2024 矩阵分析与应用

作业一

1. 对于线性方程组：

$$\begin{cases} 0.835x + 0.667y = 0.168 \\ 0.333x + 0.266y = 0.067 \end{cases}$$

记矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $(\mathbf{A}\,|\mathbf{b})$ 为此线性方程组的系数矩阵和增广矩阵。分别使用 5 个和 6 个有效数字计算矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $(\mathbf{A}\,|\mathbf{b})$ 的 Rank，并判断方程组是否可解。

2.$\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 的矩阵，分别计算 $\mathbf{Ae_j}$、$\mathbf{e_i}^T\mathbf{Ae_j}$，这里 $\mathbf{e_i}$ 和 $\mathbf{e_j}$ 分别为单位矩阵 $\mathbf{I}$ 的第 i 列和第 j 列。

3. 如果 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 都为 $n \times n$ 的矩阵，证明：$trace(\mathbf{ABC}) = trace(\mathbf{BCA})$.

4. 简要说明：两个上（下）三角矩阵相乘仍为上（下）三角矩阵。

5. 给出实现矩阵转置的算法。(选做)

2024 矩阵分析与应用

作业二

1. 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 试求矩阵 **B**、**C** 的逆矩阵，其中 **B**、**C** 定义如下：

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$，(1) 求出它的 LU 分解形式；(2) 由 LU 分解求 $\mathbf{A}^{-1}$.

3. 矩阵 **A** 和向量 **b** 定义如下：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

使用部分主元法 (partial pivoting) 实现 $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$，并求解方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

4. 当 ξ 取什么值的时候，矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \xi & 2 & 0 \\ 1 & \xi & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}$ 不存在 LU 分解。

5. 试说明所有 $n \times n$ 的实数矩阵构成的集合为一个线性空间。另外判断下列哪些是该空间的子空间，并给出理由。

(1) 所有对称矩阵；(2) 所有反对称矩阵；(3) 所有可逆矩阵；(4) 所有上三角矩阵；(5) 所有下三角矩阵；(6) 满足：$trace(\mathbf{A}) = 0$ 的所有矩阵。

2024 矩阵分析与应用

作业三

1.$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times p$ 的矩阵，简要说明下面结论成立：

(1) $R(\mathbf{AB})\subseteq R(\mathbf{A})$.

(2) $N(\mathbf{B})\subseteq N(\mathbf{AB})$.

2. 已知集合：

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

试判断该集合是否线性无关。

3. 对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{pmatrix}$,验证：$rank(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})=rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$.

2024 矩阵分析与应用

作业四

1. 设 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, 试说明下面哪些是线性变换。

(1) $\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times n}) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A}$, (2)$\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$,

(3)$\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times n}) = \frac{\mathbf{X}+\mathbf{X}^T}{2}$ (4)$\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times 1}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

2. 设 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$，$\mathbf{T}$ 为 $\mathcal{R}^{n\times 1}$ 的一个线性算子，定义为：$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. 记 S 为标准基，试说明 $[\mathbf{T}]_S = \mathbf{A}$.

3. 对于向量空间 R^3,

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

为该空间的两组基。

(1) 对于恒等算子 $\mathbf{I}$，分别计算 $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

(2) 对于投影算子 $\mathbf{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, 计算 $[\mathbf{P}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

4. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^3 的一个线性算子, 其定义为 $\mathbf{T}(x, y, z) = (x-y, y-x, x-z)$, $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 为其一组基，$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 为 R^3 的一个向量。

(1) 分别计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$。

(2) 计算 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$，并验证 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 成立。

2024 矩阵分析与应用

作业五

1.$\mathbf{A}(x, y, z) = (x + 2y - z, -y, x + 7z)$ 为 R^3 的一个线性算子，记

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) 计算 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}$.

(2) 求矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}\mathbf{Q}$ 成立。

2. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^4 的一个线性算子，其定义为 $\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, x_2 + x_4, 2x_3 - x_4, x_3 + x_4)$. 令 $\mathcal{X} = span\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. 试说明 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，并计算 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}}$.

3. 对于 $\mathcal{R}^{2\times 2}$ 空间，

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

为其一组基，对于该空间中任意矩阵 $\mathbf{A}$，线性算子 $\mathbf{T}$ 定义如下：

$$\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2},$$

计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$.

2024 矩阵分析与应用

作业六

1. 对于矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

分别计算 Frobenius-norm, 1-norm, 2-norm, ∞-norm.

2. 对于向量空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$, 定义 $< \mathbf{A}, \mathbf{B} >= trace(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$.

(1) 简要说明 $< \mathbf{A}, \mathbf{B} >$ 满足内积定义，为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 空间的一个内积。

(2) 证明

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

为向量空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组标准正交基，并计算矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 在该组基下的傅里叶展开 (Fouier expansion).

3. 对于向量组 $\left\{\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$，在三个有效数字情形下，分别使用传统 Gram-Schmidt 和修改后的 Gram-Schmidt 方法，把上述向量组正交化。

4. 试判断矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-2i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ 是否为酉矩阵。

5. 从向量 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 出发，使用 elementary reflector 构造 R^3 的一组标准正交基。

6. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$，使用 Given reduction 方法找到一个正交矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA} = \mathbf{T}$，这里 $\mathbf{T}$ 为上三角矩阵，且对角元素都为正数。

7. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$，分别使用 Householder reduction 和 Givens reduction 实现该矩阵的 QR 分解。

2024 矩阵分析与应用

作业七

1. 以 $\mathbf{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{15})^T$ 为例，简要写出快速傅里叶变换 FFT 的实现过程。

2. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别为 $\mathcal{R}^3$ 的子空间，且

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\},\quad \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\},$$

分别为其一组基。(1) 试说明 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一对补空间；

(2) 分别给出沿 $\mathcal{Y}$ 空间到 $\mathcal{X}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{P}$，以及沿 $\mathcal{X}$ 空间到 $\mathcal{Y}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{Q}$，并验证矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是幂等矩阵。

3. 设 $\mathcal{R}^{n\times n}$ 为所有 $n\times n$ 的矩阵构成的向量空间，试说明 $\mathcal{R}^{n\times n}=\mathcal{S}\bigoplus\mathcal{K}$ 成立，这里 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别表示所有 $n\times n$ 的对称矩阵和反对称矩阵构成的集合。

4. 对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&0&-4\\4&2&4\\3&2&2\end{pmatrix}$，计算出 core-nilpoten 的分解形式，并给出对应的 Drazin 逆的形式。