

Universiteit
Antwerpen

FACULTEIT WETENSCHAPPEN
DEPARTEMENT FYSICA

ACADEMIEJAAR 2014-2015

Programmeren voor fysici
Examenopdracht 1e zittijd: Numerieke
benadering van luchtstroming rond een
vliegtuigvleugel

Docent:

Prof. Dr. N. van Remortel

Assistent:

Sara Alderweireldt

Inhoudsopgave

1	Afspraken en deadlines	1
2	Inleiding	3
3	Sources en Sinks	3
4	Source Sheets	3
5	Source Panels	6
5.1	Vortex panels	9
5.2	Airfoils	9
5.3	de Kutta conditie	11
6	Project organisatie	15
6.1	Projectleider	15
6.2	Visualisatie	15
6.3	Algoritmes	15
6.4	Primaire objecten en hulpklassen	15

1 Afspraken en deadlines

Dit is de examenopdracht van de cursus *Programmeren voor Fysici* en zal klassikaal worden opgelost. De quotering van deze opdracht is nog steeds individueel en gerelateerd aan je persoonlijke inbreng in het project. Je dient hiervoor zelf een korte samenvatting van je werk in, samen met je zelfgeschreven broncode en zelfgemaakte tests die de validiteit van je broncode illustreren.

De probleemstelling is gerelateerd aan opdracht 4 en bouwt verder op de daarin beschreven technieken ter beschrijving van de dynamica van incompressibele en niet visceuze vloeistoffen en gassen. Het is de bedoeling dat in deze opdracht een vereenvoudigd model wordt opgelost voor de stroming van lucht langs een vliegtuigvleugel en de daaruit resulterende lift.

De opdracht wordt klassikaal als een project opgelost, met op voorhand gedefinieerde deelgroepen die elk hun specifieke taak hebben. Het project wordt geleid door een projectleider die zich toelegt op het ontwerp van het software project, duidelijk maakt aan de teams welk materiaal zij moeten aanleveren en tegen welke datum. De projectmanager is verantwoordelijk voor het organiseren van discussies over het ontwerp, het inlassen van testfases en het schrijven van een uitvoerbaar demo programma. De projectleider verzamelt ook documentatie, grafieken en tekst voor een begeleidend verslag van de ganse opdracht. De voorgestelde structuur van het project en de teams wordt in de laatste sectie van dit document toegelicht.

Elke individuele student dient persoonlijk een korte samenvatting van zijn/haar werk in, samen met de zelfgeschreven broncode en zelfgemaakte tests die de validiteit van de eigen broncode illustreren.

Het project dient geïmplementeerd te worden in C++, maximaal gebruik makende van de aangeleerde programmeertechnieken en richtlijnen voor robuust en performant programmeren. Het is verplicht om open source bibliotheken te gebruiken voor het oplossen van numerieke problemen en het grafisch weergeven van de resultaten. Naast het collectief verslag, een publieke demonstratie van de werking, en de samenvattingen van de eigen bijdragen, dient alle broncode te worden ingeleverd samen met een Makefile die de demo compileert op een Linux systeem.

- Deadline: Iedereen dient zijn eigen bijdragen (eigen broncode en korte samenvatting van je activiteiten) via Blackboard tegen **Vrijdag 15 Mei om 18:00**.
- De projectleider levert het klassikale verslag en de broncode van het ganse project in tegen dezelfde einddatum via email.

Als eindproducten worden de volgende zaken verwacht:

- de header en implementatie files van alle klassen en eventueel je eigen gecompileerde bibliotheken, samen met een Makefile die toelaat om je programma te compileren
- een of meerdere uitvoerbare demo's waarin de projectleider het softwarepakket demonstreert

- een verzorgd verslag, waarin de volgende zaken besproken zijn:
 - een bespreking en motivatie van de structuur van het softwareproject: klasse hiërarchie, interfaces, met nadruk op de ontwerpkeuzes die je hebt gemaakt
 - een beschrijving van elke klasse met een aantal tests die de juiste werking illustreren (geschreven door de teams)
 - een grafische weergave van de oplossing van de opgelegde fysische probleemstellingen met een gedetailleerde bespreking van het resultaat waar nodig (juistheid, stabiliteit, convergentie, rekentijd, ...), opgemaakt door projectleider in samenspraak met de teams

De individuele quotering van het afgeleverde werk is gebaseerd op je persoonlijke inspanningen tot het slagen van het project. Deze worden beoordeeld op basis van

- een duidelijke en waargetrouwe weergave van je bijdragen tot het project in je persoonlijke samenvatting,
- het respecteren van deadlines en afspraken binnen het project,
- de kwaliteit van de duidelijk identificeerbare stukken code die jij hebt geïmplementeerd in termen van
 - het hanteren van een nette en herbruikbare programma structuur
 - het juiste gebruik van OOP concepten zoals operator overloading, inheritance, virtual functions, pure virtual functions, etc.
 - de volledigheid waarmee je de klassen hebt geïmplementeerd en de programmeerstijl (afschermen van data, const waar mogelijk, pass-by-ref waar mogelijk, opvangen van gebruikersfouten, ...)
 - de compileerbaarheid en stabiliteit van je code
- de kwaliteit van de tests die je hebt uitgevoerd op de juistheid en performantie van je code te evalueren
- de juistheid van de numerieke resultaten

Nuttige tips:

- Lees de opdrachten zorgvuldig door, vergeet niet de verplichte vragen op te lossen
- Denk na alvorens te beginnen met coderen, zet de structuur van je programma eerst even op papier
- Concentreer je eerst op het schrijven van de klassen en hun members, bepaal de interface vooraleer te gaan werken aan de numerieke algoritmes
- Slechts 20% van een softwareproject bestaat uit coderen, de rest bestaat uit het ontwerpen van de programmastructuur en het testen van de geschreven code

2 Inleiding

In dit examen project maken we gebruik van de concepten en methodes uit opdracht 4 om de stroming langs een arbitrair 2D voorwerp numeriek te gaan benaderen. Uit voorgaande opdracht werd reeds duidelijk dat men door het plaatsen van sources, sinks en vortices stroompatronen kan vormen die langs gladde en continue contours lopen.

3 Sources en Sinks

In opdracht 4 zagen we het effect van het plaatsen van sources en sinks in een uniforme stroom en in het bijzonder het optreden van een stagnatiepunt en een verdelende stroomlijn.

We herhalen hier nog eens voor de duidelijkheid de standaard uitdrukkingen voor het snelheidsveld en de stroomfunctie. In cilindrische coördinaten geldt voor een bron met sterkte Q :

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}, v_\theta = 0, v_z = 0. \quad (1)$$

Hetgeen de volgende stroomfunctie oplevert

$$\psi(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi} \theta + \text{const}, \quad (2)$$

waaruit we dan vervolgens de uitdrukkingen van de componenten van het snelheidsveld (v_x, v_y) kunnen berekenen in cartesische coördinaten voor een source (sink) geplaatst op positie $(x_{\text{source}}, y_{\text{source}})$ met sterkte Q ($-Q$):

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \frac{(x - x_{\text{source}})}{(x - x_{\text{source}})^2 + (y - y_{\text{source}})^2}, \quad (3)$$

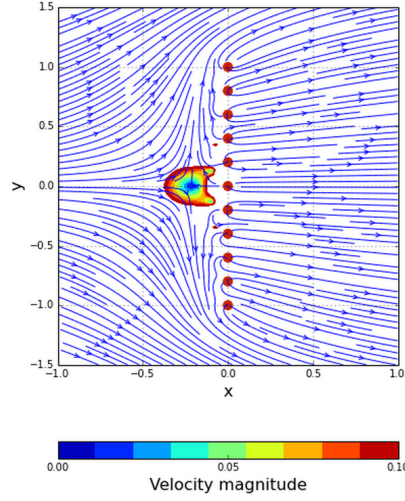
$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi} \frac{(y - y_{\text{source}})}{(x - x_{\text{source}})^2 + (y - y_{\text{source}})^2} \quad (4)$$

Voor een sink krijgen we vanzelfsprekend dezelfde uitdrukkingen voor de stroomfunctie en snelheidsvector, op een minteken na.

4 Source Sheets

In analogie met het sheet van vortices uit opdracht 4, bekijken we nu het gedrag van een oneindige hoeveelheid bronnen gelegen op een lijnstuk, ingebed in een uniforme stroming. Bestudeer eerst het gedrag van een beperkt aantal sources met gelijke sterkte Q , geplaatst langs een vertikaal lijnstuk die loodrecht staat op de stroomlijnen van een uniforme stroming met sterkte U_∞ . De stroomlijnen van elke bron zullen elkaar beïnvloeden en worden afgebogen door de uniforme stroming waarin ze geplaatst zijn, zoals te zien is op Figuur 1. Bestudeer wat er gebeurt indien je de sterkte van de bronnen laat toenemen bij vaste sterkte van de uniforme flow. Op welk moment zal de scheidende stroomlijn (waar de stroomfunctie $\psi(x, y) = 0$) alle

posities van de bronnen omvatten?



Figuur 1: Het snelheidsveld berekend voor 11 sources met gelijke sterkte Q gelegen op een verticale in het punt $x = 0$ in een uniforme stroming met sterkte U_∞ .

We breiden het voorgaande uit naar een situatie met een oneindig aantal bronnen gelegen op een rechte. De bronsterkte kan nu gedefinieerd worden als de sterkte per lengte-eenheid langs het pad s van de bronnen, hetgeen we constant nemen als functie van het pad, $\sigma(s) = \sigma$. Bijgevolg is σds de sterkte van een infinitesimaal stukje source sheet. Hieruit volgt, in analogie met uitdrukking 2 dat de stroomfunctie voor een infinitesimaal klein stukje source sheet ds gelijk is aan

$$d\psi(r, \theta) = \frac{\sigma ds}{2\pi} \theta, \quad (5)$$

hetgeen na integratie over het ganse source sheet de stroomfunctie oplevert in een willekeurig punt op positie (r, θ)

$$\psi(r, \theta) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{sheet} \theta(s) ds. \quad (6)$$

In cartesische coördinaten wordt de oplossing gegeven door de volgende integraal, waarbij de source sheet op positie $x = 0$ is gelegen en zich vertikaal uitstrekt tussen punten y_{min} en y_{max} :

$$\psi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \arctan\left(\frac{y - \xi}{x}\right) d\xi. \quad (7)$$

De snelheidscomponenten worden bijgevolg bekomen door afleiden van de stroomfunctie:

$$v_x = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{x}{x^2 + (y - \xi)^2} d\xi \quad (8)$$

$$v_y = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{y - \xi}{x^2 + (y - \xi)^2} d\xi. \quad (9)$$

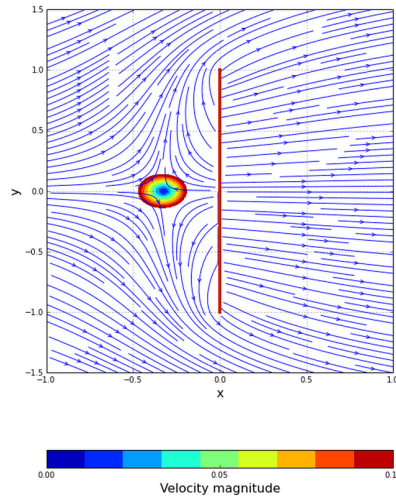
Hoewel het in theorie mogelijk is een analytische oplossing voor deze integralen te bekomen, kunnen we op dit punt eens testen wat een numeriek integratie algoritme zou opleveren. Ter informatie wordt hier de analytische oplossing gegeven:

$$v_x = \frac{\sigma}{2\pi} \left(\arctan \frac{(y - y_{min})}{x} - \arctan \frac{(y - y_{max})}{x} \right) \quad (10)$$

$$v_y = \frac{\sigma}{4\pi} \ln \left(\frac{x^2 + (y - y_{min})^2}{x^2 + (y - y_{max})^2} \right) \quad (11)$$

Test op dit punt eens de nauwkeurigheid en snelheid uit van een aantal numerieke integratiealgoritmen uit zowel de GLS als de RooT bibliotheeken:

- www.gnu.org/software/gsl/manual/html_node/Numerical-Integration.html
- root.cern.ch/drupal/content/function-integration



Figuur 2: Het snelheidsveld berekend voor een oneindig aantal sources op een vertikaal lijnstuk in een uniforme flow.

Na de lineaire superpositie van een source sheet en een uniforme stroming die hier loodrecht op staat verkrijgen we het resultaat uit Figuur 2. Zoals eerder aangehaald representeert σ het debiet per volume-eenheid van de flow van een source. Wanneer σ kleiner wordt zal het stagnatiepunt dichterbij de source sheet komen. Indien we meerdere stukjes source sheet willen gebruiken om de stroming rond een complexer opbeet te parametriseren, moeten we kijken onder welke condities de source sheet een onderdeel wordt van de scheidende stroomlijn. De enige vrije parameter is de sterkte per lengte-eenheid σ van de source sheet. De vloeistof flux per volume-eenheid is net op de linkerkant van het source sheet gelijk aan $\sigma/2$ en in tegengestelde richting van de uniforme flux U_∞ . Om die reden is de randvoorwaarde voor een dividing streamline langs de source sheet gelijk aan

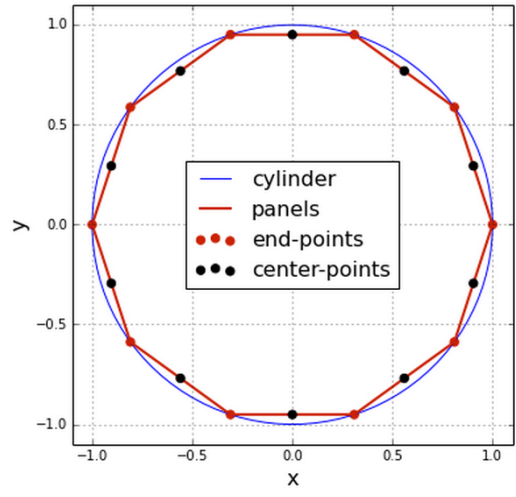
$$\sigma = 2U_\infty. \quad (12)$$

vervang in je code de sterkte σ door zijn gewenste waarde $2U_\infty$ en maak een figuur zoals in figuur 2. Waar ligt nu het stagnatiepunt en de scheidende stroomlijn?

5 Source Panels

Uit het voorgaande is duidelijk dat we een arbitraire vorm kunnen opdelen in stukjes source sheet (panels) waarvan de sterktes zodanig gekozen zijn dat de verdelende stroomlijn langs de sheets loopt. Vermits we de stroomlijnen rondom een cirkelvormig object al kunnen berekenen zullen we dat resultaat vergelijken met een parametrisatie van de cirkel door N stukjes source sheet die telkens geroteerd zijn over een hoek $2\pi/N$. Indien we kunnen aantonen dat deze methode werkt kunnen we de techniek gebruiken voor het berekenen van de stromen rond een arbitrair object.

Een panel is gedefinieerd door zijn eindpunten op positie (x_a, y_a) en (x_b, y_b) en zijn sterkte σ . Ook de positie van zijn middelpunt, c , en zijn lengte, l , kunnen als nuttige parameters dienen. De oriëntatie van het panel wordt gegeven door de hoek tussen de normaallijn op het panel en de x-as. Eens een vorm is opgedeeld in panelen, met al dan niet gelijke lengte, moeten we alle sterktes uitrekenen die ervoor zorgen dat er geen snelheidscomponent loodrecht op elk paneel staat en dat het snelheidsveld een continu verloop kent waar de eindpunten van elk paneel aan elkaar sluiten. In Figuur 3 parametriseren we een cirkel aan de hand van 10 panelen



Figuur 3: Het en cirkel opgedeeld in N panelen.

gekenmerkt door hun eindpunten, hun centerposities, hun lengte, en hun oriëntatie. We weten uit de radiale component van de snelheidsvector van een enkele bron dat de stroompotentiaal $d\Phi$ gelijk is aan

$$d\Phi = \frac{\sigma ds}{2\pi} \ln r = \frac{\sigma ds}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (13)$$

De normaal component van de snelheid $v_n(x, y)$ wordt dan gegeven door de afgeleide te berekenen van de stroompotentiaal in de richting van de normale n

$$v_n(x, y) = \frac{d\Phi}{dn}(x, y). \quad (14)$$

Voor een source sheet volgt de uitdrukking van de totale snelheidspotentiaal uit de integraal

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\text{panel}} \ln(\sqrt{(x - x(s))^2 + (y - y(s))^2}) ds, \quad (15)$$

zodat de superpositie van N_p panelen resulteert in

$$\Phi(x, y) = \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\sigma_j}{4\pi} \int_{\text{panel}} \ln((x - x_j(s_j))^2 + (y - y_j(s_j))^2) ds_j, \quad (16)$$

De superpositie van de N_p panelen in een uniforme stroming met sterkte U_∞ parallel met de x-as resulteert in

$$\Phi(x, y) = U_\infty x + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\sigma_j}{4\pi} \int_{\text{panel}} \ln((x - x_j(s_j))^2 + (y - y_j(s_j))^2) ds_j. \quad (17)$$

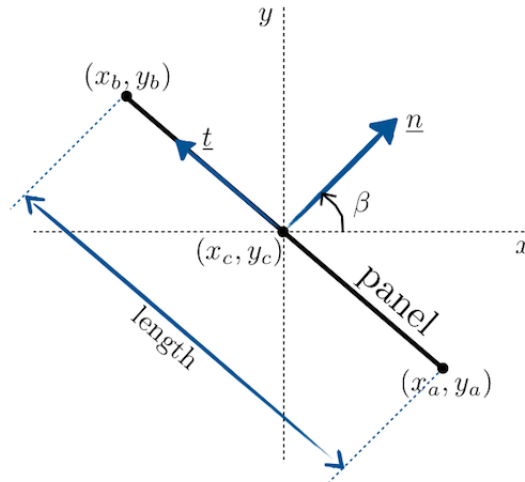
Uit vergelijking 14 en 17 volgt dat de eis dat de normale snelheidscomponent in het centrum van elk paneel i met centrale positie x_{c_i} te wijten aan N_p panelen met index j resulteert in N_p randvoorwaarden gegeven door:

$$\frac{d\Phi(x, y)}{dn_i} = U_\infty \cos \beta_i + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{\text{panel}} \frac{(x_{c_i} - x_j(s_j)) \cos \beta_i + (y_{c_i} - y_j(s_j)) \sin \beta_i}{(x_{c_i} - x_j(s_j))^2 + (y_{c_i} - y_j(s_j))^2} ds_j = 0, \forall i \in [1, N_p], \quad (18)$$

waarbij de hoek β_i de hoek is die de normale op elk paneel maakt met de x-as:

$$\cos \beta_i = \frac{dx_{c_i}}{dn_i}, \sin \beta_i = \frac{dy_{c_i}}{dn_i}. \quad (19)$$

Bovendien geldt volgens Figuur 4 voor rechte segmentjes ds , met als (x_a, y_a) als coördinaat



Figuur 4: Illustratie van de parameters geassocieerd met een paneel.

van hun rechter eindpunt dat

$$x_j(s_j) = x_{a_j} - s_j \sin \beta_j \quad (20)$$

$$y_j(s_j) = y_{a_j} + s_j \cos \beta_j. \quad (21)$$

In het bijzondere geval waar $i = j$ moeten we de invloed van de source sheet op zichzelf bepalen, hetgeen gekend is en gelijk is aan $\frac{\sigma_i}{2}$. Nu weten we precies alle N_p randvoorwaarden voor elk panel i , door substitutie in vergelijking 18:

$$-U_\infty \cos \beta_i = \frac{\sigma_i}{2} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_p} \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{\text{panel}} \frac{(x_{c_i} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j)) \cos \beta_i + (y_{c_i} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j)) \sin \beta_i}{(x_{c_i} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j))^2 + (y_{c_i} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j))^2} ds_j. \quad (22)$$

Het bovenstaande stelsel van N_p vergelijkingen in N_p onbekenden σ_i kunnen we in matrixvorm herschrijven als

$$[A] \cdot [\sigma] = [b], \quad (23)$$

met

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } i = j \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\text{panel}} \frac{(x_{c_i} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j)) \cos \beta_i + (y_{c_i} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j)) \sin \beta_i}{(x_{c_i} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j))^2 + (y_{c_i} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j))^2} ds_j & \text{als } i \neq j \end{cases} \quad (24)$$

en

$$b_i = -U_\infty \cos \beta_i. \quad (25)$$

Gebruik nu zelf weer een gepaste numerieke bibliotheek voor de diagonalisatie van deze matrix en de oplossing van alle σ_i . Eens dit gedaan is, vergelijk je het benaderende resultaat met de exacte oplossing bekomen uit opdracht 4. Om dit mooi te illustreren kan je de drukcoëfficiënt, C_p , uitrekenen op de middelpunten van je panels. Herinner uit opdracht 4 dat de drukcoëfficiënt, C_p , volgt uit de Bernouilly vergelijking en gelijk is aan:

$$C_{p_i} = 1 - \left(\frac{v_{t_i}}{U_\infty} \right)^2, \quad (26)$$

waarbij de tangentiële snelheidscomponent gegeven wordt door

$$v_{t_i} = \frac{d\Phi(x, y)}{dt_i} = -U_\infty \sin \beta_i + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{\text{panel}} \frac{(x_{c_i} - x_j(s_j)) \frac{dx_{c_i}}{dt_i} + (y_{c_i} - y_j(s_j)) \frac{dy_{c_i}}{dt_i}}{(x_{c_i} - x_j(s_j))^2 + (y_{c_i} - y_j(s_j))^2} ds_j, \quad (27)$$

met

$$\frac{dx_{c_i}}{dt_i} = -\sin \beta_i \quad (28)$$

$$\frac{dy_{c_i}}{dt_i} = \cos \beta_i. \quad (29)$$

Vergelijk in een grafiek je berekende waarden voor C_{p_i} met de analytisch gekende uitdrukking

voor C_p voor punten op het oppervlak van een cilinder in een uniforme flow

$$C_p(\theta) = 1 - 4 \sin^2 \theta = C_p(y) = 1 - 4 \left(\frac{y}{R}\right)^2, \quad (30)$$

en onderzoek hoe de benadering verbetert met het aantal panels N_p . Verifieer de nauwkeurigheid door de volgende controle uit te voeren: Voor een gesloten lichaam moet de som van alle source sterktes gelijk zijn aan nul

$$\sum_{j=1}^{N_p} \sigma_j l_j = 0. \quad (31)$$

Bepaal eveneens het snelheidsveld en de stroomfunctie uit de uitdrukking van de potentiaal gegeven in vergelijking 16 en geef deze grafisch weer. Om de performantie van je algoritme te bestuderen bepaal je de nauwkeurigheid en de rekentijd als functie van het gebruikte aantal panelen.

5.1 Vortex panels

In de vorige sectie merken we op dat er geen lift is op de cilinder. Uit opdracht 4 weten we dat er een vortex moest worden toegevoegd om dit te bekomen. We gaan nu bekijken wat er gebeurt indien we bovenop elk source panel een vortex panel toevoegen met een constante sterkte per lengte-eenheid, γ . De vergelijking voor de stroompotentiaal krijgt nu N_p extra termen te wijten aan de vortices:

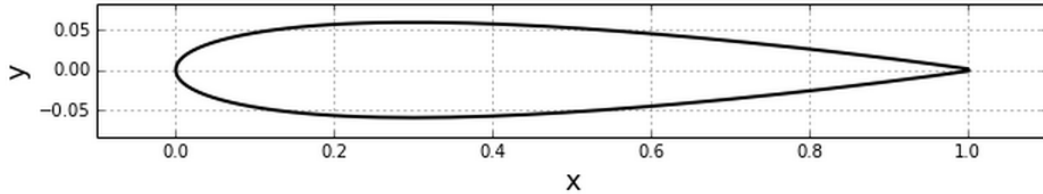
$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & U_\infty x \\ & + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\sigma_j}{4\pi} \int_{\text{panel}} \ln((x - x_j(s_j))^2 + (y - y_j(s_j))^2) ds_j \\ & - \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\text{panel}} \arctan\left(\frac{y - y_j(s_j)}{x - x_j(s_j)}\right) ds_j. \end{aligned} \quad (32)$$

Bereken de drukcoëfficiënt, C_p , nu opnieuw langs het cylinderoppervlak en kijk wat er gebeurt als functie van de sterkte γ van de vortices. Plot ook opnieuw de stroomlijnen voor een goed gekozen waarde van γ .

5.2 Airfoils

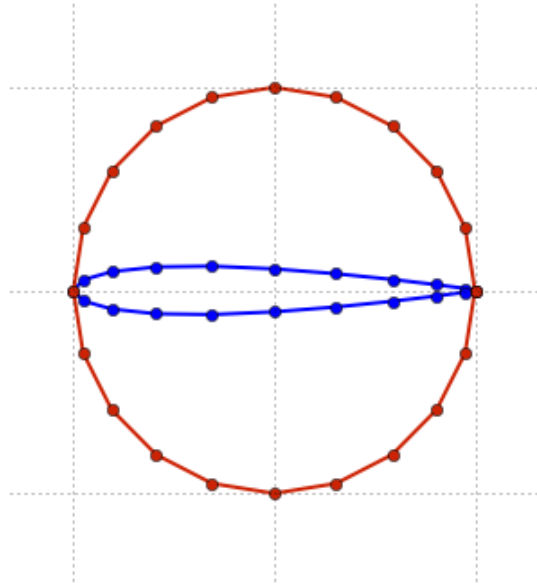
Een set panels kan een arbitraire vorm in een uniforme flow modelleren door het vinden van de juiste source sterktes die de snelheidscomponent loodrecht op het center van het panel gelijk maken aan nul. In dit onderdeel gaan we de luchtstroming rond een zogenaamde airfoil modelleren. Een airfoil is de 2D doorsnede van de vorm van een vleugel, een propeller of turbine blad. Wanneer een airfoil in een uniforme stroming wordt geplaatst die niet parallel is met haar lengte as (*angle of attack* verschilt van nul), dan ondervindt de airfoil een opwaartse kracht die afhankelijk is van de stroomsterkte, de *angle of attack* en de vorm

van de airfoil. Er bestaan tal van parametrisaties van zowel symmetrische als asymmetrische airfoils. Een klassieke airfoil vorm is de **NACA0012**. Een parametrisatie is te vinden op <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=n0012-il>. De vorm is weergegeven op Figuur 5. Het is mogelijk om een airfoil op verschillende manieren in panels in te delen.



Figuur 5: Illustratie van de symmetrische NACA0012 airfoil.

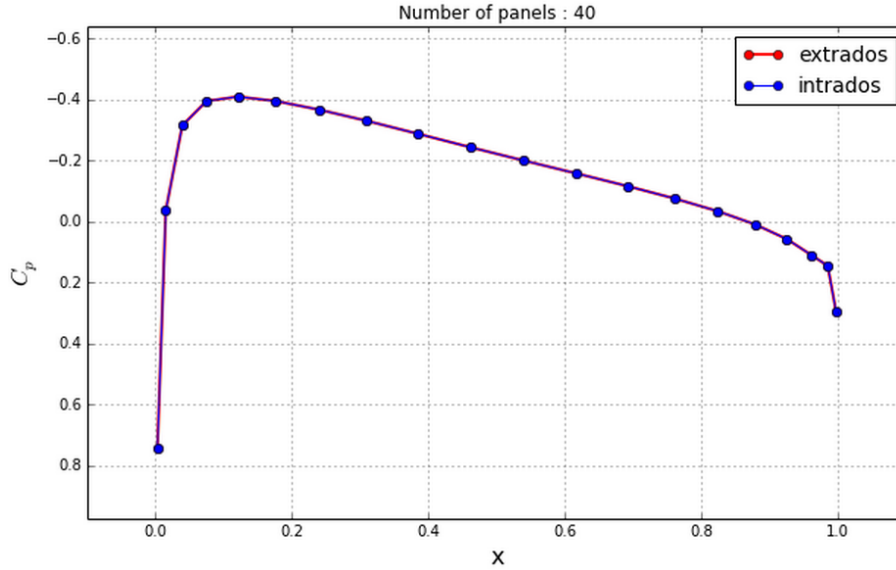
Je kan de koorden nemen tussen alle geparametriseerde punten op de airfoil, maar je kan ook lijnstukken nemen met een variabele lengte die korter wordt naarmate de kromming van de airfoil groter wordt. De beste manier om dit te doen is om gelijk verdeelde punten op een cirkel die de airfoil omschrijft te projecteren op de airfoil door het gebruik van de x-coördinaat van de punten op de cirkel en de geprojecteerde y-coördinaat op de airfoil zoals geïllustreerd in Figuur 6. Merk op dat indien de geprojecteerde y-coördinaat niet samenvalt met een getabuleerde y-coördinaat in de datafile van de airfoil, dan kan men de geprojecteerde y-waarde bekomen d.m.v. lineaire interpolatie van de getabuleerde datapunten links en rechts van het geprojecteerde punt.



Figuur 6: Projectie van cirkelpunten op een airfoil.

De **NACA0012** airfoil wordt eerst in een uniforme stroming geplaatst met een *angle of attack* gelijk aan nul. Parametriseer de airfoil in N_p panelen. Bereken de matrix $[A]$ voor alle panelen en los het stelsel van N_p vergelijkingen op. Bereken de stroomlijnen en maak een grafiek. Bereken ook de drukcoëfficiënt, C_p , op het centrum van de panelen aan de bovenkant (*extrados*) en de onderkant (*intrados*) van de airfoil en toon aan zoals in Figuur 7 dat de drukcoëfficiënten gelijk zijn aan beide zijden van de airfoil wanneer de *angle of attack* gelijk

is aan nul. Verifieer je nauwkeurigheid door de test uit vergelijking 31 weer uit te voeren.



Figuur 7: De drukcoëfficiënt, C_p , op de boven- en onderkant van de NACA0012 airfoil.

Bekijk nu wat er gebeurt indien de airfoil een hoek α maakt met de richting van de uniforme stroming. Deze hoek wordt de *angle of attack* genoemd. In dit geval volstaat het om in voorgaande uitdrukkingen voor de potentiaal de volgende substitutie uit te voeren

$$U_\infty x \rightarrow U_\infty x \sin \alpha + U_\infty y \cos \alpha. \quad (33)$$

Toon aan dat zonder het toevoegen van circulatie (via vortex panels) de drukcoëfficiënt niet verschilt voor de panels onderaan en bovenaan de airfoil, zelfs met een angle of attack $\alpha > 0$. Indien je de stroomlijnen weergeeft voor dit geval zal je ook opmerken dat aan de rechterspit van de airfoil een eigenaardige discontinuïteit optreedt. De oplossing van het probleem is dus niet fysisch en kan verholpen worden door het toevoegen van circulatie en het opleggen van de zogenaamde *Kutta conditie*.

5.3 de Kutta conditie

De Kutta conditie legt op dat de de drukcoëfficiënt, C_p , onder en boven de zogenaamde *trailing edge* van een airfoil gelijk moeten zijn aan elkaar. Dit wil zeggen dat de stroomlijnen aan de rechterspit van de airfoil tangentieel aan de airfoil moeten lopen en er niet mogen rondbuigen. Anders uitgedrukt moet het stagnatiepunt aan de achterkant precies op de rechterspit van de airfoil liggen. We zullen deze conditie opleggen wanneer we lift willen creëren op onze airfoil door vortex panels toe te voegen met een constante sterkte γ . Dit introduceert een extra vrije parameter in ons systeem die moet worden gevonden door een extra randvoorwaarde die wordt opgelegd door de Kutta conditie. We beschrijven in wat volgt hoe het complete systeem van vergelijkingen eruit ziet in het geval van een airfoil met lift onder een angle of attack α in een uniforme luchtstroming.

We nemen aan dat de airfoil op een intelligente manier is gediscretiseerd in N_p panels, waarvan de rechter coördinaat (x_{a_j}, y_{a_j}) , het centrum (x_{c_j}, y_{c_j}) en de lengte l_j gekend zijn. De snelheidspotentiaal wordt nu in de centra van elk paneel i gegeven door

$$\begin{aligned}\Phi(x_{c_i}, y_{c_i}) &= U_\infty x_{c_i} \cos \alpha + U_\infty y_{c_i} \sin \alpha \\ &+ \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\sigma_j}{4\pi} \int_j \ln((x_{c_i} - x_j(s_j))^2 + (y_{c_i} - y_j(s_j))^2) ds_j \\ &- \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\gamma}{2\pi} \int_j \arctan\left(\frac{y_{c_i} - y_j(s_j)}{x_{c_i} - x_j(s_j)}\right) ds_j.\end{aligned}\quad (34)$$

De randvoorwaarde voor tangentiële stroming langs het oppervlak van elk paneel resulteert in een eerste blok $N_p \times N_p$ van de matrix $[A]$ waarbij

$$A_{i,j} = \frac{1}{4\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} \ln((x_{c_i} - x_j(s_j))^2 + (y_{c_i} - y_j(s_j))^2) ds_j \quad (35)$$

wanneer $i \neq j$, en $A_{ij} = 1/2$ wanneer $i = j$. Met een bijkomende kolom voor de circulatie, met $i \in [1, N_p]$,

$$A_{i, N_p+1} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_p} \frac{1}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} \arctan\left(\frac{y_{c_i} - y_j(s_j)}{x_{c_i} - x_j(s_j)}\right) ds_j. \quad (36)$$

De uitdrukkingen voor de afgeleiden worden gegeven door

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \ln((x_{c_i} - x_j(s_j))^2 + (y_{c_i} - y_j(s_j))^2) = \quad (37)$$

$$2 \frac{(x_{c_i} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j)) \cos \beta_i + (y_{c_i} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j)) \sin \beta_i}{(x_{c_i} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j))^2 + (y_{c_i} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j))^2}, \quad (38)$$

en

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \arctan\left(\frac{y_{c_i} - y_j(s_j)}{x_{c_i} - x_j(s_j)}\right) = \quad (39)$$

$$\frac{(x_{c_i} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j)) \sin \beta_i - (y_{c_i} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j)) \cos \beta_i}{(x_{c_i} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j))^2 + (y_{c_i} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j))^2}. \quad (40)$$

Tenslotte bevat ons stelsel een bijkomende rij $A_{N_p+1,j}$ die de Kutta conditie oplegt. De Kutta conditie impliceert dat voor de twee panelen k, l aan de punt van de airfoil geldt

$$C_{p_k} = C_{p_l} \rightarrow \mathbf{v}_k^2 = \mathbf{v}_l^2 \rightarrow v_{t_k} = -v_{t_l}, \quad (41)$$

hetgeen impliceert dat de tangentiële snelheidscomponenten voor die twee panels elkaars tegengestelde moeten zijn, omdat de normaalcomponent gelijk is aan nul. Dit resulteert in

een laatste rij $A_{N_p+1,j}$, gegeven door

$$A_{N_p+1,j} = \quad (42)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_j \frac{-(x_{c_k} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j)) \sin \beta_k + (y_{c_k} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j)) \cos \beta_k}{(x_{c_k} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j))^2 + (y_{c_k} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j))^2} ds_j \Theta(j \neq k) \quad (43)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_j \frac{-(x_{c_l} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j)) \sin \beta_l + (y_{c_l} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j)) \cos \beta_l}{(x_{c_l} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j))^2 + (y_{c_l} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j))^2} ds_j \Theta(j \neq l), \quad (44)$$

voor $j \in [1, N_p]$, en $\Theta(a \neq b) = 0$ als $a = b$ en $\Theta(a \neq b) = 1$ als $a \neq b$. Tenslotte geldt nog dat

$$A_{N_p+1, N_p+1} = \quad (45)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1, j \neq k}^{N_p} \int_j \frac{-(x_{c_k} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j)) \cos \beta_k - (y_{c_k} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j)) \sin \beta_k}{(x_{c_k} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j))^2 + (y_{c_k} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j))^2} ds_j \quad (46)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1, j \neq l}^{N_p} \int_j \frac{-(x_{c_l} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j)) \cos \beta_l - (y_{c_l} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j)) \sin \beta_l}{(x_{c_l} - (x_{a_j} - s_j \sin \beta_j))^2 + (y_{c_l} - (y_{a_j} + s_j \cos \beta_j))^2} ds_j \quad (47)$$

$$- \frac{1}{2} (j=k) \quad (48)$$

$$- \frac{1}{2} (j=l), \quad (49)$$

$$(50)$$

zodat we het bijbehorende stelsel $[A] \cdot [\sigma, \gamma] = [b]$ dienen op te lossen, met

$$b_i = \begin{cases} -U_\infty \cos(\alpha - \beta_i) & \text{als } i < N_p + 1 \\ -U_\infty \sin(\alpha - \beta_k) - U_\infty \sin(\alpha - \beta_l) & \text{als } i = N_p + 1 \end{cases} \quad (51)$$

Los het bovenstaande stelsel op en demonstreer aan de hand van de drukcoëfficiënt, C_p , dat er een verschil is tussen de onderkant en de bovenkant van de airfoil. Bestudeer dit effect als functie van de angle of attack α . Plot ook de stroomlijnen rond de airfoil voor een aantal angles of attack. Bereken tenslotte de zogenaamde lift coëfficiënt, C_l voor een aantal verschillende airfoils, gegeven door de uitdrukking

$$C_l = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \gamma l_i}{0.5 U_\infty c}, \quad (52)$$

met l_i de lengte van panel i , en $c = x_{max} - x_{min}$ de totale koordlengte van de airfoil. Wat besluit je hieruit? Hebben asymmetrische airfoils een grotere liftcoëfficiënt dan symmetrische

met dezelfde koordlengte?

6 Project organisatie

De organisatie van het project wordt aan jullie overgelaten. Hieronder geef ik een advies omtrent de taakverdeling. Ik verwacht dat de taakverdeling, met concrete invulling van namen, via email tegen vrijdag 10 April wordt gecommuniceerd door de projectleider.

6.1 Projectleider

Het totale project wordt geleid door een projectleider. Zoals eerder opgemerkt dient deze persoon een goede programmeerkennis te hebben. Hij/zij dient het minste te coderen maar heeft wel de verantwoordelijkheid over de organisatie, communicatie en afspraken binnen de ganse groep. Dit jaar kan de projectleider worden bijgestaan door een tweede persoon die helpt met het opzetten van het ontwerp van het project, het implementeren van een demo, het integreren van alle aangeleverde code en het verzamelen van het geschreven materiaal voor het eindrapport. Er dient zich dus 1 persoon aan te melden als algemene projectcoördinator en 1 ontwerper/integrator die helpt bij het uitvoeren van de nodige taken binnen de projectleiding.

6.2 Visualisatie

Een mooie, professionele visualisatie van alle resultaten (stroomlijnen, potentiaalcontouren, drukcoëfficiënten etc, vergt een team van mensen die de externe visualisatie libraries gebruiken om grafieken te maken. De gebruiker van het project moet in staat worden gesteld om de gewenste grafieken te maken met zowel Root als VTK. De visualisatie moet ook didactisch zijn en bvb. het lichaam dat in de stroming staat mee visualiseren met de data. Ook het weergeven van stagnatiepunten, de scheidende stroomlijn, de panels etc moet mogelijk zijn. Het visualisatie team moet bijgevolg uit 4 mensen bestaan.

6.3 Algoritmes

Er moeten twee numerieke algoritmes worden gebruikt voor het berekenen van integralen en het oplossen van een lineair stelsel vergelijkingen. De verantwoordelijken voor de algoritmes dienen de verschillende beschikbare externe bibliotheken grondig uit te testen en de algoritmes te testen op hun performantie (snelheid en nauwkeurigheid). Er zijn twee mensen nodig die de integratie bekijken en twee die de diagonalisatie van het stelsel bekijken.

6.4 Primaire objecten en hulpklassen

Het is duidelijk dat er een aantal basisklassen zullen moeten worden gemaakt/gebruikt voor het definiëren van basisobjecten zoals panels, airfoils, matrices etc. Er zullen ook interfaces moeten worden gemaakt tussen deze klassen en de algoritmes, visualisatie enz. Voor deze taak is een team van drie programmeurs nodig.