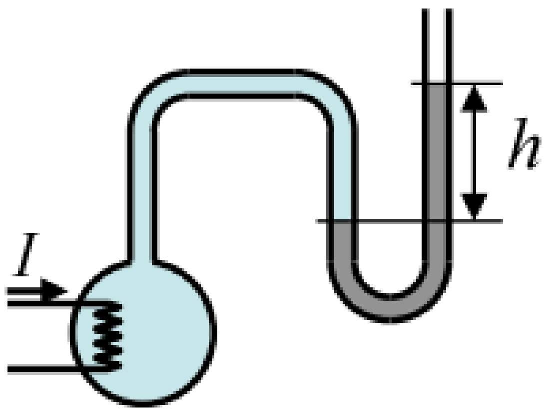
Nom : **Date :**

Prénom :

Matricule :

Exercice 1 - Thermodynamique

Dans le dispositif schématisé ci–dessous, un gaz (de l'azote) est chauffé jusqu'à ce que la hauteur h de la colonne de liquide (du mercure) dans le tube en U soit passée de $h_i = 0$cm à $h_f = 76$cm.



a. Sachant que la pression atmosphérique environnante P_a est de 1 atm et que la section S du tube en U est de $1\,\text{cm}^2$, calculez le travail L effectué par le gaz lors de cet échauffement.
(Coup de pouce : notez qu'un accroissement de hauteur Δh correspond à un accroissement de volume $\Delta V = S\Delta h$)

b. Sachant que, avant échauffement, le volume de gaz V_i est de $150\,\text{cm}^3$ et que sa température T_i est de 20°C, calculez la température T_f atteinte par le gaz.

c. Calculez la chaleur Q fournie au gaz lors de l'échauffement.

- **Solutions:**

a. Le travail est donné par $L = \int P(V)dV$. La section du tube étant constante, une variation infinitésimmale de volume est liée à une variation infinitésimmale de hauteur $\Delta V = S\Delta h \to dV = Sdh$.
L'expression du travail est donnée ci-dessous,

$$L = \int_0^{h_f} P(V)dV = \int (P_a + \rho gh)Sdh = S\left(P_a h_f + \rho g \frac{h_f^2}{2}\right)$$

Etant donné que $h_f = 76$cm, on trouve que $\rho g h_f = 1$atm $= P_a$.
Nous trouvons donc l'expression du travail,

$$L = \frac{3}{2} S P_a h_f \approx 11,6J$$

b. Le nombre de mol de gaz reste constant au cours de l'échauffement, nous pouvons donc utiliser la loi des gaz parfaits, en l'écrivant de la manière suivante

$$\frac{PV}{T} = nR = cste$$

En prenant les états initial et final, nous pouvons écrire,

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow T_f = T_i \frac{P_f V_f}{P_i V_i}$$

Sachant que le volume final est donné par $V_f = V_i + Sh_f$. Avec $P_f = 2P_a$, $P_i = P_a$, nous trouvons finalement,

$$T_f = T_i \left(3 + \frac{Sh_f}{V_i}\right) \approx 1028K$$

c. Pour calculez l'énergie fournie au gaz, il nous faut passer par le premier principe,

$$\Delta U = Q - L \to Q = \Delta U + L$$

La variation d'énergie interne est donné par,

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \frac{n_d}{2} N k_B \Delta T \\
&= \frac{n_d}{2} \frac{P_i V_i}{T_i} (T_f - T_i) \\
&= \frac{n_d}{2} P_i V_i \left(\frac{T_f}{T_i} - 1\right) \\
&= \frac{n_d}{2} P_a (2V_i + Sh_f)
\end{aligned}$$

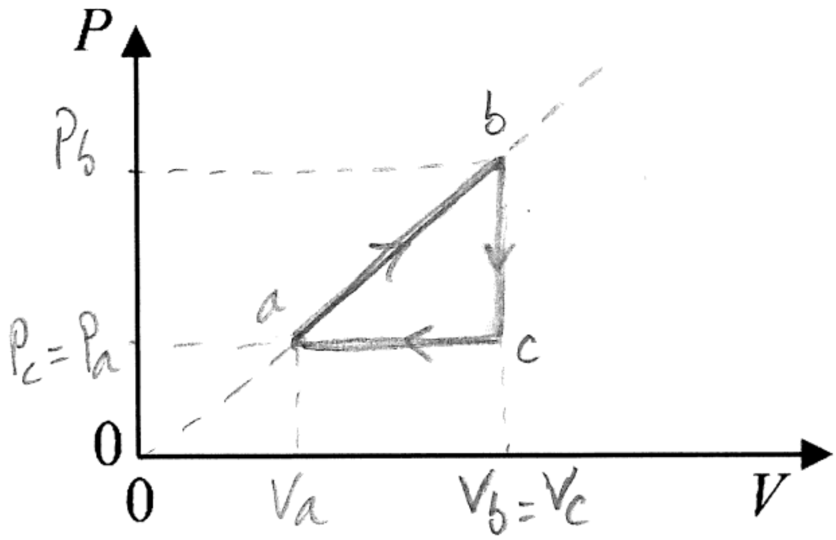
On trouve,

$$\begin{aligned}
Q &= \Delta U + L \\
&= \frac{n_d}{2} P_a (2V_i + Sh_f) + \frac{3}{2} S P_a h_f \\
&= 106,84J
\end{aligned}$$

Exercice 2 - Cycle Thermodynamique

Soit un cycle moteur à gaz parfait (n_d degrés de liberté), constitué d'une transformation $a - b$ caractérisée par une relation de proportionnalité entre la pression et le volume selon la loi $P(V) = \alpha V$, d'une transformation $b - c$ isochore et d'une transformation $c - a$ isobare. Le cycle est caractérisé par un rapport de compression $\frac{V_b}{V_a} = \beta > 1$. Calculez le rendement η (simplifie ton résultat au maximum sur base de ta connaissance des produits remarquables). Représente le diagramme $P - V$ du cylce de façon qualitative mais aussi précise que possible.

- **Solution:**



La transformation $a - b$ est caractérisé par la relation suivante,

$$P(V) = \alpha V$$

La pression au point a est donnée par $P_a = \alpha V_a$. La pression au point b est donnée par (sachant que $V_b = \beta V_a$)

$$P_b = \alpha V_b = \alpha \beta V_a$$

Le rendemment du cycle est le rapport entre le travail produit (moteur) et la chaleur fournie (ici cette chaleur est fournie lors de la transformation $a - b$).

$$\eta = \frac{L}{Q_{ab}}$$

Le travail L du cycle moteur est donnée par l'aire du cycle,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(P_b - P_a)(V_b - V_a) \\ &= \frac{1}{2}\alpha (V_b - V_a)^2 \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2 V_a^2 (\beta - 1)^2 \end{aligned}$$

La chaleur Q_{ab} peut-être déterminée via le premier principe appliquée à la transformation $a - b$,

$$Q_{ab} = \Delta U_{ab} + L_{ab}$$

La variation d'énergie interné est donnée par,

$$\begin{aligned} \Delta U_{ab} &= \frac{n_d}{2} nR (T_b - T_a) \\ &= \frac{n_d}{2}(P_b V_b - P_a V_a) \\ &= \frac{n_d}{2}\left(\alpha \beta^2 V_a^2 - \alpha V_a^2\right) \\ &= \frac{n_d}{2}\alpha V_a^2 \left(\beta^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Le travail L_{ab} est donnée par,

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \int_{V_a}^{V_b} P(V)dV \\ &= \int_{V_a}^{V_b} \alpha V dV \\ &= \frac{1}{2}\alpha \left[V^2\right]_{V_a}^{V_b} \\ &= \frac{1}{2}\alpha V_a^2 \left(\beta^2 - 1\right) \end{aligned}$$

La chaleur Q_{ab} est donné par,

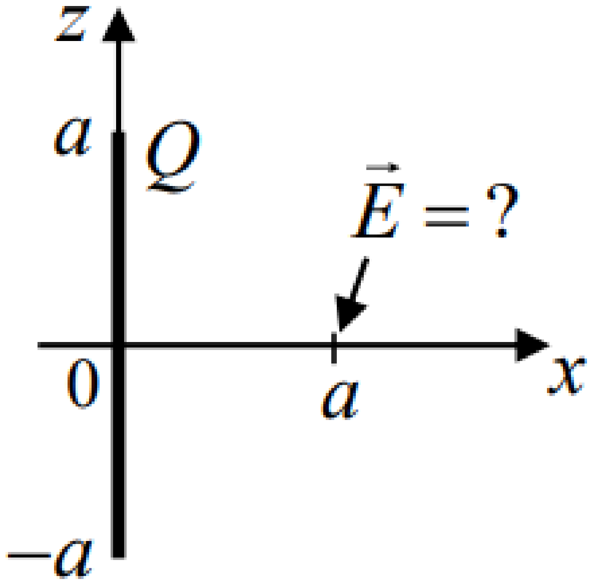
$$Q_{ab} = \frac{n_d}{2}\alpha V_a^2 \left(\beta^2 - 1\right) + \frac{1}{2}\alpha V_a^2 \left(\beta^2 - 1\right) = \frac{1}{2}(n_d + 1)\alpha V_a^2 \left(\beta^2 - 1\right)$$

Le rendement, η est donné par,

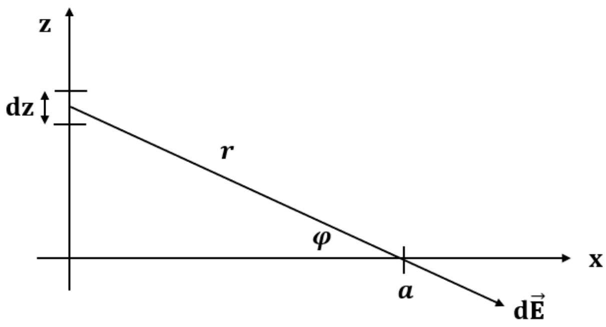
$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L}{Q_{ab}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 V_a^2 \left(\beta - 1\right)^2}{\frac{1}{2}(n_d + 1)\alpha V_a^2 \left(\beta^2 - 1\right)} \\ &= \frac{(\beta - 1)^2}{(n_d + 1)(\beta^2 - 1)} \\ &= \frac{\beta - 1}{(n_d + 1)(\beta + 1)} \end{aligned}$$

Exercice 3 - Electrostatique

Le schéma ci-dessous montre une tige supposée infiniment mince chargée uniformément avec une charge électrique totale $Q = 1,2\,\mathrm{mC}$. La tige s'étend sur l'axe z de $z = -a$ à $z = +a$ où $a = 50\,\mathrm{cm}$. Calculez le champ électrique $\vec{E}$ généré par cette tige sur l'axe x en $x = a$.



- **Solution:**



On a pour une charge infinitésimale $dQ = \lambda dz$, un champ généré $d\vec{E}$ donné par,

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{1}_r = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{1}_r \tag{1}$$

Où $\lambda = \frac{Q}{2a}$.
Par symmétrie, on trouve que le champ total généré par la barre est orienté suivant la direction $\vec{1}_x$.

$$\vec{E} = \int (dE_x)\vec{1}_x$$

Nous avons donc,

$$dE_x = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\varphi$$

où $r = a/\cos\varphi$, $z = a\tan(\varphi) \to dz = a\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$. L'expression du champ devient,

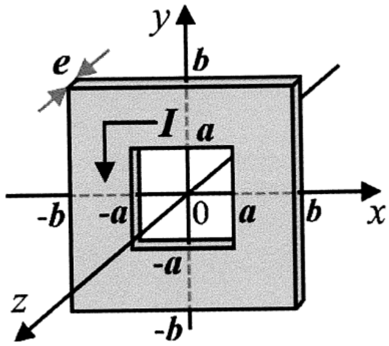
$$dE_x = \frac{\lambda a d\varphi}{4\pi\epsilon_0 a^2}\cos\varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\cos\varphi d\varphi$$

Par la géométrie, on trouve que $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

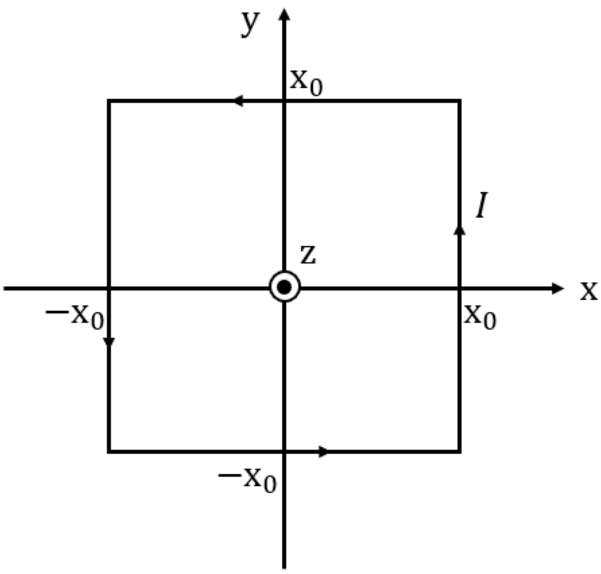
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \int (dE_x)\vec{1}_x \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\cos\varphi d\varphi \vec{1}_x \\ &= \frac{\sqrt{2}Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\vec{1}_x \\ &= 30,4.10^6 \mathrm{N/C}\end{aligned}$$

Exercice 4 - Magnetostatique

Le schéma ci-contre montre un cadre conducteur d'épaisseur **e** de forme carrée située dans le plan $x - y$ d'un repère cartésien. Ce cadre a pour côté intérieur 2**a** et pour côté extérieur 2**b**, avec $\mathbf{a}, \mathbf{b} >> \mathbf{e}$. Ce cadre véhicule une densité de courant **J** uniforme dans toute son épaisseur et toute sa largeur (on suppose pour cela que les porteurs de charge électrique suivent des trajectoires carrées)



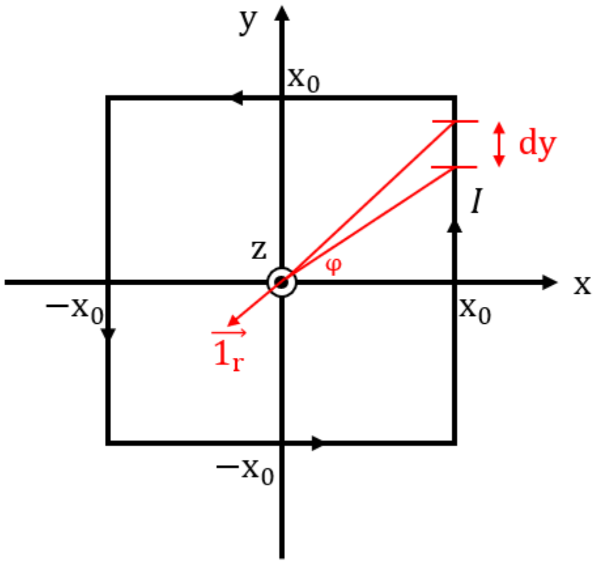
a. Afin de préparer le point (b), calcule préalablement le champ que génère en l'origine la spire carrée de côté $2x_0$ véhiculant le courant **I**, tel qu'indiqué sur le schéma ci-dessous.



b. Calcule le champ magnétique $\vec{B}$ que génère le cadre en l'origine.

- **Solution:**

a. Chaque côté de la spire véhicule le même courant I, donc ils vont chacun générer le même champ magnétique au centre de la spire. L'idée sera donc de calculé le champ magnétique généré par un seul côté et d'ensuite multiplié l'expression obtenue par 4 pour avoir le champ magnétique total.



Soit le côté droit de la spire, le champ magnétique recherché est donné par la loi de Biot-Savart,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{1}_r}{r^2}$$

Où $d\vec{l} = dy\vec{1}_y$, $\vec{1}_r = -\cos\varphi\vec{1}_x - \sin\varphi\vec{1}_y$, $d\vec{l} \times \vec{1}_r = dy\cos\varphi\vec{1}_z$. Nous avons pour expression du champ magnétique,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\cos\varphi dy\vec{1}_z$$

Où $r = \frac{x_0}{\cos\varphi}$, $y = x_0\tan(\varphi) \to dy = x_0\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$. En remplaçant,

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi d\varphi$$

On trouve finalement pour le champ magnétique total généré au centre de la spire,

$$\vec{B}_{tot} = 4\vec{B} = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi x_0}\vec{1}_z$$

b. Au point précédent nous avons seulement considéré une spire infiniment mince, c'est à dire seulement une partie infinitésimale du cadre, ce qui implique que nous avons seulement considéré une partie infinitésimale du courant circulant dans le cadre. L'expression de ce courant infinitésimale est donné par $dI = Jedx$, pour déterminer le champ magnétique généré par l'entièreté du cadre il nous faut remplacer cette expression du courant dans l'expression du champ trouvé au point précédent, ce qui donne

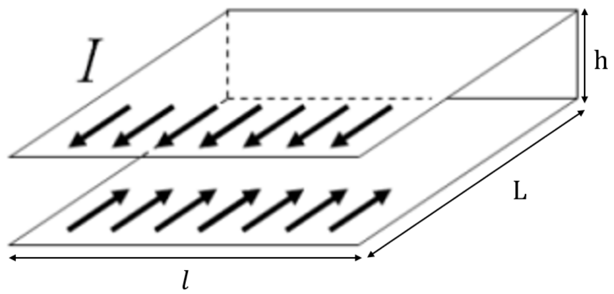
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI\sqrt{2}}{\pi x}\vec{1}_z = \frac{\mu_0 Jedx\sqrt{2}}{\pi x}\vec{1}_z$$

Le champ total est obtenu en intégrant la longueur x de a à b,

$$\vec{B} = \int_a^b d\vec{B} = \frac{\mu_0 Je\sqrt{2}}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{x}\vec{1}_z = \frac{\mu_0 Je\sqrt{2}}{\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\vec{1}_z$$

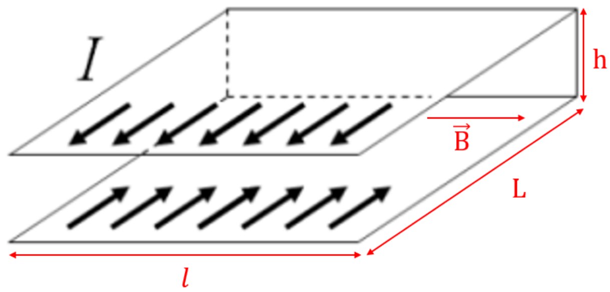
Exercice 5 - Electromagnétisme

Soit la plaque métallique en forme de U représentée à la figure ci-dessous. On supposera que le courant I est établi de manière uniforme sur toute la largeur ℓ de la plaque conductrice et que le champ magnétique est uniforme partout à l'intérieur du U. La distance entre les branches du U est $h = 1\,\text{cm}$, la largeur de la plaque est $\ell = 100\,\text{cm}$ et la longueur du (demi) U est $L = 150\,\text{cm}$. Déterminez l'inductance $\mathcal{L}$ de la plaque métallique.



- **Solution:**

Chaque plaque va générer un champ magnétique qui sera parallèle à elle. Les champs magnétiques sont orientés dans la même sens et la même direction, ce qui implique que le champ magnétique total sera donnée donné par la somme des champs magnétiques générés par chacune des plaques (principe de supperposition).



Les champs magnétiques peuvent être déterminer par la loi d'Ampère en considérant un contour fermé rectangulaire autour des plaques. On trouve comme champ total,

$$B_{tot} = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2l} + \frac{\mu_0 I}{2l} = \frac{\mu_0 I}{l}$$

Pour déterminer l'inductance de cette structure, il nous suffit d'utiliser la relation qui lie le courant au flux magnétique,

$$\phi = \mathcal{L} I$$

Pour rappel le flux magnétique est tout simplement donné par l'intégrale de surface du champ magnétique au travers de la surface qu'il traverse,

$$\phi = \int \vec{B}.d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{l} Lh$$

On trouve donc pour l'inductance,

$$\mathcal{L} = \frac{\phi}{I} = \mu_0 \frac{Lh}{l}$$