Nom Prénom Matricule

PHYS-H101 : Physique Générale

Examen de première session du 18 janvier 2025 - CORRIGE

CONSIGNES :

Matériel :

- **Carte d'étudiant ou pièce d'identité.**
- De quoi écrire.
- Calculatrice **non graphique** **(sans mémoire, qui ne peut pas effectuer du calcul symbolique ou de calcul de primitives).**

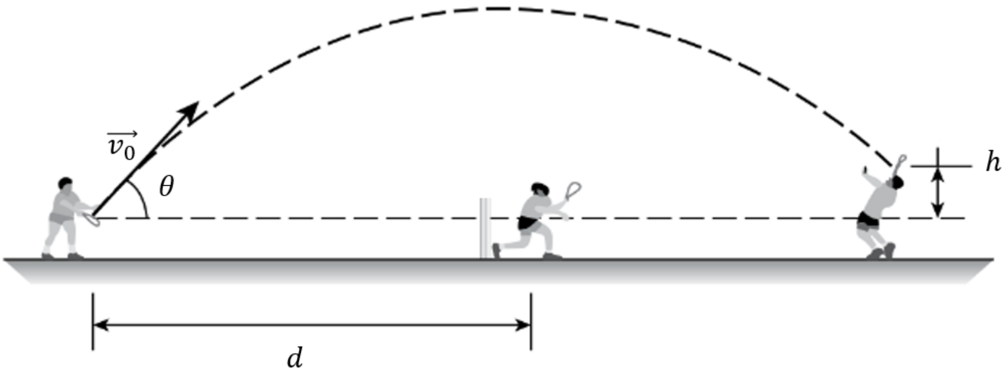
Modalités :

- Vérifiez que cette brochure comporte **5** Questions et XX pages.
- **Indiquez immédiatement votre Nom, Prénom et Matricule sur chaque feuille du questionnaire.**
- Maintennez agrafées les feuilles du présent questionnaire et du feuillet de brouillon.
- Rédigez vos réponses **au crayon** ou à **l'encre** et effacez proprement ce qui doit l'être pour éviter toute rature.
- Lisez attentivement chaque question jusqu'au bout.
- Indiquez vos réponses ainsi que leur développement sous chaque question.
- **Une réponse non justifiée ne sera pas corrigée.**
- **Encadrez votre réponse finale pour chaque question et sous-question.**
- Vous pouvez utiliser le recto et le verso des feuilles pour répondre.
- Écrivez lisiblement.
- Lorsqu'une réponse numérique est demandée, exprimez la d'abord sous forme analytique avant de remplacer les grandeur qui y interviennent par leur valeurs numériques.
- **Les téléphones portables, appareils connectés (montres, écouteurs, tablettes, ordinateurs, ...) et ChatGpt sont interdits pendant l'examen et doivent être laissés éteints dans ton sac qui en placé en bas de l'auditoire.**

La durée de l'examen est de 3h00.

Question 1 (/14pts)

Une tactique efficace au tennis, lorsqu'un adversaire est proche du filet, consiste à lancer la balle par-dessus sa tête, ce qui l'oblige à se déplacer rapidement loin du filet. Supposons que le lanceur lance la balle avec une vitesse initiale v_0 de 14,0 m/s, à un angle θ de 51,0° au-dessus de l'horizontale.
Note: On supposera que le point de lancement est (0,0)m. L'accélération gravitationnelle vaut $g = 9,81 m/s^2$.



(a) (/2pt) Exprimez les évolutions de la position et de la vitesse de la balle en fonction du temps.

(b) (/3pt) Déterminez la hauteur maximale atteinte par la balle.

(c) (/5pt) Les deux joueurs sont initialement séparés d'une distance $d = 10$ m et le joueur de droite commence à courir 0,5 s après que celui de gauche ait envoyé la balle. Pour que ce dernier intercepte la balle à une hauteur $h = 2,20$ m comme indiqué sur le schéma, quelle est la vitesse moyenne minimale à laquelle il doit se déplacer ?

(d) (/4pt) Juste avant que la balle ne soit réceptionnée à la hauteur h (comme indiqué sur le schéma), que vaut l'angle α entre sa trajectoire et l'horizontale ?

- **Correction**

(a) Nous sommes dans le cas d'un mouvement de type projectile. Il nous faut donc décrire le mouvement suivant l'horizontale et la verticale.

Mouvement horizontal:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos(\theta)\, t$$
$$v_x = v_0 \cos\theta$$

Mouvement vertical:

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt$$

(b) La hauteur maximale est atteinte lorsque la $v_y = 0$m/s. Sachant cela nous pouvons déterminer le temps t^* pour atteindre cette hauteur,

$$v_y(t^*) = 0 = v_0 \sin\theta - gt^* \implies t^* = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

En remplaçant dans l'équation de $y(t)$,

$$\begin{aligned} y(t^*) &= v_0 \sin\theta t^* - \frac{1}{2} g (t^*)^2 \\ &= v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g} \right)^2 \\ H_{max} &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \end{aligned}$$

En remplaçant les variables par leur valeur, nous trouvons

$$\boxed{H_{max} = 6,03m}$$

(c) Il nous faut d'abord déterminer le temps t mis par la balle pour arriver à la hauteur $h = 2,2$m. Pour ce faire nous allons utiliser l'équation $y(t)$.

$$h = v_0 \sin(\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$0 = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 \sin(\theta)\, t + h$$

En résolvant l'équation du second degré pour t, nous trouvons,

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\theta \pm \sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 - 2gh}}{g}$$

En remplçant les variables par leur valeur, nous trouvons comme valeurs de temps,

$$t_1 = 2s$$
$$t_2 = 0,22s$$

Sachant que l'adversaire à un temps de réaction de $0,5$s seul le temps t_1 est acceptable. Connaissant ce temps, nous allons déterminer la distance horizontale parcourue (appelons la L) par la balle au moyen de l'équation $x(t)$

$$x(t_1) = L = v_0 \cos(\theta)\, t_1 \quad \Longrightarrow \quad L = 17,62m$$

L'adversaire se trouvant à 10m, celui-ci devra parcourir une distance,

$$L - 10m = 7,62m$$

Il devra parcourir cette distance sur un temps,

$$t_1 - 0,5s = 1,5s$$

La vitesse moyenne minimale de l'adversaire devra-t-être,

$$\boxed{v = \frac{7,62m}{1,5s} = 5,08m/s}$$

(d) Appelons l'angle recherché α.
L'angle α correspond à l'angle que fait le vecteur vitesse de la balle (par rapport à l'horizontal) lorsque celle-ci est à la hauteur h. Soit $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la balle à la hauteur h,

$$\vec{v} = v_x \vec{1}_x + v_y \vec{1}_y$$

où

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta_0 \\ v_y(t) &= v_0 \sin\theta_0 - gt \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire, suite au mouvement projectile qu'effectue le ballon,

$$\tan\alpha = \frac{||v_y(t_1)||}{||v_x||}$$

Où pour rappel t_1 est le temps mis par la balle pour arriver jusqu'à la hauteur h (qui est de 2s). En remplaçant $v_y(t_1)$, v_x et t_1 par leurs expressions respectives dans la relation précédente, nous trouvons

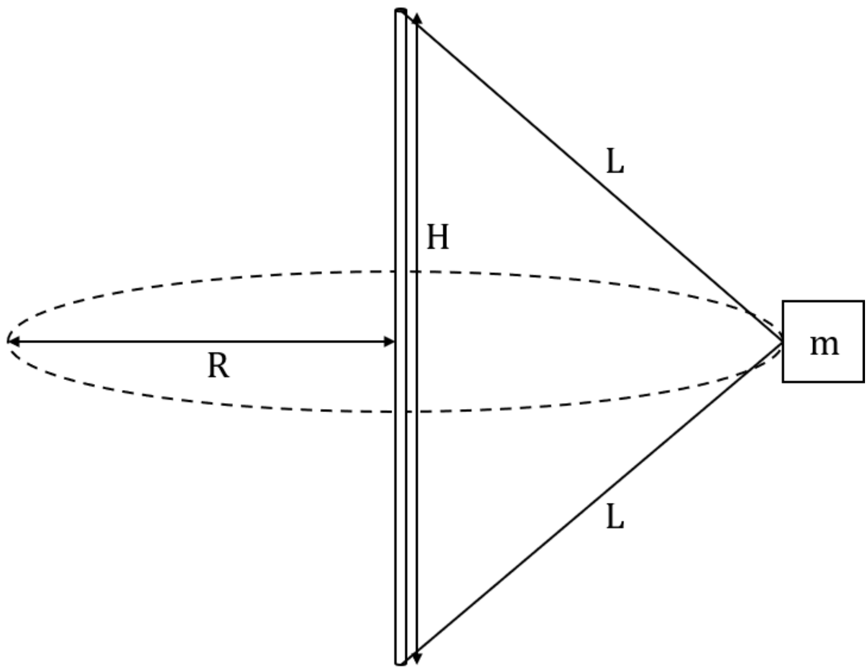
$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\sqrt{(v_0 \sin\theta_0 - gt_1)^2}}{\sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2}} \\ \alpha &= \arctan\frac{\sqrt{(v_0 \sin\theta_0 - gt_1)^2}}{\sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2}} \end{aligned}$$

Nous trouvons,

$$\boxed{\alpha = 44,77°}$$

Question 2 (/10pts)

Dans un simulateur de vol, une cabine de masse $\boldsymbol{m}$ soumise à l'accélération gravitationnelle $\boldsymbol{g}$ est suspendue à l'aide de deux câbles, de longueur $\boldsymbol{L}$, fixés à un axe vertical en rotation de hauteur $\boldsymbol{H}$ (voir schéma). Le simulateur simule un virage d'avion à vitesse angulaire constante et la cabine effectue un mouvement circulaire de rayon R autour de l'axe vertical en une période $\boldsymbol{T}$.



En négligeant tout frottement :

(a) (/1,5pt) Réalisez le diagramme des forces appliquées sur la masse m.

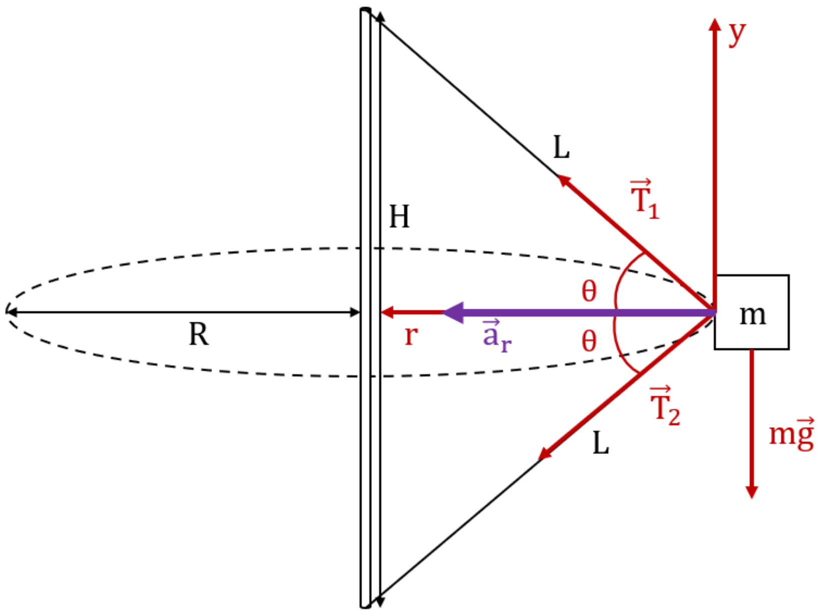
(b) (/0,5pt) Exprimez la vitesse linéaire v de la cabine en fonction des paramètres en **gras** de l'énoncé.

(c) (/1pt) Exprimez l'accélération de la cabine m en fonction des paramètres en **gras** de l'énoncé.

(d) (/7pt) Déterminez en fonction des paramètres en **gras** de l'énoncé les expressions des tensions dans les câbles. (**Indice :** Exploites la géométrie)

- **Correction**

(a) Diagramme des forces



(b) La vitesse linéaire est donnée par

$$\boxed{v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\sqrt{L^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2}}{T}}$$

(c) L'accélération subit par le simulateur est une accélération centripète notée a_r

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2\sqrt{L^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2}}{T^2}}$$

(d) Appliquons la seconde loi de Newton de la dynamique à la cabine suivant les axes radial et vertical (par facilité nous choisissons l'axe radial dirigé vers le centre de la trajectoire),

$$T_1\cos\theta + T_2\cos\theta = ma_r$$
$$T_1\sin\theta - T_2\sin\theta - mg = 0$$

Déterminons la tension T_1, en multipliant par $\sin\theta$ la première équation et par $\cos\theta$ la seconde et en sommant celles-ci, nous trouvons

$$2T_1\sin\theta\cos\theta - mg\cos\theta = ma_r\sin\theta$$

En faisant une mise en évidence et en simplifiant les termes,

$$T_1 = \frac{m\left(\frac{4\pi^2 R}{T^2}\tan\theta + g\right)}{2\sin\theta}$$

En utilisant cette expression de T_1 nous pouvons déterminer celle de T_2.

$$T_2 = \frac{m}{\cos\theta}\left(\frac{4\pi^2 R}{T^2}\right) - T_1$$

Nous avons également,

$$\sin\theta = \frac{H}{2L}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{L} = \frac{\sqrt{L^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2}}{L}$$

En remplaçant nous trouvons comme expression finale

$$\boxed{T_1 = \frac{mL(\frac{4\pi^2 H}{2T^2} + g)}{H}}$$

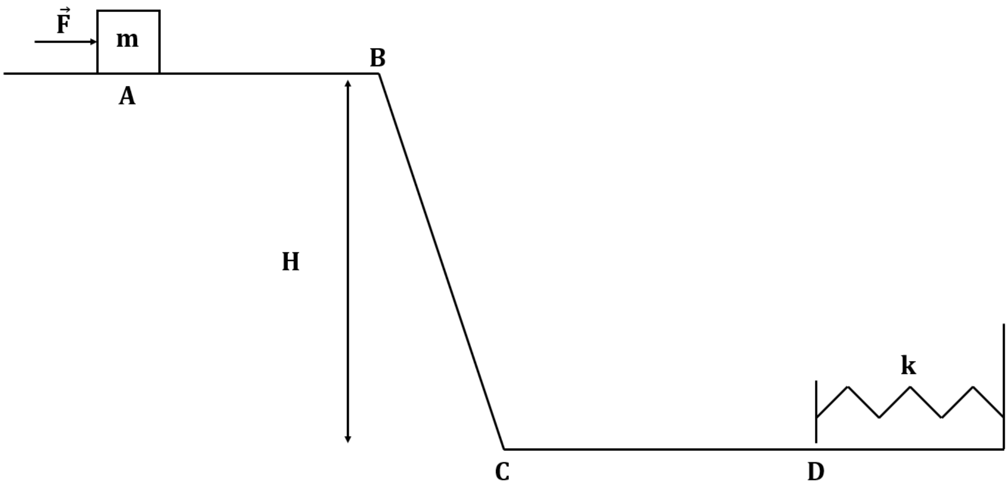
$$\boxed{T_2 = mL\left(\frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{(\frac{4\pi^2 H}{2T^2} + g)}{H}\right)}$$

Nom Prénom Matricule

Question 3 (/13pts)

Un prototype miniature d'une future attraction est représenté sur la figure ci-dessous. Le but d'une attraction est de créer les plus grandes variations de vitesse sur un même trajet. Le trajet se fait comme suit (on considère l'acccélération gravitationnelle notée $\boldsymbol{g}$) :

1. Phase de démarrage :
   Soit un vagon représenté par un bloc de masse $\boldsymbol{m}$ initialement au repos au point A, celui-ci subit une force de norme $\boldsymbol{F}$ sur une durée de $\boldsymbol{\Delta t}$ et ce jusqu'à atteindre le point B (sans frottement).
2. Phase du grand saut :
   Du point B au point C, le bloc descend une pente de hauteur $\boldsymbol{H}$ (sans frottement)
3. Phase de ralentissement :
   Du point C au point D, le bloc parcourt une distance $\boldsymbol{L}$ sur laquelle il subit une force de frottement cinétique F_c caractérisée par un coefficient $\boldsymbol{\mu_c}$.
4. Phase d'arrêt :
   Au point D, le bloc rencontre un ressort de constante de rappel $\boldsymbol{k}$ qui permet de complètement le stoper (sans frottement).



Répondez aux questions ci-dessous et, sauf mention contraire, les seules variables autorisées dans vos réponses finales doivent être celles en **gras** dans l'énoncé.

(a) (/3pt) Déterminer la vitesse du bloc au point B (notée v_B)

(b) (/3pt) Déterminer la vitesse du bloc au point C (notée v_C). Si vous n'avez pas trouvé l'expression de v_B garder cette notation.

(c) (/4pt) Déterminer la vitesse du bloc au point D (notée v_D). Si vous n'avez pas trouvé l'expression de v_C garder cette notation.

(d) (/3pt) Déterminer l'élongation du ressort à l'instant où le bloc s'arrête. Si vous n'avez pas trouvé l'expression de v_D garder cette notation.

- **Correction**

(a) Pour déterminer la vitesse v_B, il nous faut passer par le théorème de l'impulsion.
"L'impulsion de la force résultante agissant sur un point matériel entre les instants t_1 et t_2 est égale à la variation de la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$ du point pendant le même intervalle de temps."

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \Delta\vec{p}$$

En appliquant ce théorème au cas présent et en sachant que la force appliquée est constante, nous trouvons

$$F\Delta t = m(v_B - v_A) \Rightarrow \boxed{v_B = \frac{F\Delta t}{m}}$$

(b) En utilisant la conservration de l'énergie mécanique (appliquée au bloc) qui nous dit que la somme des énergies potentielle et cinétique initiales est égale à la somme des énergies potentielle et cinétique finales,

$$E_p^i + E_c^i = E_p^f + E_c^f$$

$$\begin{aligned} mgH + \frac{1}{2}mv_B^2 &= \frac{1}{2}mv_C^2 \\ v_C^2 &= 2gH + v_B^2 \\ v_C &= \sqrt{2gH + v_B^2} \end{aligned}$$

Nous trouvons comme expression finale,

$$\boxed{v_C = \sqrt{2gH + \left(\frac{F\Delta t}{m}\right)^2}}$$

(c) Lorsque le bloc va du point C au point D celui-ci subit des frottements ce qui implique que l'énergie mécanique n'est pas conservée. Pour déterminer la vitesse v_D, il nous faut utiliser le théorème de l'énergie cinétique, qui nous dit que la variation d'enrgie cinétique du bloc est égale à la somme des travaux des forces qui agissent sur lui.

$$\Delta E_C = \sum_i W_i$$

La seule force qui agit sur le bloc quand il se déplace est la force de frottement cinétique,

$$F_c = \mu_c N = \mu_c mg$$

Où le travail de la force de frottement est un travail résistant donné par,

$$W_{F_c} = -\mu_c mgd_{CD}$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(v_D^2 - v_C^2\right) &= -\mu_c mgd_{CD} \\ v_D^2 &= v_C^2 - 2\mu_c gd_{CD} \\ v_D &= \sqrt{v_C^2 - 2\mu_c mgL} \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement,

$$\boxed{v_D = \sqrt{2gH + \left(\frac{F\Delta t}{m}\right)^2 - 2\mu_c gL}}$$

(d) Ils nous faut passer par la conservation de l'énergie mécanique appliquée au système bloc ressort.

$$E_p^i + E_c^i = E_p^f + E_c^f$$

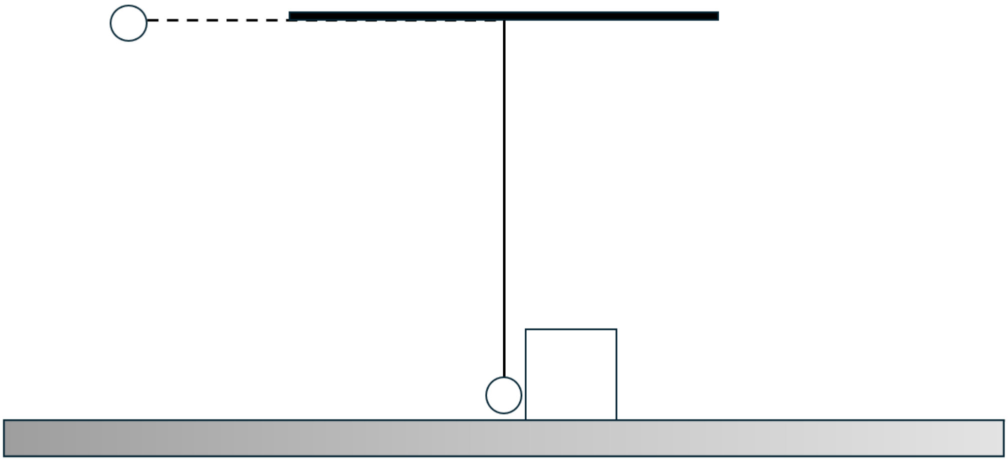
$$-\frac{1}{2}mv_D^2 = -\frac{1}{2}kx^2$$

Nous obtenons finalement,

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_D = \sqrt{\frac{m}{k}\left(2gH + \left(\frac{F\Delta t}{m}\right)^2 - 2\mu_c gL\right)}}$$

Question 4 (/10pts)

Soit un sytème isolé constitué d'un pendule de masse $\boldsymbol{m}$ (considérée comme ponctuelle), suspendue à un fil de longueur $\boldsymbol{L}$. Le pendule se trouve initialement à l'horizontale. Il est ensuite lâché et subit une collision élastique avec un bloc de masse $\boldsymbol{M}$ au repos (on néglige les frottements).



On vous demande de déterminer, en fonction des paramètres en **gras** de l'énoncé et en considérant l'accélération graviationnelle $\boldsymbol{g}$,

(a) (/2pt) La vitesse du pendule juste avant le choc ;

(b) (/5pt) La vitesse du pendule juste après le choc. Note : la vitesse du bloc après le choc est non nulle.

(c) (/1pt) Que pouvez dire sur le sens de la vitesse du pendule après le choc dans chacun des 3 cas suivants : $M < m$, $M > m$ et $M = m$?

(d) (/2pt) La hauteur maximale atteinte par le pendule après le choc ;

- **Correction**

(a) La vitesse v_1 du pendule peut se trouver en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

$$\begin{aligned} E_m^i &= E_m^f \\ E_p^i + E_c^i &= E_p^f + E_c^f \\ mgL &= \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &\boxed{v_1 = \sqrt{2gL}} \end{aligned}$$

(b) Le choc étant élastique, nous pouvons exploiter la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} mv_1 + Mv_2 = mv_1' + Mv_2' &\Rightarrow mv_1 = mv_1' + Mv_2' \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2 &\Rightarrow mv_1^2 = mv_1'^2 + Mv_2'^2 \end{aligned}$$

Via l'équation de la quantité de mouvement nous trouvons,

$$v_2' = \frac{m}{M}(v_1 - v_1')$$

En remplaçant cette exepression de v_2' dans l'équation de la conservation de l'énergie cinétique,

$$mv_1^2 = mv_1'^2 + M\left(\frac{m^2}{M^2}(v_1^2 - 2v_1v_1' + v_1'^2)\right)$$

Nous pouvons établir une équation du second degré en v_1'

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right)v_1'^2 - 2\frac{m}{M}v_1v_1' + \left(\frac{m}{M} - 1\right)v_1^2 = 0$$

En posant,

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(1 + \frac{m}{M}\right) \\ \beta &= -2\frac{m}{M}v_1 \\ \gamma &= \left(\frac{m}{M} - 1\right)v_1^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc l'équation suivante,

$$\alpha v_1'^2 + \beta v_1' + \gamma = 0$$

Le calcul du Δ donne,

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ &= 4\frac{m^2}{M^2}v_1^2 - 4\left(\frac{m^2}{M^2} - 1\right)v_1^2 \\ &= 4v_1^2 \end{aligned}$$

Les valeurs de v_1' possibles sont,

$$v_1' = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow v_1' = \frac{m \pm M}{m + M}v_1$$

Sachant que la vitesse du bloc après le choc est non nulle seule la solution suivante est acceptable,

$$\boxed{v_1' = \frac{m - M}{m + M}v_1}$$

(c) Si $m < M$, la vitesse du pendule après le choc est négative ce qui implique que le pendule repart en arrière.
Si $m > M$, la vitesse du pendule est positive, il va donc continuer son chemin vers la droite.
Si $m = M$, ça signifie qu'après le choc le pendule est à l'arrêt et que toute l'énergie cinétique a été transférée au bloc.

(d) Pour déterminer la hauteur maximale atteinte par le pendule après la collision, nous devons repasser par la conservation de l'énergie mécanique du système. Après le choc nous avons,

$$\begin{aligned} E_m^i &= E_m^f \\ E_p^i + E_c^i &= E_p^f + E_c^f \\ mgh &= \frac{1}{2} m v_1'^2 \\ h &= \frac{1}{2g} v_1'^2 \end{aligned}$$

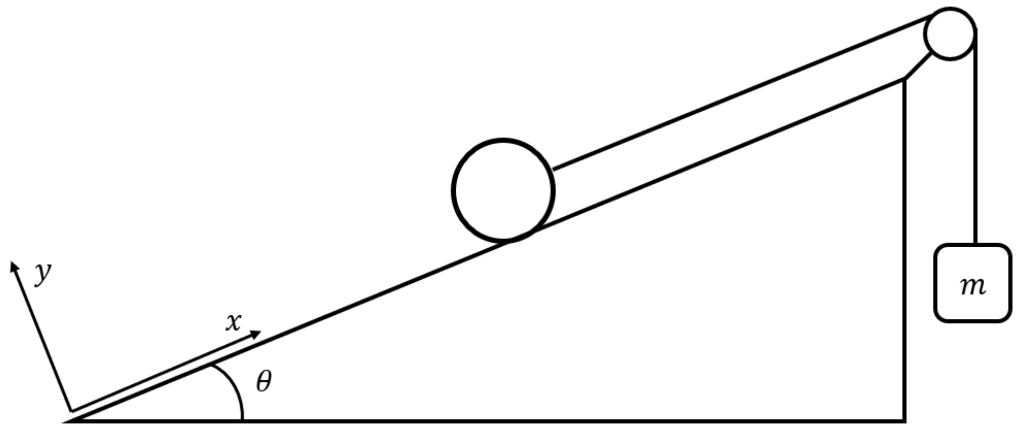
En remplaçant nous obtenons,

$$\boxed{h = \frac{1}{2g}\left(\frac{m-M}{m+M}\sqrt{2gL}\right)^2 = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 L}$$

Nom Prénom Matricule

Question 5 (/15pts)

Une roue cylindrique de rayon R et de masse m_r est placée sur un plan incliné faisant un angle θ par rapport à l'horizontale. Cette roue est reliée en son centre par l'intermédiaire d'une poulie à une masse m (on néglige la masse de la poulie).



Dans ces conditions, on vous demande de

(a) (/2pt) Réaliser le diagramme des forces appliquées sur la roue.

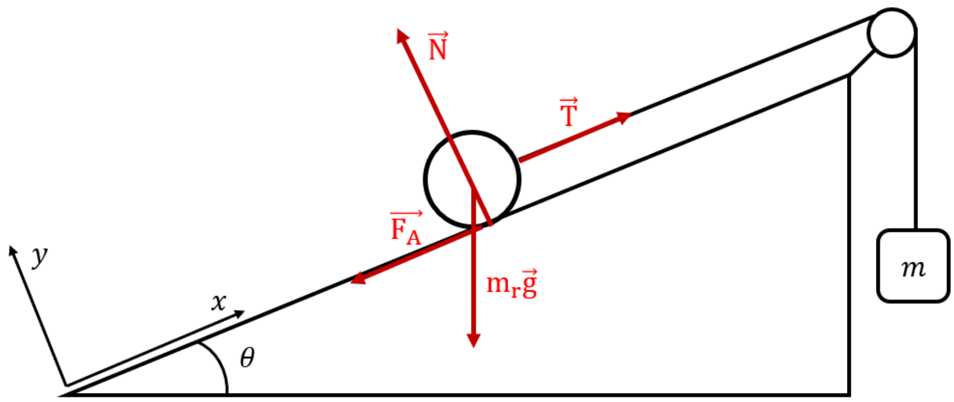
(b) (/4pt) Sachant que le mouvement de la roue est un roulement pur dans la directions des x croissants, utilisez les équations cardinales de la dynamique pour exprimer le module de la force de frottement $\vec{F}_A = -F_A\hat{x}$ (avec $F_A \geq 0$) en fonction de l'accélération linéaire a de la roue.

Rappel : le moment d'inertie de la roue est donné par $I = \frac{1}{2}m_r R^2$.

(c) (/9pt) Dans les conditions décrites au point (b), déterminer l'expression de la masse maximale $m = m_{max}$ pour laquelle la roue effectue un mouvement de pur roulement dans la direction des $x > 0$. On considéra que le coefficient de frottement statique est μ_s.

- **Correction**

(a) Diagramme des forces



(b) Afin de déterminer le module de la force de frottement $\vec{F}_A$, il nous faut passer par la deuxième équation cardinale (liée au moment de force totale qui s'exerce sur la roue)

$$\vec{M}_{tot} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

En développant,

$$F_A R = I\alpha = \frac{1}{2}m_r R^2\alpha$$

La condtion de roulement pur relie l'accélération angulaire α de la roue à l'accélération linéaire a de celle-ci au travers de la relation

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

En utilisant cette relation dans l'équation cardinale nous trouvons,

$$\boxed{F_A = \frac{1}{2}m_r a}$$

(c) Pour déterminer la masse maximale m_{max}, il nous faut repartir de la définition du frottement statique,

$$F_A \leq \mu_s N$$

où N est la réaction normal du support de la roue. Pour déterminer l'expression de N, il nous faut utiliser la première équation cardinale (liée à la résultante des forces),

$$\vec{F}_{tot} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

En développant cette équation pour les directions verticale et horizontale,

$$N - m_r g\cos\theta = 0 \Rightarrow N = m_r g\cos\theta$$
$$T - m_r g\sin\theta - F_A = m_r a$$

On touve donc pour la condtion de frottement statique,

$$F_A \leq \mu_s m_r g\cos\theta$$

En utilisant l'expression de F_A trouvée au point (b), on obtient

$$\frac{1}{2}m_r a \leq \mu_s m_r g\cos\theta \Rightarrow a \leq 2\mu_s g\cos\theta$$

Déterminons l'expression de a,

$$\begin{aligned}
m_r a &= T - m_r g \sin\theta - F_A \\
&= T - m_r g \sin\theta - \frac{1}{2} m_r a \\
\frac{3}{2} m_r a &= T - m_r g \sin\theta \\
a &= \frac{2}{3m_r}(T - m_r g \sin\theta)
\end{aligned}$$

En remplaçant cette expression de a dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}
a &\leq 2\mu_s g \cos\theta \\
\frac{2}{3m_r}(T - m_r g \sin\theta) &\leq 2\mu_s g \cos\theta \\
T - m_r g \sin\theta &\leq 3 m_r \mu_s g \cos\theta \\
T &\leq m_r g (\sin\theta + 3\mu_s \cos\theta)
\end{aligned}$$

En sachant que $T = mg$, nous trouvons

$$m \leq m_r(\sin\theta + 3\mu_s \cos\theta) \Rightarrow \boxed{m_{max} = m_r(\sin\theta + 3\mu_s \cos\theta)}$$