2024 矩阵分析与应用

作业一

1. 对于线性方程组：

$$\begin{cases} 0.835x + 0.667y = 0.168 \\ 0.333x + 0.266y = 0.067 \end{cases}$$

记矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $(\mathbf{A}\,|\mathbf{b})$ 为此线性方程组的系数矩阵和增广矩阵。分别使用 5 个和 6 个有效数字计算矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $(\mathbf{A}\,|\mathbf{b})$ 的 Rank，并判断方程组是否可解。

2.$\mathbf{A}$ 为 $n\times n$ 的矩阵，分别计算 $\mathbf{Ae_j}$、$\mathbf{e_i}^T\mathbf{Ae_j}$，这里 $\mathbf{e_i}$ 和 $\mathbf{e_j}$ 分别为单位矩阵 $\mathbf{I}$ 的第 i 列和第 j 列。

3. 如果 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 都为 $n\times n$ 的矩阵，证明：$trace(\mathbf{ABC}) = trace(\mathbf{BCA})$.

4. 简要说明：两个上（下）三角矩阵相乘仍为上（下）三角矩阵。

5. 给出实现矩阵转置的算法。(选做)

课程作业参考答案

作业一

1. 使用 5 个有效数字计算时，$rank(\mathbf{A})=1, rank(\mathbf{A}|\mathbf{b})=2$，方程组不可解；使用 6 个有效数字，$rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{A}|\mathbf{b})=2$，方程组可解。

2.$\mathbf{Ae_j}=\mathbf{A}_{*j}$，$\mathbf{e_i}^T\mathbf{Ae_j}=a_{ij}$.

3. 先证明对于任意两个 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 和 $\mathbf{B}=[b_{ij}]$，都有 $trace(\mathbf{AB})=trace(\mathbf{BA})$. 证明如下：

$$\begin{aligned} trace(\mathbf{AB}) &= \sum_{i=1}^{n}[\mathbf{AB}]_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\mathbf{B}_{j*}\mathbf{A}_{*j}=\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{BA}]_{jj}=trace(\mathbf{BA}). \end{aligned}$$

由上面的结果，记 $\mathbf{BC}=\mathbf{D}$，由上面的结果可得：

$$trace(\mathbf{ABC})=trace(\mathbf{AD})=trace(\mathbf{DA})=trace(\mathbf{BCA}).$$

4. 设 $\mathbf{A}=[a_{ij}], \mathbf{B}=[b_{ij}]$ 为上三角矩阵，即：对于 $i>j, a_{ij}=0, b_{ij}=0$. 记 $\mathbf{C}=[c_{ij}]=\mathbf{AB}$, 那么当 $i>j$ 时，我们有

$$c_{ij}=\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*j}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{j}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=j+1}^{n}a_{ik}b_{kj}=0+0=0,$$

从而矩阵 $\mathbf{C}$ 也为上三角矩阵。同理可证下三角矩阵的情形。

2024 矩阵分析与应用

作业二

1. 已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 试求矩阵 **B**、**C** 的逆矩阵，其中 **B**、**C** 定义如下:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$, (1) 求出它的 LU 分解形式; (2) 由 LU 分解求 $\mathbf{A}^{-1}$.

3. 矩阵 **A** 和向量 **b** 定义如下:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

作业二

1.

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\1&4&-2\end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&3&-1\\-1&-4&2\end{pmatrix}.$$

2.

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix},\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}124&-40&14\\-42&15&-6\\10&-4&2\end{pmatrix}.$$

3.

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{3}&0&1&0\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}3&6&-12&3\\0&2&-2&6\\0&0&8&16\\0&0&0&-5\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

4. 当 $\xi=0,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}$ 时，矩阵 $\mathbf{A}$ 不存在 LU 分解。

5. 借助向量空间定义可以验证由 $n\times n$ 的实数矩阵构成的集合为向量空间。由 (3) 给出的集合不满足子空间定义。

2024 矩阵分析与应用

作业三

1.$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times p$ 的矩阵，简要说明下面结论成立：

(1) $R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A})$.

(2) $N(\mathbf{B}) \subseteq N(\mathbf{AB})$.

2. 已知集合：

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

试判断该集合是否线性无关。

3. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$,验证：$rank(\mathbf{A^T A}) = rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A A^T})$.

2024 矩阵分析与应用

作业四

1. 设 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, 试说明下面哪些是线性变换。

(1) $\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times n}) = \mathbf{AX} - \mathbf{XA}$, (2)$\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$,

(3)$\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times n}) = \frac{\mathbf{X}+\mathbf{X}^T}{2}$ (4)$\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times 1}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

2. 设 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$，$\mathbf{T}$ 为 $\mathcal{R}^{n\times 1}$ 的一个线性算子，定义为：$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. 记 S 为标准基，试说明 $[\mathbf{T}]_S = \mathbf{A}$.

3. 对于向量空间 R^3,

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

为该空间的两组基。

(1) 对于恒等算子 $\mathbf{I}$，分别计算 $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

(2) 对于投影算子 $\mathbf{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, 计算 $[\mathbf{P}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

4. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^3 的一个线性算子, 其定义为 $\mathbf{T}(x, y, z) = (x-y, y-x, x-z)$, $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 为其一组基，$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 为 R^3 的一个向量。

(1) 分别计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$。

(2) 计算 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$，并验证 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 成立。

作业三

1.(1) 证明：对于任意 $\mathbf{b} \in R(\mathbf{AB})$，都存在一个 $\mathbf{x}$，使得 $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$ 成立。如果记 $\mathbf{Bx} = \mathbf{y}$，可得 $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$，即：$\mathbf{b} \in R(\mathbf{A})$，从而有 $R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A})$.

(2) 证明：对于任意 $\mathbf{x} \in N(\mathbf{B})$，也就是 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$，从而有 $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$，即：$N(\mathbf{B}) \subseteq N(\mathbf{AB})$ 成立。

2. 由定义直接可以证明，题中给出的矩阵集合线性无关。

3. 略

作业四

1. 由线性变换的定义可以证明 (1)、(2) 和 (3) 为线性变换。

2. 由定义，$[\mathbf{T}]_S$ 的第 j 列为：

$$[\mathbf{T}(\mathbf{e_j})]_S = [\mathbf{A}e_j]_S = \mathbf{A}_{*j},$$

从而所证成立。

3. 略

4.$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2024 矩阵分析与应用

作业五

1.$\mathbf{A}(x,y,z)=(x+2y-z,-y,x+7z)$ 为 R^3 的一个线性算子，记

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ \mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(1) 计算 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}$.

(2) 求矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}=\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}\mathbf{Q}$ 成立。

2. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^4 的一个线性算子，其定义为 $\mathbf{T}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+2x_3-x_4,x_2+x_4,2x_3-x_4,x_3+x_4)$. 令 $\mathcal{X}=span\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$. 试说明 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，并计算 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}}$.

3. 对于 $\mathcal{R}^{2\times 2}$ 空间，

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

为其一组基，对于该空间中任意矩阵 $\mathbf{A}$，线性算子 $\mathbf{T}$ 定义如下：

$$\mathbf{T}(\mathbf{A})=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2},$$

计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$.

使用部分主元法 (partial pivoting) 实现 $\mathbf{PA}=\mathbf{LU}$，并求解方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

4. 当 ξ 取什么值的时候，矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\xi & 2 & 0\\ 1 & \xi & 1\\ 0 & 1 & \xi\end{pmatrix}$ 不存在 LU 分解。

5. 试说明所有 $n\times n$ 的实数矩阵构成的集合为一个线性空间。另外判断下列哪些是该空间的子空间，并给出理由。

(1) 所有对称矩阵；(2) 所有反对称矩阵；(3) 所有可逆矩阵；(4) 所有上三角矩阵；(5) 所有下三角矩阵；(6) 满足：$trace(\mathbf{A})=0$ 的所有矩阵。

作业五

$$1.[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 对任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$，有 $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, 0, 0)$, 这里 $\alpha, \beta \in R$. 由题意可得:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\alpha, \beta, 0, 0) = (\alpha + \beta, \beta, 0, 0) \in \mathcal{X},$$

即：$\mathcal{X}$ 为 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，直接计算可得 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 分别记

$$\mathbf{U_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{U_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{U_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{U_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

直接计算可得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{U_1}) &= \mathbf{U_1} + 0\mathbf{U_2} + 0\mathbf{U_3} + 0\mathbf{U_4}, \\
\mathbf{T}(\mathbf{U_2}) &= 0\mathbf{U_1} + \tfrac{1}{2}\mathbf{U_2} + \tfrac{1}{2}\mathbf{U_3} + 0\mathbf{U_4}, \\
\mathbf{T}(\mathbf{U_3}) &= 0\mathbf{U_1} + \tfrac{1}{2}\mathbf{U_2} + \tfrac{1}{2}\mathbf{U_3} + 0\mathbf{U_4}, \\
\mathbf{T}(\mathbf{U_4}) &= 0\mathbf{U_1} + 0\mathbf{U_2} + 0\mathbf{U_3} + \mathbf{U_4}.
\end{aligned}$$

从而可知:

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2024 矩阵分析与应用

作业六

1. 对于矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

分别计算 Frobenius-norm, 1-norm, 2-norm, ∞-norm.

2. 对于向量空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$, 定义 $<\mathbf{A},\mathbf{B}>=trace(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$.

(1) 简要说明 $<\mathbf{A},\mathbf{B}>$ 满足内积定义，为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 空间的一个内积。

(2) 证明

$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

为向量空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组标准正交基，并计算矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 在该组基下的傅里叶展开 (Fouier expansion).

3. 对于向量组 $\left\{\mathbf{x_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{pmatrix},\ \mathbf{x_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{x_3}=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\0\end{pmatrix}\right\}$，在三个有效数字情形下，分别使用传统 Gram-Schmidt 和修改后的 Gram-Schmidt 方法，把上述向量组正交化。

4. 试判断矩阵 $\begin{pmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}}\\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-2i}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ 是否为酉矩阵。

5. 从向量 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 出发，使用 elementary reflector 构造 R^3 的一组标准正交基。

6. 对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -20 & -14\\3 & 27 & -4\\4 & 11 & -2\end{pmatrix}$，使用 Given reduction 方法找到一个正交矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA}=\mathbf{T}$，这里 $\mathbf{T}$ 为上三角矩阵，且对角元素都为正数。

7. 对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 19 & -34\\-2 & -5 & 20\\2 & 8 & 37\end{pmatrix}$，分别使用 Householder reduction 和 Givens reduction 实现该矩阵的 QR 分解。

作业六

1.

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{10},\ \|\mathbf{A}\|_1 = 4,\ \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{10},\ \|\mathbf{A}\|_\infty = 3.$$

$$\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{3},\ \|\mathbf{B}\|_1 = 1,\ \|\mathbf{B}\|_2 = 1,\ \|\mathbf{B}\|_\infty = 1.$$

$$\|\mathbf{C}\|_F = 3,\ \|\mathbf{C}\|_1 = 10,\ \|\mathbf{C}\|_2 = 9,\ \|\mathbf{C}\|_\infty = 10.$$

2.（1）由内积定义直接验证。

(2)记 $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{u}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，由标准正交的定义，可以验证 $\mathcal{B}$ 为标准正交基，且

$$\mathbf{A} = \sqrt{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4.$$

3. 使用传统的 Gram-Schmidt 正交化方法，可以得到：

$$\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix},\ \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.709 \\ -0.709 \end{pmatrix}\right\}$$

使用修改后的 Gram-Schmidt 正交化方法，可以得到：

$$\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix},\ \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

4. 由酉矩阵的定义，可以直接验证 $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = I_{2\times 2}$ 成立，所以该矩阵是酉矩阵。

5. 由题意，令 $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，由此可得

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^\mathbf{T}}{\mathbf{u}^\mathbf{T}\mathbf{u}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 由 Givens reduction 方法，直接计算可得：

$$\mathbf{P}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P_{12}A}=\begin{pmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{13}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P_{13}P_{12}A}=\begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{23}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P_{23}P_{13}P_{12}A}=\begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}=\mathbf{T},$$

并且 $\mathbf{P}=\mathbf{P_{23}P_{13}P_{12}}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ -20 & 12 & -9 \\ -15 & -16 & 12 \end{pmatrix}$.

7. 由 Householder reduction 可得：

$$\mathbf{R_2R_1A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}=\mathbf{R},$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R_2R_1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}.$$

2024 矩阵分析与应用

作业七

1. 以 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{15})^T$ 为例，简要写出快速傅里叶变换 FFT 的实现过程。

2. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别为 $\mathcal{R}^3$ 的子空间，且

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

分别为其一组基。(1) 试说明 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一对补空间；

(2) 分别给出沿 $\mathcal{Y}$ 空间到 $\mathcal{X}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{P}$，以及沿 $\mathcal{X}$ 空间到 $\mathcal{Y}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{Q}$，并验证矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是幂等矩阵。

3. 设 $\mathcal{R}^{n\times n}$ 为所有 $n\times n$ 的矩阵构成的向量空间，试说明 $\mathcal{R}^{n\times n} = \mathcal{S} \bigoplus \mathcal{K}$ 成立，这里 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别表示所有 $n \times n$ 的对称矩阵和反对称矩阵构成的集合。

4. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，计算出 core-nilpoten 的分解形式，并给出对应的 Drazin 逆的形式。

2.(1) 记 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 直接计算可得：

$$rank[\mathbf{X}|\mathbf{Y}]=rank\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}=3,$$

作业七

这说明 $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cup\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一组基，再由 $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cap\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}=\emptyset$ 可知：$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一对补空间。

1. 略

(2) 直接计算得:

$$\mathbf{P}=[\mathbf{X}|\mathbf{0}][\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{Q}=\mathbf{I}-\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}$$

3. 对于任意 $n\times n$ 的矩阵 $\mathbf{A}$，我们都有 $\mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{K}$ 成立，这里 $\mathbf{S}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}{2}\in\mathcal{S}$, $\mathbf{K}=\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}{2}\in\mathcal{K}$，即任意矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。

下面说明这种表示具有唯一性。使用反证法，假设对任意矩阵 $\mathbf{A}$ 存在两个不同的表示，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}_1+\mathbf{K}_1,\quad \mathbf{A}=\mathbf{S}_2+\mathbf{K}_2,$$

$$\Longrightarrow \mathbf{S}_1+\mathbf{K}_1=\mathbf{S}_2+\mathbf{K}_2\Longrightarrow \mathbf{S}_1-\mathbf{S}_2=\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_1,$$

由于 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$ 为对称矩阵，而 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 为反对称矩阵，从而可以得到 $\mathbf{S}_1-\mathbf{S}_2=\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_1=\mathbf{0}$, 即：$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2$, $\mathbf{K}_1=\mathbf{K}_2$，唯一性得证。

综上可得：$\mathcal{R}^{n\times n}=\mathcal{S}\bigoplus\mathcal{K}$ 成立。

4. 直接计算可得：$rank(\mathbf{A})=2$，$rank(\mathbf{A^2})=1$，$rank(\mathbf{A^3})=1$，由此可知：$index(\mathbf{A})=2$. 由 core-nilpotent 分解可知，矩阵 $\mathbf{Q}=[\mathbf{X}|\mathbf{Y}]$，这里 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 分别为 $R(\mathbf{A^2})$ 和 $N(\mathbf{A^2})$ 的一组基。从而直接计算可得，

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-8\\12\\8\end{pmatrix},\quad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

由此可得

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}-8&-1&0\\12&1&0\\8&0&1\end{pmatrix},$$

且有

$$\mathbf{Q^{-1}AQ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-3&-2&0\\-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&-4\\4&2&4\\3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8&-1&0\\12&1&0\\8&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

也就是 $\mathbf{Q^{-1}AQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{N}\end{pmatrix}$，这里 $\mathbf{C}=(2)$，$\mathbf{N}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\end{pmatrix}$. Drazin inverse 为

$$\mathbf{A}^D=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\mathbf{C^{-1}}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{Q^{-1}}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&0\\1&1&0\end{pmatrix}.$$