Nom : **Date :**

Prénom :

Matricule :

Exercice 1

Un joueur de basket-ball lance le ballon avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ selon l'angle θ_0 vers un panier situé à une distance horizontale **L** et à une hauteur **h** au-dessus du point d'envoi.

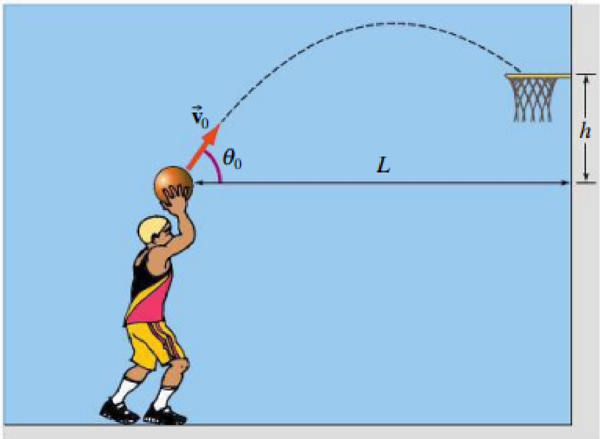

Figure 1: BasketBall

(a) Montrez que le module de la vitesse initiale requise est donné par :

$$v_0^2 = \frac{gL}{2\cos^2(\theta_0)\left(\tan\theta_0 - \frac{h}{L}\right)}$$

- **Solution**

Equations Projectile :

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad v_{0x} = v_0\cos\theta_0, \quad x_0 = 0$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_{0y} = v_0\sin\theta_0, \quad y_0 = 0$$

On cherche l'expression de v_0 telle que le ballon atteint le panier. Posons t^*, le temps mis par le ballon pour atteindre le panier (soit le temps mis pour parcourir la distance **L**).

$$x(t^*) = L = v_0\cos\theta_0 t^* \Rightarrow t^* = \frac{L}{v_0\cos\theta_0}$$

Injectons l'expression de t^* dans l'équation de $y(t)$. Nous savons qu'en t^* la hauteur atteinte par le ballon est égale à **h**.

$$y(t^*) = h = v_0\sin\theta_0 t^* - \frac{1}{2}g(t^*)^2$$

En développant les diffférents termes de l'équation

$$\begin{aligned}
h &= v_0 \sin\theta_0 \left(\frac{L}{v_0\cos\theta_0}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{v_0\cos\theta_0}\right)^2 \\
&= L\tan\theta_0 - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0} \\
\left(\tan\theta_0 - \frac{h}{L}\right) &= \frac{gL}{2v_0^2\cos^2\theta_0} \\
v_0^2 &= \frac{gL}{2\cos^2(\theta_0)\left(\tan\theta_0 - \frac{h}{L}\right)}
\end{aligned}$$

(b) Montrez que l'angle α par rapport à l'horizontale que forme la trajectoire du ballon lorsqu'il atteint le panier est donné par

$$\tan\alpha = \frac{2h}{L} - \tan\theta_0$$

- **Solution**

L'angle α correspond à l'angle que fait le vecteur vitesse du ballon (par rapport à l'horizontal) lorsque celui-ci arrive au panier. Soit $\vec{v}$ le vecteur vitesse du ballon quand il arrive au panier,

$$\vec{v} = v_x \vec{1}_x + v_y \vec{1}_y$$

où

$$\begin{aligned}
v_x &= v_0\cos\theta_0 \\
v_y(t) &= v_0\sin\theta_0 - gt
\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire, suite au mouvement projectile qu'effectue le ballon,

$$\tan\alpha = \frac{v_y(t^*)}{v_x}$$

Où pour rappel t^* est le temps mis par le ballon pour arriver jusqu'au panier. En remplaçant $v_y(t^*)$, v_x et t^* par leurs expressions respectives dans la relation précédente, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{v_0\sin\theta_0 - \frac{gL}{v_0\cos\theta_0}}{v_0\cos\theta_0} \\
&= \tan\theta_0 - \frac{gL}{v_0^2\cos^2\theta_0} \\
&= \tan\theta_0 - \frac{gL}{\frac{gL}{2\left(\tan\theta_0 - \frac{h}{L}\right)}} \\
&= \tan\theta_0 - 2\left(\tan\theta_0 - \frac{h}{L}\right) \\
\tan\alpha &= \frac{2h}{L} - \tan\theta_0
\end{aligned}$$

(c) ~~On suppose que le ballon a un rayon de 12cm, et que le panier a un diamètre de 46cm et se trouve à une hauteur de 3m par rapport au sol. Calculez la distance maximale à laquelle un joueur peut espérer faire un panier sans toucher l'anneau et en lançant à partir d'une hauteur de 2m. On suppose que~~ $\cancel{\theta_0 = 45°}$~~.~~ CANCELLED

Exercice 2

Un bloc de masse m_1 est suspendu verticalement à l'aide d'une corde reliée à un bloc de masse m_2. Le bloc de masse m_2 est sur un plan, sans frottement, incliné à un angle θ par rapport à l'horizontale

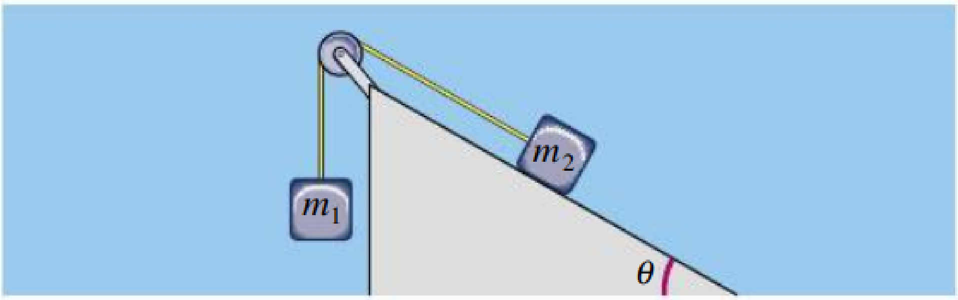

Figure 2: Blocs

- Si $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, l'accélération du bloc est de $1,96\,\mathrm{m/s^2}$ vers le bas ;
- Si $m_1 = 0,5\,\mathrm{kg}$, l'accélération du bloc est de $1,22\,\mathrm{m/s^2}$ vers le haut.

Déterminez θ et m_2.

- **Solution**

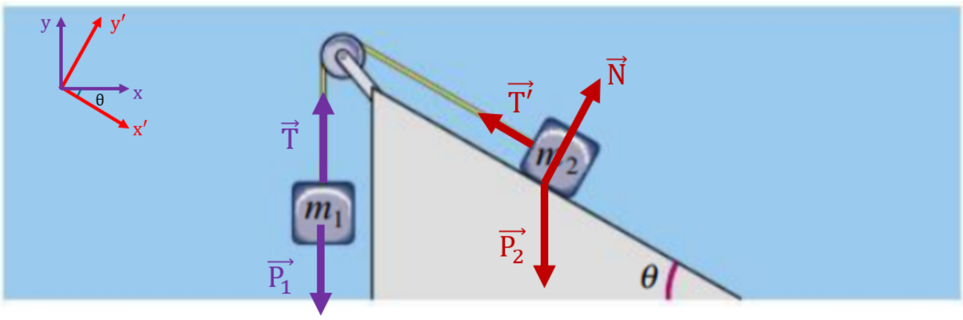

Figure 3: Solution

Pour résoudre cet exercice, il nous faut appliquer la deuxième loi de Newton à chacune des masses.
Pour résoudre ce problème nous allons travailler dans un seul repère (ici le (x,y)). Pour ce faire il nous faut exprimer le lien entre les composantes du repère incliné et celui choisi.

$$\vec{1}_{x'} = \cos\theta\vec{1}_x - \sin\theta\vec{1}_y$$
$$\vec{1}_{y'} = \sin\theta\vec{1}_x + \cos\theta\vec{1}_y$$

Où nous avons introduit les vecteurs unitaires des repères.

- Cas 1: $m_1 = 2\mathrm{kg}$; $a = 1,96\mathrm{m}/s^2$

Dans ce cas-ci l'accélération de la masse 1 est dirigée vers le bas ce qui implique que la masse 2 se déplace avec un vecteur accélération $\vec{a} = -a\vec{1}_{x'}$.

Exprimons les différentes forces en jeux :

Pour m_1:

$$\vec{T} = T\vec{1}_y$$
$$\vec{P}_1 = -m_1 g\vec{1}_y$$

En appliquant la seconde loi de Newton :

$$(T - m_1 g) = -m_1 a$$

Pour m_2:

$$\vec{T'} = -T\vec{1}_{x'} \Rightarrow -T(\cos\theta\vec{1}_x - \sin\theta\vec{1}_y)$$
$$\vec{N} = N\vec{1}_{y'} \Rightarrow N(\sin\theta\vec{1}_x + \cos\theta\vec{1}_y)$$
$$\vec{P}_2 = -m_2 g\vec{1}_y$$

L'accélération subit par la masse m_2 a pour expression dans le repère (x,y)

$$\vec{a} = -a\vec{1}_{x'} \Rightarrow -a(\cos\theta\vec{1}_x - \sin\theta\vec{1}_y)$$

En appliquant la seconde loi de Newton à la masse m_2 dans le repère (x,y).

$$-T\cos\theta + N\sin\theta = -m_2 a\cos\theta$$
$$T\sin\theta + N\cos\theta - m_2 g = m_2 a\sin\theta$$

Le système d'équations du cas 1 est donné par :

$$\begin{cases} (T - m_1 g) = -m_1 a \\ -T\cos\theta + N\sin\theta = -m_2 a\cos\theta \\ T\sin\theta + N\cos\theta - m_2 g \end{cases}$$

En remplaçant les forces par leurs expressions et en passant par quelques simplifications, nous trouvons

$$\begin{cases} T = m_1(g - a) \\ T - m_2 g\sin\theta = m_2 a \end{cases}$$

Cherchons maintenant le système d'équation pour le cas 2.

- Cas 2: $m'_1 = 0.5kg$; $a' = 1,22\text{m}/s^2$

Dans ce cas-ci l'accélération de la masse 1 est dirigée vers le haut ce qui implique que la masse 2 se déplace avec un vecteur accélération $\vec{a'} = a'\vec{1}_{x'}$.

Pour m'_1: La seconde loi de Newton doné pour la masse m'_1

$$T' - m'_1 g = m'_1 a'$$

Où nous avons poser T' la norme de la tension dans la corde pour le cas 2.
Pour m_2: On exprimle l'accélération du bloc 2 :

$$\vec{a'} = a'\vec{1}_{x'} \Rightarrow a'(\cos\theta\vec{1}_x - \sin\theta\vec{1}_y)$$

En appliquant la seconde loi de Newton à la masse m_2 danscle repère (x,y).

$$-T\cos\theta + N\sin\theta = m_2 a\cos\theta$$
$$T\sin\theta + N\cos\theta - m_2 g = -m_2 a\sin\theta$$

En remplaçant les forces par leurs expressions et en passant par quelques simplifications, nous trouvons comme système d'équations finales pour le cas 2,

$$\begin{cases} T' = m_1'(g+a') \\ T' - m_2 g\sin\theta = -m_2 a' \end{cases}$$

Ecrivons maintentant les deux systémes en un seul,

$$\begin{cases} T = m_1(g-a) \\ T' = m_1'(g+a') \\ T - m_2 g\sin\theta = m_2 a \\ T' - m_2 g\sin\theta = -m_2 a' \end{cases}$$

Nous pouvons déterminer la masse m_2 en faisant la différence entre l'avant dernière et dernière équation du système

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{T'-T}{a+a'} \\ &= \frac{m_1(g-a) - m_1'(g+a')}{a+a'} \\ &= 3,2kg \end{aligned}$$

En remplaçant la masse m_2 dans une des autres équations nous trouvons pour l'angle θ,

$$\begin{aligned} -m_2 g\sin\theta &= m_2 a - T \\ \sin\theta &= \frac{1}{g}\left(\frac{T}{m_2} - a\right) \\ &= \frac{1}{g}\left(\frac{m_1}{m_2}(g-a) - a\right) \Rightarrow \theta = 17,47° \end{aligned}$$

Exercice 3

Un bloc de 0,2kg est appuyé sur un ressort (k = 16N/m) incliné de 30°. Le coefficient de frottement est $\mu_c = 0,1$ et le ressort est initialement comprimé de 25cm. On relâche le bloc : quel est le module de la vitesse du bloc lorsque celui-ci quitte le ressort ?

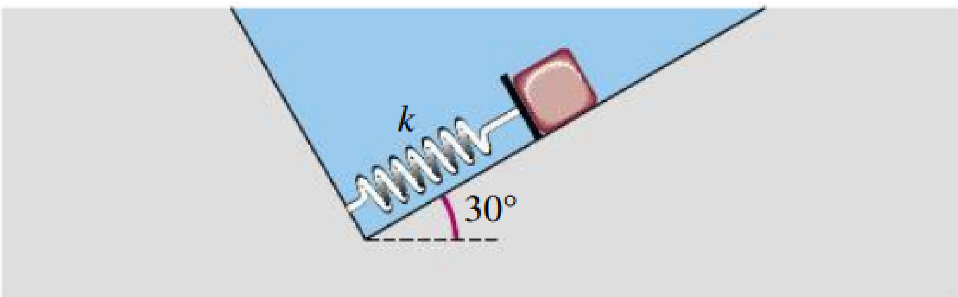

Figure 4: Ressort

- **Solution**

Dans cet exercice on demande de déterminer la vitesse du bloc une fois que le ressort est détendu (retour à son état de repos).
On serait tenté ici de passer par la conservation de l'énergie, en utilisant énérgie cinétique et potentielle. Cependant dû à la présence de frottement, l'énergie du système n'est pas conservée.
Pour déterminer la vitesse du bloc, il nous faut passer par le théorème de l'énergie cinétique. La variation de l'énergie cinétique du bloc est égale à la somme des travaux des forces exercées sur lui.

- Travaux des forces
  - Poids
  $$W_P = -mg\sin(30°).d$$
  - Frottement
  $$W_{fr} = -\mu_c mg\cos(30°).d$$
  - Ressort
  $$W_{ressort} = \int_{-d}^{0} (-k \cdot x)\, dx = \frac{1}{2}kd^2$$

Où nous avons posé d la distance le long de laquelle les différentes forces effectuent un travail ($d = 0,25$m). Nous avons également placé l'origine à la position où le ressort est au repos (initialement le ressort est comprimé et donc la masse se trouve à la position $-d$.

$$\begin{aligned}
\Delta E_c &= W_P + W_{fr} + W_{ressort} \\
\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) &= -mg\sin(30°).d - \mu_c mg\cos(30°).d + \frac{1}{2}kd^2 \\
\frac{1}{2}mv_f^2 &= \frac{1}{2}kd^2 - mgd(\sin(30°) + \cos(30°)) \\
v_f &= \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kd^2 - mgd(\sin(30°) + \cos(30°))\right)} \\
&= 1,46m/s
\end{aligned}$$

Exercice 4

(a) Calculez le centre de masse d'un parallélépipède rectangle de dimensions $a \times b \times c$ (longueur, largeur, hauteur) et de densité uniforme ρ (Suggestion : utilisez les coordonnées cartésiennes avec l'élément infinitésimal de volume $dV = dxdydz$).

- **Solution**

Considérons le parallélépipède rectangle de dimensions $a \times b \times c$ (longueur a, largeur b, hauteur c) avec une densité uniforme ρ. Utilisons le système de coordonnées cartésiennes et l'élément infinitésimal de volume $dV = dx\,dy\,dz$. Le centre de masse est donné par :

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_V \rho \vec{r}\, dV$$

où M est la masse totale du parallélépipède, $\vec{r}$ représente la position dans le parallélépipède, et l'intégrale est calculée sur tout le volume V. En coordonnées cartésiennes, l'intégrale sur le volume d'un functino $f(x, y, z)$ s'exprime comme suit :

$$\int_V f(x, y, z)\, dV = \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

où $x \in [0, a]$ est la variable qui parcourt la longueur du parallélépipède, $y \in [0, b]$ est la variable qui parcourt la largeur, $z \in [0, c]$ est la variable qui parcourt la hauteur. L'intégrale multiple calcule la somme de la contribution infinitésimale de la fonction $f(x, y, z)$ sur chaque point du volume.

La masse totale M est donnée par :

$$M = \int_V \rho\, dV.$$

Puisque ρ est uniforme, M devient :

$$M = \rho \int_V dV = \rho \int_0^a \int_0^b \int_0^c dx\, dy\, dz = \rho \cdot (a \cdot b \cdot c).$$

Les coordonnées du centre de masse sont définies par :

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_V \rho x\, dV, \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_V \rho y\, dV, \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_V \rho z\, dV.$$

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho x\, dx\, dy\, dz.$$

En intégrant successivement par rapport à x, y, puis z :

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{\rho abc} \cdot \rho \int_0^a x\, dx \cdot \int_0^b 1\, dy \cdot \int_0^c 1\, dz.$$

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{abc} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \bigg|_0^a \right] \cdot b \cdot c = \frac{1}{abc} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot b \cdot c = \frac{a}{2}.$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho y\, dx\, dy\, dz.$$

Par un raisonnement similaire :

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{abc} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \bigg|_0^b \right] \cdot a \cdot c = \frac{1}{abc} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot a \cdot c = \frac{b}{2}.$$

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho z \, dx \, dy \, dz.$$

De la même manière :

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{abc} \cdot \left[\frac{z^2}{2} \bigg|_0^c \right] \cdot a \cdot b = \frac{1}{abc} \cdot \frac{c^2}{2} \cdot a \cdot b = \frac{c}{2}.$$

Le centre de masse du parallélépipède rectangle est donné par :

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right).$$

(b) Calculez le centre de masse d'une demi-sphère de rayon R et de densité uniforme ρ (Suggestion : utilisez les coordonnées sphériques avec l'élément infinitésimal de volume $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$, où r, θ et ϕ sont respectivement les coordonnées radiales, polaires et azimutales).

- **Solution**

Considérons une hémisphère pleine de rayon R et de densité uniforme ρ. La surface plane est située dans le plan xy, et la surface courbe s'étend au-dessus dans la direction positive de z. L'objectif est de déterminer le centre de masse de cette hémisphère. Le centre de masse est défini par :

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_V \rho \vec{r} \, dV,$$

où M est la masse totale de l'hémisphère, $\vec{r} = (x, y, z)$ est le vecteur position, et l'intégrale est évaluée sur le volume V de l'hémisphère.

Calcul de M

La masse totale est donnée par :

$$M = \int_V \rho \, dV.$$

En coordonnées sphériques, l'élément de volume est :

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

où $r \in [0, R]$ est la distance radiale, $\theta \in [0, \pi/2]$ est l'angle polaire (mesuré depuis l'axe z), $\varphi \in [0, 2\pi]$ est l'angle azimutal (mesuré dans le plan xy). La masse totale devient :

$$M = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Calculons cette intégrale, intégrons par rapport à r :

$$\int_0^R r^2 \, dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{R^3}{3}.$$

Intégrons par rapport à θ :

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = 1.$$

Intégrons par rapport à φ :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Ainsi, la masse totale est :

$$M = \rho \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi\rho R^3}{3}.$$

Calcul du centre de masse

Le centre de masse est défini par :

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_V \rho x\, dV, \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_V \rho y\, dV \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_V \rho z\, dV.$$

En coordonnées sphériques, nous avons $x = r\sin\theta\cos\varphi$ et $y = r\sin\theta\sin\varphi$, avec l'élément de volume $dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

Calcul du x_{cm}

Substituons $x = r\sin\theta\cos\varphi$ dans l'intégrale :

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_V \rho x\, dV = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \rho\, r\sin\theta\cos\varphi\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Simplifions l'intégrande :

$$x_{\text{cm}} = \frac{\rho}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r^3\sin^2\theta\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Séparons les intégrales dépendant de r, θ, et φ :

$$x_{\text{cm}} = \frac{\rho}{M}\left(\int_0^R r^3\, dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi\right).$$

Intégrale en r:

$$\int_0^R r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}.$$

Intégrale en θ:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\theta\right) d\theta.$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta = \left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Intégrale en φ:

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi\Big|_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0.$$

Ainsi, la contribution totale pour x_{cm} est :

$$x_{\text{cm}} = \frac{\rho}{M} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0 = 0.$$

Calcul du y_{cm}

Par un raisonnement identique, en remplaçant x par $y = r \sin\theta \sin\varphi$, l'intégrale pour y_{cm} devient :

$$y_{\text{cm}} = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \sin^2\theta \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

De manière similaire, l'intégrale en $\sin\varphi$ sur $[0, 2\pi]$ est nulle :

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = -\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0.$$

Ainsi, la contribution totale pour y_{cm} est également nulle :

$$y_{\text{cm}} = 0.$$

Calcul du z_{cm}

La coordonnée z_{cm} du centre de masse est donnée par :

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_V \rho z \, dV.$$

En coordonnées sphériques, $z = r\cos\theta$, donc :

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho \, r \cos\theta \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Simplifions l'intégrande :

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho \, r^3 \cos\theta \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Séparons l'intégrale en parties dépendant de r, θ et φ :

$$z_{\text{cm}} = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr.$$

Intégrons par rapport à r :

$$\int_0^R r^3 \, dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}.$$

Intégrons par rapport à θ :

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2}.$$

Évaluons aux bornes :

$$\cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \cos(\pi) - \cos(0) = -1 - 1 = -2.$$

Ainsi :

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{4}.$$

Intégrons par rapport à φ :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Combinons tous les termes :

$$z_{\text{cm}} = \frac{\rho}{M} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{R^4}{4}.$$

Substituons $M = \frac{2\pi\rho R^3}{3}$:

$$z_{\text{cm}} = \frac{\frac{\rho R^4 \pi}{8}}{\frac{2\pi\rho R^3}{3}}.$$

Simplifions :

$$z_{\text{cm}} = \frac{\frac{R}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{3R}{8}.$$

Le centre de masse de l'hémisphère pleine est :

$$\vec{r}_{\text{cm}} = (0, 0, \frac{3R}{8}).$$

Exercice 5

Un cylindre de rayon R et de masse M est laissé rouler sur un plan incliné faisant un angle θ par rapport à l'horizontale.

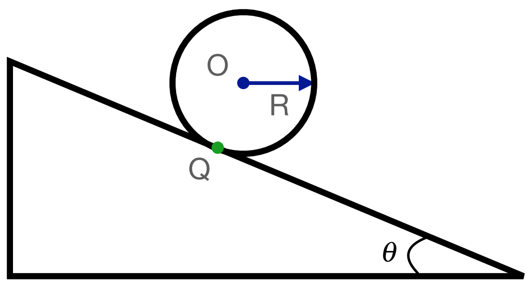

Figure 5: Cylindre en roulement

(a) Trouver la valeur minimal du coefficient de frottement statique pour laquelle le mouvement est un pur roulement.

- **Solution**

Considérons un cylindre de rayon R et de masse M, laissé rouler sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. L'objectif est de déterminer le coefficient minimal de frottement statique μ_s pour que le mouvement soit un roulement pur (sans glissement).

1. Le roulement pur implique une relation entre l'accélération angulaire α et l'accélération linéaire a :

$$\alpha = \frac{a}{R}.$$

2. Forces agissant sur le cylindre : La composante de la force gravitationnelle $Mg\sin\theta$ agit le long du plan incliné. La composante de la force gravitationnelle $Mg\cos\theta$ qui agit perpendiculairement au plan. Une force de frottement statique f_s agit dans la direction opposée pour empêcher le glissement. La force normale N agit perpendiculairement au plan.

3. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe est $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Equations

La somme des forces perpendiculare au plan incliné donne :

$$0 = N - Mg\cos\theta.$$

La somme des forces le long du plan incliné donne :

$$Ma = Mg\sin\theta - f_s.$$

Le frottement statique f_s exerce un couple sur le cylindre, produisant une accélération angulaire α :

$$f_sR = I\alpha.$$

Cette équation provient de la deuxième équation cardinale : le moment de la force est égal à la dérivée du moment angulaire par rapport au temps, ce qui est égal au moment d'inertie I multiplié par l'accélération angulaire α. En utilisant la relation de roulement pur $\alpha = a/R$, cette équation devient :

$$f_sR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R}.$$

Simplifions :

$$f_s = \frac{1}{2}Ma.$$

Condition de frottement statique :

La force de frottement statique f_s doit être inférieure ou égale à la force maximale fournie par le frottement statique, donnée par :

$$f_s \leq \mu_s N.$$

En utilisant $N = Mg\cos\theta$, cette condition devient :

$$f_s \leq \mu_s Mg\cos\theta.$$

Relation entre a et f_s

De l'équation de translation, isolons a :

$$Ma = Mg\sin\theta - f_s.$$

Substituons $f_s = \frac{1}{2}Ma$ dans cette équation :

$$Ma = Mg\sin\theta - \frac{1}{2}Ma.$$

Simplifions :

$$Ma + \frac{1}{2}Ma = Mg\sin\theta.$$

$$\frac{3}{2}Ma = Mg\sin\theta.$$

$$a = \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

Substituons $a = \frac{2}{3}g\sin\theta$ dans $f_s = \frac{1}{2}Ma$:

$$f_s = \frac{1}{2}M \cdot \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

$$f_s = \frac{1}{3}Mg\sin\theta.$$

Pour garantir que le frottement statique soit suffisant pour un roulement pur, utilisons la condition $f_s \leq \mu_s Mg\cos\theta$:

$$\frac{1}{3}Mg\sin\theta \leq \mu_s Mg\cos\theta.$$

Simplifions en annulant Mg (car $Mg > 0$) :

$$\frac{1}{3}\tan\theta \leq \mu_s.$$

Le coefficient minimal de frottement statique pour garantir un roulement pur est donné par :

$$\mu_s(minimal) = \frac{1}{3}\tan\theta.$$