Problemas de álgebra exterior

Andrés Rodríguez

Problema 1. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Demostrar que para cada función lineal $f : V \to W$ el "pullback" $f^* : \mathscr{J}^k(W) \to \mathscr{J}^k(V)$ satisface las siguientes propiedades:

(i) Para todos $S \in \mathscr{J}^m(W)$ y $T \in \mathscr{J}^k(W)$ se tiene

$$(f \circ g)^* T = (g^* \circ f^*) T$$

$$f^*(S \otimes T) = f^* S \otimes f^* T.$$

y

(ii) Para todos $\omega \in \Lambda^m(W)$ y $\eta \in \Lambda^k(W)$

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta.$$

Demostración.

(i) Sea g una función lineal $g : U \to V$. Evaluamos k vectores $v_1, \ldots, v_k \in U$ en $(f \circ g)^* T$:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^* T(v_1, \ldots, v_k) &= T((f \circ g)^*(v_1), \ldots, (f \circ g)^*(v_k)), \\
&= T(f(g(v_1)), \ldots, f(g(v_k))), \\
&= f^* T(g(v_1), \ldots, g(v_k)), \\
&= (g^* \circ f^*) T(v_1, \ldots, v_k),
\end{aligned}$$

por lo tanto, $(f \circ g)^* T = (g^* \circ f^*) T$.

Similarmente, sean $v_1, \ldots, v_{m+k} \in V$:

$$\begin{aligned}
f^*(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{m+k}) &= (S \otimes T)(f(v_1), \ldots, f(v_{m+k})), \\
&= S(f(v_1), \ldots, f(v_m)) \cdot T(f(v_{m+1}, \ldots, f(v_{m+k})), \\
&= f^* S(v_1, \ldots, v_m) f^* T(v_{m+1}, \ldots, v_{m+k}), \\
&= f^* S \otimes f^* T(v_1, \ldots, v_{m+k}), ,
\end{aligned}$$

por lo tanto, $f^*(S \otimes T) = f^* S \otimes f^* T$.

(ii) Por la definición de producto cuña:

$$\begin{aligned}
f^*(\omega \wedge \eta) &= f^* \left(\frac{1}{m!k!} \sum_{\sigma \in S_{m+k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma(\omega \otimes \eta) \right), \\
&= \frac{1}{m!k!} \sum_{\sigma \in S_{m+k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma(f^* (\omega \otimes \eta)), \\
&= \frac{1}{m!k!} \sum_{\sigma \in S_{m+k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma(f^* \omega \otimes f^* \eta), \\
&= f^* \omega \wedge f^* \eta.
\end{aligned}$$

$\square$

Problema 2. Consideremos una función lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(e_1) = -e_2, \qquad f(e_2) = e_1,$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es la base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. Sea $\{\phi^1, \phi^2\}$ la base dual. Calcule:

$$f^*(\phi^1),\ f^*(\phi^2),\ f^*(\phi^1 \wedge \phi^2).$$

Solución.
Evaluamos en un vector $v := v_1 e_1 + v_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f^*(\phi^1)(v) &= \phi^1(f(v)), \\ &= \phi^1(v_2 e_1 - v_1 e_2), \\ &= v_2, \\ &= \phi^2(v); \\ f^*(\phi^2)(v) &= \phi^2(f(v)), \\ &= \phi^2(v_2 e_1 - v_1 e_2), \\ &= -v_1, \\ &= -\phi^1(v); \end{aligned}$$

por lo que, $f^*(\phi^1) = \phi^2$ y $f^*(\phi^2) = -\phi^1$. Luego,

$$\begin{aligned} f^*(\phi^1 \wedge \phi^2) &= f^*\phi^1 \wedge f^*\phi^2, \\ &= \phi^2 \wedge (-\phi^1), \\ &= \phi^1 \wedge \phi^2. \end{aligned}$$

$\square$