ZADANIA PRZYKŁADOWE „RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE”

ZAD 1

Wyznaczyć rozwiązania poniższych równań różniczkowych (podane rozwiązania dokładne y_{sol} należy traktować jako odniesienie i wykorzystać do określania błędów).

$$\frac{dy}{dt} + 2yt = 0\ ,\ y_{sol} = e^{-t^2}; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{4-2y}{3},\ \ y_{sol} = 2(1-e^{-2t/3}) + y_o e^{-2t/3}$$

Należy użyć podanych metod stałokrokowych.

a) Eulera otwartej (EO): $y_{n+1} = y_n + hf_n$;

b) Eulera zamkniętej: $y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$;

c) Trapezów (Adamsa-Multona rzędu 2): $y_{n+1} = y_n + h\frac{f_{n+1}+f_n}{2}$

d) Heuna (Rungego-Kutty rzędu 2): $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f_n + f(t_{n+1},\ y_n + hf_n)\right)$;

e) Zmodyfikowanej metody Eulera : $y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n+\frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}f_n\right)$;

f) Adamsa-Bashfortha rzędu 2: $y_{n+1} = y_n + h\frac{3f_n-f_{n-1}}{2}$;

g) Adamsa-Multona rzędu 3: $y_{n+1} = y_n + h\frac{5f_{n+1}+8f_n-f_{n-1}}{12}$;

h) Otwartej metody Geara rzędu 2: $y_{n+1} = 2hf_n + y_{n-1}$;

i) Otwartej metody Geara rzędu 4: $y_{n+1} = 4hf_n - \frac{10}{3}y_n + 6y_{n-1} - 2y_{n-2} + \frac{1}{3}y_{n-3}$;

j) Zamkniętej metody Geara rzędu 2: $y_{n+1} = \frac{2hf_{n+1}+4y_n-y_{n-1}}{3}$;

k) Zamkniętej metody Geara rzędu 4: $y_{n+1} = \frac{12hf_{n+1}+48y_n-36y_{n-1}+16y_{n-2} - 3y_{n-3}}{25}$

Przyjęte oznaczenia: $y_n = y(t_n)$; $y_{n+1} = y(t_{n+1})$; $f = \frac{dy}{dt}$; $f_n = f(t_n, y_n)$; $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$.

Przedział całkowania T=[0,10], punkt startowy y_0=1. W metodach, które wymagają więcej niż jednego poprzednika, wyznaczyć pierwszy (pierwsze) punkt (punkty) metodą EO. Przyjąć kolejno długość kroku całkowania: *h* =1,1e-1,1e-2, 1e-3 i wykreślić otrzymane rozwiązania razem z rozwiązaniem dokładnym y_{sol} . Na oddzielnym rysunku wykreślić zależność błędów maksymalnych badanych metod w funkcji *h* (**loglog**).

ZAD 2

Dla drugiego równania z zad.1 i metod Eulera otwartej (EO) oraz Adamsa-Bashfortha rzędu 2 określić (z dokładnością 0,1 s) długość kroku, dla której metoda staje się niestabilna (h_{gr}). W celu ilustracji granicy niestabilności należy znaleźć i przedstawić graficznie numeryczne rozwiązania równania różniczkowego w przedziale całkowania [0:120] za pomocą podanych metod dla trzech długości kroku całkowania: h_{gr} -0,1s, h_{gr} i h_{gr} +0,1s (wszystkie rozwiązania na oddzielnych rysunkach, na których dodatkowo powinno być wrysowane rozwiązanie dokładne). Krok graniczny h_{gr} dla każdej z metod można wyznaczyć albo na podstawie teorii albo eksperymentalnie – wykonując różniczkowanie dla różnych długości korku całkowania i oceniając na podstawie uzyskanego rozwiązania czy metoda pozostaje stabilna/ jest na granicy stabilności/ jest niestabilna.

ZAD 3

W układzie elektrycznym przedstawionym na rysunku R1=1kΩ, R2=1kΩ , C1=10nF, C2=2μF, E(t)=E0·**1**(t) , E0 =2.

Dla tego układu należy:

a) Zapisać układ równań stanu ***y'****(t)=f(t,****y****(t))*, ***y****(0)=****y0*** , gdzie ***y****=[u₁ u₂]*. Rozwiązać ten układ w przedziale czasu [0,30ms] korzystając kolejno z funkcji **ode45 i ode15s.** Przyjąć **y0**=[0;1]**.** Na wspólnym rysunku wykreślić obliczony przez obydwie funkcje przebieg napięcia $u_2(t)$ wraz z rozwiązaniem dokładnym $u_{2d}(t)$ (funkcja do obliczania wartości własnych macierzy – **eig);**

b) Dla obydwóch algorytmów (**ode45, ode15s**) określić maksymalny błąd otrzymanego rozwiązania oraz liczbę punktów czasowych w rozwiązaniu. Wykreślić na wspólnym rysunku długość kroku czasowego w funkcji czasu (**diff, semilogy**);

c) Wykonać obydwa algorytmy (**ode45, ode15s**) dla wartości tolerancji względnych (**odeset**, **RelTol**) równych kolejno 1e-1,1e-2,1e-3,1e-4,1e-5,1e-6. Dla każdej wartości tolerancji wyświetlić przebieg napięcie u_2. Na oddzielnych rysunkach wykreślić zależności maksymalnego błędu u_2 i liczby punktów czasowych w rozwiązaniu od wartości tolerancji (**semilogx**);

d) Rozwiązać układ równań stanu za pomocą następujących metod:

i. otwartej metody Eulera

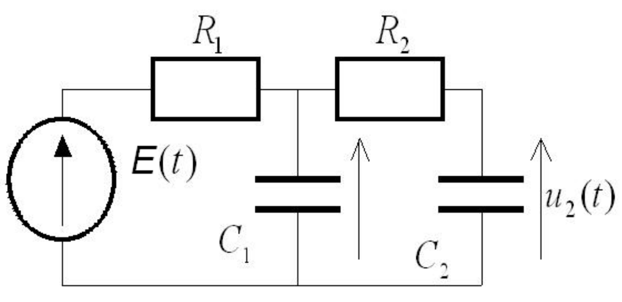
ii. metody Adamsa-Bashodrfa rzędu 2

iii. zamkniętej metody Eulera

iv. trapezów

dla długości kroku (kolejno) 1,2,3...10μs (każdorazowo zilustrować graficznie otrzymane w rozwiązaniu napięcie u_2). Wykreślić maksymalny błąd u_2 dla wszystkich metod w funkcji długości kroku (**loglog**). Uwaga – jeśli metoda staje się niestabilna, to należy poprzestać na długości kroku, dla której zaobserwowano niestabilność i nie określać błędów dla kroków większych.

e) Powtórzyć punkty a-d dla R1=1kΩ, R2=1kΩ , C1=1μF, C2=2μF.



$$\begin{cases} C_1\dfrac{du_1}{dt} + \dfrac{u_1 - u_2}{R_2} = \dfrac{E - u_1}{R_1} \\ R_2 C_2 \dfrac{du_2}{dt} + u_2 = u_1 \end{cases}$$

$$u_{2d} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + E; \qquad c_2 = -E - c_1 + u_2(0)$$

$$c_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(E - u_2(0)\frac{1 + \lambda_2 R_2 C_2}{\lambda_2 R_2 C_2} + u_1(0)\frac{1}{\lambda_2 R_2 C_2}\right)$$