

Le modèle de FitzHugh-Nagumo a été inventé en 1962. Il décrit une partie des dynamiques de courants au voisinage de la membrane d'un neurone. Une variable V décrit le potentiel de membrane qui sera soumis à un courant d'entrée I . La deuxième variable W décrit une dynamique plus lente d'inactivation. L'équation générale est de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} &= V - V^3/3 - W + I \\ \frac{dW}{dt} &= \alpha(\beta + V - \gamma W) \end{cases}$$

Avec α , β et γ des paramètres > 0 .

1. Ecrire la fonction qui permet de résoudre l'équation différentielle `fhn`.
2. Faire une fonction qui imprime à l'écran $V(t)$ et $W(t)$ et le diagramme de phase (V, W) en fonction de I . On prendra $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.7$ et $\gamma = 0.8$ et les calculs se feront sur $[0; 100]$. On prendra $V(0) = 0$ et $W(0) = 0$.
3. Faire une fonction qui imprime à l'écran les différentes solutions pour des valeurs de I suivantes 0, 0.25, 1.0, 2.0, 10.0 (solution et diagramme de phase). Que remarquez vous ?
4. Faire une fonction qui renvoie la Jacobienne en un point V, W du système différentielle.
5. Faire une fonction qui renvoie l'équilibre via `fsolve`.
6. Faire une fonction qui pour une valeur de I renvoie le spectre de la Jacobienne calculée à l'équilibre.
7. En déduire en fonction de I l'évolution de la partie réelle des valeurs propres. Qu'en déduisez vous ?
8. On suppose maintenant que $I = 1.5$. Tracer les isoclines et vérifier que votre équilibre est correct.
9. Nous allons tracer le champ de vecteur :
 - (a) Faire une double boucle (en V et en W) pour obtenir un quadrillage de l'espace. (Indice : que fait $z=[z; \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ si on prend $z=[]$ et \mathbf{v} , \mathbf{w} deux réels ?)
 - (b) Utiliser `meshgrid` pour obtenir la même chose sans boucles. Note : utiliser $z = [\mathbf{v}(:), \mathbf{w}(:)]$.
 - (c) Imprimer le champs de vecteur : une flèche qui va de (v, w) à $(v + \frac{dV}{dt}, w + \frac{dW}{dt})$. Pour mieux le tracer, normaliser le champ de vecteurs. En déduire le plot du champ (fonction **quiver** pour tracer les flèches).
 - (d) Tracer sur le même plot des trajectoires en prenant des $V(0)$ et $W(0)$ différents (pour redessiner utiliser `hold on` et `hold off`)
10. Faire la fonction qui fait le tracé complet en fonction de I et tester pour différentes valeur de I .