



第五章

直線與圓的偵測

內 容

- 5.1 前 言
- 5.2 蠻力式直線偵測
- 5.3 哈克轉換式直線偵測
- 5.4 隨機式圓偵測
- 5.5 作 業

5.1 前言

直線上的邊點 (Edge Pixel) 集合可形成一條直線。



圖 5.1.1 道路影像

數位直線

- 在圖 5.1.2 中， v_1 、 v_2 、 v_3 和 v_4 皆為邊點。

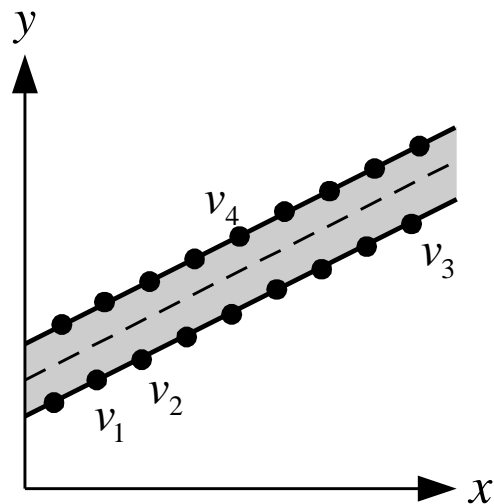


圖 5.1.2 數位直線

5.2 蠻力式直線偵測

邊點數 $m = |V|$ ，則總共有 $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} = O(m^2)$ 條可能的直線。

例如 $m = |V| = 4$ ，有 6 種可能被偵測到的直線。

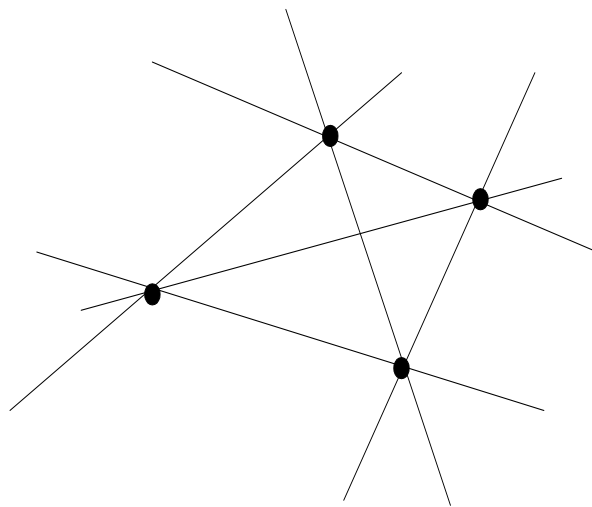


圖 5.2.1 $m=4$ 時的所有可能線

邊點 (x', y') 到 $L_i: y = a_i x + b_i$ 的距離為

$$d = \frac{|y' - a_i x' - b_i|}{\sqrt{1 + a_i^2}} \quad (5.2.1)$$

若 d 小於設定的門檻值 T_1 ，則邊點對 L_i 投了一票。總得分數超過門檻值 T_2 ，則 L_i 為一真正的直線。

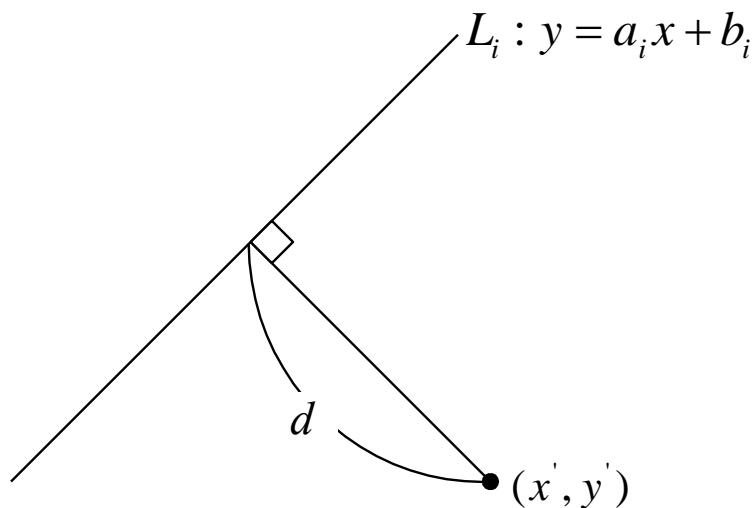


圖5.2.2 距離 d 的決定

定理 5.2.1 蠻力法可在 $O(m^3)$ 的時間完成直線偵測的工作。

證明：

$$O(m \times m^2) = O(m^3)$$

證明完畢

5.3 哈克轉換式直線偵測

- $x-y$ 空間轉換成 $\gamma-\theta$ 參數空間 (Parameter Space)。

$$r = \overline{OB} + \overline{BA} = x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta \quad (5.3.1)$$

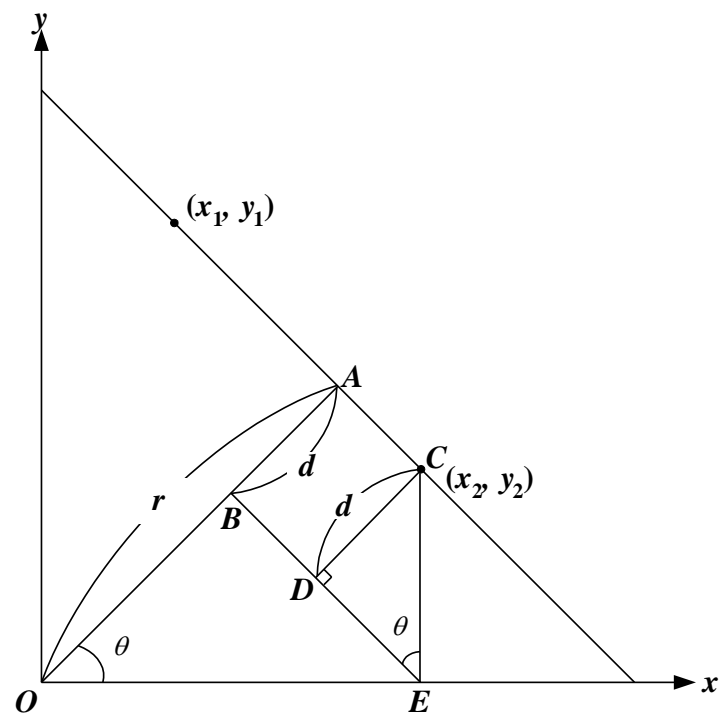


圖5.3.1 $x-y$ 空間和 $\gamma-\theta$ 空間的關係

令 $\theta = 45^\circ$

座標 (2,1)，得到 $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

座標 (1,2)，得到 $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

座標 (0,3)，得到 $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

座標 (3,3)，得到 $r = 3\sqrt{2}$

→ (2,1)，(1,2) 和 (0,3) 為共線

圖5.7中有一條角度為 $\frac{3}{4}\pi$ 的直線通過該影像。

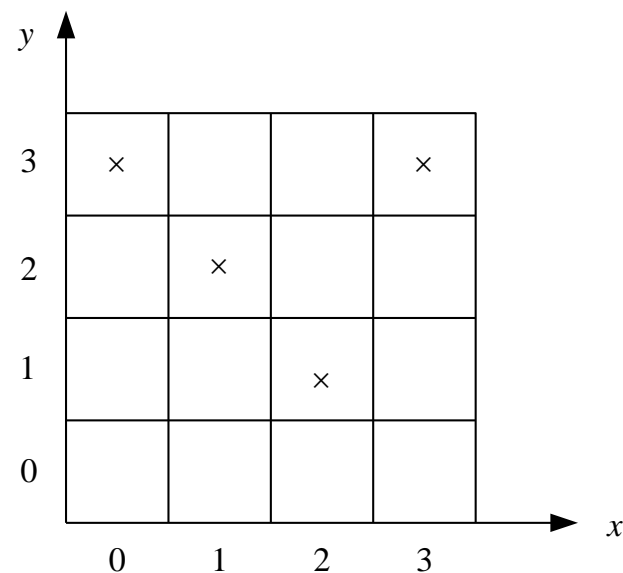


圖5.3.2 4x4 的影像小例子

$AA[] \leftarrow 0$ { 將二維累積陣列歸零 }

對邊點集 V 的每一邊點 (x, y)

for $i = 0$ to n

$$r = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i$$

$$AA[r, \theta_i] \leftarrow AA[r, \theta_i] + 1$$

end

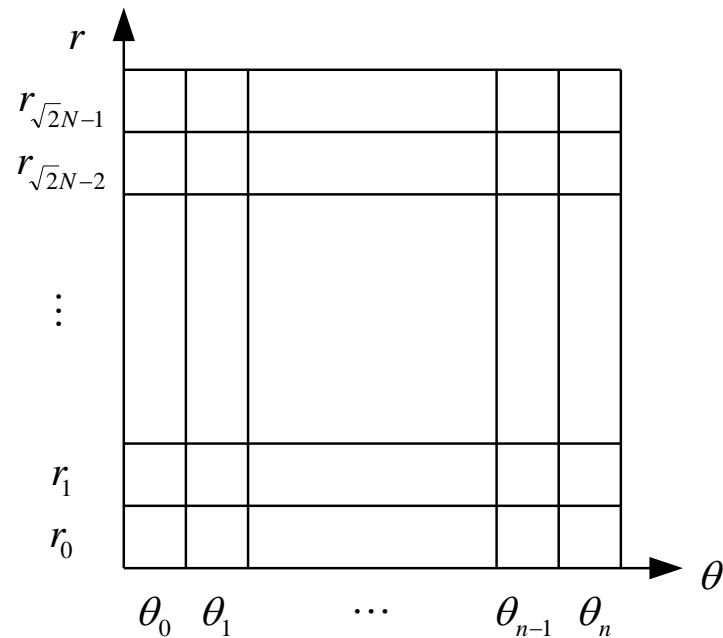


圖5.3.3 累積陣列

定理 5.3.1 哈克轉換法可在 $O(mn)$ 的時間內完成直線偵測的工作，
此處 $m=|V|$ 且 n 為 $[0,\pi]$ 的角度分割數。



圖5.3.4 道路影像

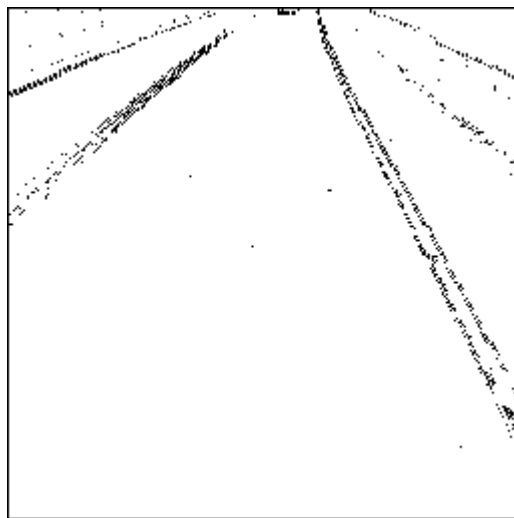


圖5.3.5 圖5.3.4的邊點集

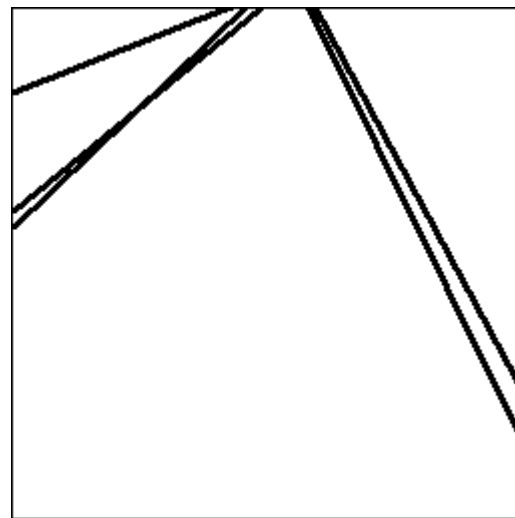


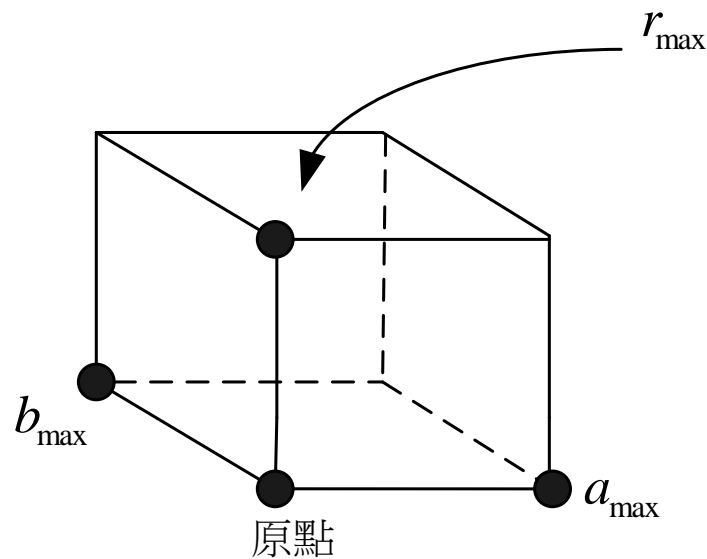
圖5.3.6 測得之直線

5.4 隨機式測圓法

範例 5.4.1：哈克轉換可否應用於圓偵測上？缺點為何？

解答：

的確可應用到圓偵測上，但需要一個三維的累積陣列。



解答完畢

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (5.4.1)$$

從 V 中隨機挑出四點。該四點可以決定出四個候選圓。

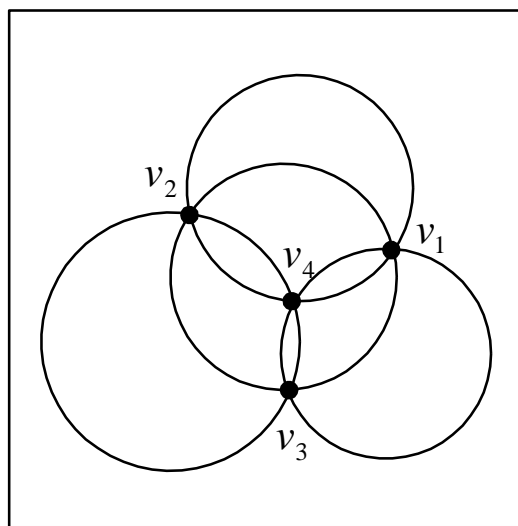


圖5.4.1 四點決定四個圓

圓方程式改寫成

$$2xa + 2yb + d = x^2 + y^2 \quad (5.4.2)$$

此處 $d = r^2 - a^2 - b^2$ 。令 $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, 為影像中邊點集中被隨機挑選出來的三個邊點。

■ 解圓心和半徑

將三個邊點 $v_1 = (x_1, y_1)$ 、 $v_2 = (x_2, y_2)$ 和 $v_3 = (x_3, y_3)$ 代入式子(5.4.2)，可得

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 a_{123} + 2y_1 b_{123} + d_{123} = x_1^2 + y_1^2 \\ 2x_2 a_{123} + 2y_2 b_{123} + d_{123} = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_3 a_{123} + 2y_3 b_{123} + d_{123} = x_3^2 + y_3^2 \end{cases}$$

此處 $d_{123} = r_{123}^2 - a_{123}^2 - b_{123}^2$ 。

圓心的解為

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{123} = \frac{\begin{vmatrix} x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 + y_1^2) & 2(y_2 - y_1) \\ x_3^2 + y_3^2 - (x_1^2 + y_1^2) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}{4((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))} \\ b_{123} = \frac{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 + y_1^2) \\ 2(x_3 - x_1) & x_3^2 + y_3^2 - (x_1^2 + y_1^2) \end{vmatrix}}{4((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))} \end{array} \right.$$

我們進而解得圓半徑如下

$$r_{123} = \sqrt{(x_i - a_{123})^2 + (y_i - b_{123})^2}$$

令 $v_4 = (x_4, y_4)$ 為第四個被挑選的邊點，令該點至圓 C_{123} 的距離為

$$d_{4 \rightarrow 123} = \left| \sqrt{(x_4 - a_{123})^2 + (y_4 - b_{123})^2} - r_{123} \right|$$

假如 $d_{4 \rightarrow 123}$ 夠小，則 v_4 在圓 C_{123} 上。

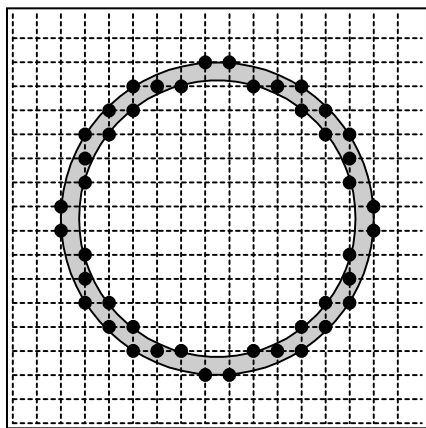


圖5.4.2 數位圖

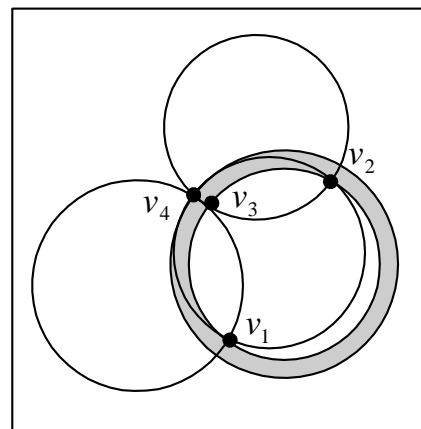


圖5.4.3 四個抽樣邊點在一圓

範例 5.4.1：給定 3 個邊點 $V1(5, 0)$ 、 $V2(3, 6)$ 、 $V3(6, 10)$ ，

在進行隨機式測圓法來決定可能圓的過程中：

(1)請判斷此 3 個邊點是否可以形成一個可能圓。

(2)請求出此可能圓的圓心與半徑，並詳述其計算過程。

解答：

(1)

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$= (3 - 5)(10 - 0) - (6 - 5)(6 - 0)$$

$$= (-20) - 6$$

$$= -26$$

所以此三點不共線，可形成一個可能圓。

(2)根據前文所述，可得到可能圓之圓心為

$$a_{123} = \frac{\begin{vmatrix} x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 + y_1^2) & 2(y_2 - y_1) \\ x_3^2 + y_3^2 - (x_1^2 + y_1^2) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}{4((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))} = 8.96$$

$$b_{123} = \frac{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 + y_1^2) \\ 2(x_3 - x_1) & x_3^2 + y_3^2 - (x_1^2 + y_1^2) \end{vmatrix}}{4((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))} = \frac{-484}{4 \times (-26)} = 4.65$$

而半徑為

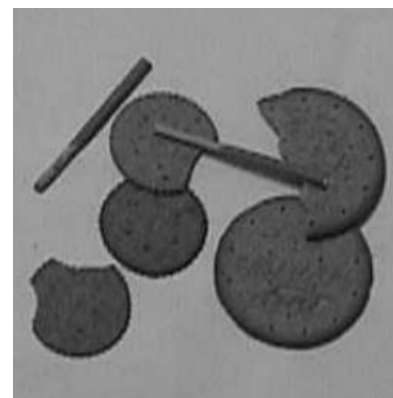
$$r_{123} = \sqrt{(x_i - a_{123})^2 + (y_i - b_{123})^2} = 6.1$$

所以此三點所形成的可能圓之圓心
為(8.96, 4.65)而半徑為 6.1。

解答完畢



(a) 錢幣影像



(b) 餅乾和巧克力棒影像

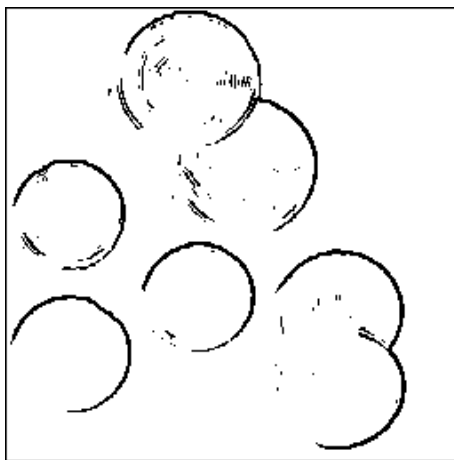


(c) 文具影像

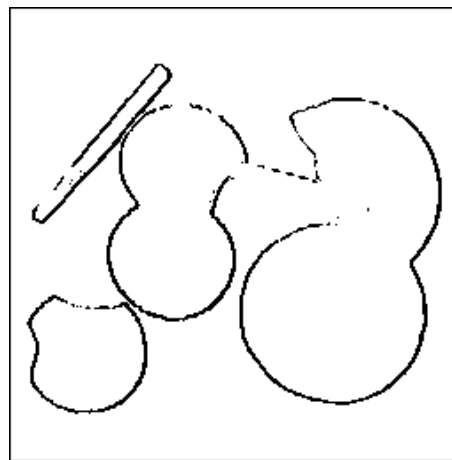


(d) 渠洞影像

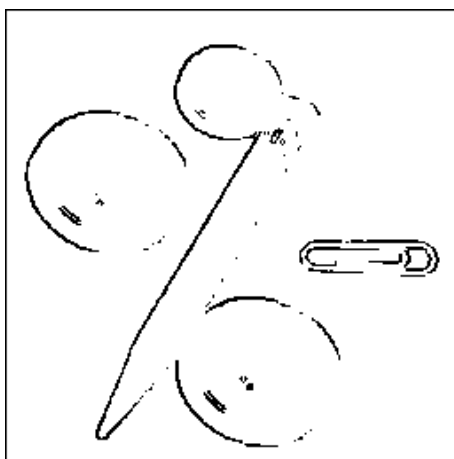
圖 5.4.4 四張待測影像



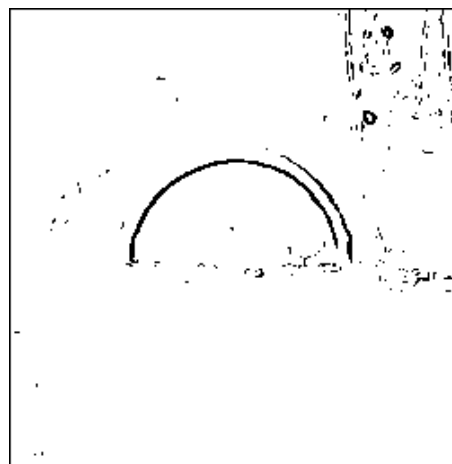
(a) 錢幣影像的邊點圖



(b) 餅乾和巧克力棒影像的邊點圖



(c) 文具影像的邊點圖

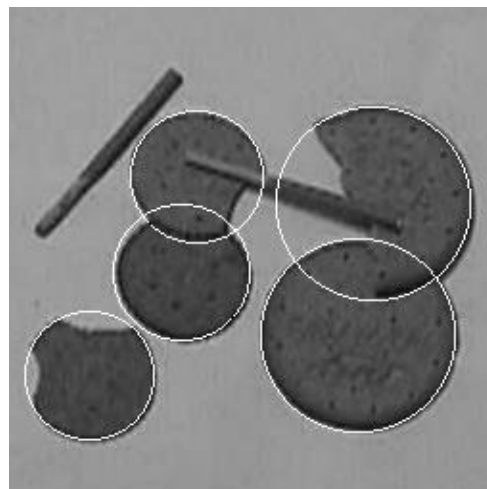


(d) 渠洞影像的邊點圖

圖 5.4.5 圖 5.4.4 的邊點圖



(a) 測得的圓形錢幣



(b) 測得的圓形餅乾



(c) 測得的圓形文具



(d) 測得的圓形渠洞

圖5.4.6 測得的各種圓

5.6 作 業

- 作業一：試問法距的長短是否會影響到直線偵測時所需的門檻值決定？
- 作業二：寫一 C 程式以完成直線偵測的實作。
- 作業三：寫一 C 程式以完成圓偵測的實作。