2019 年矩阵与分析考试题

复习直接看打印店卖的那个笔记。

判断是往年的，10 个

第一个大题 是关于通解，有解，无解，无穷解的。AX=b

第二个大题一模，二模，无穷模的计算，再就是利用正交矩阵酉矩阵的定义求解参数

第三个大题是正交投影的（课后题）

第四个大题关于基变换的，是对应教材课后题的某一个题目，好像是 T=XAX，然后有四个基（1， 0；0 ，0），（0 ，1；0 ，0）（0， 0 ；1，0）（0，0；0，1）具体去教材找题目吧（20 分）

4.7.12. For the standard basis $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ of $\Re^{2\times 2}$, determine the matrix representation $[\mathbf{T}]_{\mathcal{S}}$ for each of the following linear operators on $\Re^{2\times 2}$, and then verify $[\mathbf{T}(\mathbf{U})]_{\mathcal{S}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{S}}[\mathbf{U}]_{\mathcal{S}}$ for $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) $\mathbf{T}(\mathbf{X}_{2\times 2}) = \dfrac{\mathbf{X} + \mathbf{X}^T}{2}$.

(b) $\mathbf{T}(\mathbf{X}_{2\times 2}) = \mathbf{AX} - \mathbf{XA}$, where $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

第五个大题是往年期末考试题那个陈述题，向量空间，S 和 S 垂直，还第二问好像也能在教材找到题目，好像是一个求投影什么的，具体记不清了。

反正老师出题都会参照那本教材的题目，但是教材题目实在是太多了。重视课后习题和往年考试题就好，虽然老师今年故意避开了热点没有考四个矩阵分解。

中国科学院大学

试 题 专 用 纸

考试日期：2020 年 11 月 25 日

课程编号：081202M05006H

课程名称：矩阵分析与应用

任课教师：李保滨

姓名[redacted] 成绩______________

本试题共五题，满分 100，要求全做，[redacted]请写在答题纸上。

一、简答题。（45 分）

1. 写出 $Rank(A)=r$ 的十种等价陈述：（5 分）

2. 简要说明所有 $n\times n$ 的实矩阵构成实数域 R 上的向量空间 V，并且验证：所有满足 $trace(A)=0$ 的矩阵构成向量空间 V 的子空间：（7 分）

3. 对于上述向量空间 V，对于向量空间 V 中任意两个元素 A,B，定义 $\langle A|B\rangle = trace(A^T B)$，试说明它为 V 的内积：（6 分）

4. 写出 Classical Gram-Schmidt 实现算法：（5 分）

5. 写出矩阵 1-Norm,2-Norm 和 ∞-Norm 的定义，并对矩阵 $A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$ 分别计算 1-Norm，2-Norm 和 ∞-Norm：（6 分）

6. 试描述出 $R^{2\times 2}$ 空间中所有正交投影矩阵的形式：（8 分）

7. A 为 $n\times n$ 的反对称矩阵，如果 n 为奇数，简要说明 A 为奇异矩阵。（8 分）

二、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求出所有矩阵 C.（15 分）

三、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$，使用 Givens reduction 方法把矩阵 A 化为上三角矩阵 R.（10 分）

四、对于矩阵 $A=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$，判断该矩阵是否可以对角化；如果可以对角化，给出矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。（15 分）

五、设 T 为 R^2 空间的线性算子，定义为：T(x, y)=(-7x-15y, 6x+12y)，试找出一组基 $B=\{u,v\}$，使得 $[T]_B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.（15 分）

一、填空题（4 ‘*7）

1. 求一4*5矩阵的秩
2. 求矩阵的index
3. 求正交矩阵的行列式
4. 求一2*2矩阵在二模下的条件数K
5. 给一向量u，求正交投影矩阵
6. 给两个向量求角度
7. 矩阵的无穷模

二、大题

1. 给定线性方程组，线性方程组中的a,b取什么值有解？求无穷解时的基础解系。
2. 说明反对称矩阵A_{n*n}，n为奇数时，det|A|=0.
3. classical gram-Schmidt 的流程。
4. 所有n*n实矩阵在Rn构成的向量空间V，说明对称矩阵Sn和反对称矩阵Kn是子空间，同时说明Sn和Kn是正交补空间。
5. 给定3*3的矩阵A和B，求满足AXA+BXB=I+AXB+BXA的矩阵X
6. Givens求矩阵的上三角形式

Problem: Use Givens reduction (i.e., use plane rotations) to reduce the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

to upper-triangular form. Also compute an orthogonal matrix $\mathbf{P}$ such that $\mathbf{PA} = \mathbf{T}$ is upper triangular.

Solution: The plane rotation that uses the (1,1)-entry to annihilate the (2,1)-entry is determined from (5.6.16) to be

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{so that} \quad \mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Now use the (1,1)-entry in $\mathbf{P}_{12}\mathbf{A}$ to annihilate the (3,1)-entry in $\mathbf{P}_{12}\mathbf{A}$. The plane rotation that does the job is again obtained from (5.6.16) to be

$$\mathbf{P}_{13} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{so that} \quad \mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finally, using the (2,2)-entry in $\mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12}\mathbf{A}$ to annihilate the (3,2)-entry produces

$$\mathbf{P}_{23} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{so that} \quad \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Since plane rotation matrices are orthogonal, and since the product of orthogonal matrices is again orthogonal, it must be the case that

7. 跟这个题目的基和问题一样，不过考试中线性算子为

$$\mathrm{T}(\mathrm{X})=\frac{\mathrm{X}+\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}{2}$$

五、设 T 为 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 空间上的一个线性算子，对于任意 $\mathrm{X}\in\mathrm{R}^{2\times 2}$，定义如下：

$$\mathrm{T}(\mathrm{X})=\mathrm{AX}-\mathrm{XA},\quad \text{这里}\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

对于 $R^{2\times 2}$ 中的一组基 $S=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$，给出该线性算子的矩阵表示 $[\mathrm{T}]_S$，

并对于矩阵 $\mathrm{U}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，验证 $[\mathrm{T}(\mathrm{U})]_S=[\mathrm{T}]_S[\mathrm{U}]_S$。（20 分）

整体来说不难，每年的侧重点都不一样，需要全面复习，重点例子和练习题。

一、　简答题

（1）定义内积<A,B>=trace(A^TB)，证明对于$R^{n\times n}$向量空间中任意矩阵 A 都可以唯一表示为 A1+A2，其中 A1 是对称矩阵，A2 是反对称矩阵，并且证明<A1,A2>=0

（2）求一个举证的 Frobenius 范数，1-范数，2-范数和∞-范数

（3）Classical Gram-Schmidt 和 Modified Gram-Schmidt 算法

（4）（记不大清楚了，一个关于投影矩阵的题目）

二、　一个含λ参数的方程组，讨论λ分别为何值时，方程组有唯一解、无解和无穷解，并且写出无穷解时的解

三、　Given Reduction 将矩阵化为上三角形式

四、　一个矩阵 N 的 index 为 k（忘了是不是幂零矩阵了，但是好像并不是很重要，直接看后面给出的定义就行），即 $N^k=0$，且 $N^{k-1}x\neq 0$，求证$\{Nx,N^2x,N^3x,\dots\dots,N^{k-1}x\}$为线性无关集合

五、　Elementary reflector，具体的题目不清楚了

六、　一组基$S=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$，有一个线性变换$T(A)=AB-BA$（有可能是 BA-AB），其中$B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，求线性变换在 S 下的矩阵表达形式$[T]_S$

七、

$$Q=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$$

（1）n=5 时，求 Q^2，Q^3，Q^4，Q^5

（2）写出 $c_0I+c_1Q+c_2Q^2+\dots\dots+c_{n-1}Q^{n-1}$ 的矩阵表示形式