课后作业参考答案

作业一

1. 使用 5 个有效数字计算时，时 $rank(\mathbf{A}) = 1, rank(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$，方程组不可解；使用 6 个有效数字，$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$，方程组可解。

2.(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

作业二

1.$\mathbf{A}\mathbf{e_j} = \mathbf{A}_{*j}$，$\mathbf{e_i}^T \mathbf{A}\mathbf{e_j} = a_{ij}$.

2. 先证明对于任意两个 $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ 和 $\mathbf{B} = [b_{ij}]$，都有

$trace(\mathbf{AB}) = trace(\mathbf{BA})$. 证明如下：

$$\begin{aligned} trace(\mathbf{AB}) &= \sum_{i=1}^{n}[\mathbf{AB}]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\mathbf{B}_{j*}\mathbf{A}_{*j} = \sum_{i=1}^{n}[\mathbf{BA}]_{jj} = trace(\mathbf{BA}). \end{aligned}$$

由上面的结果，记 $\mathbf{BC} = \mathbf{D}$，由上面的结果可得：

$$trace(\mathbf{ABC}) = trace(\mathbf{AD}) = trace(\mathbf{DA}) = trace(\mathbf{BCA}).$$

3. 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ 为上三角矩阵，即：对于 $i > j$, $a_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$. 记 $\mathbf{C} = [c_{ij}] = \mathbf{AB}$, 那么当 $i > j$ 时，我们有

$$c_{ij} = \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*j} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{j}a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n}a_{ik}b_{kj} = 0 + 0 = 0,$$

从而矩阵 $\mathbf{C}$ 也为上三角矩阵。同理可证下三角的情形。

4.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

作业三

1. 借助向量空间定义可以验证由 $n \times n$ 的实数矩阵构成的集合为向量空间。由 (3) 给出的集合不满足子空间定义。

2.(1) 证明：对于任意 $\mathbf{b} \in R(\mathbf{AB})$，都存在一个 $\mathbf{x}$，使得 $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$ 成立。如果记 $\mathbf{Bx} = \mathbf{y}$，可得 $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$，即：$\mathbf{b} \in R(\mathbf{A})$，从而有 $R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A})$.

(2) 证明：对于任意 $\mathbf{x} \in N(\mathbf{B})$，也就是 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$，从而有 $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$，即：$N(\mathbf{B}) \subseteq N(\mathbf{AB})$ 成立。

3. 由定义直接可以证明，题中给出的矩阵集合线性无关。

作业四

1. 由线性变换的定义可以证明 (1)、(2) 和 (3) 为线性变换。

2.(1)$[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}$ 为 3×3 的单位矩阵，$[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2)$[\mathbf{P}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$[\mathbf{L}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[\mathbf{C}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

作业五

1.$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. 由定义，$[\mathbf{T}]_S$ 的第 j 列为：

$$[\mathbf{T}(\mathbf{e_j})]_S = [\mathbf{A}e_j] = \mathbf{A}_{*j},$$

从而所证成立。

3.$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 对任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$，有 $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, 0, 0)$, 这里 $\alpha, \beta \in R$. 由题意可得：

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\alpha, \beta, 0, 0) = (\alpha + \beta, \beta, 0, 0) \in \mathcal{X},$$

即：$\mathcal{X}$ 为 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，直接计算可得 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

作业六

1.

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{10},\ \|\mathbf{A}\|_1 = 4,\ \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{10},\ \|\mathbf{A}\|_\infty = 3.$$

$$\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{3},\ \|\mathbf{B}\|_1 = 1,\ \|\mathbf{B}\|_2 = 1,\ \|\mathbf{B}\|_\infty = 1.$$

$$\|\mathbf{C}\|_F = 3,\ \|\mathbf{C}\|_1 = 10,\ \|\mathbf{C}\|_2 = 9,\ \|\mathbf{C}\|_\infty = 10.$$

2. 记 $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_4 =$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，有标准正交的定义，可以验证 $\mathcal{B}$ 为标准正交基，且

$$\mathbf{A} = \sqrt{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4.$$

作业七

1. $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$.

2. 使用传统的 Gram-Schmidt 正交化方法，可以得到：

$$\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix},\ \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.709 \\ -0.709 \end{pmatrix}\right\}$$

使用修改后的 Gram-Schmidt 正交化方法，可以得到：

$$\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix},\ \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

3. 由酉矩阵的定义，可以直接验证 $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = I_{2\times 2}$ 成立，所以该矩阵是酉矩阵。

4. 由题意，令 $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，由此可得

$$\mathbf{R}=\mathbf{I}-\frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathbf{T}}}{\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{u}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 由题意 $\mathbf{Rx}=\mathbf{x}$ 可得：$2\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}=\mathbf{0}$，由于 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$，从而有 $\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}=\mathbf{0}$，所证成立。

作业八

1. 由 Givens reduction 方法，直接计算可得：

$$\mathbf{P}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow\mathbf{P_{12}A}=\begin{pmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{13}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\Longrightarrow\mathbf{P_{13}P_{12}A}=\begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{23}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\Longrightarrow\mathbf{P_{23}P_{13}P_{12}A}=\begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}=\mathbf{T},$$

并且 $\mathbf{P}=\mathbf{P_{23}P_{13}P_{12}}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ -20 & 12 & -9 \\ -15 & -16 & 12 \end{pmatrix}$.

2. 由 Householder reduction 可得:

$$\mathbf{R_2R_1A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} = \mathbf{R},$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R_2R_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}.$$

3.(1) 记 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 直接计算可得:

$$rank[\mathbf{X}|\mathbf{Y}] = rank \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3,$$

这说明 $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一组基，再由 $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$ 可知：$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一对补空间。

(2) 直接计算得:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{X}|\mathbf{0}][\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

4. 对于任意 $n \times n$ 的矩阵 $\mathbf{A}$，我们都有 $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{K}$ 成立，这里 $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathbf{T}}{2} \in \mathcal{S}$, $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathbf{T}}{2} \in \mathcal{K}$，即任意矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。

下面说明这种表示具有唯一性。使用反证法，假设对任意矩阵 $\mathbf{A}$ 存在两个不同的表示，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}_1+\mathbf{K}_1,\quad \mathbf{A}=\mathbf{S}_2+\mathbf{K}_2,$$

$$\Longrightarrow \mathbf{S}_1+\mathbf{K}_1=\mathbf{S}_2+\mathbf{K}_2 \Longrightarrow \mathbf{S}_1-\mathbf{S}_2=\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_1,$$

由于 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$ 为对称矩阵，而 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 为反对称矩阵，从而可以得到 $\mathbf{S}_1-\mathbf{S}_2=\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_1=\mathbf{0}$, 即：$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2, \mathbf{K}_1=\mathbf{K}_2$，唯一性得证。

综上可得：$\mathcal{R}^{n\times n}=\mathcal{S}\bigoplus\mathcal{K}$ 成立。