除不确定性对价

格计算的影响。蒙特卡罗方法最初是在上世纪 40 年代应用于核物理的模拟中,后来广泛地被应用于统计、金融等领域中。在期权定价中,当其解析解无法求得时,投资者们可以使用蒙特卡罗模拟方法来模拟标的资产价格的随机运动路径,从而得到期权价格的期望值。其中,Boyle^[5]首次将蒙特卡罗方法应用于期权定价中。

蒙特卡罗模拟期权定价的机理是:按照给定的标的资产价格运动过程,模拟标的资产的价格变动情况,在模拟次数达到一定数量的时候,通过取均值求得期望。根据大数定律,蒙特卡罗模拟结果最终是满足收敛性的。与 B-S-M 模型相比,该方法的优点是:一、比较灵活,易于实现和改进;二、模拟估计的误差及收敛速度与所解决问题的维数具有较强的独立性,能够较好地解决多资产期权定价以及路径依赖型期权定价问题。但是要想获得较高的精度,一般需要成千上万次的模拟,因此蒙特卡罗方法计算用时通常要比 B-S-M 公式高出许多,并且很难求出期权的希腊字母值。具体来说,蒙特卡罗模拟期权定价的过程如表 1 所示。

表 1 基于蒙特卡罗模拟的期权定价过程

(1) 在风险中性测度下模拟标的资产的价格路径。为了模拟 S 的路径,把期权的有效期分为 n 个间隔相等的时间段 $\Delta t = T/n$ 。根据标的资产价格服从对数正态分布的假定可得: $S_{t+\Delta t} = S_t \exp\{(\mu - \frac{\delta^2}{2})\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\}$, 其中, S_t 代表 t 时刻 S 的值, ϵ 是从标准正态分布中抽取的一个随机样本;

(2) 从初始时刻的 S 开始,随机抽取一个 ϵ ,就能算出 Δt 时刻的 S 值,接着 $2\Delta t$ 时的 S 值又能通过 Δt 时刻的 S 值得,重复 n 次,可得到资产在到期日 T 时的价格。即, T 时刻看涨期权和看跌期权的估计价值分别为: $C_T = \max\{S_T - X, 0\}$ 和 $P_T = \max\{X - S_T, 0\}$;

(3) 重复(1)和(2)的模拟至足够多的次数,以此获得大量的样本期权回报值;

(4) 计算样本回报的均值 $E[C_T]$ 和 $E[P_T]$;

(5) 利用无风险利率贴现求期权的估计价值: $C = E[C_T] \times e^{-rT}$ 和 $P = E[P_T] \times e^{-rT}$ 。

在蒙特卡罗方法进行期权定价过程中,其第一步产生的序列 $\{\epsilon\}$ 一般为伪随机数序列,而不是真正的随机序列。蒙特卡罗方法在期权定价中是否精度更高,很大程度上取决于 $\{\epsilon\}$ 随机数序列的偏差。为了避免伪随机序列所带来的大序列偏差,近年来,国内外的学者提出并研究了序列拟随机,譬如, Halton 序列、Faure 序列、Sobol 序列等。

随着拟随机序列的提出,蒙特卡罗方法已经进一步发展到了拟蒙特卡罗方法(Quasi-Monte Carlo, QMC, 又称低差异方法)。跟传统的蒙特卡罗方法收敛速度 $O(1/\sqrt{n})$ 相比,拟蒙特卡罗方法收敛速度为 $O(1/n)$, 这表明了拟蒙特卡罗显著地提高了模拟精度。

2.3 GARCH 模型

Engle^[20]首次提出 ARCH 模型,解决了时间序列的波动性问题。Bollerslev^[21]将 ARCH 模型拓展到 GARCH 模型。由于该模型充分地考虑了计量经济模型中关于波动率的持久性、尖峰厚尾性、时变性等等,所有这些优势使得它很快发展成为金融学界炙手可热的波动率研究工具。GARCH(p, q) 可表示为:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_m X_{t-m} + \epsilon_t$$
$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$
$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

(3)

其中, v_t 是均值为 0、方差为 1 的任意分布。GARCH(1,1) 模型是 GARCH(p, q) 模型的特殊形式。该模型只有一个误差平方项和一个自回归项。但通过递推可发现,它实际等价于无穷阶的 GARCH 模型,这就避免了 GARCH(p, q) 模型当阶数(p, q) 增加时产生的参数过多的问题。经验数据也表明,低阶 GARCH 模型的拟合程度与一个有线形衰减权重的高阶 GARCH 模型一样好甚至更好。

对股票收益率序列建模,模型的随机扰动项往往在较大幅度波动之后伴随较大幅波动,在较小幅度波动之后紧接着较小幅波动,称之为波动的群集性。通过 GARCH 类模型来估计收益率的波动性能更好地衡量真实波动率的变化特征。

3 上证 50ETF 期权定价的实证分析

为了确保期权定价模型比较分析过程中的公平、公正性,本文选取 2015 年 9 月 18 日的当月平价看跌期权以及最远月的平价看涨期权,即: 50ETF 购 3 月 2.20 期权和 50ETF 沽 9 月 2.20 期权作为研究对象,其基本信息如表 2 所示。

表 2 上证 50ETF 期权的基本信息

	标的代码	执行价格(单位:元)	最后行权日	行权类型	行权方式
50ETF 购 3 月 2.20	510050	2.20	2016.03.22	欧式	认购
50ETF 沽 9 月 2.20	510050	2.20	2015.09.23	欧式	认沽

上证 50ETF 在期权交易日中由于没有实施分红,故本文无需考虑基金红利对期权定价的影响。此外,期权定价公式中的无风险利率一般采用相应币种的 LIBOR(或 SHIBOR)和 SWAP 曲线生成折现因子(李传乐^[28]),因此本文将简单选取 1 个月中国银行业同业拆借利率作为期权定价中的无风险利率 r 。本文样本数据取自万德数据库,研究 2014 年 6 月 1 日至 2015 年 9 月 18 日的上证 50ETF 日收盘价,共计 321 个样本点。

3.1 样本数据统计分析

本文采用百分比对数收益率,其计算公式为:

$$r_t = 100 \times (p_t - p_{t-1}) \tag{4}$$

其中, r_t 为上证 50ETF 的日对数收益率, p_t 和 p_{t-1} 分别为 50ETF 在和时刻的对数日收盘价。其描述性统计量见表 3 所示。

从表中可知:上证 50ETF 日对数收益率均值接近于 0,并且其标准误差较大。这主要是因为上证

50ETF 还处于发展阶段,容易受外来因素的影响,从而导致其波动性更大。从对称性分析结果,我们可以发现上证 50ETF 存在明显的左偏性(即,左边的尾部相对于与右边的尾部要长),这也意味着上证 50ETF 中存在少数观测值,其远远游离在大多数观测值的左侧,导致其均值小于其中位数。峰度值为 3.93,这说明了上证 50ETF 的尖峰特征异常显著。在 1% 的显著水平下, Jarque 和 Bera^[29] 检验结果再一次证明了上证 50ETF 对数收益率的分布都显著异于正态分布,这与前面的分析结果保持相当的一致性。Ljung 和 Box^[30] 统计量 Q 关于收益率序列自相关性的检验表明,尽管上证 50ETF 的 1 阶自相关性并不显著,但是其的前 10 阶自相关性同时存在的现象非常显著。该结果说明了上证 50ETF 存在着强烈的自相关现象。另外,平方收益率序列的 Q 统计量表明上证 50ETF 的波动率也都存在着显著的自相关性。

表 3 上证 50ETF 对数收益率序列的统计描述量、正态性检验和非平稳性检验

上证 50ETF 对数收益率序列的统计描述量 (T=244)								
最小值	最大值	均值	中位数	标准差	偏度	峰度	J-B 检验	
-10.52	8.09	0.12	0.13	2.12	-0.73	3.93	236.99 ***	
上证 50ETF 对数收益率序列的正态性检验								
Q(1)	Q(10)	Q ² (1)	Q ² (10)	ARCH(1)	ARCH(10)	ADF	PP	KPSS
1.99	34.42 ***	10.05 ***	56.14 ***	9.93 ***	31.31 ***	-11.03 ***	-276.86 ***	0.37 *

注: Jarque 和 Bera(J-B)统计量检验数据分布的正态性; $Q_1(n)$ 和 $Q_2^2(n)$ 分别表示了检验收益率序列和平方收益率序列 n 个自相关系数是否同时为 0 的 Ljung 和 Box 统计量; ADF, PP 和 KPSS 分别表示 Augmented Dickey and Fuller, Phillips and Perron 和 Kwiatkowski et. al., 其中, ADF 的滞后阶数是根据 AIC 信息准则来选取,并且 ADF 和 PP 为单位根检验,而 KPSS 为平稳性检验; *, ** 和 *** 分别表示 10%, 5% 和 1% 置信水平。

此外,表 3 还给上证 50ETF 对数收益率序列的平稳性检验结果。本文分别用 Dickey 和 Fuller^[31] (ADF) 检验, Phillips 和 Perron^[32] (PP) 检验和 Kwiatkowski 等^[33] (KPSS) 检验方法对各市场的收益率序列进行平稳性检验,其中, ADF 和 PP 是对序列的单位根进行检验, KPSS 是对序列的平稳性进行检验。单位根检验结果一致性地表明了上证 50ETF 对数收益率序列都不存在单位根, 平稳性检验验证了上证 50ETF 的平稳性。因此,不管是单位根检验结果还是序列平稳性检验结果都确保了下文对其对数收益率序列建模分析时将不会出现“伪回归”现象。

图 1 给出了上证 50ETF 对数收益率的时间序列图。从图中我们可以发现上证 50ETF 存在波动率的群集现象,即,大的波动紧跟着大的波动。但是,总体来说,它们都比较平稳。因此,在分析对数收益率序列时,本文拟采用 GARCH 类模型模拟来拟合上证 50ETF 对数收益率的波动率。

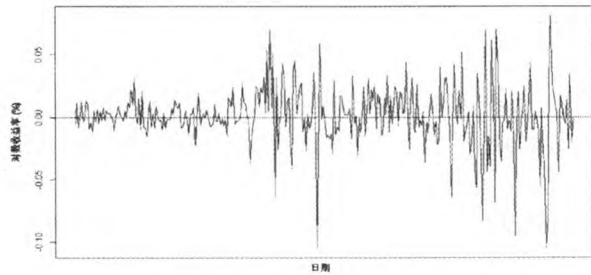


图 1 上证 50ETF 对数收益率序列的时序图

3.2 期权定价中波动率的估计

根据计量经济学,可以知道 ARMA 模型不仅能够捕获时间序列自相关性还可以很好地刻画波动的集聚现象,故本文采用 ARMA 模型对上证 50ETF 对数收益率的均值进行拟合。为了较为精确地确定 ARMA 模型的阶数,本文借助 AIC 信息准则来进行定阶(见表 4)。根据最小 AIC 准则,上证 50ETF 的均值模型为 AR(2)。

表4 不同阶数的 ARMA 模型对应的 AIC 值

模型	类型	AIC
1	AR(1)	1463.89
2	AR(2)	1460.15
3	AR(3)	1462.14
4	ARMA(1,1)	1464.06
5	ARMA(1,2)	1463.66
6	ARMA(2,1)	1462.14

注:表中的粗体字表示最小的 AIC 值。

而在上证 50ETF 对数收益率的方差方程拟合中,由于 GARCH(1,1)模型能充分地刻画金融资产收益率特征,故本文首先采用 GARCH(1,1)模型及其衍生模型来拟合波动率。然而,在 GARCH(1,1)模型拟合过程中,由于 GARCH(1,1)模型中的参数 $\alpha_1 + \beta_1$ 明显地接近于 1,故本文使用 IGARCH(1,1)模型来刻画上证 50ETF 的波动率。另外,表 3 的结果已表明上证 50ETF 对数收益率不符合正态分布,为此,本文考虑用其它分布来对数据进行拟合,并借助 AIC 准则来选取合适的分布。其分析结果见表 5。

表5 IGARCH(1,1)模型判别

IGARCH(1,1)	AIC
广义误差分布	1325.66
正态分布	1356.77
学生 t 分布	1326.23
偏广义误差分布	1327.66
偏正态分布	1356.08
偏学生 t 分布	1328.72

注:表中的粗体字表示最小的 AIC 值。

从表 5 我们可以发现,带广义误差分布的 IGARCH(1,1)模型对应最小的 AIC。因此,本文将广义误差分布的 IGARCH(1,1)模型为波动率的拟合模型。注意,对于 IGARCH(1,1)模型而言,无条件方差并不存在。上证 50ETF 波动率估计的最终模型为 AR(2) - IGARCH(1,1),其表达式为:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + a_t \quad (5)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2 \quad (6)$$

其中, $\{r_t\}$ 为对数收益率序列, $\{a_t\}$ 为冲击项序列或信息项序列, ϕ_1 和 ϕ_2 分别表示均值方程的系数项; $0 < \beta_1 < 1$; 标准化残差 $\{\varepsilon_t\}$ 是均值为 0、方差为 1、指数参数为 λ 的独立同分布的广义误差分布序列,即 $\varepsilon_t \sim GED(0, 1, \lambda)$ 。在模型未知参数估计中,本文将采用极大似然估计法(Maximum Likelihood Estimation, MLE),估计结果如表 6 所示。

表6 广义误差分布的 AR(2)-GARCH(1,1)模型估计结果,模型似然函数值为 -655.8307, AIC = 1325.661

参数	系数	标准差	p 值
μ	0.087	0.047	0.065 *
ϕ_1	0.062	0.019 = 8	0.0007 ***
ϕ_2	-0.063	0.235	0.008 ***
α_0	0.074	0.045	0.099 *
β_1	0.84	0.042	0.0001 ***
λ	1.124	0.113	接近于 0 ***

注:*, ** 和 *** 分别表示 10%, 5% 和 1% 置信水平。

从表 6,我们可以发现在 5% 的置信水平下,自回归系数 ϕ_1 和 ϕ_2 , ARCH 效应 β_1 以及广义误差分布的偏度 λ 均统计显著。上证 50ETF 对数收益率的无条件均值为 0.087,这与表 3 对数收益率均值相接近。在 IGARCH 模型中,由于 α_0 在 5% 显著水平下不统计显著,因此 IGARCH 模型可以优化为:

$$\sigma_t^2 = 0.16 \times (a_{t-1}^2 + 0.84a_{t-2}^2 + 0.84a_{t-3}^2 + \dots) \quad (7)$$
公式(7)刻画地是贴现因子为 0.84 的指数平滑公式(Exponential Smoothing, ES)。该结果表明了离当前时间愈近的观测值对未来波动率的预测影响愈大。

为了检验模型对数据拟合的充分性,本文还对估计模型的标准化残差 $\{\varepsilon_t\}$ 分别做序列相关性 Ljung-Box 检验和 ARCH 效应检验,检验结果表明残差项序列不存在序列相关性和条件异方差现象(见表 7)。综上所述,带广义误差分布的 AR(2)-IGARCH(1,1)模型不仅能够较好地反映上证 50ETF 对数收益率序列的自相关性和异方差现象,还能较准确地估计上证 50ETF 对数收益率的波动率。

表7 标准化残差 $\{\varepsilon_t\}$ 的 ARCH 效应检验和相关性检验结果表

检验类型	滞后期数	检验统计量	p 值
标准化残差 $\{\varepsilon_t\}$ 的 ARCH 效应的 LM 检验	1	1.58	0.21
	5	4.63	0.46
	10	7.21	0.71
标准化残差 $\{\varepsilon_t\}$ 的 Ljung-Box 检验	1	0.64	0.42
	5	9.27	0.10
	10	12.72	0.24
标准化残差平方 $\{\varepsilon_t^2\}$ 的 Ljung-Box 检验	1	1.59	0.21
	5	5.70	0.34
	10	7.87	0.64

3.3 期权定价模型结果的比较分析

本节将分别采用 B-S-M 模型、伪随机序列蒙特卡罗模拟(MC)、对偶变量技术的蒙特卡罗模拟(对偶 MC)、基于 Halton 序列的拟蒙特卡罗模拟(拟 MC)和对偶变量技术的拟蒙特卡罗模拟(对偶

拟 MC)对上证 50ETF 期权进行定价并比较分析定价结果。在对模型进行评价时,本文将均以均方误差 (Mean Squared Error, MSE) 为基准来衡量 B-S-M 模型、蒙特卡罗模拟及拟蒙特卡罗模模拟的定价精度,公式如下:

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_{obs,t} - Y_{pred,t})^2 \tag{8}$$

其中, $Y_{obs,t}$ 为时间 t 时上证 50ETF 期权日收盘价格的实际观测值,而 $Y_{pred,t}$ 为时间 t 时上证 50ETF 期权借助各种定价模型给出的理论值。比较准则是较小的 MSE 表明期权定价模型给出理论值与实际观测到的值一致,从而表明了期权定价模型的精确性和合理性。为了检验模型定价的稳健性 (Robustness),本文还采取平均绝对误差 (Mean Absolute Error, MAE)、均方比例误差 (Mean Squared Percentage Error, MSPE) 以及平均绝对比例误差 (Mean Absolute Percentage Error, MAPE) 作为模型的评价标准,它们的定义分别为:

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |Y_{obs,t} - Y_{pred,t}| \tag{9}$$

$$MSPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |(Y_{obs,t} - Y_{pred,t})/Y_{obs,t}|^2 \tag{10}$$

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |(Y_{obs,t} - Y_{pred,t})/Y_{obs,t}| \tag{11}$$

在用蒙特卡罗和拟蒙特卡罗方法对上证 50ETF 期权进行定价时,随着模拟次数的变化,其定价结果将随之变化。为了精确地刻画期权定价精度与模拟次数之间的关系,本文将选用拟合次数分别为 1、5、10、50 和 100 (单位:千)次来对期权进行定价并对其的拟合结果进行比较分析。

根据模型拟合的评价标准公式 (8) ~ (11) 以及相应的统计软件 (Matlab 和 R),本文不仅对上证 50ETF 的看涨期权还对其看跌期权进行定价比较分析,结果分别见表 8 和表 9。其中,第 4 列时间给出定价过程所需的时间 (单位:秒)。

表 8 不同期权定价方法的拟合精度比较 (50ETF 购 3 月 2.20)

比较指标 期权定价方法			时间 (单位:秒)	评价标准			
				MSE	MAE	MSPE	MAPE
B-S-M			0.0074	0.001587697	0.034066363	0.164828118	0.036478514
MC	模拟次数 (单位:千)	1	0.00213	0.000839084	0.023505587	0.119249296	0.021182335
		5	0.00384	0.001057302	0.027254311	0.134838135	0.025134499
		10	0.00738	0.001642162	0.034735813	0.168005118	0.03769535
		50	0.03633	0.00146208	0.032653362	0.158668328	0.033785324
		100	0.0787	0.001634594	0.034583226	0.167045075	0.037480603
对偶 MC	模拟次数 (单位:千)	1	0.00179	0.000791073	0.022745506	0.115246232	0.019834869
		5	0.00785	0.001357094	0.031406251	0.15330439	0.031549462
		10	0.01497	0.001664417	0.035010387	0.169210235	0.038164502
		50	0.06995	0.001587794	0.034070325	0.164857958	0.036484206
		100	0.14656	0.001576339	0.03392953	0.164182716	0.036225985
拟 MC	模拟次数 (单位:千)	1	0.00134	0.001346526	0.03127551	0.152727062	0.03133398
		5	0.00378	0.001518466	0.033301027	0.161509126	0.034992652
		10	0.00719	0.001549716	0.033650006	0.163023815	0.035662796
		50	0.0285	0.001577782	0.03395841	0.16436048	0.036265414
		100	0.0743	0.001582344	0.034008165	0.164576138	0.036363475
对偶拟 MC	模拟次数 (单位:千)	1	0.00181	0.00163126	0.03455409	0.166929748	0.037414537
		5	0.00812	0.001600271	0.034201864	0.165411043	0.036748232
		10	0.01369	0.001593035	0.034124053	0.165076306	0.03659298
		50	0.0708	0.001588409	0.034074065	0.164861262	0.036493779
		100	0.1254	0.001587957	0.034069173	0.164840209	0.036484097

注:表中的粗体字给出的定价过程中所需的最少时间以及定价过程中评价准则最小值。

从表 8 和表 9,可以发现:

- 1)随着模拟次数的增加,蒙特卡罗和拟蒙特卡罗的定价时间都随之增加;
- 2)当模拟次数为 1000 时,蒙特卡罗和拟蒙特卡罗法不仅定价效率显著高于 B-S-M 模型,且除了对偶拟 MC 法其他方法的定价精度都高于 B-S-M

模型。尽管对偶变量技术的拟蒙特卡罗在精度上稍稍低于 B-S-M 模型,但是其定价所需的时间低于 B-S-M 模型。该结果也说明了在上证 50ETF 期权定价中,当模拟次数为 1000 时,其模拟效率优于 B-S-M 模型;

- 3)不管采用何种评价标准以及不管采用多少

次的模拟次数,基于 Halton 序列的蒙特卡罗的定价精度一致地优于 B-S-M 模型,只是在模拟 10 万次时所需的时间会稍微增加。产生这一原因是随着模拟次数的增加,模拟所需的时间也会增加;

4)不管是看涨期权还是看跌期权,拟 MC 的精确度随着模拟次数增加而增加,而对偶拟 MC 却随着模拟次数增加而减少;

5)在所有定价方法中,模拟次数为 1000 的对

偶变量技术的蒙特卡罗的精度一致地最高,即,在所有评价标准下,对偶变量技术的蒙特卡罗的所有评价指标的值最小;

6)在 50ETF 购 3 月 2.20 定价中,拟 MC 的精度逐渐增加,而对偶拟 MC 的定价精度逐渐降低,但是,在 50ETF 沽 9 月 2.20 定价中,不论是拟 MC 法还是对偶拟 MC 法都不存在如此显著的走势。

表 9 不同期权定价方法的拟合精度比较(50ETF 沽 9 月 2.20)

比较指标 期权定价方法			时间 (单位:秒)	评价标准			
				MSE	MAE	MSPE	MAPE
B-S-M			0.0072	0.003519768	0.045090312	0.220072819	0.065257506
MC	模拟次数 (单位:千)	1	0.0014	0.004147428	0.04857228	0.231958597	0.073772937
		5	0.0015	0.003691245	0.046055593	0.22249037	0.067279363
		10	0.0082	0.003575279	0.045406652	0.221121813	0.066022096
		50	0.0303	0.003427934	0.044558497	0.218678278	0.064294356
		100	0.0627	0.003550255	0.045262849	0.220461849	0.065575771
对偶 MC	模拟次数 (单位:千)	1	0.0019	0.003003268	0.042075236	0.214552121	0.061062464
		5	0.0091	0.003806751	0.046683351	0.22418373	0.068728562
		10	0.0148	0.003460452	0.044781188	0.219157593	0.064554381
		50	0.0743	0.003537372	0.045195376	0.220372011	0.065447088
		100	0.144	0.003484514	0.044878962	0.219630487	0.064939622
拟 MC	模拟次数 (单位:千)	1	0.0018	0.003513631	0.04505491	0.219975317	0.065192549
		5	0.0076	0.003507947	0.045021902	0.219884745	0.065132975
		10	0.0081	0.003518836	0.045084972	0.220058111	0.065247468
		50	0.0315	0.003517971	0.045080007	0.220044506	0.065238211
		100	0.0769	0.003519666	0.045089725	0.220071194	0.065256393
对偶拟 MC	模拟次数 (单位:千)	1	0.0022	0.003314972	0.043819195	0.216727963	0.063572686
		5	0.0082	0.003647585	0.045823744	0.221916395	0.066584717
		10	0.0153	0.003541754	0.045217445	0.22041028	0.065474922
		50	0.0814	0.003535413	0.045178386	0.220337703	0.065432423
		100	0.1326	0.00351713	0.045073629	0.220044182	0.065241829

注:表中的粗体字给出的定价过程中所需的最少时间以及定价过程中评价准则最小值。

另外,从表 8 和表 9 中我们还可以发现,对于同一评价指标(譬如, MSE),大部分的模拟结果都与 B-S-M 模型的定价结果一致。其中,50ETF 购 3 月 2.20 的 MSE 在 0.0015 附近摆动,而 50ETF 沽 9 月 2.20 的 MSE 在 0.0035 附近摆动,并且 MSE 的拟合精度都为 0.001。50ETF 沽 9 月 2.20 的 MSE 稍大,市场价格高于定价模型得出的理论价格,这很可能是由我国当前的期权交易制度只允许三级投资者可以裸卖空期权造成的。

综上所述,当标的资产的条件均值和条件方差被充分拟合前提条件下,不管是传统的 B-S-M 期权定价模型,还是新兴的蒙特卡罗模拟定价法或拟蒙特卡罗方法,它们都能精确地对上证 50ETF 期权进行合理的定价。

除了用 MSE 等评价标准,本文分别给出 B-S-M 模型、MC、对偶 MC、拟 MC 和对偶拟 MC 的期权定价模型给出的理论定价与实际市场价格间的比较图。看涨期权和看跌期权分别如图 2 和 3 所示,其中,蒙特卡罗模拟的模拟次数为 1000 次。从图中可以发现:

1) B-S-M 模型和蒙特卡罗模拟得出的期权价格基本重合,通过这五种方法得到的期权价格几乎没有差异;

2) 二者与市场价格略有差异但总体拟合较好,这是因为期权的市场价格受多种因素的影响,而 B-S-M 模型定价和蒙特卡罗模拟方法定价是在一定的假设条件下得出的期权价格。

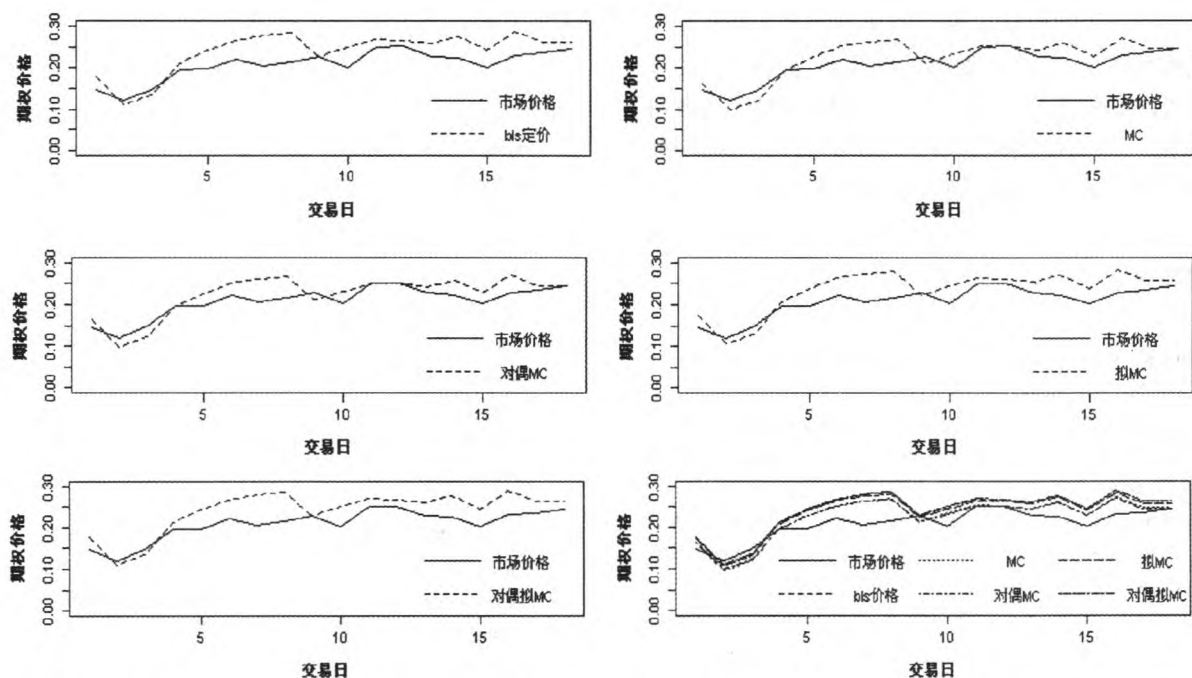


图2 B-S-M模型、MC、对偶MC、拟MC和对偶拟MC的期权定价模型给出的定价与市场价格间的比较图(50ETF购3月2.20)

4 结论

本文通过B-S-M模型和蒙特卡罗模拟的欧式期权定价方法,分别对上证50ETF的50ETF购3月2.20和50ETF沽9月2.20期权的定价问题进行比较分析。实证结果证实了上证50ETF期权的标的物上证50ETF收益率存在显著的自相关性,其波动率存在显著的持续性。在5%显著水平下,上证50ETF的波动率模型可以表示为贴现因子为0.84的指数平滑形式。同时,在波动率的拟合中,AIC信息准则表明广义误差分布将充分刻画上证50ETF新息项的分布特性。通过比较分析,可以发现不管是B-S-M模型还是蒙特卡罗模拟方法,它们不仅都可以较好地应用于我国期权市场的定价中,且两者之间并未存在显著的区别,还都对实际市场价格具有良好的拟合效果(理论值和真实值之间的MSE为0.001)。当模拟次数为1000时,伪随机序列蒙特卡罗模拟、对偶变量技术的蒙特卡罗和基于Halton序列的拟蒙特卡罗的不仅定价效率而且定价精度都高于B-S-M模型。尽管对偶变量技术的拟蒙特卡罗在精度上稍稍低于B-S-M模型,但是其定价所需的时间低于B-S-M模型。然而,不管是传统的B-S-M期权定价模型,还是新兴的蒙特卡罗模拟定价法或拟蒙特卡罗方法,它们都能精确地对上证50ETF期权进行合理的定价。该实证分析的结果不仅对期权交易行为具有一定的

指导作用,还为我国金融衍生品的发展提供了理论基础。

期权作为一种衍生工具,较股票等基础证券要复杂,其敏感度高、市场风险较大。究其原因主要是其价值受诸多因素的影响。期权具有较高的杠杆率,如果持有人不善于管理风险,则有可能导致巨大的损失。尽管上证50ETF期权交易已运行近4个月,但是为了确保其平稳运行与健康发展,对其实施有效的合约设计、交易制度和风险控制等措施是有必要的。然而,所有这些措施的实施基础在于对ETF50期权合理、有效地定价。

针对以上的结论,本文对今后我国期权市场的发展提出以下几点建议:

第一,逐步降低期权市场的门槛限制。虽然我国目前已经正式推出了期权交易,但是我国在投资者适当性管理方面采用了严格的准入制度。这使得绝大部分的投资者目前还无法进入期权市场。因此,交易所应逐步降低期权市场的门槛限制,放开投资者的资金门槛,让市场发挥优胜劣汰的作用,从而使更多的投资者能够进入期权市场,充分展现利用股票期权工具进行风险转移的权利。

第二,逐步增加期权交易品种。目前我国只有50ETF期权一个品种上市交易,各个交易所可针对其他标的资产进行衍生产品设计,例如股指期货,商品期货期权等,丰富投资者可用来对冲风险的期权品种。

第三,更深层次地研究期权定价模型。我国各

交易所拟采用的期权定价模型基本为 B-S 欧式期权定价模型和 BAW 美式期权定价模型等,我们有必要更深层次的研究这些定价模型,放松模型中的各种限制条件,从而使期权的理论价格更贴近市场价格,从而使投资者可以更好地利用期权来对冲风险。

参考文献:

- [1] Itô K. On stochastic differential equations[M]. American Mathematical Society, 1951, 4: 1-51.
- [2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. The Journal of Political Economy, 1973: 637-654.
- [3] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1-2): 125-144.
- [4] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1-2): 145-166.
- [5] Boyle P P. Options: A monte carlo approach[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4(3): 323-338.
- [6] Kemna A G Z, Vorst A C F. A pricing method for options based on average asset values[J]. Journal of Banking & Finance, 1990, 14(1): 113-129.
- [7] Pellizzari P. Efficient Monte Carlo pricing of European options using mean value control variates[J]. Decisions in Economics and Finance, 2001, 24(2): 107-126.
- [8] Glasserman P. Monte Carlo methods in financial engineering[M]. Springer Science & Business Media, 2003.
- [9] Korn R, Zeytun S. Efficient basket Monte Carlo option pricing via a simple analytical approximation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013, 243: 48-59.
- [10] Paskov S H, Traub J F. Faster valuation of financial derivatives[J]. The Journal of Portfolio Management, 1995, 22(1): 113-123.
- [11] Joy C, Boyle P P, Tan K S. Quasi-monte carlo methods in numerical finance[J]. Management Science, 1996, 42(6): 926-938.
- [12] Cranley R, Patterson T N L. Randomization of number theoretic methods for multiple integration[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1976, 13(6): 904-914.
- [13] Boyle P, Broadie M, Glasserman P. Monte Carlo methods for security pricing[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997, 21(8): 1267-1321.
- [14] Akesson F, Lehoczky J P. Path generation for quasi-monte carlo simulation of mortgage-backed securities[J]. Management Science, 2000, 46(9): 1171-1187.
- [15] Hickernell F J, Lemieux C, Owen A B. Control variates for quasi-monte carlo[J]. Statistical Science, 2005, 20(1): 1-31.
- [16] 张普,吴冲锋.基于非参数蒙特卡罗模拟的股票波动性价值研究[J].管理科学,2009,22(3):89-95.
- [17] 张丽花,张卫国,徐文坤.美式障碍期权定价的总体最小二乘拟蒙特卡罗模拟方法[J].数理统计与管理,2013,32(5):923-930.
- [18] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case[J]. The Review of Economics and Statistics, 1969: 247-257.
- [19] Andersen T G, Bollerslev T. Heterogeneous information arrivals and return volatility dynamics: uncovering the long-run in high frequency returns[J]. The Journal of Finance, 1997, 52(3): 975-1005.
- [20] Engle R F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of U. K. Inflation[J]. Econometrica, 1982, 50.
- [21] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity[J]. Journal of Econometrics, 1986, 31(3): 307-327.
- [22] Brandt M W, Jones C S. Volatility forecasting with range-based EGARCH models[J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2006, 24(4): 470-486.
- [23] Hung J C, Lee M C, Liu H C. Estimation of value-at-risk for energy commodities via fat-tailed GARCH models[J]. Energy Economics, 2008, 30(3): 1173-1191.
- [24] Fang Y, Liu L, Liu J Z. A dynamic double asymmetric copula generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model: application to China's and US stock market[J]. Journal of Applied Statistics, 2015, 42(2): 327-346.
- [25] 郑振龙,黄慧舟.波动率预测:GARCH模型与隐含波动率[J].数量经济技术经济研究,2010:140-150.
- [26] 朱信凯,韩磊,曾晨晨.信息与农产品价格波动:基于EGARCH模型的分析[J].管理世界,2012,(11):57-66.
- [27] 吴恒煜,朱福敏,温金明.基于ARMA-GARCH调和稳态Levy过程的期权定价[J].系统工程理论与实践,2013,33(11):2721-2733.
- [28] 李传乐.我国商业银行市场风险量化体系研究[J].金融发展研究,2009,(3):62-66.
- [29] Jarque C M, Bera A K. A test for normality of observations and regression residuals[J]. International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique, 1987: 163-172.
- [30] Ljung G M, Box G E P. On a measure of lack of fit in time series models[J]. Biometrika, 1978, 65(2): 297-303.
- [31] Dickey D A, Fuller W A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root[J]. Journal of the American Statistical Association, 1979, 74(366a): 427-431.
- [32] Phillips P C B, Perron P. Testing for a unit root in time series regression[J]. Biometrika, 1988, 75(2): 335-346.
- [33] Kwiatkowski D, Phillips P C B, Schmidt P, et al. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root? [J]. Journal of Econometrics, 1992, 54(1): 159-178.