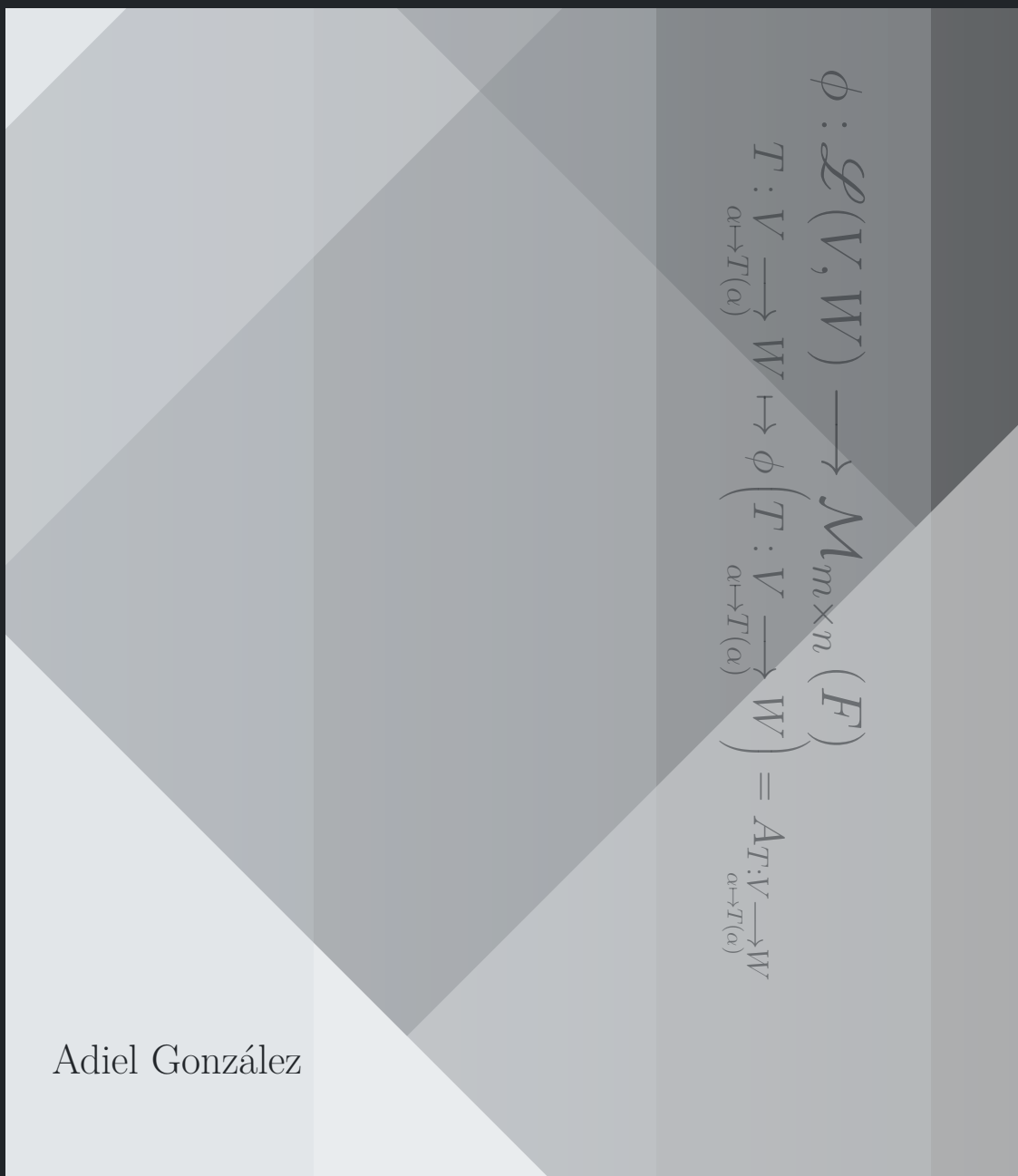
ÁLGEBRA II:

Notas del curso impartido por el Dr. Hugo Méndez Delgadillo en el periodo 25/1.



Adiel González

Índice general

Introducción

Estas notas son del curso de álgebra II impartido por el Dr. Hugo Méndez Delgadillo en la licenciatura en física y matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. El curso del Dr. Hugo fue en base a [HK71] para la mayoría del curso y [Mor14] para la sección de permutaciones. De mi parte extendí los temas a lo que el profesor tuvo planeado ver en el curso. Aún así, estas notas no sustituyen ningún material original y sólo deben utilizarse como apoyo para el curso de álgebra II.

Para todos los interesados en varios temas que podrían causar algo de confusión en una primera exposición, me tomé la libertad de dejar varios libros en la bibliografía para resolver algunas dudas que pudieran tener sobre lógica, conjuntos y espacios vectoriales de dimensión infinita, así como generalizaciones de los temas vistos en el curso.

Las primeras secciones tratan los famosos preliminares del profesor Hugo, en algunas cursos con más preliminares que en otros. En este caso el profesor Hugo da una noción de la teoría de conjuntos para establecer formalmente varios objetos de estudio, como lo son los sistemas de ecuaciones lineales y matrices, así como las bases de espacios vectoriales en general. De mi parte, el sistema axiomático se introduce por medio de un lenguaje formal como es expuesto en [FV17]. Es suficiente con tener una idea de lógica de primer orden, que puede verse en varios libros de la bibliografía o en los apuntes que proporcione el profesor Hugo. Para un estudio formal desde la matemática es recomendado leer [Ivo25c] junto con [Ivo25b], [FV13] y [Mon76]. En el primer capítulo se tratan los sistemas de ecuaciones formales y su relación con las matrices, haciendo uso a veces del llamado razonamiento inductivo con el cual abusamos pero evitamos ahogarnos en la notación, como lo dice el profesor Hugo. En el segundo capítulo se estudian algunos resultados sobre espacios vectoriales, usualmente enfocándonos en espacios vectoriales de dimensión finita, pero presentando demostraciones que son válidas para el caso infinito. Junto con esto se introducen las coordenadas de manera formal y algunos ejercicios divertidos. Para el tercer capítulo se estudia el tema principal del álgebra lineal, las transformaciones lineales. En el curso impartido en el semestre 2025-1 sólo se llegó a funcionales lineales, así que la parte correspondiente al doble dual confía fuertemente en [HK71]. En el cuarto capítulo se tratan las determinantes y su relación con las permutaciones. La exposición que se tuvo en el semestre fue pequeña por lo tanto las secciones también son algo rápidas. Para los apéndices, el primero trata el muy recurrente tema en los cursos del profesor Hugo de clases de equivalencia módulo n. Este tema es interesante y personalmente recomendaría leer sobre teoría de números y criptografía para ver la teoría y aplicaciones correspondientes. De momento, una corta exposición a este tema está en [Ave+17]. El segundo apéndice trata brevemente los conceptos necesarios para un solo teorema, el de la invarianza en la cardinalidad de bases de espacios vectoriales para el caso infinito. Un desarrollo más amplio de la teoría que trata estos espacios vectoriales se encuentra en [Jac53], pero personalmente recomendaría buscar otras fuentes como [Ivo25a].

Sobre notaciones, se denota a la delta de Kronecker por δ_{ij} y una de las más utilizadas es la del conjunto $[\![a, b]\!]$ que denota el intervalo de números enteros entre a y b. Otra de ellas es la de una

función dada como $f : A \longrightarrow B$, la cual se utiliza para distinguir las funciones de su gráfica pues $x \mapsto f(x)$ queremos dejar claro que es importante el dominio, el contradominio y la regla de correspondencia (relación). Aunque, entrando en la tipografía y el aspecto técnico del documento, las notaciones no son consistentes para preservar cierto orden en el texto, hablando de la definición como macros en el archivo.

Los ejercicios son en su mayoría teoremas que pudo dejar o no el profesor de ejercicio. En cualquier caso no son demasiado complejos de resolver, pero se tiene que tener en mente que algunos necesitan de pensar cuidadosamente y entender bien los conceptos, incluso aquellos en los preliminares o en los apéndices. Aún con estos ejercicios es recomendable estudiar completamente las listas que proporcione el profesor antes de cada examen. Estas son de mucha utilidad para resolverlo.

Finalmente, estas notas no tienen ningún tipo de conexión oficial al Instituto Politécnico Nacional mas que ser escritas por uno de los alumnos inscritos en el periodo 2026-1 así como tampoco buscan suplir la labor del profesor ni el material oficial que se encuentre en la bibliografía del plan de estudios del curso.

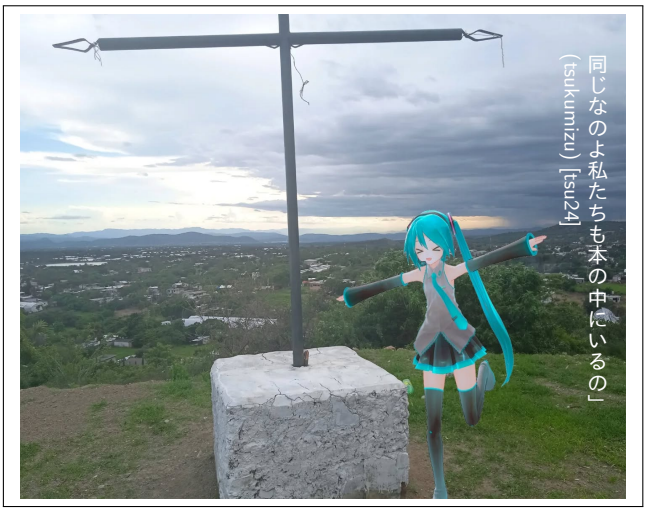


Figura 1: Miku en el cerro.

Referencias y recomendaciones

[Ave+17] D. Avella, O. Mendoza, E. C. Sánchez y M. J. Souto. *Grupos I*. 3.ª ed. Instituto de Matemáticas, 2017. ISBN: 9786070294358.

[Dea99] A. Deaño. *Introducción a la lógica formal*. 1.ª ed. Editorial Alianza, 1999. ISBN: 9788420686813.

[FV13] M. Fernández y L. M. Villegas. *Teoría de conjuntos, lógica y temas afines I*. 1.ª ed. Universidad Autónoma Metropolitana, 2013. ISBN: 9786074779752.

[FV17] M. Fernández y L. M. Villegas. *Teoría de conjuntos, lógica y temas afines II*. 1.ª ed. Universidad Autónoma Metropolitana, 2017. ISBN: 9786072812109.

[Her17] F. Hernández. *Teoría de conjuntos una introducción*. 2.ª ed. Aportaciones matemáticas, 2017. ISBN: 9786073022378.

[HK71] K. Hoffman y R. Kunze. *Linear Algebra*. 2.ª ed. Pearson, 1971. ISBN: 978-0135367971.

[Ivo25a] C. Ivorra. *Álgebra*. Carlos Ivorra Castillo, 2025. URL: `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Al.pdf`.

[Ivo25b] C. Ivorra. *Lógica Matemática*. Carlos Ivorra Castillo, 2025. URL: `https://www.uv.es/ivorra/Libros/LM.pdf`.

[Ivo25c] C. Ivorra. *Lógica y Teoría de Conjuntos*. Carlos Ivorra Castillo, 2025. URL: `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf`.

[Jac53] N. Jacobson. *Lectures in Abstract Algebra: II. Linear Algebra*. Springer New York, 1953. ISBN: 9781468470550.

[KF70] A. N. Kolmogorov y S.V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, 1970. ISBN: 9780486612263.

[Kle52] S.C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North-Holland Publishing Co., 1952. ISBN: 9780720421033.

[man22] まにお (manio). きたない君がいちばんかわいい *(5)*. 一迅社, 2022. ISBN: 9784758023955.

[Mon76] D. Monk. *Mathematical Logic*. Springer New York, 1976. ISBN: 9780387901701.

[Mor14] G. Morales. *Variedades diferenciables: un enfoque debido a O. A. Biberstein. Elementos de álgebra exterior, Volumen 1*. 1.ª ed. Instituto Politécnico Nacional, 2014. ISBN: 9786074144208.

[Qui69] W. Van O. Quine. *Set Theory and Its Logic*. Revised edition. Belknap Press of Harvard University Press, 1969. ISBN: 0674802071.

[SF96] R. M. Smullyan y M. Fitting. *Set Theory and the Continuum Problem*. Dover Publications, 1996. ISBN: 9780486474847.

[tsu24] つくみず (tsukumizu). シメジシミュレーション *05*. KADOKAWA, 2024. ISBN: 9784046832092.

Figura 2: Obra de arte en ESFM.

"Hugo es barco" - Santiago Méndez

0
Preliminares

§ Nociones sobre conjuntos

Algunos axiomas y resultados

La teoría desarrollada en el curso hace uso de la teoría de conjuntos de Zermelo-Frankel con el axioma de elección (ZFE). Un estudio más detallado se puede encontrar en [Her17], [SF96] y [FV17]. Para consultar sobre lógica, los primeros capítulos de dichos libros además de [Dea99] y [Kle52] son suficientes para tener una idea.

Se presenta la teoría de manera axiomática, donde se utilizan los conectores lógicos $\neg, \longrightarrow, \longleftrightarrow, \vee, \wedge$ y los cuantificadores $\forall, \exists$. Las fórmulas atómicas serán aquellas formadas con los relatores $=$ y $\in$, donde $\in$ se interpreta como "está en" o simplemente "en".

Definición: Introduciendo los símbolos $\{, \}$ y $|$, un **término clase** es una cadena de símbolos de la forma $\{x \mid \varphi\}$ tal que φ es una fórmula de la teoría de conjuntos.

Vale la pena interpretar la definición anterior. Un término clase o simplemente una **clase** es un objeto que no es parte de la teoría de conjuntos ZFE pero es de utilidad para hablar sobre ella. Las clases se cuantifican sobre conjuntos, informalmente, son colecciones de conjuntos.

Podemos describir la **clase de todos los conjuntos** por $\mathcal{V} := \{x \mid x = x\}$ y entonces convenir en que $x \in \mathcal{V}$ significa que x es un conjunto.

Para clases A y B se define $A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ y $A \subseteq B \equiv \forall x(x \in A \longrightarrow x \in B)$.

A continuación, algunos axiomas de la teoría ZFE:

A.1 $\exists y \forall x(\neg x \in y)$,

A.2 $\forall a \forall b \forall x(x \in a \longleftrightarrow x \in b) \longrightarrow a = b$,

A.3 Para cada término clase A $x \cap A \in \mathcal{V}$,

A.4 $\forall a \forall b \exists y \forall x(x \in y \longleftrightarrow x = a \vee x = b)$,

A.5 $\forall a \exists y \forall z(z \in y \longleftrightarrow \exists x \in a(z \in x))$,

A.6 $\forall a \exists y \forall z(z \in y \longleftrightarrow z \subseteq a)$,

A.7 $\forall x(\varnothing \neq x \longrightarrow \exists f(f$ es una función de elección para $x))$.

Algunos detalles sobre el Axioma 7 se encuentran en el apéndice B. Este es utilizado de forma implícita en muchas demostraciones en matemáticas.

Ahora es conveniente interpretar los axiomas:

Axioma 1 (de Existencia)**:** Existe un conjunto que no tiene elementos.

Axioma 2 (de Extensión)**:** Si todo elemento de a es un elemento de b entonces $a = b$.

De estos dos primeros axiomas se puede demostrar que el conjunto que no tiene elementos es único y por lo tanto podemos denotarlo por $\varnothing$.

Axioma 3 (de Especificación/Esquema de Comprensión)**:** Si φ es una fórmula de la teoría ZFE, diremos que φ es una propiedad y denotaremos $\varphi(x)$ si la propiedad se evalúa como verdadera en x. Entonces para cada propiedad φ y conjunto x, el término clase $\{y \mid y \in x \wedge \varphi(y)\}$ que denotamos $\{y \in x \mid \varphi(y)\}$ es un conjunto.

Axioma 4 (del Par)**:** Para cualesquiera conjuntos a y b existe un conjunto y tal que $x \in y$ si y sólo si $x = a$ o $x = b$.

Axioma 5 (de Unión)**:** Para cualquier conjunto a existe un conjunto y tal que $z \in y$ si y sólo si existe un $x \in a$ tal que $z \in x$.

Axioma 6 (del Conjunto Potencia)**:** Para cualquier conjunto a existe un conjunto y tal que $z \in y$ si y sólo si $z \subseteq a$.

Los conjuntos determinados por el axioma Esquema de Comprensión, axioma del Par, el axioma de Unión y el axioma del Conjunto Potencia son únicos.

No se extenderá el estudio de conjuntos en estas notas a los términos clases, así que de aquí en adelante se denota a los conjuntos con letras mayúsculas o letras caligráficas, góticas, etc. Para un estudio desde otras teorías o extensiones de la utilizada consultar [SF96] y [Qui69].

Definición (Par ordenado)***:*** Se define el **par ordenado** de elementos a y b como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Definición (Producto cartesiano)***:*** Sean A y B conjuntos cualesquiera. El **producto cartesiano** de A y de B es el conjunto $A \times B$ consistente de todos aquellos pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$, esto es,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Se puede demostrar que para cualesquiera A y B el conjunto $A \times B$ existe y está dado de la siguiente manera:

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Definición (Relación (binaria))***:*** Si A y B son conjuntos, se dice que el conjunto R es una **relación (binaria) de** A **en** B si

$$R \subseteq A \times B.$$

Si $R \subseteq A \times A$ diremos simplemente que R es una relación en A. Y denotamos $(x, y) \in R$ como $x\ R\ y$. En caso contrario, escribimos $x \not R\ y$

Ejemplo 0.1: *i)* $\varnothing$ *y* $A \times B$ *son relaciones en* $A \times B$ *(de* A *en* B*).*

ii) $\{(1,1),(2,2),(1,4),(3,4)\}$ *no es una relación en* $\{1,2,3\}$ *pero sí en* $\{1,2,3,4\}$*.*

Definición (Relación de asignación total)***:*** Si A y B son conjuntos y R es una **relación de** A **en** B, se dice que R es relación de **asignación total** si

$$\forall a \in A \; \exists \, b_a \in B \text{ tal que } (a, b_a) \in R$$

Definición (Relación de asignación única)***:*** Si A y B son conjuntos y R es una relación de A en B, se dice que R es relación de **asignación única** si satisface que

$$\forall a, b, c \;\text{ si } (a,b) \in R \text{ y } (a,c) \in R \text{ entonces } b = c.$$

Definición (Función)***:*** Si A y B son conjuntos y R es una relación de A en B, se dice que R es una **función**, si R es una relación de asignación total y de asignación única.

Ejemplo 0.2: *i)* $\{(1,3),(2,5)\}$ *no es relación de asignación total de* $\{1,2,3\}$ *en* $\{1,2,3,4,5\}$*. Pero sí desde* $\{1,2\}$*.*

ii) $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ *no es relación de asignamiento único en* $\{1,2\}$*. Pero* $\{(1,2),\ (2,1)\}$ *sí lo es.*

iii) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2,-3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $x \mapsto 1/(x^2 - 5x + 6)$ *no es función.*

iv) $g : \mathbb{R} \setminus \{2,3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $x \mapsto 1/(x^2 - 5x + 6)$ *es función.*

Definición (Relación reflexiva)***:*** Si A es un conjunto y R es una relación en A se dice que R es **reflexiva** si $\forall a \in A \ (a,a) \in R$.

Ejemplo 0.3: *i) La relación de perpendicularidad* $\perp$ *no es reflexiva.*

ii) $\neq$ *no es reflexiva.*

iii) $\parallel$ *depende de la definición.*

iv) $a \sim b \longleftrightarrow n \mid b - a$ *es reflexiva.*

Definición (Relación simétrica)***:*** Si A es un conjunto y R es una relación en A se dice que R es **simétrica** si $\forall a, b \in A$ si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$.

Definición (Relación transitiva)***:*** Si A es un conjunto y R es una relación en A se dice que R es **transitiva** si $\forall a, b, c \in A$ si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$.

Definición (Relación antisimétrica)***:*** Si A es un conjunto y R es una relación en A se dice que R es **antisimétrica** si $\forall a, b \in A$ si $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$, entonces $a = b$.

Definición (Relación de orden no estricto)***:*** Si A es un conjunto y R es una relación en A se dice que R es una **relación de orden no estricto** si satisface que R

i) es una relación reflexiva.

ii) es una relación antisimétrica.

iii) es una relación transitiva.

Para facilitar la escritura se escribe $a \; R \; b$ para $(a,b) \in R$.

Definición (Relación de equivalencia)***:*** Si A es un conjunto y R es una relación en $A, A \neq \varnothing$, se dice que R es una **relación de equivalencia** si R

i) es una relación reflexiva.

ii) es una relación simétrica.

iii) es una relación transitiva.

Definición (Clase de equivalencia módulo R)***:*** Si A es un conjunto no vacío y R es una relación de equivalencia en A y $a \in A$, se define la **clase de equivalencia del elemento** a **módulo** R (denotado $[\,a\,]_R$) como

$$[\,a\,]_R = \{x \in A \mid a \; R \; x\}.$$

Proposición 0.1 (Representación múltiple de una clase)**:** *Si A es un conjunto no vacío, R es una relación de equivalencia en A, $a, b \in A$ y $a \; R \; b$, entonces $[\,a\,]_R = [\,b\,]_R$.*

Demostración. $\boxed{\subseteq}$ $[\,a\,]_R \subseteq [\,b\,]_R$. Suponga que $a \; R \; b$, por simetría $b \; R \; a$, además si $x \in [\,a\,]_R$ entonces $a \; R \; x$, luego por transitividad $b \; R \; x$. Así $x \in [\,b\,]_R$

$\boxed{\supseteq}$ $[\,b\,]_R \subseteq [\,a\,]_R$ se demuestra de fórma análoga. Q.E.D.

Proposición 0.2 (Clases disjuntas)**:** *Si A es un conjunto no vacío, R una relación de equivalencia en A, $a, b \in A$ y $a \not R \; b$, entonces $[\,a\,]_R \cap [\,b\,]_R = \varnothing$.*

Demostración. Procedemos por contrapositiva.
Suponga que $[\,a\,]_R \cap [\,b\,]_R \neq \varnothing$, así $\exists x_0 \in [\,a\,]_R, x_0 \in [\,b\,]_R$, así $a \; R \; x_0$ y $b \; R \; x_0$, en particular por simetría $x_0 \; R \; b$, luego por transitividad $a \; R \; b$. Por lo anterior se tiene lo deseado. Q.E.D.

Definición (Partición y probable partición)***:*** Si A es un conjunto no vacío y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una familia no vacía de subconjuntos de A, se dice que la colección $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una **posible partición** de A si se satisface:

i) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} A_\alpha = A$.

ii) Si $\alpha, \beta \in \Omega$ con $\alpha \neq \beta$, entonces $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$

iii) Si además se satisface, $\forall \alpha \in \Omega, A_\alpha \neq \varnothing$, entonces se dice que $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una **partición**.

Proposición 0.3 (Particiones de conjuntos inducen relaciones de equivalencia)**:** *Si A es un conjunto no vacío y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una familia de conjuntos la cual es una partición de A, entonces la siguiente relación es una relación de equivalencia.*

$$x \sim_\Omega y \longleftrightarrow \exists a \in \Omega \text{ tal que } x, y \in A_\alpha$$

Demostración. $\boxed{Reflexiva}$ Como $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una partición de A, en particular $\bigcup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$, así, $\forall a \in A$ existe $\alpha_a \in \Omega$ tal que $a \in A_{\alpha_a}$, en particular $a \in A_{\alpha_a} \wedge a \in A_{\alpha_a}$. Así $a \sim_\Omega a$.

$\boxed{Simétrica}$ Suponga que $x \sim_\Omega y$, entonces existe $\alpha_{xy} \in \Omega$ tal que $x, y \in A_{\alpha_{xy}}$, así $y, x \in A_{\alpha_{xy}}$, luego $y \sim_\Omega x$.

Transitiva Suponga que $x \sim_\Omega y \wedge y \sim_\Omega z$, entonces existen $\alpha_{xy}, \alpha_{yz} \in \Omega$ tales que $x, y \in A_{\alpha_{xy}}$ y $y, z \in A_{\alpha_{yz}}$, en particular $y \in A_{\alpha xy}, y \in A_{\alpha_{yz}}$.

Como $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es partición, entonces $A_{\alpha_{xy}} = A_{\alpha yz}$, así $x, y, z \in A_{\alpha xy}$ en particular $x, z \in A_{\alpha_{xy}}$, así $x \sim_\Omega z$.

Q.E.D.

Definiciones y resultados específicos para nuestro estudio

Definición (Elementos comparables bajo un orden parcial)***:*** Sea A un conjunto y $\leq$ un orden parcial en A. Se dice que $a, b \in A$ son **comparables** bajo $\leq$ si $a \leq b$ o $b \leq a$.

Definición (Cadena)***:*** Sea A un conjunto y $\leq$ un orden en A. Se dice que $\mathscr{C}$ es una **cadena** en A si para cualesquiera $a, b \in A$ los elementos en $\mathscr{C}$ son comparables.

Definición (Orden total)***:*** Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, se dice **orden total** si $\forall a, b \in A$ a y b son comparables.

Observación: Una cadena es un orden total.

Definición (Elemento máximo de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado)***:*** Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $B \subseteq A$ y $b \in A$, $M \in B$ se dice **elemento máximo** del conjunto B en el orden parcial $\leq$ si para todo $d \in B$, $d \leq M$.

Definición (Supremo)***:*** Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, S se dice **supremo** de $B \subseteq A$ en el conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ si S es el mínimo del conjunto de cotas superiores.

Definición (Elemento maximal de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado)***:*** Sea $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$. $M' \in B$ se dice **elemento maximal** de B en el orden parcial $\leq$ si no existe $d \in B$ tal que $M' \leq d$, $M' \neq d$.

Definición (Conjuntos equipotentes)***:*** Si A y B son conjuntos, se dice que A y B son **equipotentes** o que tienen la misma cardinalidad (denotando $A \sim B$ o $\text{card}(A) = \text{card}(B)$) si existe $\phi : A \longrightarrow B$, $a \mapsto \phi(b)$ tal que ϕ es biyectiva.

Ejemplo 0.4: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. *En efecto, la función*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \begin{cases} n, \ si\ n = 0 \\ -\frac{n+1}{2}, \ si\ n\ es\ impar \\ \frac{n}{2}, \ si\ n\ es\ par \end{cases} \end{aligned}$$

es una función biyectiva.

Proposición 0.4: *La equipotencia en la clase de todos los conjuntos es una relación de equivalencia.*

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Lema 0.1 (Lema de Zorn)**:** *Sea A es un conjunto no vacío parcialmente ordenado por $\leq$. Para toda cadena $\mathscr{C}$ en A, si $\mathscr{C}$ está acotada superiormente entonces A tiene elementos maximales.*

Demostración. [Her17].

Q.E.D.

Teorema 0.1 (Cantor-Bernstein)**:** *Sean A y B conjuntos. Si existen $\phi_1 : A \longrightarrow B$ $\underset{a\mapsto\phi_1(a)}{}$ función inyectiva y $\phi_2 : B \longrightarrow A$ $\underset{b\mapsto\phi_2(b)}{}$ función inyectiva, entonces $A \sim B$.*

Demostración. [Her17]. Q.E.D.

Teorema 0.2 (Buen orden)**:** *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Demostración. [Her17]. Q.E.D.

Definición (Conjunto ordenado por un conjunto de índices bien ordenado)***:*** Si A y Ω son conjuntos, $\phi : \Omega \longrightarrow A$ $\underset{\alpha\mapsto\phi(\alpha)=\alpha_k}{}$ y $\leq_\omega$ un buen orden en Ω, se dice que el conjunto A está **ordenado bajo el orden inducido** por $\leq_\omega$ si el conjunto se ordena bajo $\phi(\Omega)$, es decir $\{\phi(\alpha)\}_{\alpha\in(\Omega,\leq_\omega)}$ es un conjunto bien ordenado.

§ Algunas estructuras algebraicas.

Definición (Operación binaria)***:*** Una operación binaria $*$ en un conjunto no vacío S es una función $* : S \times S \longrightarrow S$ $\underset{(s,t)\mapsto *((s,t))}{}$ (y denotamos $*((s,t))$ como $s * t$).

- La operación se dice que es **asociativa** si $(s * t) * r = s * (t * r)$ $\forall s, t, r \in S$.
- La operación se dice que es **conmutativa** si $s * t = t * s$ $\forall s, t \in S$.
- Un elemento e en S es llamado una **identidad** de $*$ si $s * e = e * s = s$ $\forall s \in S$.
- Si $*$ tiene un elemento identidad e, y $s \in S$, entonces $l \in S$ se dice un **inverso** para s si $s * l = l * s = e$.

Definición (Grupo)***:*** Una estructura $(G, *)$ se dice grupo si satisface

i) G es un conjunto no vacío.

ii) $* : G \times G \longrightarrow G$ $\underset{(g,h)\mapsto *((g,h)) := g*h}{}$ es una operación binaria la cual satisface

a) **Asociatividad.** $\forall a, b, c \in G$ $(a * b) * c = a * (b * c)$.

b) **Identidad.** Existe un **elemento identidad** $e \in G$, esto es,

$\forall a \in G$ $e * a = a * e = a$.

c) **Inversos.** Para cada $a \in G$ existe un elemento **inverso** $a^{-1} \in G$, esto es, un elemento $a^{-1} \in G$ tal que

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Si además cumple

d) **Conmutatividad.** $\forall a, b \in G$ $a * b = b * a$.

Se dice **grupo abeliano**.

Definición (Anillo)***:*** Una estructura $(R, +, \cdot)$ se dice anillo si satisface

i) $(R, +)$ es un grupo abeliano.

ii) $\cdot : R \times R \longrightarrow R$, $(a,b) \mapsto \cdot((a,b)) := a \cdot b$ es una operación binaria asociativa.

iii) $+$ y $\cdot$ satisfacen las propiedades distributivas, es decir

a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ \forall a, b, c \in R$.

b) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \ \forall a, b, c \in R$.

- El anillo se dice **conmutativo** si $\forall a, b \in R \ a \cdot b = b \cdot a$.
- Se dice **anillo con identidad** si existe un $1_R \in R$ tal que $\forall a \in R \ 1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$.
- Se dice **anillo conmutativo con identidad** si R es un anillo conmutativo y es un anillo con identidad.
- El anillo se dice **dominio entero** si es anillo conmutativo con identidad y satisface la propiedad

  $\forall a, b \in R$ si $a \cdot b = 0_R$ entonces $a = 0_R$ o $b = 0_R$.
- El anillo se dice **campo** si, además de ser anillo conmutativo con identidad, satisface

  $\forall a \in R \setminus \{0_R\}$ existe un $a^{-1} \in R$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$.

Definición (Subanillo)***:*** Si R es un anillo, un conjunto S se dice **subanillo** de R si $S \subseteq R$ y S es un anillo.

Los subanillos $S \subseteq R$ $(S, +_S, \cdot_S)$ tienen como operaciones las respectivas restricciones de las operaciones del anillo $(R, +, \cdot)$ a S.

Definición (Grupo de unidades)***:*** Si A es una estructura algebraica, a

$$U_R = \{u \in A \mid u \text{ tiene inverso } \}$$

se le llama **grupo de unidades** de A.

Definición (Ideal)***:*** Si R es un anillo, un conjunto I se dice **ideal** si I es un subanillo de R tal que $\forall a \in R$ y $\forall i \in I$, $a \cdot i \in I$ y $i \cdot a \in I$.

La siguiente es la generalización de la estructura espacio vectorial.

Definición (Módulo izquierdo)***:*** Sea R un anillo. Una estructura $(M, +_M, \cdot_M, R)$ se dice **módulo izquierdo** si satisface

i) $(M, +_M)$ es un grupo abeliano.

ii) $\cdot_M : R \times M \longrightarrow M$, $(a,m) \mapsto \cdot_M((a,m)) := a \cdot_M m$ es una función que satisface

a) $\forall a, b \in R$ y $\forall m \in M \ (a \cdot b) \cdot_M m = a \cdot_M (b \cdot_M m)$.

b) $\forall a, b \in R$ y $\forall m \in M \ (a + b) \cdot_M m = a \cdot_M m +_M b \cdot_M m$.

c) $\forall a \in R$ y $\forall m, n \in M \ a \cdot_M (m +_M n) = a \cdot_M m +_M a \cdot_M n$.

d) $\forall m \in M$ existe un $1_M \in R$ tal que $1_M \cdot_M m = m$.

También se puede definir el **módulo derecho**, la razón por la que se enuncia la definición de módulo izquierdo es porque usualmente se conviene realizar la operación $\cdot_M$ desde la izquierda.

§ Ejercicios

1. Demostrar que los conjuntos determinados por A.1, A.3, A.4, A.5 y A.6 son únicos.
2. Demostrar la Proposición 0.4.
3. Encontrar todas las relaciones en $\{1, 2, 3\}$ y determinar de qué tipo son.
4. Determine cuáles de las siguientes son relaciones de equivalencia:
   a) $\in_X := \{(x, y) \in X \times X \mid x \in y\}$ donde $X = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$.
   b) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ en $\{1, 2, 3\}$.
   c) $<$ en $\mathbb{R}$.
   d) $\neq$ en $\mathbb{R}$.
5. ¿Existe algún conjunto X donde $\in_X$ sea una relación de equivalencia? Para esto considere los casos i) afirmamos el axioma de fundación:

   $$\text{A.8) } A \neq \varnothing \longrightarrow \exists x \in A \forall y \in A (y \notin x)$$

   y ii) cuando lo negamos.
6. Demostrar que el conjunto $\mathcal{P}_g = \{y \in \mathcal{F} \mid \frac{d^2}{dx^2} y(x) + a_1 \frac{d}{dx} y(x) + a_0 y(x) = 0\}$ con la operación usual de $+$ forma un grupo abeliano.
7. Demostrar que el conjunto $\mathcal{F}_{\mathscr{I}} = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ es integrable en } [a, b]\}$ junto con la operación usual de $+$ forma un grupo abeliano.
8. a) Utilizar el teorema fundamental de la aritmética para encontrar una inyección de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$ y de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{N}$.
   b) Demostrar que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
9. Denótese la clase $\mathcal{L}_{\text{prop}}/\equiv$ a la clase de todas las fórmulas del lenguaje formal de la lógica proposicional reducida bajo la relación de equivalencia de fórmulas. Defínase $\varphi \oplus \psi \equiv \neg(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ y denótese una tautología por $\top$ y una contradicción por $\bot$.

   Demuestre que $(\mathcal{L}_{\text{prop}}/\equiv, \oplus, \wedge)$ es un anillo.

1
Sistemas de ecuaciones lineales

§ Sistemas de ecuaciones lineales

Nos quedamos con la idea intuitiva de incógnita, y denotamos por

$$E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}}$$

a la colección de ecuaciones lineales con coeficientes en el anillo R y con incógnitas ordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$.

Las expresiones de las incógnitas tienen potencia 1 y no se multiplican entre sí.

Siendo el caso de que los coeficientes estén en un campo F, entonces escribimos $E_{CF_{x_1,\ldots,x_n}}$ y se hacen las sustituciones adecuadas en las definiciones.

Se identifica la colección de ecuaciones lineales con coeficientes en el anillo R y con incógnitas ordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ como

$$R^n \times R.$$

Convenimos en escribir la operación $\cdot$ de un anillo R de manera que para $a, b \in R$ $a \cdot b = ab$. Luego, una ecuación en el anillo R de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ se representa como $((a_1, a_2, \ldots, a_n), b)$

Definición (Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas)**:** Un sistema A de m ecuaciones lineales con n incógnitas ordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ con coeficientes en un anillo R es una función

$$\begin{array}{c} A : [\![1, m]\!] \longrightarrow E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}} \\ i \mapsto a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = y_i \end{array}$$

denotado por

$$A = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \right.$$

Definición (Solución de un sistema de ecuaciones lineales)**:** Sea A un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas ordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ con coeficientes un anillo R, se dice que $\mathcal{S}_A \subseteq R^n$ es una **solución del sistema** A si

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{S}_A$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\alpha_n & = & y_1 \\ a_{21}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{2n}\alpha_n & = & y_2 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\alpha_n & = & y_m \end{array}$$

es decir, $\mathcal{S}_A = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ satisface cada ecuación de } A\}$

Definición (Sistema de ecuaciones lineales homogéneo)**:** Si A es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas ordenadas $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes en un anillo R

$$A = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \right.$$

se dice **homogéneo** si $\forall i \in [\![1, m]\!] \;\; y_i = 0$.

Si A es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas ordenadas $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes en un anillo R. Denotamos por

$$E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}A} \text{ a } A([\![1, m]\!])$$

Lema 1.1: *Sea A un sistema de ecuaciones lineales con n-incógnitas ordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ con coeficientes en un anillo R, entonces*

$$\mathcal{S}_A = \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{S}_{A(i)}$$

donde $\mathcal{S}_{A(i)}$ denota la solución de la i-ésima ecuación de A.

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Lema 1.2: *Si A y B son dos sistemas de ecuaciones lineales con n-incógnitas ordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$; m_A el número de ecuaciones del sistema A; m_B el número de ecuaciones del sistema B, con coeficientes en un anillo R tales que $E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}A} \subseteq E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}B}$, entonces*

$$\mathcal{S}_B \subseteq \mathcal{S}_A$$

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Proposición 1.1: *Si A y B son dos sistemas de ecuaciones lineales con n-incógnitas ordendas $(x_1, \ldots, x_n)$; m_A el número de ecuaciones del sistema A; m_B el número de ecuaciones del sistema B, con coeficientes en un anillo R tales que $E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}A} = E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}B}$, entonces*

$$\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_A$$

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición (Combinación lineal de ecuaciones lineales)***:*** Sea A un sistema de m ecuaciones lineales con n-incógnitas ordendas $(x_1, \ldots, x_n)$ con coeficientes en un anillo R, se dice que la ecuación $d_1x_1 + \ldots + d_nx_n = y$ es **combinación lineal** de las ecuaciones del sistema:

$$A = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \right.$$

si existen $c_1, \ldots, c_n \in R$ tales que

$$d_i = \sum_{j=1}^{m} c_j a_{ji} \text{ y } y = \sum_{j=1}^{m} c_j y_j$$

Lema 1.3: *Sean $A, A_{i\leftrightarrow j}$ sistemas de m ecuaciones lineales de n-incógnitas ordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en un anillo R tales que $A(i) = A_{i\leftrightarrow j}(j)$ y $A(j) = A_{i\leftrightarrow j}(i)$ y $A(k) = A_{i\leftrightarrow j}(k)$ $\forall k \in [\![1, m]\!] \setminus \{i, j\}$, entonces*

$$S_A = S_{A_{i\leftrightarrow j}}$$

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición: (Operaciones de ecuaciones lineales) Sea R un anillo. Entonces definimos lo siguiente:

$$+ : E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}} \times E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}} \longrightarrow E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}}$$
$$(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = y_i, b_{j1}x_1 + \ldots + b_{jn}x_n = y_j) \mapsto ((a_{i1} + b_{j1})x_1 + \ldots + (a_{in} + b_{jn})x_n = y_i + y_j)$$

$$\cdot : R \times E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}} \longrightarrow E_{CR_{x_1,\ldots,x_n}}$$
$$(c, a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = y_j) \mapsto ca_{i1}x_1 + \ldots + ca_{in}x_n = cy_i$$

Entendiéndose que la operación aditiva en la asignación es parte del anillo $(R, +, \cdot)$.

Se entenderá desde ahora al mencionar un sistema de m ecuaciones lineales con n-incógnitas que esté tiene incógnitas ordenadas (dígase $(x_1, \ldots, x_n)$) y tiene coeficientes en un anillo R o un campo F.

Proposición 1.2: *Sean $A, A_{i\to c\cdot i}$ sistemas de ecuaciones lineales con n-incógnitas tales que*

$$\forall j \in [\![1, m]\!] \setminus \{i\} \quad A(j) = A_{i\to c\cdot i}(j) \text{ y } c \cdot A(i) = A_{i\to c\cdot i}(i), c \in \mathcal{U}_R$$

$$\textit{entonces } \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{A_{i\to c\cdot i}}$$

Basta demostrar que $\mathcal{S}_{A(i)} = \mathcal{S}_{A_{i\to c\cdot i}}$, en efecto.

Demostración. $\boxed{\subseteq}$ Suponga que la n-ada $(d_1, \ldots, d_n) \in R^n$ sea solución de $A(i)$. Es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = y_i, \text{ luego } c \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = c \cdot y_i$$

$$\therefore (d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{S}_{A_{i\to c\cdot i}(i)}$$

$$\text{luego, } \mathcal{S}_{A(i)} \subseteq \mathcal{S}_{A_{i\to c\cdot i}(i)}$$

$\boxed{\supseteq}$ Suponga que la n-ada $(d_1, \ldots, d_n) \in S_{A_{i\to c\cdot i}(i)}$, entonces

$$c \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j = c \cdot y_i$$

$$\text{como } c \in \mathcal{U}_R, \text{ entonces } c^{-1}c \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j = c^{-1}c \cdot y_i, \text{ así}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j = y_i \text{ es decir } (d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{S}_{A(i)}$$

$$\text{luego } \mathcal{S}_{A_{i\to c\cdot i}(i)} \subseteq \mathcal{S}_{A(i)}$$

De la doble contención, $\mathcal{S}_{A(i)} = \mathcal{S}_{A_{i\to c\cdot i}(i)}$ Q.E.D.

Proposición 1.3: *Sean A, $A_{i\to i+c\cdot j}(i)$ sistemas de ecuaciones lineales con n-incógnitas tales que:*

$$\forall j \in [\![1, m]\!] \setminus \{i\} \;\; A(j) = A_{i\to i+c\cdot j}(j) \;\; y \;\; A(i) + c \cdot A(j) = A_{i\to i+c\cdot j}(i), c \in \mathcal{U}_R$$

entonces $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{A_{i\to i+c\cdot j}}$

Basta demostrar que $\mathcal{S}_{A(i)} \cap \mathcal{S}_{A(j)} = \mathcal{S}_{A_{i\to i+c\cdot j}(i)} \cap \mathcal{S}_{A_{i\to i+c\cdot j}(j)}$

Demostración. $\boxed{\subseteq}$ Suponga que $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{S}_{A(i)} \cap \mathcal{S}_{A(j)}$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k = y_i, c\sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_k = cy_j, \text{ en particular}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + ca_{jk}) d_k = y_i + y_j$$

$$\text{entonces } (d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{S}_{A_{i\to i+c\cdot j}(i)} \cap \mathcal{S}_{A_{i\to i+c\cdot j}(j)}.$$

La demostración de $\boxed{\supseteq}$ se queda como ejercicio. Q.E.D.

Definición (Sistemas equivalentes)***:*** Dos sistemas A, B de ecuaciones lineales con n-incógnitas se dicen sistemas equivalentes ($A \equiv B$) si cada ecuación del sistema A es combinación lineal de las ecuaciones del sistema B y cada ecuación del sistema B es combinación lineal de las ecuaciones del sistema A.

Lema 1.4: *Si A es un sistema de ecuaciones lineales con n-incógnitas y C_{la} una combinación lineal de las ecuaciones del sistema A. Entonces $\mathcal{S}_A \subseteq \mathcal{S}_{Cl_A}$*

Demostración. Considere

$$A = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \right.$$

Sea $\sum_{k=1}^{m}(d_k[a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n]) = \sum_{k=1}^{m} d_k y_k$ una combinación lineal de las ecuaciones del sistema A. Si $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathcal{S}_A$, entonces $\forall i \in [\![1,m]\!]$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \bigcap_{l=1}^{m} \mathcal{S}_{A(i)}$, luego en particular $\forall i \in [\![1,m]\!]$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathcal{S}_{A(i)}$. En particular $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathcal{S}_{c\cdot A(i)}$ $\forall i \in [\![1,m]\!]$, así $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ es solución para Cl_A. ¨Por tanto $\mathcal{S}_A \subseteq \mathcal{S}_{Cl_A}$. Q.E.D.

Teorema 1.1: *Si A y B son sistemas de ecuaciones lineales con n-incógnitas y coeficientes en el anillo conmutativo con identidad R, tales que $A \equiv B$, entonces*

$$\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B$$

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

§ Matrices

Definición (Matriz)***:*** Sea R un anillo. Una matriz es una función

$$\begin{array}{c} A : [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!] \longrightarrow R \\ (i,j) \mapsto A((i,j)) := a_{ij} \end{array}$$

y denotamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definición (Orden de una matriz)***:*** Decimos que el orden de una matriz es el número de filas por el número de columnas, esto es:

$$m \times n$$

Bajo esta definición, una matriz de orden $m \times n$ es de distinto orden a una matriz $n \times m$. Denotamos el conjunto de matrices de m filas con n columnas con coeficientes en el anillo R como

$$\mathcal{M}_{m\times n}(R) = \{A \in \mathcal{U} \mid A \text{ es una matriz de orden } m \times n\}.$$

Si la matriz es de orden $n \times n$, escribimos entonces $\mathcal{M}_n(R)$.

Definición (Operaciones con matrices)***:*** Definimos lo siguiente:

$$\begin{array}{c} +: \mathcal{M}_{m\times n}(R) \times \mathcal{M}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(R) \\ (A((i,j)), B((i,j))) \mapsto C((i,j)) := c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \cdot_R : R \times \mathcal{M}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(R) \\ (\alpha, A((i,j))) \mapsto \alpha A((i,j)) := \alpha \cdot_R (a_{ij}) = \alpha \cdot_R a_{ij} \quad \forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \cdot : \mathcal{M}_{m\times l}(R) \times \mathcal{M}_{l\times n}(R) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(R) \\ ((A,B)) \mapsto \cdot((A,B)) := C, c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} \end{array}$$

Definición (Matriz aumentada)***:*** Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$, se dice que B es la **matriz aumentada** de A con vector resultado $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ si

$$B \in \mathcal{M}_{m\times n+1}(R) \text{ tal que } \forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$$

$$A((i,j)) = B((i,j)).$$

A cada sistema de m ecuaciones lineales con n-incógnitas

$$A = \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = y_1 \\ & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = y_m \end{cases}$$

Se le asigna la matriz aumentada

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array}\right]$$

Operaciones elementales

Definición: Una operación elemental de matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en el anillo R es una función

$$\begin{array}{c} e : \mathcal{M}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(R) \\ A \mapsto e(A) \end{array}$$

donde $e(A)$ es la representación de un sistema de equivalente al sistema A_{EC} que es representado por la matriz A el cual proviene de una operación elemental de sistemas.

- Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ y sea A_{EC} el sistema que representa. Entonces el sistema $A_{ECi\leftrightarrow j}$ lo representa la matriz $e_1(A)$ donde se intercambian los renglones i y j de la matriz A.
- Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ y sea A_{EC} el sistema que representa. Entonces el sistema $A_{ECi\to c\cdot i}$ lo representa la matriz $e_2(A)$ donde la fila i se cambia por la fila que resulta de operar $c \cdot a_{ij}$ $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $c \in R$.
- Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ y sea A_{EC} el sistema que representa. Entonces el sistema $A_{ECi\to i+c\cdot j}$ lo representa la matriz $e_3(A)$ donde la fila i se cambia por la fila que resulta de operar $a_{ik} + c \cdot a_{jk}$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $c \in R$.

Observación: Los sistemas homogéneos son invariantes bajo operaciones elementales.

Ejemplo 1.1: *Lugar de trabajo:* $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } A_{EC} = \begin{cases} 3x & + & y & = & 7 \\ 2x & - & y & = & 8 \end{cases}$$

luego $A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \end{array}\right]$, *entonces* $e_1(A) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right]$

Si $A_{EC2\to c\cdot 2} = \begin{cases} 3x & + & ty & = & 7 \\ 2cx & - & cy & = & 8c \end{cases}$

entonces $e_2(A) = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 7 \\ 2c & -c & 8c \end{array}\right]$

Si $A_{EC1\to 1+c\cdot 2} = \begin{cases} (3+2c)x & + & (1-c)y & = & 7+8c \\ 2x & - & y & = & 8 \end{cases}$

entonces, $e_3(A) = \left[\begin{array}{cc|c} 3+2c & 1-c & 7+8c \\ 2 & -1 & 8 \end{array}\right]$

Desde ahora nos referiremos a las operaciones elementales e_1, e_2, e_3 con el respectivo cambio en el subíndice para facilitar la lectura. Entonces si el sistema de ecuaciones lineales A_{EC} es representado por la matriz A, a $A_{ECi\leftrightarrow j}$ se le representa con la matriz $e_{i\leftrightarrow j}(A)$

Sea $e_{i\leftrightarrow j}$ la operación elemental de matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en R, entonces su operación inversa es la misma operación elemental.

Sea $e_{i\to c\cdot i}$ la operación elemental de matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en R y $c \in R$, si $c \in \mathcal{U}_R$ entonces su operación inversa es la matriz elemental $e_{i\to c^{-1}\cdot i}$.

Sea $e_{i\to i+c\cdot j}$ la operación elemental de matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en R, entonces su operación inversa es la operación elemental $e_{i\to i+(-c)\cdot j}$.

Observación: Si $c \in \mathcal{U}_R$ entonces $-c \in \mathcal{U}_R$

Matrices equivalentes por filas

Definición (Matrices equivalentes por filas)***:*** Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$, se dice que A es equivalente por filas a $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ si existe una secuencia finita $e_1, \ldots, e_l$ de operaciones elementales por fila tal que $e_l \circ \cdots \circ e_1(A) = B$.

Observación: Si $c \in \mathcal{U}_R$ entonces $-c \in \mathcal{U}_R$

Proposición 1.4: *La equivalencia de matrices en* $\mathcal{M}_{m\times n}(R)$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Las matrices equivalentes tienen el mismo orden, pero lo sistemas equivalentes no necesariamente tienen el mismo orden.

Ejemplo 1.2: *Lugar de trabajo:* $\mathbb{R}$.

$$\textit{Si } A = \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \textit{ y } B = \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 5x - 5y = 0 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}, \textit{ } A \equiv B, \textit{ entonces tomamos máx}\{[\![1, m_A]\!], [\![1, m_B]\!]\}$$

$$\textit{y construimos el sistema } A^* = \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

y entonces manejamos las matrices representativas de A^* *y* B.

Definición (Matriz escalón reducida por filas)**:** Sea R un anillo, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ se dice que A es una matriz escalón reducida por filas si satisface

- A es la matriz $\mathbf{0}_{m\times n}(R)$.
- Si A no es la matriz $\mathbf{0}_{m\times n}(R)$ y satisface:
  - i) El primer elemento no nulo de cada fila no nula es igual a 1_R.
  - ii) Cada columna de A que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila tiene todos sus otros elementos en 0_R.
  - iii) a) Toda fila de A que tiene todos sus coeficientes cero está por debajo de toda fila que tenga algún coeficiente no nulo.
    - b) Si las filas $1, \ldots, r$ son las filas no nulas de A y si el primer elemento no nulo de la fila i está en la columna k_i, entonces $k_1 < \cdots < k_r$.

Teorema 1.2: *Toda matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ *es equivalente por filas a una matriz escalón reducida por filas.*

La demostración de este teorema será "platicada" ya que no es viable demostrar el teorema de una manera más formal. Entonces usaremos el ***razonamiento inductivo****.*

Demostración. Si $A = \mathbf{0}_{m\times n}(R)$ entonces A es escalón reducida. Luego A es equivalente por filas a A.

i) Si A tiene filas nulas, al hacer cambios adecuados se pueden llevar, bajo operaciones elementales por fila, a ocupar las últimas filas. Así A es equivalente por filas a esta matriz resultante A_{Red}.

ii) Por medio de una cantidad finita de operaciones elementales por fila se puede colocar el primer elemento no nulo de cada fila de A_{Red} en un orden adecuado. Así, esta matriz A_{Red_2} es equivalente por filas a A_{Red}, luego a A.

iii) En el caso de que se pueda realizar la multiplicación por inversos multiplicativos (haciendo un análisis detallado en anillos) se multiplica el primer elemento no nulo de la primera fila de la matriz por su inverso multiplicativo, después, los elementos de la columna donde está ese elemento se hacen cero. Esto se hace con cada elemento no nulo de cada fila siempre y cuando se pueda multiplicar por el inverso.

Q.E.D.

Ejemplo 1.3: *Lugar de trabajo:* $\mathbb{R}$.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_2 \cdot (-1) \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_1 \cdot \frac{1}{2} \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Ejemplo 1.4: *Lugar de trabajo:* $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, $X = \{1,2,3\}$.

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \{1,2\} \cap \alpha & \triangle & \{X\} \cap \beta & = & \{1\} \\ \varnothing \cap \alpha & \triangle & \{2,3\} \cap \beta & = & \{2\} \end{cases}.$$

Construimos el sistema $\mathcal{A}^* = \begin{cases} X \cap \alpha & \triangle & \{1,2\} \cap \beta & = & \{1\} \\ \{2,3\} \cap \alpha & \triangle & \varnothing \cap \beta & = & \{2\} \end{cases}$ *.luego*

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} X & \{1,2\} & \{1\} \\ \{2,3\} & \varnothing & \{2\} \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 \triangle \{2,3\} \cap R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} X & \{1,2\} & \{1\} \\ \varnothing & \{2\} & \{2\} \end{array}\right]$$

En este caso, no podemos llevar la matriz a su forma escalón reducida por filas debido al anillo sobre el que trabajamos. Si se busca encontrar la solución del sistema, habría que encontrar la intersección de las soluciones de cada ecuación.

Ejemplo 1.5: *Lugar de trabajo:* $\mathbb{Z}[x]$.

$$\mathcal{A} = \begin{cases} (x^2-1)A & + & (x^2+x-1)B & = & x \\ (x)A & + & (x+1)B & = & 1 \end{cases}.$$

Construimos la matriz $A = \left[\begin{array}{cc|c} x^2-1 & x^2+x-1 & x \\ x & x+1 & 1 \end{array}\right]$ $R_1 \to (-1) \cdot R_1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-x^2 & 1-x-x^2 & -x \\ x & x+1 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 + x \cdot R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ x & x+1 & 2 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 - x \cdot R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 - R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Realizando las operaciones elementales adecuadas obtenemos la matriz escalón reducida por filas que representa un sistema equivalente al original. Este último sistema llega a mostrar las soluciones del sistema o nos da un sistema más simple para aplicar la intersección de soluciones.

Ejemplo 1.6: *Lugar de trabajo:* $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{A} = \begin{cases} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 7 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 - R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \text{ luego, } \mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \varnothing$$

$$\mathcal{B} = \begin{cases} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 8 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 - R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

luego, $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} = \{(x, 4-x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 0 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \quad R_2 \to (-\tfrac{1}{2}) \cdot R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 - R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

luego, $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \{(1,1)\}$

En el siguiente ejemplo se ilustra la importancia de analizar las propiedades del anillo sobre el que trabajamos.

Ejemplo 1.7 (Operaciones en $\mathbb{Z}/\sim_n$)**:** *Lugar de trabajo:* $\mathbb{Z}/\sim_6$.

$\mathcal{A} = \{[0]_6 x + [0]_6 y = [3]_6$ *Note que* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \varnothing$*. Si ahora construimos* $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{i \to 2 \cdot 1}$*, entonces* $\mathcal{B} = \{[0]_6 + [0]_6 = [0]_6$ *entonces* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} = \mathbb{Z}/\sim_6 \times \mathbb{Z}/\sim_6$.

Ejemplo 1.8 (Otra forma de obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales)**:** *Lugar de trabajo:* $\mathbb{Z}/\sim_6$.

$$\mathcal{A}' = \begin{cases} [3]_6 x + [2]_6 y = [2]_6 \\ [2]_6 x + [4]_6 y = [0]_6 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} [3]_6 & [2]_6 & [2]_6 \\ [2]_6 & [4]_6 & [0]_6 \end{array}\right] \sim_{\subseteq} \quad R_2 \to [3]_6 \cdot R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} [3]_6 & [2]_6 & [2]_6 \\ [0]_6 & [0]_6 & [0]_6 \end{array}\right] \quad R_1 \to [2]_6 \cdot R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} [0]_6 & [4]_6 & [4]_6 \\ [0]_6 & [0]_6 & [0]_6 \end{array}\right]$$

Luego, $\mathcal{S}_{\mathcal{A}'} \subseteq \mathbb{Z}/\sim_6 \times S_{[0]_6 x + [4]_6 y = [4]_6}$*. Ahora resolvemos*

$$[0]_6 + [4]_6 = [4]_6$$
$$[4]_6 y - [4]_6 = [0]_6$$
$$[4]_6 (y - [1]_6) = [0]_6$$

Así, $y \in \{[1]_6, [4]_6\}$*. Luego* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}'} \subseteq \mathbb{Z}/\sim_6 \times \{[1]_6, [4]_6\}$*. Si ahora evaluamos las ecuaciones del sistema en un elemento de* $\mathbb{Z}/\sim_6 \times \{[1]_6, [4]_6\}$ *si algún elemento satisface las ecuaciones de* $\mathcal{A}'$*, entonces está en* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$*. Así, encontramos que*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}'} = \{([4]_6, [1]_6), ([4]_6, [4]_6)\}.$$

Ejemplo 1.9: *Lugar de trabajo:* $2\mathbb{Z}$.

$$\mathcal{A} = \begin{cases} 2A + 4B = 16 \\ 12A + 26B = 100 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 16 \\ 12 & 26 & 100 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 - 6R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 - 2R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Resolvemos ahora:

a) $2A + 0B = 8$

b) $0A + 2B = 4$

$$2A - 8 = 0$$
$$2(A - 4) = 0$$

Como $\mathbb{Z}$ es un dominio entero, entonces los subanillos de $\mathbb{Z}$ son un dominio entero. Como $2 \neq 0$

$$A - 4 = 0$$

$$A = 4$$

Similarmente, para b), obtenemos $B = 2$. Luego $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{(4, 2)\}$

Matrices elementales y matrices inversas

Definición (Matriz elemental)***:*** Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ se dice **matriz elemental** si se puede obtener a partir de la matriz identidad en $\mathcal{M}_m(R)$ a través de sólo una operación elemental por fila.

Ejemplo 1.10: *Podemos obtener matrices elementales para un Ejemplo anterior aplicando las operaciones elementales por fila a la matriz identidad en $\mathcal{M}_m(R)$. Entonces*

$$I_{\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/\sim_6)} = \begin{bmatrix} [1]_6 & [0]_6 \\ [0]_6 & [1]_6 \end{bmatrix} \quad R_2 \to [3]_6 \cdot R_2 \quad \begin{bmatrix} [3]_6 & [0]_6 \\ [0]_6 & [1]_6 \end{bmatrix} \text{ es una matriz elemental.}$$

Teorema 1.3: *Sea e una operación elemental por fila y $E \in \mathcal{M}_m(R)$ la matriz elemental $e(I)$. Entonces para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$*

$$e(A) = EA$$

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Corolario 1.1: *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$, entonces B es equivalente por filas a A si y sólo si $B = PA$, donde P es el producto de matrices elementales en $\mathcal{M}_m(R)$.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición (Matriz inversa)***:*** Sea $A \in \mathcal{M}_n(R)$. Una matriz $B \in \mathcal{M}_n(R)$ tal que $BA = I_{\mathcal{M}_n(R)}$ es llamada una **matriz inversa izquierda** de A; una matriz $B \in \mathcal{M}_n(R)$ tal que $AB = I_{\mathcal{M}_n(R)}$ es llamada una **matriz inversa derecha** de A. Si $B \in \mathcal{M}_n(R)$ es tal que $BA = AB = I_{\mathcal{M}_n(R)}$, B se dice una **matriz inversa** de A y decimos que A es invertible.

Podemos demostrar que una matriz inversa es única y entonces denotamos A^{-1} a la matriz inversa de A.

Teorema 1.4: *Si $A \in \mathcal{M}_n(R)$, las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes.*

i) A es invertible.

ii) A es equivalente por filas a $I_{\mathcal{M}_n(R)}$.

iii) A es producto de matrices elementales.

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Ejemplo 1.11: *Lugar de trabajo:* $\mathbb{Z}/\sim_7$.

$$\mathcal{A} = \begin{cases} [323]_7x & + & [228]_7y & + & [123]_7z & = & [2096]_7 \\ [512]_7x & + & [238]_7y & + & [311]_7z & = & [9193]_7 \\ [212]_7x & + & [365]_7y & + & [223]_7z & = & [6995]_7 \end{cases}$$

Solución:
Elegimos representantes más adecuados, y tenemos:

$$\mathcal{A} = \begin{cases} [1]_7x & + & [4]_7y & + & [4]_7z & = & [3]_7 \\ [1]_7x & + & [0]_7y & + & [3]_7z & = & [2]_7 \\ [2]_7x & + & [1]_7y & + & [6]_7z & = & [2]_7 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} [1]_7 & [4]_7 & [4]_7 & [3]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [3]_7 & [2]_7 \\ [2]_7 & [1]_7 & [6]_7 & [2]_7 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + [6]_7 \cdot R_1 \\ R_3 \to R_3 + [5]_7 \cdot R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} [1]_7 & [4]_7 & [4]_7 & [3]_7 \\ [0]_7 & [3]_7 & [6]_7 & [6]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [5]_7 & [3]_7 \end{array}\right] \quad R_3 \to [3]_7 \cdot R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} [1]_7 & [4]_7 & [4]_7 & [3]_7 \\ [0]_7 & [3]_7 & [6]_7 & [6]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 & [2]_7 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 + [3]_7 \cdot R_3 \\ R_2 \to R_2 + [1]_7 \cdot R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} [1]_7 & [4]_7 & [0]_7 & [2]_7 \\ [0]_7 & [3]_7 & [0]_7 & [1]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 & [2]_7 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 \to [5]_7 \cdot R_2 \\ R_1 \to R_1 + [3]_7 \cdot R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} [1]_7 & [0]_7 & [0]_7 & [3]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 & [0]_7 & [5]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 & [2]_7 \end{array}\right] \text{ Entonces, } \mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{([3]_7, [5]_7, [2]_7)\}.$$

Luego, una vez encontradas las matrices elementales, las multiplicamos de modo que nos den la inversa de la matriz del sistema $\mathcal{A}$.

$$\begin{bmatrix} [1]_7 & [3]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1]_7 & [0]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [5]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1]_7 & [0]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 & [1]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1]_7 & [0]_7 & [3]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 \end{bmatrix} \cdot$$
$$\begin{bmatrix} [1]_7 & [0]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [3]_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1]_7 & [0]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 & [0]_7 \\ [5]_7 & [0]_7 & [1]_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1]_7 & [0]_7 & [0]_7 \\ [6]_7 & [1]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [4]_7 & [1]_7 & [5]_7 \\ [0]_7 & [5]_7 & [1]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [3]_7 \end{bmatrix}$$

Luego, $\begin{bmatrix} [4]_7 & [1]_7 & [5]_7 \\ [0]_7 & [5]_7 & [1]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [3]_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1]_7 & [4]_7 & [4]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [3]_7 \\ [2]_7 & [1]_7 & [6]_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1]_7 & [0]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 & [0]_7 \\ [0]_7 & [0]_7 & [1]_7 \end{bmatrix}$

§ Ejercicios

1. Demostrar el Lema 1.1.
2. Demostrar el Lema 1.2.
3. Demostrar la Proposición 1.1.
4. Demostrar el Lema 1.3.
5. Demostrar la Proposición 1.3 $\boxed{\supseteq}$.
6. Demostrar el Teorema 1.1.
7. Demostrar la Proposición 1.4.
8. Demostrar el Teorema 1.3.
9. Demostrar el Corolario 1.1.
10. Demostrar el Teorema 1.4.
11. a) Demostrar que el conjunto $\mathcal{P}(X)$, con $X = \{1, 2, 3, 4\}$ junto con la operación $\triangle$ y $\cap$ forman un anillo $R = (\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$. (Una demostración se puede realizar considerando funciones características sobre $\mathbb{Z}/\sim_2$).

    b) Resolver el sistema de ecuaciones en R

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \{1,2\} \cap A & \triangle & \{1,3,4\} \cap B & = & \{2\} \\ \{X\} \cap A & \triangle & \{1,2,4\} \cap B & = & \{1\} \end{cases}$$

12. a) Demostrar que el conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ junto con las operaciones usuales de matrices forman un anillo.

    b) Resolver y encontrar la matriz inversa del sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x & + & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y & = & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x & + & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y & = & \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

13. a) Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ junto con las operaciones usuales $+$ y $\cdot$ forman un anillo.

    b) Resolver y encontrar la matriz inversa del sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$

$$\mathcal{A} = \begin{cases} 3x & + & 8y & = & 30 + \sqrt{288} \\ 5x & + & 14y & = & 52 + \sqrt{512} \end{cases}$$

14. a) Demostrar que el conjunto $\mathcal{F} := \{f \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f : D_f \to \mathbb{R} \text{ es función con } D_f = \mathbb{R}\}$ junto con las operaciones usuales $+$ y $\cdot$ de funciones forman un anillo.

b) Resolver y encontrar la matriz inversa del sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $(\mathcal{F}, +, \cdot)$

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \frac{x^4+1}{\sqrt{x^4+1}}A & + & \frac{\sqrt{x^4+1}}{3x^4+3}B & = & x^4 \\ \sqrt{x^2+1}A & + & \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}B & = & x^2+4 \end{cases}$$

15. a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax & + & ay & + & az & = & b \\ cx & + & & & -bz & = & -c \\ & & by & + & az & = & -a \end{cases}$$

Si se satisface $abc = 0$, $a \neq bc$ y $b \neq c$, resuelva el sistema, calcule la inversa y dé condiciones de invertibilidad.

b) Realize lo mismo que en a) pero considerando que el sistema tiene coeficientes en $\mathbb{Z}/\sim_{23}$.

16. a) Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}_3 = \{\frac{a}{3^n} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ junto con las operaciones usuales $+$ y $\cdot$ de números racionales forman un anillo.

b) Resolver y encontrar la matriz inversa del sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 6A & + & \frac{5}{9}B & = & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3}A & + & \frac{1}{27}B & = & 1 \end{cases}$$

2
Espacios vectoriales

§ Espacios y subespacios vectoriales

Primeras definiciones

Definición (Espacio vectorial)***:*** Sea F un campo. Una estructura $(V, +_V, \cdot_V, F)$ se dice **espacio vectorial** si satisface

i) $(V, +_V)$ es un grupo abeliano.

ii) $\cdot_V : F \times V \longrightarrow V$ es una función que satisface:
$(c, \alpha) \mapsto \cdot_V((c, \alpha)) := c \cdot_V \alpha$

a) $\forall c, d \in F$ y $\forall \alpha \in V$, $(c \cdot d) \cdot_V \alpha = c \cdot_V (d \cdot_V \alpha)$.

b) $\forall c, d \in F$ y $\forall \alpha \in V$ $(c + d) \cdot_V \alpha = c \cdot_V \alpha +_V d \cdot_V \alpha$.

c) $\forall c \in F$ y $\forall \alpha, \beta \in V$ $c \cdot_V (\alpha +_V \beta) = c \cdot_V \alpha +_V c \cdot_V \beta$.

d) $\forall \alpha \in V$ existe un $1_V \in F$ tal que $1_V \cdot_V \alpha = v$.

Definición (Subespacio vectorial)***:*** Sea $(V, +_V, \cdot_V, F)$ un espacio vectorial. Si $W \subseteq V$, y $+_W, \cdot_W$ las respectivas restricciones de las funciones $+_V, \cdot_V$ se dice que $(W, +_W, \cdot_W, F)$ es un **subespacio vectorial de** V si

i) $0_V \in W$,

ii) $\forall c \in F$ y $\forall \alpha, \beta \in W$ $c \cdot_W \alpha +_W \beta \in W$.

Ejemplo 2.1: $(\mathbb{R} \times \{0_\mathbb{R}\}, +_{\mathbb{R}\times\{0_\mathbb{R}\}}, \cdot_{\mathbb{R}\times\{0_\mathbb{R}\}}, \mathbb{R})$ *es subespacio vectorial de* $(\mathbb{C}, +_\mathbb{C}, \cdot_\mathbb{C}, \mathbb{R})$*:*

$$0_{\mathbb{R}\times\{0_\mathbb{R}\}} = 0_\mathbb{C} \text{ y, si } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \times \{0_\mathbb{R}\}, c \in \mathbb{R}$$

$$c\alpha +_{\mathbb{R}\times\{0_\mathbb{R}\}} \beta \in \mathbb{R} \times \{0_\mathbb{R}\}$$

$\therefore$ *se tiene lo deseado.*

Abusando de la notación, cuando se escriba V un F-espacio vectorial o W un F-subespacio vectorial se hace referencia al espacio vectorial $(V, +_V, \cdot_V, F)$ y el subespacio vectorial $(W, +_W, \cdot_W, F)$.

Ejemplo 2.2: *Determinar si* $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in F^n \mid x_1 \cdot x_2\}$ *es un* F*-subespacio vectorial de* F^n*.*

Solución:

Si tomamos $\alpha = (1, 0, \ldots, 0) \in W$ *y* $\beta = (0, 1, 0, \ldots, 0) \in W$ *entonces* $\alpha + \beta = (1, 1, 0, \ldots, 0) \notin W$*.*

Entonces W *no es un* F*-subespacio vectorial de* F^n*.*

Definición (Combinación lineal)**:** $\beta \in V$ se dice combinación lineal de los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ si $\exists c_1, \ldots, c_n \in F$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = \beta.$$

Ejemplo 2.3: *Lugar de trabajo:* $(\mathbb{R}^3, +_{\mathbb{R}^3}, \cdot_{\mathbb{R}^3}, \mathbb{R})$

¿$(1, 2, 3)$ *es combinación lineal de* $(2, 4, 8)$ *y* $(0, 0, 3)$*?*

Si $(1, 2, 3) = c_1(2, 4, 8) + c_2(0, 0, 3)$*, entonces*

$$(1, 2, 3) = (2c_1, 4c_1, 8c_1 + 3c_2)$$

$$\text{Luego,} \quad \begin{array}{rcrcl} 8c_1 & + & 3c_2 & = & 3 \\ 4c_1 & & & = & 2 \\ 2c_1 & & & = & 1 \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_1 \leftrightarrow R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \to \frac{1}{3}R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

entonces, $(1, 2, 3) = \frac{1}{2}(2, 4, 8) - \frac{1}{3}(0, 0, 3)$*.*

Proposición 2.1: *Sea* V *un* F*-espacio vectorial y* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ *una familia no vacía de* F*-subespacios de* V*. Entonces* $\bigcap_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$ *es un* F*-subespacio vectorial de* V*.*

Demostración. Se tiene que $\forall \alpha \in \Omega \ 0_{V_\alpha} \in V_\alpha$, pero $\forall \alpha \in \Omega \ 0_{V_\alpha} = 0_V$, así $\bigcap_{\alpha \in \Omega} V_\alpha \neq \varnothing$.

Sean $\zeta_1, \zeta_2 \in \bigcap_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$ y $c \in F$, luego, $\forall \alpha \in \Omega \ c_1\zeta_1 + \zeta_2 \in V_\alpha$, luego $c_1\zeta_1 + \zeta_2 \in \bigcap_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$, así $\bigcap_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$ es un F-subespacio vectorial de V. Q.E.D.

Definición (Suma de subconjuntos de un F-espacio vectorial)**:** Sea V un F-espacio vectorial. Si $S_i \subset V \ \forall i \in [\![1, k]\!]$, se define la **suma de subconjuntos** de V como

$$\sum_{i=1}^{k} S_i = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \in V \mid \alpha_i \in S_i \ \forall i \in [\![1, k]\!] \right\}.$$

Observación: En particular, la suma de subespacios es un subespacio.

Proposición 2.2: *Si* $W_1, \ldots, W_k$ *son* F*-subespacios vectoriales del* F*-espacio vectorial* V *entonces* $\sum_{i=1}^{k} W_i$ *es un* F*-subespacio vectorial de* V*.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición (Espacio generado por un conjunto)**:** Sea S un conjunto de vectores de un F-espacio vectorial. El subespacio generado por S denotado por $\mathscr{L}(S)$ se define como:

$$\mathscr{L}(S) = \{\alpha \in V \mid \alpha \in W,\ \forall W\, F\text{-subespacio vectorial de V, con } S \subseteq W\}$$

O bien, $\mathscr{L}(S) = \bigcap W$, $\forall W$ F-subespacio vectorial de V tal que $S \subseteq W$.

Cuando S es un conjunto finito no vacío de vectores $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ se dice simplemente que $\mathscr{L}(S)$ es el subespacio generado por $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Proposición 2.3: *Sean $W_1, \ldots, W_k$ F-subespacios vectoriales del F-espacio vectorial V. Si $W = \sum_{i=1}^{k} W_i$ entonces $W = \mathscr{L}(\bigcup_{i=1}^{k} W_i)$.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Ejemplo 2.4:
- $\mathscr{L}(\varnothing) = \{0_V\}$ *(¿por qué?).*
- $\mathscr{L}(V) = V$.
- $\mathscr{L}(\{([0]_2, [1]_2), ([1]_2, [0]_2)\}) = \mathbb{Z}/\!\sim_2 \times \mathbb{Z}/\!\sim_2$.
- $\mathscr{L}(\{([0]_2, [1]_2)\}) = \{[0]_2\} \times \mathbb{Z}/\!\sim_2$.

Observación: Si $W = \sum_{i=1}^{k} W_i$, $W = \mathscr{L}(\bigcup_{i=1}^{k} W_i)$.

Teorema 2.1: *Si $S \neq \varnothing$, con $S \subseteq V$, V un F-espacio vectorial, entonces*

$$\mathscr{L}(S) = \{\alpha \in V \mid \alpha = \sum_{k=1}^{m} a_k s_k \text{ tal que } a_k \in F \wedge s_k \in S\}$$

Demostración. $C_{l_s} \subseteq \mathscr{L}(S)$, en efecto: claramente $S \subseteq \mathscr{L}(S)$, de acuerdo a la definición, $\mathscr{L}(S)$ es un F-subespacio vectorial de V. Entonces cualquier combinación lineal de los elementos de S pertenecen a $\mathscr{L}(S)$. Así $C_{l_s} \subseteq \mathscr{L}(S)$.

Ahora $\mathscr{L}(S) \subseteq C_{l_s}$, en efecto:
observe primero que $S \subseteq C_{l_s}$. Veamos que C_{l_s} es un F-subespacio vectorial de V. $0_V \in C_{l_s}$, claramente. Si $c \in F$, $\sum_{k_1=1}^{m_1} b_{k_1} s_{k_1}$, $\sum_{k_2=1}^{m_2} b_{k_2} s_{k_2} \in C_{l_s}$, entonces $\sum_{k_1=1}^{m_1} b_{k_1} s_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{m_2} b_{k_2} s_{k_2} \in C_{l_s}$.

Entonces $\mathscr{L}(S) \subseteq C_{l_s}$. Q.E.D.

Definición (Vectores fila de una matriz)**:** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Los **vectores fila** de A son los vectores en F^n dados por $\alpha_i = (A_{i1}, \ldots, A_{in})$, $i \in [\![1, m]\!]$.

Definición (Espacio de filas de una matriz)**:** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vectores fila de A. Al F-subespacio vectorial $\mathscr{L}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ de F^n se le dice **espacio de filas** de A.

Definición (Espacio solución de una matriz)**:** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Entonces el conjunto de todas las matrices $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(F)$ tal que $Ax = 0$ es llamado **espacio solución** de A.

Bases y dimensión

Definición (Conjunto linealmente independiente)**:** Si S es un subconjunto no vacío de un F-espacio vectorial V, S se dice linealmente independiente sobre F (abreviamos *l.i.* sobre F) si

i) Caso finito: Si $\text{card}(S) = n$ y $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, si

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k = 0, \text{ entonces } c_k = 0, \ \forall k \in [\![1, n]\!].$$

ii) Caso infinito: Si $\text{card}(S) \notin \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq S$ y $\forall c_1, \ldots, c_n \in F$, si

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k = 0, \text{ entonces } c_k = 0, \ \forall k \in [\![1, n]\!].$$

Definición (Conjunto linealmente dependiente)**:** Si S es un subconjunto no vacío de un F-espacio vectorial V, S se dice **linealmente dependiente** sobre F (abreviamos *l.d.* sobre F) si S no es linealmente independiente sobre F.

Al mencionar un conjunto *l.i.* ó *l.d.* sobre un campo F se conviene solo decir que el conjunto S es *l.i.* ó el conjunto S es *l.d.* , entendiéndose que esto es sobre el campo F parte del F-espacio vectorial V que contiene a S, siempre que se mencione a V.

Ejemplo 2.5: *Lugar de trabajo:* $\mathbb{R}^3$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

¿Es el conjunto $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$*, con* $\alpha_1 = (1, 2, 3)$ *y* $\alpha_2 = (4, 5, 1)$*, un conjunto l.i. ?*

Solución:
Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*, si*

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \alpha_i = 0_{\mathbb{R}^3}, \ \textit{i.e.}$$

$c_1(1, 2, 3) + c_2(4, 5, 1) = (0, 0, 0) \implies (c_1 + 4c_2, 2c_1 + 5c_2, 3c_1 + c_2) = (0, 0, 0)$*, de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & 4c_2 & = & 0 \\ 2c_1 & + & 5c_2 & = & 0 \\ 3c_1 & + & c_2 & = & 0 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to -\frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to R_3 + 11R_2 \\ R_1 \to R_1 - 4R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Entonces $c_1 = 0$ *y* $c_2 = 0$*, luego,* S *es l.i. .*

Definición (Conjunto generador de un espacio vectorial)**:** Sea V un F-espacio vectorial y $S \subseteq V$, se dice que S genera a V si

$$\mathscr{L}(S) = V.$$

Observación: Como conjunto dos bases pueden ser iguales, pero nos interesa el orden a la hora de obtenerlas.

Definición (Base ordenada de un F-espacio vectorial)**:** Sea V un F-espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, un conjunto $\mathscr{B}$ se dice **base ordenada** de V si satisface:

i) $\mathscr{B}$ es linealemente independiente sobre F,

ii) $\mathscr{L}(\mathscr{B}) = V$,

iii) $\mathscr{B}$ es ordenada por un conjunto de índices bien ordenado.

En adelante cuando se menciona una base $\mathscr{B}$ de un F-espacio vectorial se hace referencia a una base ordenada.

Teorema 2.2 (Existencia de bases para un F-espacio vectorial)**:** *Si V es un F-espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, entonces V admite una base.*

Demostración. Sea $\Omega_{l.i.} := \{X \in \mathcal{P}(V) \mid X \text{ es } l.i. \}$. Puesto que $V \neq \{0_V\}$, $V \setminus \{0_V\} \neq \varnothing$, así $\forall \alpha \in V \setminus \{0_V\}$ se tiene que $\{\alpha\}$ es un conjunto *l.i.* . Así el conjunto $\Omega_{l.i.} \neq \varnothing$.

$\Omega_{l.i.}$ es claramente un conjunto parcialmente ordenado respecto a la relación de contención.

Considere $\mathscr{C}$ una cadena arbitraria del conjunto $\Omega_{l.i.}$ y sea $B = \bigcup_{c \in \mathscr{C}} c$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$ tal que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in c$. Como $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq c$, entonces $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es *l.i.* , luego B es *l.i.* , si no lo fuera, entonces $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subset B$ es un conjunto *l.d.* , entonces para algún $c \in \mathscr{C}$ $\beta_i \in c$, $i \in [\![1, n]\!]$, como $\mathscr{C}$ es una cadena, $\mathscr{C}$ es un orden total. Entonces existe un C *l.i.* tal que $c \in C$ $\forall c \in \mathscr{C}$, luego $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq C$, entonces C no es *l.i.* . Luego B es *l.i.* y cota superior. Por el Lema 0.1 existe $\mathscr{B}$ elemento maximal de $\Omega_{l.i.}$.

$\mathscr{L}(\mathscr{B}) = V$. En efecto, sea $\alpha \in V$ y $A = \mathscr{B} \cup \{\alpha\}$. Si $\alpha \in \mathscr{B}$ se tiene lo deseado. Así, suponga que $\alpha \notin \mathscr{B}$, luego $\mathscr{B} \subset A$. Por maximalidad de $\mathscr{B}$, se sigue que $A \notin \Omega_{l.i.}$, luego A es *l.d.* . Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ elementos distintos, y $c_1, \ldots, c_n \in F$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \neq \{0_F\}$, tal que $\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = 0$.

Como A es *l.d.* , necesariamente existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tal que $\alpha_{i_0} = \alpha$ y $c_{i_0} \neq 0$. Entonces, sin pérdida de generalidad, suponga que $\alpha = \alpha_1$ y $c_1 = c_{i_0} \neq 0$. Entonces $\alpha = \beta_2 \alpha_2 + \cdots + \beta_n \alpha_n$ con $\beta_i = -\frac{c_i}{c_1}$, así $\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, pero como α es arbitrario $\mathscr{L}(\mathscr{B}) = V$. Q.E.D.

Proposición 2.4: *Existen espacios vectoriales con bases cuya cardinalidad no es finita.*

Demostración. Considere $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Veamos que cualquier base tiene cardinalidad infinita. Procedemos por introducción de la negación.

Suponga que existe $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Así, para todo $r \in \mathbb{R}$ existen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$r = \sum_{i=1}^{n} c_i \rho_i.$$

Observe que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, definiendo $\mathbb{Q}_{\rho_i} := \{c\rho_i \in \mathbb{R} \mid c \in \mathbb{Q}\}$, si $\begin{array}{rcl} \mathscr{F} : \mathbb{Q}_{\rho_i} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ c\rho_i & \mapsto & c \end{array}$ entonces si $c\rho_i = d\rho_i$ se tiene que $c = d$. Luego $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{\rho_i}) = \mathbb{Q}$ y entonces $\mathscr{F}$ es biyectiva por lo tanto $\mathbb{Q}_{\rho_i} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, es así que $\times_{i=1}^{n} \mathbb{Q}_{\rho_i}$ es numerable, y $\begin{array}{rcl} + : \times_{i=1}^{n} \mathbb{Q}_{\rho_i} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (c_1\rho_1, \ldots, c_n\rho_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} c_i \rho_i \end{array}$ es una función.

$+$ es una función biyectiva (¿por qué?), luego $\mathbb{Q}_{\rho_i} \sim \mathbb{R}$ y entonces $\mathbb{R}$ es numerable. Pero se sabe que $\mathbb{R}$ es no numerable, luego $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial no tiene base finita.

Q.E.D.

Teorema 2.3: *Toda base de un F-espacio vectorial tiene la misma cardinalidad (caso finito).*

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Así, para todo F-espacio vectorial $V \neq \{0_V\}$ se define como la dimensión V a la cardinalidad de cualquiera de sus bases. Denotamos $\dim(V)$ a la dimensión del F-espacio vectorial V.

Convención: La dimensión del espacio vectorial cero tiene dimensión 0.

Corolario 2.1: *Si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que*

i) Cualquier subconjunto de V que tenga más de n vectores es linealmente dependiente.

ii) Ningún subconjunto de V que tenga menos de n vectores genera a V.

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Lema 2.1: *Si S es un subconjunto linealmente independiente de un F-espacio vectorial V y $\beta \in V$ tal que $\beta \notin \mathscr{L}(S)$ entonces $S \cup \{\beta\}$ es un conjunto l.i. .*

Demostración. Suponga que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son vectores distintos en S y que $\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + b\beta = 0$, $c_i \in F$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$ y $b \in F$.

Si $b \neq 0_F$, entonces $\beta = -\frac{\sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_i}{b} = \sum_{i=1}^{m} -\frac{c_i}{b}\alpha_i$, así $\beta \in \mathscr{L}(S)$, pero por hipótesis $\beta \notin \mathscr{L}(S)$. Aplicando introducción de la negación $b = 0_F$.

Así, $\sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_i = 0$, luego entonces $c_i = 0$ $\forall i \in [\![1, m]\!]$. Como S es *l.i.* se sigue que $S \cup \{\beta\}$ es *l.i.* .

Q.E.D.

Teorema 2.4: *Si W es un F-subespacio vectorial del F-espacio vectorial V de dimensión finita n, entonces todo conjunto l.i. de W es finito y es parte de una base de W.*

Demostración. Suponga que $S_0 \subseteq W$ es *l.i.* . Si $S \subseteq W$ es un conjunto *l.i.* tal que $S_0 \subseteq S$ entonces S también es un conjunto *l.i.* de V sobre F. Como V es de dimensión finita, S no tiene más de n elementos.

Se extiende S_0 a una base en W como sigue:
Si $\mathscr{L}(S_0) = W$, entonces S_0 es base de W y se tiene lo deseado. Si $\mathscr{L}(S_0) \neq W$, i.e. $\mathscr{L}(S) \subset W$, así $\exists \beta_1 \in W \setminus \mathscr{L}(S_0)$, por el lema anterior $S_0 \cup \{\beta_1\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Así considere $\mathscr{L}(S_0 \cup \{\beta_1\}) = W$, se tiene lo deseado. En caso contrario se aplica de nuevo el lema anterior en, a lo más, $n - 1$ aplicaciones del lema se encuentra una base para W, de lo cual S_0 es parte de la base.

Q.E.D.

Corolario 2.2: *Si W es un F-subespacio vectorial del F-espacio vectorial V de dimensión finita, $W \neq V$, entonces W es de dimensión finita y* $\dim(W) < \dim(V)$.

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Corolario 2.3: *En un F-espacio vectorial V de dimensión finita n, todo conjunto linealmente independiente de vectores es parte de una base.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Corolario 2.4: *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ y suponga que los vectores fila de A forman un conjunto linealmente independiente de vectores de F^n. Entonces A es invertible.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición (Suma directa)***:*** Si W_1, W_2 son F-subespacios vectoriales del F-espacio vectorial V se dice que V es **suma directa** de W_1 y W_2 si se tiene:

i) $V = W_1 + W_2$,

ii) $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

y denotamos la suma como $W_1 \oplus W_2$.

Teorema 2.5: *Si W_1, W_2 son F-subespacios vectoriales del F-espacio vectorial V de dimensión finita n entonces W_1+W_2 es un F-espacio vectorial de V de dimensión finita y* $\dim(W_1)+\dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

Demostración. Ejercicio. Considerar $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, y $W_1 + W_2$ con $W_1 = \{0_V\}$ y $W_2 = \{0_V\}$. Q.E.D.

§ Coordenadas

Definición: Sea V un F-espacio vectorial. $\mathscr{B}$ una base ordenada por un conjunto de índices bien ordenado Ω. Se define la relación

$$\begin{aligned}\text{Coord}_k : V &\longrightarrow F \\ \alpha &\mapsto c_{\alpha_k}\end{aligned}$$

donde $\alpha = \sum_{k\in\Omega} C_{\alpha_k}\alpha_k$.

Observación: Recuerde que $\alpha \in V$ es combinación lineal de $\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn}$ si existen $c_{k1}, \ldots c_{kn} \in F$ tal que $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}\alpha_{ki}$. Los elementos no cero en el campo F en una combinación lineal forman un conjunto finito. Es decir, si $\alpha = \sum_{k\in\Omega} c_{\alpha_k}\alpha_k$, entonces $c_{\alpha_k} = 0$ para casi todo $k \in \Omega$.

Como $\mathscr{L}(\mathscr{B}) = V$, entonces $\begin{aligned}\text{Coord}_k : V &\longrightarrow F \\ \alpha &\mapsto c_{\alpha_k}\end{aligned}$ es de asignamiento total.

La unicidad se sigue de la independencia lineal. Es fácil ver esto para el caso finito. Para el caso infinito considere un conjunto bien ordenado comparando ϕ_1 y ϕ_2.

Así $\begin{aligned}\text{Coord}_k : V &\longrightarrow F \\ \alpha &\mapsto c_{\alpha_k}\end{aligned}$ es una función. Luego, $(C_{\alpha_k})_{k\in\Omega}$ es el vector de coordenadas de α en la base $\mathscr{B}$ ordenada por el conjunto bien ordenado Ω.

En particular, si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita y $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_{\alpha_i}\alpha_i$, entonces $\begin{bmatrix} c_{\alpha_i} \\ \vdots \\ c_{\alpha_n} \end{bmatrix}$ es el vector de coordenadas (o matriz de coordenadas) de α en la base $\mathscr{B}$.

Frecuentemente, es conveniente para nosotros utilizar la matriz de coordenadas de α respecto a la base ordenada $\mathscr{B}$ en vez del vector de coordenadas. Para indicar la dependencia de la matriz de coordenadas en la base $\mathscr{B}$ denotamos

$$[\alpha]_{\mathscr{B}}$$

para la matriz de coordenadas del vector α respecto a la base $\mathscr{B}$.

Teorema 2.6: *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita n, y sean $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ dos bases ordenadas de V. Entonces hay una única matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(F)$ tal que, si $\alpha \in V$*

i) $[\alpha]_{\mathscr{B}} = P[\alpha]_{\mathscr{B}'}$,

ii) $[\alpha]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathscr{B}}$.

Las columnas de P están dadas por

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathscr{B}} \ \forall j \in [\![1, n]\!]$$

Demostración. Sean $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathscr{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$.
Entonces existen $P_{1j}, \ldots, P_{nj} \in F$ únicos tales que $\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i \ \forall j \in [\![1, n]\!]$.

Sean $x'_1, \ldots, x'_n$ las coordenadas de α en la base $\mathscr{B}'$. Entonces $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x'_j\alpha'_j$, luego $\alpha = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ij}x'_j\alpha_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} P_{ij}x'_j\right)\alpha_i$. Entonces

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} P_{ij}x'_j\right)\alpha_i,$$

es decir que las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de α respecto a la base $\mathscr{B}$ están determinadas por

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}x'_j \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Luego, sea $P \in \mathcal{M}_n(F)$ tal que $P((i,j)) = P_{ij}$ y $[\alpha]_{\mathscr{B}}, [\alpha]_{\mathscr{B}'}$ las matrices de coordenadas respecto a la bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ respectivamente. Entonces tenemos

$$[\alpha]_{\mathscr{B}} = P[\alpha]_{\mathscr{B}'}.$$

Como $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ son conjuntos *l.i.* se tiene que $[\alpha]_{\mathscr{B}} = 0_{\mathcal{M}_n(F)}$ si y sólo si $[\alpha]_{\beta'} = 0_{\mathcal{M}_n(F)}$. Se sigue entonces que P es invertible, y se tiene

$$[\alpha]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathscr{B}}.$$

Q.E.D.

Teorema 2.7: *Sea $P \in \mathcal{M}_n(F)$ invertible. Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita n, y sea $\mathscr{B}$ una base ordenada de V. Entonces existe una única base ordenada $\mathscr{B}'$ tal que*

i) $[\alpha]_{\mathscr{B}} = P[\alpha]_{\mathscr{B}'}$

ii) $[\alpha]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathscr{B}}$

$\forall \alpha \in V$

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Si $\mathscr{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\} \subseteq V$ es *l.i.* tal que $[\alpha]_{\mathscr{B}} = P[\alpha]_{\mathscr{B}'}$, es claro que $\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i$.

Entonces solo debemos demostrar que $\mathscr{B}'$ es base de V. Sea $Q := P^{-1}$. Entonces $\sum_{j=1}^{n} Q_{jk}\alpha'_j = \sum_{j=1}^{n} Q_{jk} \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ij}Q_{jk}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}Q_{jk}\right)\alpha_i = \alpha_k$.

Entonces $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{B}')$, luego $\mathscr{L}(\mathscr{B}') = V$. Aplicando el Teorema 2.6 se tiene lo deseado. Q.E.D.

§ Ejercicios

1. Demostrar la Proposición 2.2
2. Demostrar la Proposición 2.3
3. Demostrar el Teorema 2.3
4. Demostrar el Corolario 2.1
5. Demostrar el Corolario 2.2
6. Demostrar el Corolario 2.3
7. Demostrar el Corolario 2.4
8. Demostrar el Teorema 2.5
9. Demostrar que $\mathbb{Z}/\!\sim_7 \times \mathbb{Z}/\!\sim_7 \times \{[0]_7\}$ es $\mathbb{Z}/\!\sim_7$-subespacio vectorial de $\mathbb{Z}/\!\sim_7 \times \mathbb{Z}/\!\sim_7 \times \mathbb{Z}/\!\sim_7$.
10. Demostrar que el conjunto cociente es un espacio vectorial.
11. a) Demostrar que $\{0_F\}^n$ es un F-subespacio vectorial de F^n.
    b) Determinar si $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}/\!\sim_3 \times \mathbb{Z}/\!\sim_3 \mathbb{Z}/\!\sim_3 \mid x_3 = x_1 + 3x_2\}$ es un $\mathbb{Z}/\!\sim_3$-subespacio vec de $\mathbb{Z}/\!\sim_3 \times \mathbb{Z}/\!\sim_3 \times \mathbb{Z}/\!\sim_3$.
    c) Determinar si $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \mid x_2 \in \mathbb{Q}$ es un $\mathbb{R}$-subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
12. a) Demostrar que $\mathcal{M}_n(F)$ es un F-subespacio vectorial.
    b) Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}_n(F)$ con las operaciones usuales son F-subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(F)$.
        a) $W = \{A \in \mathcal{M}_n(F) \mid A \text{ es invertible}\}$,
        b) $W = \{A \in \mathcal{M}_n(F) \mid A \text{ no es invertible}\}$,
        c) $W = \{A \in \mathcal{M}_n(F) \mid A^2 = A\}$,

d) $W = \{A \in \mathcal{M}_n(F) \mid AB = BA, \text{ para algún } B \in \mathcal{M}_n(F)\}$.

13. Demostrar que si $W_1, \ldots, W_k$ son F-subespacios vectoriales de un F-espacio vectorial V, entonces $\sum_{i=1}^{k} W_i$ es un F-subespacio vectorial de V.

14. Demostrar que $\text{Coord}_k : V \longrightarrow F$ $\alpha \mapsto C_{\alpha_k}$ es una relación de asignamiento único.

15. Sea el F-subespacio vectorial $\mathcal{M}_2(F)$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(F) \mid x, y, z \in F \right\} \text{ y } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -x & z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(F) \mid x, y, z \in F \right\}.$$

a) Demostrar que W_1 y W_2 son F-subespacios vectoriales de V.

b) Demostrar que $\dim(W_1 + W_2) = 4$ y $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.

16. Considere las siguientes secuencias en $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$ con $\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (-2, 1), \beta_1 = (2, 3), \beta_3 = (1, -1)$.

a) Demostrar que $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ son bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_1}$ para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) Calcule $\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_2}$ para todo $(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) Sea $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $P \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_2} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_1}$. Calcule P (A P se le llama **Matriz cambio de base**).

e) Sea $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_2} Q = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_1}$. Calcule Q.

f) Verifique que P y Q son matrices invertibles.

g) Sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y la base ordenada $\mathscr{B}_3 = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, tal que $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_1} = R \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_3}$. Determine ϵ_1 y ϵ_2.

17. Considere el $\mathbb{Z}/\sim_3$-espacio vectorial $V := (\mathbb{Z}/\sim_3)^n$. ¿Cuántos subespacios vectoriales de dimensión uno tiene V?

3
Transformaciones lineales

§ Transformaciones lineales

Primeras definiciones y resultados

Definición (Transformación lineal)***:*** Sean V, W F-espacios vectoriales. La relación

$$T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$$

se dice **transformación lineal** si es una función tal que $\forall \beta, \gamma \in V$ y $\forall c \in F$

$$T((c\beta + \gamma)) = cT(\beta) + T(\gamma).$$

Ejemplo 3.1: *Si* $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f$ *es función polinomial*$\}$*. La función* $T : V \underset{f \mapsto f'}{\longrightarrow} V$ *es una T.l. .*

Teorema 3.1: *Si* V *es un* F*-espacio vectorial de dimensión finita* n *y sea* $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *una base ordenada de* V*. Sea* W *un* F*-espacio vectorial y* $\beta_1, \ldots, \beta_n \in W$*. Entonces existe una única transformación lineal* $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ *tal que*

$$T(\alpha_j) = \beta_j \ \forall j \in [\![1, n]\!].$$

Demostración. Primero probamos el asignamiento total. Como $\mathscr{B}$ es base de V, $\forall \alpha \in V$ existen únicos $c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_n} \in F$ tales que $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_{\alpha_i} \alpha_i$. Se tiene, con $T(\alpha_i) = \beta_i$, que $T(\alpha) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha_i} \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{\alpha_i} T(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_{\alpha_i} \beta_i \in W$. Así la relación $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es de asignamiento total total.

Ahora, para el asignamiento único. Bajo la forma en que se definió la relación, como $\mathscr{B}$ es base de V, α admite una única combinación lineal de los elementos de la base dada, luego $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es de asignamiento único.

Entonces $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es una función.

$T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es lineal. En efecto, sean $\gamma, \delta \in V$, $d \in F$, se tiene que

$$\begin{aligned} T(d\gamma + \delta) &= T\left(d\sum_{i=1}^{n} c_{\gamma_i}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} c_{\delta_i}\alpha_i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n}[dc_{\gamma_i} + c_{\delta_i}]\alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}[dc_{\gamma_i} + c_{\delta_i}]T(\alpha_i) \\ &= d\sum_{i=1}^{n} c_{\gamma_i}T(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n} c_{\delta_i}T(\alpha_i) \\ &= dT(\gamma) + T(\delta). \end{aligned}$$

Como γ y δ son arbitrarios, $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es transformación lineal.

Suponga que $U(\alpha_j) = T(a_j)\ \forall j \in [\![1, n]\!]$, con $U : V \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{\longrightarrow} W$ transformación lineal. Ahora bien, $\forall \gamma \in V$,

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{i=1}^{n} c_{\gamma_i}\alpha_i \\ U(\gamma) &= U\left(\sum_{i=1}^{n} c_{\gamma_i}\alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{\gamma_i}U(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{\gamma_i}T(\alpha_i) \\ &= T(\sum_{i=1}^{n} c_{\gamma_i}\alpha_i) \\ &= T(\gamma). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposición 3.1: *Sean V, W F-espacios vectoriales, $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ una transformación lineal. Entonces $T(V)$ es un subespacio de W.*

Demostración. Sean $\alpha_w, \beta_w \in T(v), c \in F$. En particular existen $\alpha_v, \beta_v \in V$ tales que $T(\alpha_v) = \alpha_w$ y $T(\beta_v) = \beta_w$, así $c\alpha_w + \beta_w \in T(v)$. Luego $T(V)$ es un F-subespacio vectorial de W. Q.E.D.

Definición (Kernel de una transformación lineal)***:*** Si V, W son F-espacios vectoriales y $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es una transformación lineal *(T.l.)* se define el **kernel** de la transformación lineal $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} F$ (denotado como $\ker_T$) como

$$\ker_T = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = 0_W\}.$$

Proposición 3.2: *Si V, W son F-espacios vectoriales, $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ una T.l. . Entonces* $\ker_T$ *es un F-subespacio vectorial de V.*

Demostración. $0_V \in \ker_T$, puesto que $T(0_V) = 0_W$. Sean $\alpha, \beta \in \ker_T, c \in F$, en particular $T(\alpha) = T(\beta) = 0_W$. Ahora bien $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta) = c0_W + 0_W = 0_W$. Por lo tanto como c, α, β son arbitrarios, $c\alpha + \beta \in \ker_T$. Luego $\ker_T$ es un F-subespacio vectorial de V.

Q.E.D.

Definición (Rango de una *T.l.*)**:** Sean V, W F-espacios vectoriales, V de dimensión finita y $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ *T.l.* . Se define el **rango** de $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ (denotado como rango(T) como

$$\text{nulidad}(T) := \dim(T(V)).$$

Definición (Nulidad de una *T.l.*)**:** Sean V, W F-espacios vectoriales, V de dimensión finita y $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ *T.l.* . Se define la **nulidad** de $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ (denotada por nulidad(T)) como

$$\text{nulidad}(T) := \dim(\ker_T).$$

Teorema 3.2: *Sean V, W F-espacios vectoriales, V de dimensión finita, $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ una T.l. , entonces* rango(T) + nulidad$(T) = \dim(V)$.

Demostración. Si $V = \{0_V\}$, es claro.
Suponga que $V \neq \{0_V\}$. Si $\ker_T = \{0_V\}$, entonces $\forall \alpha \in V \setminus \{0_V\}$, $T(\alpha) \neq 0_V$. Sea $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base de V. Veamos que $\mathscr{B}_{T(V)} = \{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es base de $T(v)$.
En efecto, $\mathscr{L}(\mathscr{B}_{T(V)}) = T(V)$, pues sea $\gamma_W \in T(V)$, entonces existe $\gamma_V \in V$ tal que $T(\gamma_V) = \gamma_W$. Ahora bien, para γ_V existen $c_1, \ldots, c_n \in F$ tales que $\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = \gamma_V$. En particular $\gamma_W = T(\gamma_V) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right)$, entonces como son elementos arbitrarios, $\mathscr{L}(\mathscr{B}_{T(V)}) = T(V)$.
Suponga que existen $d_1, \ldots, d_n \in F$ no todos cero, tales que $\sum_{i=1}^{n} d_iT(\alpha_i) = 0$, así $T\left(d_i\alpha_i\right) = 0$, de modo que $\sum_{i=1}^{n} d_i\alpha_i \in \ker_T = \{0_V\}$. Luego $\sum_{i=1}^{n} d_i\alpha_i = 0$. Así $d_i = 0\ \forall i \in [\![1, n]\!]$, luego $\mathscr{B}_{T(V)}$ es *l.i.* .
Así $\mathscr{B}_{T(V)}$ es base de $T(V)$ y $\dim(T(V)) = n$, $\dim(\ker_T)$ y $\dim(V) = \dim(T(V)) + \dim(\ker_T)$.

Se deja como ejercicio la demostración para los casos restantes:

i) $\ker_T \neq 0_V$.

ii) $\ker_T = V$.

Q.E.D.

Definición (Rango de filas de A)**:** El **rango de filas** de A (denotado rango de filas (A)) es la dimensión del espacio de filas de A.

Teorema 3.3: *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, entonces rango de filas(A) = rango de columnas(A).*

Demostración. Sea $T : F^{n\times 1} \underset{\alpha \mapsto T(\alpha) = A\alpha}{\longrightarrow} F^{m\times 1}$ (se deja como ejercicio comprobar que T es una *T.l.*).

Cuando $A\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ α es solución del sistema asociado a la matriz A. Entonces

$$\ker_T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n \;\middle|\; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{Ax} = 0_{F^m} \right\}$$

y

$$T(V) = \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in F^m \;\middle|\; Ax = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right\}$$

Si $A_1, \ldots, A_n$ son las columnas de A, entonces $A\alpha = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n$, así $T(V) = \mathscr{L}(\{A_1, \ldots A_n\})$. Es decir, $T(V)$ es el espacio de columnas de A. Por lo tanto rango(T) = rango de columnas de A. Así, $\dim(\ker_T)$ + rango de columnas de $A = n$.

Ahora, recuerde que el espacio de soluciones tiene una base que consta de $n - r$ vectores donde r es el rango de filas de A y entonces, si S es el espacio solución de A,

$$\dim(S) = \dim(\ker_T) = n - r,$$

de donde $\dim(\ker_T) + r = n$. Entonces es evidente que

$$\text{rango de filas de } A = \text{rango de columnas de} A.$$

Q.E.D.

Álgebra de transformaciones lineales

Teorema 3.4: *Si V, W son F-espacios vectoriales y $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$, $U : V \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{\longrightarrow} W$ son T.l. , entonces $T + U : V \underset{\alpha \mapsto [T+U](\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es una T.l. y si $c \in F$, se define la función $cT : V \underset{\alpha \mapsto [cT](\alpha) := cT(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es una T.l. .*
Entonces si

$$\mathscr{L}(V, W) := \left\{ T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W \in W^V \mid T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W \text{ es T.l.} \right\}$$

$(\mathscr{L}(V, W), +, \cdot, F)$ es un F-espacio vectorial.

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Teorema 3.5: *Si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita n, W es un F-espacio vectorial de dimensión finita m, entonces $\mathscr{L}(V, W)$ es de dimensión finita mn.*

Demostración. Sean $\mathscr{B}_V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathscr{B}_W = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente. $\forall (p,q) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$ se define

$$\begin{array}{l} T^{p,q} : V \longrightarrow W \\ \qquad \alpha_i \mapsto T^{p,q}(\alpha_i) := \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ si } i \neq q \\ \beta_p, \text{ si } i = q \end{array} \right. = \delta_{iq}\beta p \end{array}$$

de acuerdo con un teorema anterior existe una única transformación lineal de V a W que satisface estas condiciones. Se afirma que

$$\mathscr{A} = \left\{ T \in \mathscr{L}(V,W) \mid T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W = T^{p,q} : \underset{\alpha \mapsto T^{p,q}(\alpha)}{V \longrightarrow} W \right\}$$

es una base de $\mathscr{L}(V,W)$.

Sea $T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, sea $A_{1j}, \ldots, A_{mj}$ las coordenadas del vector $T(\alpha_j)$ respecto a la base $\mathscr{B}_W$ es decir $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p$.

Sea $U : \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{V \longrightarrow} W$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $U(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} A_{pq}T^{p,q}(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} A_{pq}\delta_{jq}\beta_p = \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p = T(\alpha_j)$, en consecuencia $U = T$. Luego $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(V,W)$. Queda como ejercicio mostrar que $\mathscr{A}$ es l.i. Q.E.D.

Teorema 3.6: *Si V, W, Z son F-espacios vectoriales y $T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W$, $U : \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{W \longrightarrow} Z$ son T.l. , entonces*

$$\begin{array}{l} UT : V \longrightarrow Z \\ \qquad \alpha \mapsto [UT](\alpha) := U(T(\alpha)) \end{array} \qquad \textit{es T.l. .}$$

Demostración. $[UT](0_V) = U(T(0_V)) = U(0_W) = 0_Z$. Sean $c \in F, \alpha, \beta \in V$,

$$\begin{aligned} [UT](c\alpha + \beta) &= U(T(c\alpha + \beta)) \\ &= U(cT(\alpha) + T(\beta)) \\ &= cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) \\ &= c[UT](\alpha) + [UT](\beta). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Definición (Operador lineal)***:*** Si V es un F-espacio vectorial, un operador lineal se dice que es una transformación lineal $T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} V$ y se denota por

$$T^n : \underset{\alpha \mapsto T^n(\alpha)}{V \longrightarrow} V$$

al operador lineal compuesto n-veces, y se define

$$\begin{array}{l} T^0 : V \longrightarrow V \\ \qquad \alpha \mapsto \alpha \end{array} \quad = \quad \begin{array}{l} I : V \longrightarrow V \\ \qquad \alpha \mapsto \alpha \end{array} .$$

Lema 3.1: *Si V es un F-espacio vectorial y $U : \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{V \longrightarrow} V$, $T_1 : \underset{\alpha \mapsto T_1(\alpha)}{V \longrightarrow} V$, $T_2 : \underset{\alpha \mapsto T_2(\alpha)}{V \longrightarrow} V$ operadores lineales, $c \in F$, $\begin{array}{l} I : V \longrightarrow V \\ \qquad \alpha \mapsto \alpha \end{array}$, entonces*

i) $IU = UI = U$,

ii) $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$,

iii) $(T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U$,

iv) $c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$.

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición (Transformación lineal invertible)***:*** Si V, W son F-espacios vectoriales y $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es una *T.l.* , se dice que $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es **invertible** si existe $U : W \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{\longrightarrow} V$ tal que $UT : V \underset{\alpha \mapsto \alpha}{\longrightarrow} V$ y $TU : W \underset{\alpha \mapsto \alpha}{\longrightarrow} W$.

Teorema 3.7: *Si V, W son F-espacios vectoriales y $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$, si $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es invertible entonces $T^{-1} : W \underset{\alpha \mapsto T^{-1}(\alpha)}{\longrightarrow} V$ es T.l. .*

Demostración. Al ser $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ *T.l.* invertible, en particular, $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es biyectiva. Luego, existe una única función $T^{-1} : V \underset{\alpha \mapsto T^{-1}(\alpha)}{\longrightarrow} W$. Sean $c \in F, \alpha, \beta \in W$, entonces por ser $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ suprayectiva existen $\alpha_V, \beta_V \in V$ tal que $T(\alpha_V) = \alpha$ y $T(\beta_V) = \beta$. Así $T^{-1}(c\alpha + \beta) = T^{-1}(cT(\alpha_V) + T(\beta_V))$ pero T es lineal, entonces $T^{-1}(T(c\alpha_V + \beta_V)) = I_V(c\alpha_V + \beta_V) = c\alpha_V + \beta_V = cT^{-1}(\alpha) + T^{-1}(\beta)$. Luego T^{-1} es *T.l.* . Q.E.D.

Teorema 3.8: *Sea $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ una T.l. . Entonces T es no singular si y sólo si T para todo conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq V$ l.i. se tiene que $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\} \subseteq W$ es l.i. .*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Teorema 3.9: *Si V, W son F-espacios vectoriales de dimensión finita n, $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$, las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes.*

i) T es invertible,

ii) T es no singular,

iii) T es suprayectiva,

iv) Si $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es base de V, entonces $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es base de W.

Demostración. i) $\rightarrow$ ii) Como $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es invertible, en particular es inyectiva, luego $\ker_T = \{0_V\}$, luego $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es no singular.

ii) $\rightarrow$ iii) Como $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es no singular, entonces nulidad$(T) = 0$, así, rango$(T) = n$, entonces $T(V) = W$, luego $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es suprayectiva.

iii) $\rightarrow$ iv) Suponga que T es suprayectiva. Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es cualquier base ordenada de V, entonces $\mathscr{L}(\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}) = W$, luego entonces si $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es *l.d.* , como $\mathscr{L}(\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}) = W$, entonces podemos encontrar una base de la forma $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_{i-1}), T(\alpha_{i+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ con $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_{i-1}), T(\alpha_{i+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ *l.i.* , entonces tendriamos que $\dim(W) = n - l$, $n \geq l$. Por lo tanto $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es *l.i.* .

Luego $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es base.

iv) $\rightarrow$ i) Suponga que existe $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base de V tal que $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es base W. Como $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es base de W entonces $\mathscr{L}(\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}) = W$. Así $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es suprayectiva. Por hipótesis general, $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es *T.l.* . Sea $\alpha \in \ker_T$, existen $c_1, \ldots, c_n \in F$ tales que $\sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k$, luego $T\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k\right) = T(\alpha) = 0_W$. Luego $\sum_{k=1}^{n} c_k T(\alpha_k) = T(\alpha) = 0_W$.

Luego, como $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es base de W, $c_k = 0_F$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, i.e. $\{T(\alpha_k)\}_{k \in [\![1,n]\!]}$ es *l.i.*

Luego, $\ker_T = \{0_V\}$, así $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es inyectiva. Por lo tanto se tiene lo deseado.

Q.E.D.

Isomorfismos

Definición (Morfismos)***:*** Si V y W son F-subespacios vectoriales y $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ una función entonces:

1) T es un homomorfismo si es *T.l.*
2) T es un endomorfismo si es *T.l.* y $W = V$.
3) T es un monomorfismo si es *T.l.* inyectiva.
4) T es un epimorfismo si es *T.l.* suprayectiva.
5) T es un isomorfismo si es *T.l.* biyectiva.
6) T es un automorfismo si es *T.l.* biyectiva y $W = V$.

Si existe $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ isomorfismo, entonces se dice que V es **isomorfo** a W y se denota por $V \approx W$.

Teorema 3.10: *Todo F-espacio vectorial V de dimensión n es isomorfo a F^n.*

Demostración. Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, y $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base ordenada para V. Se define $T : V \longrightarrow F^n$, $\alpha \mapsto T(\alpha) := (x_1, \ldots, x_n)$ donde $(x_1, \ldots, x_n)$ es el vector de coordenadas de α respecto a la base ordenada $\mathscr{B}$. T es inyectiva y suprayectiva (¿por qué?). Luego T es un isomorfismo.

Q.E.D.

Representación matricial de una transformación lineal

Si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita n y W es un F-espacio vectorial de dimensión finita m, si $\mathscr{B}_V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es base ordenada de V y $\mathscr{B}_W = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ es base ordenada de

W, $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ es una *T.l.* . Entonces la transformación lineal está determinada por la aplicación de los elementos de $\mathscr{B}_V$ de manera única como una combinación lineal

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i$$

de los β_i, los elementos de F $A_{1j}, \ldots, A_{mj}$ son las coordenadas de $T(\alpha_j)$ en la base $\mathscr{B}_W$.

A la función $A : \underset{(i,j) \mapsto A_{ij}}{[\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!] \longrightarrow F}$ se le llama la **matriz representante de la transformación lineal** $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ **respecto a las bases** $\mathscr{B}_V$ **y** $\mathscr{B}_W$.

Teorema 3.11: *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita n y W un F-espacio vectorial de dimensión finita m. Sea $\mathscr{B}_V$ una base ordenada de V y $\mathscr{B}_W$ una base ordenada de W. Para cada transformación lineal $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W$ hay una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(F)$ tal que*

$$[T(\alpha)]_{\mathscr{B}_W} = A[\alpha]_{\mathscr{B}_V}$$

$\forall \alpha \in V$. *Además,* $\underset{T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W \mapsto \phi\left(T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W\right) = A_{T:V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W}}{\phi : \mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(F)}$ *es un homomorfismo.*

Demostración. Sea $\mathscr{B}_V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base de V y $\mathscr{B}_W = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Considere $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $T(\alpha_j) \in W$, así, por ser una base, existen elementos del campo, únicos, $A_{1j}, \ldots, A_{mj} \in F$ tales que $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i$.

Ahora bien, note que $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $A_{1j}, \ldots, A_{mj}$ son las coordenadas de $T(\alpha_j)$ respecto a la base $\mathscr{B}_W$. Así

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

está bien definida (existe y es única) y si $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ es la matriz de coordenadas del vector α en la base $\mathscr{B}_V$, entonces se tiene que $\alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j$, luego $T(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij}c_j\beta_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}c_j\beta_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}c_j\right)\beta_i$, i.e.

$$[T(\alpha)]_{\mathscr{B}_W} = A[\alpha]_{\mathscr{B}_V}$$

Por otro lado, seguimos considerando las bases fijas $\mathscr{B}_V, \mathscr{B}_W$. Considere

$$\underset{T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W \mapsto \phi\left(T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W\right) = A_{T:V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W}}{\phi : \mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(F)}$$

donde $A_{T:V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} W}$ representa a la matriz dada anteriormente.

Considere $c \in F, T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W, U : \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{V \longrightarrow} W$. Es fácil mostrar que

$$A_{\substack{cT:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto [cT](\alpha)}} = cA_{\substack{T:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto T(\alpha)}} \text{ y } A_{\substack{T+U:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto [T+U](\alpha)}} = A_{\substack{T:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto T(\alpha)}} + A_{\substack{U:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto U(\alpha)}}$$

, entonces

$$\begin{aligned} \phi\left(cT : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W + U : \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{V \longrightarrow} W\right) &= A_{\substack{cT+U:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto [cT+U](\alpha)}} \\ &= cA_{\substack{T:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto T(\alpha)}} + A_{\substack{U:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto U(\alpha)}}. \end{aligned}$$

Recuerde que $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$

$$\begin{aligned} \left[cA_{\substack{T:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto T(\alpha)}} + A_{\substack{U:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto U(\alpha)}}\right]((i,j)) &= c\left[A_{\substack{T:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto T(\alpha)}}\right]((i,j)) + \left[A_{\substack{U:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto U(\alpha)}}\right]((i,j)) \\ &= c\phi\left(T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W\right) + \phi\left(U : \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{V \longrightarrow} W\right) \end{aligned}$$

Luego, $\phi : \mathscr{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(F)$ es un homomorfismo.
$T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W \mapsto \phi\left(T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W\right) = A_{\substack{T:V \longrightarrow W \\ \alpha \mapsto T(\alpha)}}$

Q.E.D.

Teorema 3.12: *Sean V y W F-espacios vectoriales de dimensión finita n y m, respectivamente. Sea $\mathscr{B}_V$ una base ordenada de V y $\mathscr{B}_W$ una base ordenada de W. La función* $\phi : \mathscr{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(F)$
$T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W \mapsto \phi\left(T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W\right) = A_{T:V}$
es un isomorfismo.

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Es conveniente denotar la matriz representante de una *T.l.* $T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} V$, i.e. un operador lineal, respecto a una misma base $\mathscr{B}$ como $[T]_{\mathscr{B}}$.

Teorema 3.13: *Sean V, W, Z F-espacios vectoriales de dimensión finita, $T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W$, $U : \underset{\beta \mapsto U(\beta)}{W \longrightarrow} Z$ T.l. , $\mathscr{B}_V, \mathscr{B}_W, \mathscr{B}_Z$ bases ordenadas de lo respectivos espacios V, W, Z. Si A es la matriz representante de la T.l. $T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} W$ respecto a las bases $\mathscr{B}_V, \mathscr{B}_W$ y B es la matriz representante de la T.l. $U : \underset{\beta \mapsto U(\beta)}{W \longrightarrow} Z$ respecto a las bases $\mathscr{B}_W, \mathscr{B}_Z$, entonces la matriz que representa a la composición $UT : \underset{\alpha \mapsto [UT](\alpha)}{V \longrightarrow} Z$ respecto a las bases $\mathscr{B}_V, \mathscr{B}_Z$ es $C = BA$.*

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Como consecuencia inmediata un operador lineal $T : \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{V \longrightarrow} V$ es invertible si y sólo si $[T]_{\mathscr{B}_V}$ es invertible.

Entonces existe $U : \underset{\beta \mapsto U(\beta)}{V \longrightarrow} V$ operador lineal tal que

$$UT : \underset{\alpha \mapsto [UT](\alpha)}{V \longrightarrow} V = \underset{\alpha \mapsto I(V)}{I : V \longrightarrow V} = TU : \underset{\beta \mapsto [TU](\beta)}{V \longrightarrow} V$$

. Además observe que

$$[T^{-1}]_{\mathscr{B}_V} = [T]^{-1}_{\mathscr{B}_V}.$$

Se quiere investigar ahora lo que le sucede a la matriz representante cuando se cambia la base ordenada. Por simplicidad, se considera sólo el caso de operadores lineales sobre un F-espacio vectorial V.

Teorema 3.14: *Si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita y $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathscr{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$ son bases ordenadas de V y $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} V$ es un operador lineal.*

Si $P = [P_1, \ldots, P_n] \in \mathcal{M}_n(F)$ cuyas columnas $P_j = [\alpha'_j]_{\mathscr{B}}$ entonces

$$[T]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathscr{B}}P$$

es decir, $U : V \underset{\alpha \mapsto U(\alpha)}{\longrightarrow} V$ es un operador lineal tal que $U(\alpha_j) = \alpha'_j \ \forall j \in [\![1, n]\!]$, entonces $[T]_{\mathscr{B}'} = [U]^{-1}_{\mathscr{B}}[T]_{\mathscr{B}}[U]_{\mathscr{B}}$.

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición (Matrices similares)**:** Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(F)$. Se dice que B es **similar** a A sobre F si existe $P \in \mathcal{M}_n(F)$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$.

§ Funcionales lineales

Definición: Si V es un F-espacio vectorial y $f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F$ es una *T.l.* se dice que $f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F$ es un **funcional lineal** sobre V.

Ejemplo 3.2: *Sea F un campo y $a_1, \ldots, a_n \in F$. Sea* $f : F^n \underset{(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\longrightarrow} F$.

Sean $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ y $c \in F$. Entonces

$$\begin{aligned} f(cA + B) &= f((ca_1 + b_1, \ldots, ca_n + b_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (ca_i + b_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (ca_i x_i + b_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ca_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ &= c \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ &= cf(A) + f(B). \end{aligned}$$

entonces $f : F^n \underset{(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\longrightarrow} F$ *es un funcional lineal.*

Ejemplo 3.3: *Lugar de trabajo:* $\mathcal{M}_n(F)$ *como* F*-espacio vectorial.*

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(F)$, $\begin{array}{c} Tr : \mathcal{M}_n(F) \longrightarrow F \\ A \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} A((i,i)) \end{array}$ *y* $c \in F$.

$$\begin{aligned} Tr(cA+B) &= \sum_{i=1}^{n}[cA((i,i)) + B((i,i))] \\ &= \sum_{i=1}^{n} cA((i,i)) + \sum_{i=1}^{n} B((i,i)) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} A((i,i)) + \sum_{i=1}^{n} B((i,i)) \\ &= cTr(A) + Tr(B) \end{aligned}$$

entonces $\begin{array}{c} Tr : \mathcal{M}_n(F) \longrightarrow F \\ A \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} A((i,i)) \end{array}$ *es un funcional lineal. A este funcional lineal se le llama* ***traza****.*

Observación: Si V es un F-espacio vectorial, la colección de funcionales lineales sobre V forma un F-espacio vectorial.

Si $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es base de un F-espacio vectorial V, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ se define

$$\begin{array}{c} f_i : V \longrightarrow F \\ \alpha \mapsto f_i(\alpha) \end{array}$$

funcional lineal, donde $f_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$

Se tiene que $\{f_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ es base de $\mathscr{L}(V, F)$, en efecto:
Sean $c_1, \ldots, c_n \in F$ tales que $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k = 0_{\mathscr{L}(V,F)}$, en particular $\forall k \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} 0_V = 0_{\mathscr{L}(V,F)}(\alpha_i) &= \sum_{k=1}^{n} e_k f_k(\alpha_i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{ik} \\ &= c_i \end{aligned}$$

entonces $c_i = 0\ \forall i \in [\![1, n]\!]$. Luego $\{f_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ es *l.i.* . Como $\text{card}(\{f_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}) = \dim(V) = dim(\mathscr{L}(V, F)) = n$, entonces $\mathscr{L}(\{f_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}) = \mathscr{L}(V, W)$. Luego $\{f_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ es base de $\mathscr{L}(V, F)$.

Con las condiciones anteriores se denota por $\mathscr{B}^*$ a $\{f_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ y se llama **base dual** de $\mathscr{B}$ y a $\mathscr{L}(V, F)$ se le denota por V^* y se le llama **espacio dual** de V.

Ejemplo 3.4: *Lugar de trabajo:* $\mathbb{R}^2$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

Sean $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 1)$, $\beta = (5, 7)$ *y* $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. $\mathscr{B}$ *es base de* $\mathbb{R}^2$.

Si $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \beta$, *entonces encontramos que*

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 7\end{array}\right] \; R_1 \to R_1 - R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 7\end{array}\right] \; \begin{array}{c} R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_1 \to (-1)R_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right].$$

y entonces $c_1 = 2$ *y* $c_2 = 3$. *Luego si* $\mathscr{B}^* = \{f_1, f_2\}$ *es la base dual de* $\mathscr{B}$, *entonces se tiene que* $f_1(\alpha_1) = 1$, $f_1(\alpha_2) = 0$, $f_2(\alpha_1) = 0$ *y* $f_2(\alpha_2) = 1$.
Entonces

$$f_1(\beta) = f_1(2\alpha_1 + 4\alpha_2) = 2f_1(\alpha_1) + 3f_1(\alpha_2) = 2$$

y

$$f_2(\beta) = f_2(2\alpha_1 + 4\alpha_2) = 2f_2(\alpha_1) + 3f_2(\alpha_2) = 3.$$

Cuando V es de dimensión finita, entonces tenemos que $\dim(V^*) = \dim(V)$.

Teorema 3.15: *Sea* V *un* F*-espacio vectorial de dimensión finita y* $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *una base de* V. *Entonces existe una única base dual* $\mathscr{B}^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ *de* V^* *tal que* $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. *Para cada funcional lineal* $f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F$ *sobre* V *se tiene*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i$$

y para cada $\alpha \in V$, *se tiene*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i.$$

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición (Anulador de un subconjunto de un F-espacio vectorial)***:*** Si V es un F-espacio vectorial y $S \subseteq V$, el **anulador** de S (denotado por S^0) es el conjunto de funcionales lineales $f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F$ tales que $f(\alpha) = 0 \; \forall \alpha \in S$. O bien,

$$S^0 = \left\{ f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F \in V^* \;\middle|\; f(\alpha) = 0, \; \forall \alpha \in S \right\}.$$

Ejemplo 3.5: *Sea* V *un* F*-espacio vectorial. Entonces*

- $\varnothing^0 = V^*$
- $\{0_V\}^0 = V^*$
- $V^0 = 0_{\mathscr{L}(V,F)}$.

el anulador de un conjunto S *es un* F*-subespacio vectorial de* V^*.

Teorema 3.16: *Sea* V *un* F*-espacio vectorial de dimensión finita y* W *un* F*-subespacio vectorial de* V. *Entonces*

$$\dim(W) + \dim(W^0) = \dim(V).$$

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Para F-espacios vectoriales de dimensión finita, introducimos el concepto de **hiperespacio**. Si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita n, un F-subespacio vectorial de V se dice hiperespacio si tiene dimensión $n - 1$.

Corolario 3.1: *Si W es un F-subespacio vectorial de dimensión finita k de un F-espacio vectorial V de dimensión finita n, entonces W es la intersección de $n-k$ hiperespacios en V.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Corolario 3.2: *Si W_1 y W_2 son F-subespacios vectoriales de un F-espacio vectorial de dimensión finita, entonces $W_1 = W_2$ si y sólo si $W_1^0 = W_2^0$.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

§ El doble dual

Teorema 3.17: *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita. Para cada $\alpha \in V$ se define*

$$\begin{array}{rl} L_\alpha : V^* & \longrightarrow F \\ f & \mapsto f(\alpha) \end{array}$$

Entonces la función $\begin{array}{rl} \psi : V & \longrightarrow V^{**} \\ \alpha & \mapsto L_\alpha \end{array}$ *es un isomorfismo.*

En términos categóricos, si V y W son F-espacios vectoriales de dimensión finita y si $T : V \longrightarrow W$ es t.l. y $\psi_V : V \longrightarrow V^{**}$ con $\psi_V(\alpha) = L_\alpha$ entonces el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi_V} & V^{**} \\ \downarrow{\scriptstyle T} & & \downarrow{\scriptstyle T^{**}} \\ W & \xrightarrow{\psi_W} & W^{**} \end{array}$$

conmuta. Luego ψ_V y ψ_W componen un isomorfismo natural.

Demostración. Es claro que L_α es lineal. Sean $\alpha, \beta \in V$, $c \in F$ y $\gamma = c\alpha + \beta$. Entonces para cada $f \in V^*$

$$\begin{aligned} \psi(\gamma) = L_\gamma &= f(\gamma) \\ &= f(c\alpha + \beta) \\ &= cf(\alpha) + f(\beta) \\ &= cL_\alpha(f) + L_\beta(f) \end{aligned}$$

Luego $\psi(\gamma) = \psi(c\alpha + \beta) = c\psi(\alpha) + \psi(\beta)$. Por lo que $\begin{array}{rl} \psi : V & \longrightarrow V^{**} \\ \alpha & \mapsto L_\alpha \end{array}$ es una transformación lineal.

Ahora supongamos que $\alpha \neq 0$. Entonces $L_\alpha \neq 0_{V^{**}}$. En efecto, existe $\begin{array}{rl} f : V & \longrightarrow F \\ \alpha & \mapsto c_1 \end{array}$ donde $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$ para la base ordenada $\mathscr{B} = \{\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, por lo que $f(\alpha) = 1 \neq 0$. Luego $L_\alpha \neq 0_{V^{**}}$, por lo que si $L_\alpha = 0_{V^{**}}$ entonces $\alpha = 0$. Ahora si $\alpha = 0$ entonces para $f \in V^*$ se tiene que $f(\alpha) = f(0) = 0$, luego $L_\alpha = 0_{V^{**}}$.

Así $\alpha = 0$ si y sólo si $L_\alpha = 0_{V^{**}}$. Luego $\psi : V \underset{\alpha \mapsto L_\alpha}{\longrightarrow} V^{**}$ es no singular, por lo tanto inyectiva. Finalmente como $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$, por el Teorema 3.9, $\psi : V \underset{\alpha \mapsto L_\alpha}{\longrightarrow} V^{**}$ es suprayectiva. Luego $\psi : V \underset{\alpha \mapsto L_\alpha}{\longrightarrow} V^{**}$ es un isomorfismo.

Q.E.D.

Corolario 3.3: *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita. Si $L : V \underset{\alpha \mapsto L(\alpha)}{\longrightarrow} F \in V^*$ es un funcional lineal, entonces hay un único $\alpha \in V$ tal que $L(f) = f(\alpha)$ $\forall f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F \in V^*$.*

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Corolario 3.4: *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita. Cada base de V^* es el dual de alguna base de V.*

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

De Teorema 3.17 podemos identificar a un vector $\alpha \in V$ con $L_\alpha : V^* \underset{f \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F$ y del mismo modo a V con V^{**}. De modo que, abusando de la notación, decimos que V es el dual de V^* o que V y V^* están en dualidad mutua de forma natural.

Considere ahora el conjunto $E \subseteq V^*$. Entonces E^0 es un subconjunto de V^{**}. Así, si identificamos a V^{**} con V entonces E^0 es un subespacio de V, a saber, el conjunto de los $\alpha \in V$ tales que $F(\alpha) = 0$ para todo $f \in E$. Luego, enunciamos el siguiente teorema

Teorema 3.18: *Si S es cualquier subconjunto de un F-espacio vectorial V de dimensión finita, entonces $(S^0)^0 = \mathscr{L}(S)$.*

Demostración. Sea $W = \mathscr{L}(S)$. Claramente $W^0 = S^0$. Por el Teorema 3.16 se tiene que

$$\dim(W) + \dim(W^0) = \dim(V)$$
$$\dim(W^0) + \dim(W^0)^0 = \dim(V^*).$$

y como $\dim(V) = \dim(V^*)$ se tiene que

$$\dim(W) = dim((W^0)^0).$$

Como W es subespacio de $(W^0)^0$ se tiene entonces que $W = (W^0)^0$ y luego $(S^0)^0 = \mathscr{L}(S)$. Q.E.D.

Los resultados de esta sección son válidos para espacios vectoriales arbitrarios, con la necesidad de utilizar el **Axioma de Elección**.
Ahora consideremos V un F-espacio vectorial. Es claro que no podemos construir hiperespacios para V si $dim(V) \notin \mathbb{N}$. Por esto damos la siguiente definición:

Definición (Hiperespacio en un F-espacio vectorial)***:*** Si V es un F-espacio vectorial, un **hiperespacio** en V es un F-subespacio vectorial N, distinto de V tal que si W es un F-subespacio vectorial de V con $N \subseteq W$ entonces $W = N$ ó $W = V$.

donde expresamos la idea de que N F-subespacio vectorial de V tiene üna dimensión menos" que V. Es decir, no existe un F-subespacio vectorial propio de V más grande que N. Para sintetizar esta idea decimos que N es maximal en V.

Teorema 3.19: *Si* $f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F$ *es un funcional lineal en un* F*-espacio vectorial* V *distinto del funcional lineal cero, entonces* $\ker_f$ *es un hiperespacio en* V*. Recíprocamente, todo hiperespacio de* V *es el kernel de un (no único) funcional lineal* $f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F$ *distinto del funcional lineal cero sobre* V*.*

Demostración. Sea $f \in V^*$ con $f \neq 0_{V^*}$ y N_f su kernel. Sea $\alpha \in V \setminus N_f$. Si $\beta \in V$ entonces $\beta \in \mathscr{L}(N_f \cup \{\alpha\})$. En efecto.

Defínase $c = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)}$. Entonces $\gamma := \beta - c\alpha \in N_f$, pues $f(\gamma) = f(\beta - c\alpha) = f(\beta) - cf(\alpha) = 0$. Así $\beta \in \mathscr{L}(N_f \cup \{\alpha\})$.

Ahora, sea N un hiperespacio de V. Consideremos a $\alpha \in V \setminus N$ fijo. Como N es maximal, $\mathscr{L}(N \cap \{\alpha\}) = V$. Luego cada vector $\beta \in V$ tiene la forma $\beta = \gamma + c\alpha$ para $\gamma \in N, c \in F$.

γ y c son determinados de manera única por β. En efecto, si tenemos $\beta = \gamma' + c'\alpha$, $\gamma' \in N, c' \in F$ entonces $(c' - c)\alpha = \gamma - \gamma'$. Si $c' - c \neq 0$ entonces $\alpha \in N$, una contradicción. Por lo que $c' = c$ y $\gamma = \gamma'$.

Luego entonces, si $\beta \in V$ existe un único $c_\beta \in F$ tal que $\beta - c_\beta\alpha \in N$. Sea $g(\beta)$ el mismo c. Entonces $g(\beta)$ define un funcional lineal $g : V \underset{\beta \mapsto c}{\longrightarrow} F$.

En efecto, sean $\beta, \theta \in V$ y $d \in F$. Entonces para $d\beta$ $f(d\beta) = c_{d\beta}$. Luego, $\beta - \frac{c_{d\beta}}{d} \in N$, por lo que $\frac{c_{d\beta}}{d} = c_\beta$ y entonces $f(d\beta) = df(\beta)$.

Ahora, $f(\beta + \theta) = c_{\beta+\theta}$. Así, si $\beta = \gamma_\beta + c_\beta\alpha$ y $\theta = \gamma_\theta + c_\theta\alpha$,

$$\begin{aligned} \gamma_\beta + c_\beta\alpha + \gamma_\theta + c_\theta\alpha &= \gamma_{\beta+\theta} + c_{\beta+\theta}\alpha \\ (\gamma_\beta + \gamma_\theta) - \gamma_{\beta+\theta} &= (c_{\beta+\theta} - (c_\beta + c_\theta))\alpha \end{aligned}$$

Y si $(\gamma_\beta + \gamma_\theta) - \gamma_{\beta+\theta} \neq 0$ entonces $\alpha \in N$. De modo que $c_{\beta+\theta} = c_\alpha + c_\theta$ y entonces $f(\beta + \theta) = f(\beta) + f(\theta)$.

Finalmente, como $f(\beta - c_\beta\alpha) = f(\beta) - c_\beta f(\alpha) = c_\beta - c_\beta = 0$ se tiene que

$$N = \ker_f .$$

Q.E.D.

Lema 3.2: *Si* $f : V \underset{\alpha \mapsto f(\alpha)}{\longrightarrow} F$ *y* $g : V \underset{\alpha \mapsto g(\alpha)}{\longrightarrow} F$ *son funcionales lineales en un* F*-espacio vectorial* V*,* $c \in F$*, entonces* $g = cf$ *si y sólo si* $\ker_f \subseteq \ker_g$*, i.e.*

$$f(\alpha) = 0 \implies g(\alpha) = 0.$$

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

Teorema 3.20: *Sean* $g : V \underset{\alpha\mapsto g(\alpha)}{\longrightarrow} F, f_1 : V \underset{\alpha\mapsto f_1(\alpha)}{\longrightarrow} F, \ldots, f_n : V \underset{\alpha\mapsto f_n(\alpha)}{\longrightarrow} F$ *funcionales lineales sobre un* F*-espacio vecto* V *y* $c_1, \ldots, c_n \in F$. *Entonces*

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$$

si y sólo si $\ker_{f_1} \cap \cdots \cap \ker_{f_r} \subseteq \ker_g$.

Demostración. Si $g = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ y $f_i(\alpha) = 0$ para cada $i \in [\![1, n]\!]$ entonces $g(\alpha) = 0$. Así, $\bigcap_{i=1}^{n} \ker_{f_i} \subseteq \ker_g$.

Para probar el regreso procedemos por inducción sobre n.

Por el Lema 3.2 se tiene probado el caso base $n = 1$. Supongamos ahora que el teorema es cierto para $n = k - 1$. Sean $g' : V \underset{\alpha\mapsto g'(\alpha)}{\longrightarrow} F, f_1' : V \underset{\alpha\mapsto f_1'(\alpha)}{\longrightarrow} F, \ldots, f_n' : V \underset{\alpha\mapsto f_n'(\alpha)}{\longrightarrow} F$ con $g' = g|_{\ker_{f_k}}$ y $f_j' = f_j|_{\ker_{f_k}}$, $j \in [\![1, k-1]\!]$. Así, si $\alpha \in \ker_{f_k}$ y $f_j(\alpha) = 0$, entonces $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{k} \ker_{f_i}$. En particular $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{k-1} \ker_{f_i}$ y entonces, por hipótesis de inducción, existen $c_1, \ldots, c_{k-1} \in F$ tales que

$$g' = \sum_{j=1}^{k-1} c_j f_j' \text{ y entonces } g'(\alpha) = 0.$$

Sea $h := g - \sum_{j=1}^{k-1} c_j f_j$. Entonces h es un funcional lineal en V y $h(\alpha) = 0\ \forall \alpha \in \ker_{f_k}$. Luego, por el Lema 3.2 $h = cf_k$, $c \in F$. Si $h = c_k f_k$ entonces

$$g = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i.$$

Q.E.D.

§ Ejercicios

1. Demostrar los casos restantes del Teorema 3.2.
2. Comprobar que la función T en el Teorema 3.3 es una *T.l.*
3. Demostrar el Teorema 3.4.
4. Mostrar que $\mathscr{A}$, en el Teorema 3.5, es *l.i.*
5. Demostrar el Lema 3.1.
6. Demostrar el Teorema 3.8.
7. Demostrar el Teorema 3.13.
8. Demostrar el Teorema 3.14.
9. Demostrar el Teorema 3.15.
10. Demostrar el Teorema 3.16.

11. Demostrar el Corolario 3.1
12. Demostrar el Corolario 3.2
13. Demostrar el Corolario 3.3
14. Demostrar el Corolario 3.4
15. Demostrar el Lema 3.2
16. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, suponga que $T : V \underset{\alpha \mapsto T(\alpha)}{\longrightarrow} \mathbb{C}^3$ es un isomorfismo. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V$ tal que
$$T(\alpha_1) = (1, 0, i) \quad T(\alpha_2) = (-2, 1+i, 0)$$
$$T(\alpha_3) = (-1, 1, 1) \quad T(\alpha_4) = (\sqrt{2}, i, 3)$$
    a) ¿$\alpha_1 \in \mathscr{L}(\{\alpha_2, \alpha_3\})$?
    b) Sea $W_1 = \mathscr{L}(\{\alpha_1, \alpha_2\})$ y $W_2 = \mathscr{L}(\{\alpha_3, \alpha_4\})$. Determine $W_1 \cap W_2$.
    c) Encuentre una base para el $\mathbb{C}$-subespacio vectorial $\mathscr{L}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\})$ de V.
17. ¿Es la función $T : \mathbb{Z}/\sim_n \times \mathbb{Z}/\sim_n \underset{([x_1]_n, [x_2]_n) \mapsto ([x_1]_n^2, [x_2]_n)}{\longrightarrow} \mathbb{Z}/\sim_n \times \mathbb{Z}/\sim_n$ una *T.l.* ? Considere los casos
    a) $n \in \mathbb{N}$.
    b) $n \in \mathbb{N}, n = p$ número primo.
18. Si $C([a,b])$ es el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que $I : C([a,b]) \underset{f \mapsto \int_a^b f(t)dt}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ es un funcional lineal.
19. Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones polinomiales $p : \mathbb{R} \underset{x \mapsto p(x)}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ tal que $\text{grad}(p) \leq 2$. Defínase los funcionales lineales
$$f_1 : V \underset{p \mapsto \int_0^1 p(x)dx}{\longrightarrow} \mathbb{R} \quad , \quad f_2 : V \underset{p \mapsto \int_0^2 p(x)dx}{\longrightarrow} \mathbb{R} \quad , \quad f_3 : V \underset{p \mapsto \int_0^{-1} p(x)dx}{\longrightarrow} \mathbb{R} \quad .$$
    Demuestra que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de V^* mostrando la base de V de la cual es el dual.
20. Utiliza el Teorema 3.20 para probar lo siguiente. Si W es un F-subespacio vectorial de un F-espacio vectorial de dimensión finita y si $\{g_1, \ldots, g_r\}$ es cualquier base de W^0, entonces
$$W = \bigcap_{i=1}^{r} \ker_{g_i} .$$

4
Determinantes

Esta sección es, en su gran mayoría, un transcrito de lo expuesto en [Mor14] lo cuál también se puede encontrar en `https://delta.cs.cinvestav.mx/~gmorales/Biberstein/fvd/node19.html`.

§ Permutaciones

Una permutación es una biyección sobre el conjunto $[\![1,n]\!]$. Al conjunto de permutaciones en $[\![1,n]\!]$ se le denota S_n y los elementos de $[\![1,n]\!]$ se les llamará n-ígitos.

El conjunto S_n junto a la operación $\begin{array}{rcl}\circ : S_n \times S_n & \longrightarrow & S_n \\ (\sigma,\tau) & \mapsto & \sigma\circ\tau\end{array}$ forma un grupo $(S_n,\circ)$ al cual llamamos grupo simétrico. Convenimos que si $\sigma,\tau\in S_n$ entonces denotamos $\sigma\circ\tau$ como simplemente $\sigma\tau$.

Teorema 4.1: *Si X,Y son conjuntos de cardinalidad $n\in\mathbb{N}$ entonces el número de biyecciones de X a Y es $n!$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Supongamos $n\geq 2$ y el teorema probado para $n-1$. Sean $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ e $Y=\{y_1,\ldots,y_n\}$ conjuntos de cardinalidad n. $\forall k\in[\![1,n]\!]$ sea A_k el conjunto de las biyecciones f de X sobre Y tales que $f(x_n)=y_k$. La cardinalidad de A_k es igual a aquella del conjuntos de todas las biyecciones del conjunto $\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ sobre el conjunto $Y\setminus\{y_k\}$. Por hipótesis de inducción esta cardinalidad es $(n-1)!$. El conjunto de todas las biyecciones de X sobre Y es la reunión de los n conjuntos A_k, ajenos a pares, cada uno de cardinalidad $(n-1)!$, luego tiene cardinalidad $(n-1)!n=n!$. Q.E.D.

Definición (Ciclo)***:*** Sea $n\geq 2$. Si $x_1,\ldots,x_r$ son n-ígitos distintos, se llama **ciclo** $(x_1,\ldots,x_n)$ a la permutación $\gamma\in S_n$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\gamma(x_k) & = & x_{k+1}\ \forall k\in[\![1,r-1]\!] \\ \gamma(x_r) & = & x_1 \\ \gamma(x) & = & x \text{ si } x\notin\{x_1,\ldots,x_n\}\end{array}\right.$$

Definición (Conjunto de elementos de un ciclo)***:*** Si γ es el ciclo $(x_1,\ldots,x_n)$ designaremos por $\{\gamma\}$ el conjunto de elementos $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Definición (Familia de ciclos ajena)***:*** Una familia finita $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ de ciclos se dice **ajena** si los correspondientes subconjuntos $\{\gamma_1\},\ldots,\{\gamma_n\}$ son ajenos a pares.

Lema 4.1: *Ciclos ajenos conmutan.*

Demostración. Basta probar que si γ_1, γ_2 son dos ciclos ajenos vale:

$$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1.$$

Si $x \notin \{\gamma_1\}$ y $x \notin \{\gamma_2\}$ vale

$$\gamma_1\gamma_2(x) = \gamma_2\gamma_1(x) = x.$$

Supongamos ahora $x \in \{\gamma_1\}$. Entonces $\gamma_1 x \neq x$, luego $\gamma_2 x = x$ y en consecuencia $\gamma_1\gamma_2(x) = \gamma_1(x)$. Pero siendo $\gamma_1(x) \in \{\gamma_1\}$ vale también $\gamma_2\gamma_1(x) = \gamma_1(x)$. Luego entonces

$$\gamma_1\gamma_2(x) = \gamma_1\gamma_2(x).$$

Análogamente se observa que esto vale también si $x \in \{\gamma_2\}$. Q.E.D.

Teorema 4.2: *Toda permutación $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq \iota$ ($\iota : S_n \longrightarrow S_n$, $x \mapsto x$) puede representarse como producto (conmutativo) de una familia finita de ciclos ajenos. Tal representación es única a menos del orden de los factores.*

Demostración. Sea $\sigma \in S_n, \sigma \neq \iota$.

i) En el conjunto $[\![1, N]\!]$ introduzcamos la relación $\sim$ por el convenio

$$y \sim x \longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = \sigma^m x$$

Rigen las reglas:

a) $x \sim x \ \forall x \in [\![1, N]\!]$ pues $x = \sigma^0 x$.

b) $y \sim x \implies x \sim y$ pues $y = \sigma^m$ implica $x = \sigma^{-m} y$.

c) Las relaciones $y \sim x$ y $z \sim y$ implican $z \sim x$, pues $y = \sigma^p x$ y $z = \sigma^q y$ implican $z = \sigma^{p+q} x$.

De ahí se sigue que $\sim$ es una relación de equivalencia en $[\![1, N]\!]$. Las correspondientes clases de equivalencia se llaman las **órbitas** de la permutación σ.

La órbita de un n-ígito $x \in [\![1, N]\!]$ se reduce a $\{x\}$ si y sólo si $\sigma x = x$ o como se dice, x es invariante bajo σ.

Una órbita de σ reducida a un sólo punto la llamaremos **órbita trivial**. Puesto que $\sigma \neq \iota$, σ posee por lo menos una órbita no trivial.

ii) Sea B una órbita no trivial de σ. Fijemos arbitrariamente $x \in B$. $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^m x = x$, pues, de lo contrario si $p, q \in \mathbb{N}$ y $p \neq q$ sería $\sigma^p x \neq \sigma^q x$, lo que es imposible por ser $[\![1, N]\!]$ un conjunto finito.

Sea $r := \text{mín}\{m \in \mathbb{N} \mid \sigma^m x = x\}$. r es un entero ≥ 2. $\forall m \in \mathbb{Z}$ obtenemos por el algoritmo de la división enteros q y t tales que $m = rq + t$ y $0 \leq t \leq r - 1$, de donde:

$$\sigma^m x = \sigma^t \sigma^{rq} x = \sigma^t x$$

luego B contiene solamente los elementos $x, \sigma x, \sigma^2 x, \ldots, \sigma^{r-1} x$ y, por minimalidad de r, estos son distintos a pares.

El entero r depende solamente de B, pues es la cardinalidad de B. También el ciclo $\gamma := (x, \sigma x, \ldots, \sigma^{r-1} x)$ depende solamente de B pues γ es al restricción de σ a B: $\sigma|_B$. A su vez $B = \{\gamma\}$.

iii) Sea $(B_1, \ldots, B_N)$ la familia de todas la órbitas no triviales de σ. $\forall k \in [\![1, N]\!]$ sea γ_k el ciclo definido por B_k como en ii) o sea $\gamma_k = \sigma|_{B_k}$. Puesto que $\{\gamma_k\} = B_k$ los ciclos $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ son ajenos. Afirmamos que

$$\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_N.$$

En efecto:

a) Si $x \notin B_k$ $\forall k \in [\![1, N]\!]$ vale $\sigma x = x$ y también $(\gamma_1 \cdots \gamma_N)(x) = x$, pues $\gamma_k(x) = x$ $\forall k \in [\![1, N]\!]$.

b) Supongamos que $x \in B_k$ para algún $k \in [\![1, N]\!]$. (Este k es único). Entonces $\gamma_k(x) = \sigma x$ y $\gamma_i(x) = x$ si $i \neq k$. Aplicando, por ejemplo, el Lema 4.1 obtenemos:

$$(\gamma_1 \cdots \gamma_N)(x) = \gamma_k(\gamma_1 \cdots \gamma_{k-1}\gamma_{k+1} \cdots \gamma_N)(x) = \gamma_k(x) = \sigma x.$$

De a) y b) se ve que $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_N$.

iv) Para probar la unicidad de la representación $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_N$ (la cual, por cierto, no será usada más adelante) supongamos una relación

$$\sigma = \gamma'_1 \cdots \gamma'_{N'}.$$

donde $\gamma'_1 \cdots \gamma'_{N'}$ son ciclos ajenos.

Si $x \notin \{\gamma'_k\}$ $\forall k \in [\![1, N]\!]$ se verifica:

$$\sigma x = x.$$

Supongamos que para algún $k \in [\![1, n']\!]$ se cumple $x \in \{\gamma'_k\}$. Entonces, por ejemplo, por el Lema 4.1:

$$\sigma x = \gamma'_k(\gamma'_1 \cdots \hat{\gamma'_k} \cdots \gamma'_{N'})(x) = \gamma'_k \in \{\gamma'_k\}$$

de donde inmediatamente por inducción:

$$\sigma^m x = (\sigma'_k)^m(x) \in \{\gamma'_k\}\ \forall m \in \mathbb{N}$$

.

Esto prueba que $\{\gamma'_k\}$ es una órbita no trivial de σ y $\gamma'_k = \sigma|_{\{\gamma'_k\}}$. Finalmente sea B una órbita no trivial de σ. Si $x \in B$, vale $x \neq \sigma x$, luego $\exists k \in [\![1, n']\!]$ tal que $x \in \{\gamma'_k\}$. De ahí $B = \{\gamma'_k\}$ o sea B figura entre las órbitas no triviales $\{\gamma'_1\}, \ldots, \{\gamma'_{N'}\}$. Se ve pues que la representación $\sigma = \gamma'_1 \cdots \gamma'_{N'}$ es la misma que $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_N$. Q.E.D.

Definición (Trasposición)***:*** Un ciclo γ tal que $\{\gamma\}$ es de cardinalidad 2 se llama **trasposición**. En otras palabras, si i, j son n-ígitos distintos, la trasposición $\tau = (i, j)$ es la permutación que satisface

$$\tau(i) = j, \tau(j) = i, \text{ y}$$
$$\tau(k) = k\ \forall k \in [\![1, n]\!] \text{ tal que } k \neq i \text{ y } k \neq j.$$

Teorema 4.3: *Si $n \geq 2$, toda permutación de grado n puede representarse como producto de una familia finita de trasposiciones.*

Demostración. Vale $\iota = (1, 2)^2$. Podemos pues suponer ahora $\sigma \neq \iota$. En virtud del Teorema 4.2 basta probar que todo ciclo puede representarse como producto de una familia finita de trasposiciones. Esto se sigue de que $r \geq 2$ y si $x_1, \ldots, x_r$ son n-ígitos distintos a pares, rige la fórmula:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r) = (x_1, x_r)(x_1, x_{r-1}) \cdots (x_1, x_3)(x_1, x_2).$$

Q.E.D.

Note que la representación de una permutación como producto de trasposiciones está lejos de ser única.

Ejemplo 4.1: *Si $n \geq 3$ tenemos:*

$$\iota = (1,2)^2 = (1,3)^2 = (1,2)^2(1,3)^2 = (1,2)^2(1,3)^2(2,3)^2.$$

Definición (Trasposición de n-ígitos consecutivos)***:*** Una permutación de grado n se dice **trasposición de n-ígitos consecutivos** si es de la forma $(k, k+1)$ con $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Teorema 4.4: *Si $n \geq 2$ toda permutación puede representarse como producto de una familia finita de trasposiciones de n-ígitos consecutivos.*

Demostración. En virtud del Teorema 4.3 basta probar que toda trasposición puede expresarse como producto de trasposiciones de n-ígitos consecutivos. Consideremos dos n-ígitos: a y $a+r$ con $r \in \mathbb{N}$. Observemos que la permutación

$$\sigma := (a+r-1, a+r)(a+r-2, a+r-1)\cdots(a+1, a+2)(a, a+1)$$

transforma a en $a+r$ y los n-ígitos $a+1, a+2, \ldots, a+r-1; a+r$ respectivamente en $a, a+1, \ldots, a+r-2; a+r-1$. A su vez la permutación

$$\tau := (a, a+1)(a+1, a+2)\cdots(a+r-3, a+r-2)(a+r-2, a+r-1)$$

transforma los n-ígitos $a, a+1, \ldots, a+r-2; a+r-1$ respectivamente en $a+1, a+2, \ldots, a+r-1; a$ y no desplaza a $a+r$. Luego la permutación $\tau\sigma$ intercambia $a+r$ con a y no desplaza ningún otro n-ígito, o sea:

$$(a, a+r) = \tau\sigma.$$

Pero $\tau\sigma$ es patentemente un producto de trasposiciones de dígitos consecutivos.

Q.E.D.

En este contexto un homomorfismo es una función f tal que $f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau)$ para cualesquiera permutaciones en S_n. En general, un homomorfismo es una función que preserva operaciones.

Teorema 4.5: *Existe un único homomorfismo ϵ del grupo simétrico S_n en el grupo $\{-1, 1\}$ que satisface*

$$\epsilon(\sigma) = -1$$

para toda trasposición σ.

$\forall \sigma \in S_n$ vale:

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{\nu(\sigma)}$$

*donde $\nu(\sigma)$ es el número de pares (i, j) de elementos de $[\![1, n]\!]$ tales que $i < j$ para $\sigma(i) > \sigma(j)$. Tales pares se llaman las **inversiones de la permutación** σ, $\epsilon(\sigma)$ se llama el **signo de la permutación** σ (y se designa por* sgn*).*

Demostración. Si existe un homomorfismo deseado ϵ, es necesariamente único. En efecto, en virtud del Teorema 4.3 toda permutación $\sigma \in S_n$ puede representarse en la forma $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$, donde $\tau_1, \ldots, \tau_m$ son trasposiciones. Por ser ϵ un homomorfismo vale $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\tau_1)\cdots\epsilon(\tau_m)$. Además, puesto que ϵ toma el valor -1 sobre toda la trasposición, se sigue de ahí $\epsilon(\sigma) = (-1)^m$. Por tanto se conoce el valor de ϵ sobre toda permutación, elemento de S_n.

Probemos la existencia del homomorfismo ϵ. Pongamos:

$$P := \prod_{\substack{i,j\in[\![1,n]\!]\\ i<j}} (j-i) \text{ y}$$

$$\sigma P := \prod_{i<j} (\sigma(j)-\sigma(i))$$

Los factores de P son, a menos del orden y del signo, los mismo que los de la derecha de σP. Más precisamente, el factor $\sigma(j)-\sigma(i)$ es negativo si y sólo si (i,j) es una inversión de σ. Tenemos pues:

$$\sigma P = \epsilon(\sigma) P$$

donde $\epsilon(\sigma) := (-1)^{\nu(\sigma)}$ y $\nu(\sigma)$ es el número de inversiones de la permutación σ. Más generalmente si f es cualquier aplicación de $[\![1,n]\!]$ en $[\![1,n]\!]$ se verifica:

$$\prod_{i<j}(f(\sigma(j))-f(\sigma(i))) = \epsilon(\sigma)\prod_{i<j}(f(j)-f(i)).$$

En efecto, como antes, los factores a la izquierda de esta última igualdad son los mismos, a menos del orden y el signo, que los a la derecha y el número de cambios de signo es siempre $\nu(\sigma)$.

Sean σ, τ permutaciones arbitrarias, elementos de S_n. Al escribir la última igualdad con $f = \tau$ obtenemos mediante las últimas cuatro igualdades

$$\begin{aligned}\epsilon(\tau\sigma)P = (\tau\sigma)P &= \prod_{i<j}(\tau\sigma(j)-\tau\sigma(i))\\ &= \epsilon(\sigma)\prod_{i<j}(\tau(j)-\tau(i))\\ &= \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)P\end{aligned}$$

De ahí:

$$\epsilon(\tau\sigma) = \epsilon(\tau)\cdot\epsilon(\sigma).$$

Esta relación prueba que ϵ es un homomorfismo del grupo S_n sobre el grupo $\{-1,1\}$.

Queda por probar que ϵ toma valor -1 sobre toda trasposición. Sea $\sigma = (a,b)$ una trasposición arbitraria. Aquí a, b son elementos distintos de $[\![1,n]\!]$. Cabe suponer $a < b$ y escribir $b = a + r$ con $r \in \mathbb{N}$.

Las inversiones de $\sigma = (a, a+r)$ son:

$$\begin{aligned}(a;a+1),(a;a+2),\ldots,(a;a+r-1),\\ (a+1;a+r),(a+2;a+r),\ldots,(a+r-1;a+r),\\ \text{y } (a;a+r).\end{aligned}$$

El número de dichas inversiones es $2r-1$, luego:

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{2r-1} = -1.$$

Q.E.D.

Definición: Sea $\sigma \in S_n$. σ se dice **permutación par** si $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. σ se dice **permutación impar** si $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$. Si representamos σ como producto de trasposiciones, σ será una permutación par o impar según el número de dichas trasposiciones sea par o impar.

De ahí se sigue: *Si representamos una misma permutación de diferentes maneras como producto de trasposiciones, la paridad del número de factores es siempre la misma o sea depende solamente de* σ.

Teorema 4.6: *Sean* $\sigma, \tau \in S_n$. *El producto* $\sigma\tau$ *es una permutación par si y sólo si ambas* σ *y* τ *son permutaciones pares o ambas son impares.*

$\sigma\tau$ *es una permutación impar si una de las permutaciones* σ, τ *es par y la otra es impar.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Se designa por A_n al conjunto de todas las permutaciones pares de grado n.

Teorema 4.7: A_n *es un subgrupo de* S_n. A_n *se llama el* ***grupo alternado de grado*** n.

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Teorema 4.8: *Si* $n \geq 2$ *el número de permutaciones pares de grado* n *es igual al número de permutaciones impares de grado* n, *luego ambos son* $\frac{n!}{2}$. *Por tanto*

$$\circ(A_n) = \frac{n!}{2}.$$

Demostración. Sea α una permutación impar fija de grado n. La aplicación $\sigma \to \alpha\sigma$ es una biyección de S_n sobre sí mismo. Intercambia A_n con su complemento. De ahí la conclusión. Q.E.D.

§ Funciones determinantes

Definición (Función n-lineal)***:*** Sea R un anillo conmutativo con identidad. Si

$$D : \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow R$$
$$A \mapsto D(A)$$

y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ representan las filas de la matriz A, se dice que $D : \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow R$ es n-lineal si $\forall i \in$ $[\![1, n]\!]$ D es función lineal en la i-ésima fila cuando las demás filas quedan fijas, es decir

$$D(\alpha_1, \ldots, c\alpha_i + \alpha_i', \ldots, \alpha_n) = cD(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_n)$$

donde $(\alpha_1, \ldots, c\alpha_i + \alpha_i', \ldots, \alpha_n)$ es la representación en filas de la matriz A.

Lema 4.2: *Combinaciones lineales de funciones* n*-lineales son* n*-lineales.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Definición (Función n-lineal alternada)***:*** Sea R un anillo conmutativo con identidad. Si $D : \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow R$ $A \mapsto D(R)$ es una función n-lineal, esta se dice alternada si $D(A) = 0$ cuando dos filas son iguales.

Lema 4.3: *Sea* $D : \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow R$ $A \mapsto D(R)$ *una función* n*-lineal alternada. Entonces, si* A' *es una matriz obtenida al intercambiar dos renglones de la matriz* A, *entonces* $D(A) = -D(A')$.

Demostración. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ las filas de A. Como D es n-lineal

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_n) &= D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \\ &+ D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) \\ &+ D(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \\ &+ D(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$

de donde, como D es alternante

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_n) &= D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) \\ &+ D(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \\ &= D(A) + D(A') \\ &= 0. \end{aligned}$$

luego entonces $D(A) = -D(A')$. Q.E.D.

Definición (Función determinante)**:** Sea R un anillo conmutativo con identidad y sea $D : \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow R$, $A \mapsto D(R)$.
Decimos que D es una función determinante si D es n-lineal alternante y $D(I) = 1$.

Teorema 4.9 (Unicidad de la función determinante en $\mathcal{M}_n(R)$)**:** *Sea R un anillo conmutativo con identidad. Entonces existe una y sólo una función determinante*

$$\det : \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow R, \quad A \mapsto \det(A)$$

definida por

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A((i, \sigma(i))).$$

Si $D : \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow R$, $A \mapsto D(A)$ es cualquier función n-lineal alternante entonces

$$D(A) = \det(A) D(I).$$

Demostración. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ las filas de A y sean $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ las filas de la matriz identidad I. Entonces se tiene que $A = AI$, o bien

$$[AI]((i,j)) = \sum_{k=1}^{n} A((i,k)) I((k,j))$$

entonces $\alpha_1 = \sum_{k_1=1}^{n} A((1,k_1))\epsilon_{k_1}$. Luego

$$\begin{aligned} D(A) &= D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ &= D\left(\sum_{k_1=1}^{n} A((1,k_1))\epsilon_{k_1}, \ldots, \alpha_n \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} A(1,k_1) D(\epsilon_{k_1}, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Análogamente tenemos $\alpha_2 = \sum_{k_2=1}^{n} A((2,k_2))\epsilon_{k_2}$, de donde

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{k_1=1}^{n} A(1,k_1) \sum_{k_2=1}^{n} A(2,k_2) D(\epsilon_{k_1}, \epsilon_{k_2}, \ldots, \alpha_n) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} A(1,k_1)A(2,k_2) D(\epsilon_{k_1}, \epsilon_{k_2}, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

y de manera similar obtenemos al final

$$D(A) = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} A((i,k_i)) D(\epsilon_{k_1}, \ldots, \epsilon_{k_n}),$$

de donde, como D es n-lineal alternada se tiene que para todo $k_i, k_j \in [\![1,n]\!]$ tal que $i = j$ $D(\epsilon_{k_1}, \ldots, \epsilon_{k_n}) = 0$, por lo que tenemos que

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} A((i,\sigma(i))) D(\epsilon_{\sigma(1)}, \ldots, \epsilon_{\sigma(n)}).$$

Realizando una cantidad finita l de intercambios de renglón obtenemos que

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} A((i,\sigma(i)))(-1)^l D(I)$$

de donde $D(\epsilon_{\sigma(1)}, \ldots, \epsilon_{\sigma(n)}) = (-1)^l D(I)$, y en particular, si D es una función determinante, entonces

$$D(\epsilon_{\sigma(1)}, \ldots, \epsilon_{\sigma(n)}) = (-1)^l.$$

Luego, el intercambio de filas equivale a descomponer la permutación en transposiciones, esto es, que $(-1)^l = \operatorname{sgn}(\sigma)$. Luego entonces, para det función determinante

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A((i,\sigma(i))).$$

Luego, si D es una función n-lineal alternante, entonces

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A((i,\sigma(i))) D(I) \\ &= \det(A) D(I). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorema 4.10: *Sea R un anillo conmutativo con identidad, y sean $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$. Entonces*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Demostración. Ejercicio.

Q.E.D.

§ Ejercicios

1. Demostrar el Teorema 4.6.
2. Demostrar el Teorema 4.7.
3. Demostrar el Lema 4.2
4. Demostrar el Teorema 4.10.
5. Demostrar que toda permutación en S_n, $n \geq 3$ se puede descomponer en 3-ciclos de la forma $(1,2,3),(1,2,4),\ldots,(1,2,n)$.
6. Sea R una anillo conmutativo con identidad y $A \in \mathcal{M}_3(R)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

7. Sea F un campo y $A \in \mathcal{M}_n(F)$. Si A es invertible demuestre que $\det(A) \neq 0$.
8. Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(R)$, R un anillo conmutativo con identidad, se dice triangular si $A_{ij} = 0$ para $i,j \in [\![1,n]\!]$ con $i > j$ o si $A_{ij} = 0$ para $i < j$. Demuestra que si A es una matriz triangular entonces

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$$

9. Sea $\sigma \in S_n$ y $A \in \mathcal{M}_n(F)$, con F un campo. Sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ los vectores fila de A. Definimos

$$\sigma(A) = [\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)}].$$

   a. Sea $B \in \mathcal{M}_n(F)$. Demuestre que $\sigma(AB) = \sigma(A)B$, y en particular que $\sigma(A) = \sigma(I)A$.

   b. Sea $T : F^n \longrightarrow F^n$, $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}$. Probar que T es un operador lineal invertible.

   c. Probar que $[T]_{\mathscr{C}} = \sigma(I)$.

   d. ¿Es $\sigma^{-1}(I)$ la matriz inversa de $\sigma(I)$?

   e. ¿Es $\sigma(A)$ similar a A?

10. Juegue determinética.

A
Clases de equivalencia módulo n

§ Deducciones propias de las clases de equivalencia módulo n

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Definamos la relación $\sim_n$ por

$$a \sim_n b \longleftrightarrow n \mid a - b.$$

Esta relación es una relación de equivalencia. El conjunto cociente correspondiente se denota $\mathbb{Z}/\sim_n$ y sus clases de equivalencia $[\,x\,]_n$.

Definición (Operaciones en $\mathbb{Z}/\sim_n$)***:***

La suma en $\mathbb{Z}/\sim_n$ es la función $\begin{array}{l} +:\mathbb{Z}/\sim_n \times \mathbb{Z}/\sim_n \longrightarrow \mathbb{Z}/\sim_n \\ \qquad (a,b) \mapsto [\,a+b\,]_n \end{array}$.

La multiplicación en $\mathbb{Z}/\sim_n$ es la función $\begin{array}{l} \cdot:\mathbb{Z}/\sim_n \times \mathbb{Z}/\sim_n \longrightarrow \mathbb{Z}/\sim_n \\ \qquad (a,b) \mapsto [\,a\cdot b\,]_n \end{array}$.

Por sugerencia de un compañero intenté explicar algunos de los casos de interés utilizando el teorema del residuo. Note que si $n \mid a-b$ entonces $a = nk + b$ y por el teorema del residuo $a = nq + r$, luego es fácil ver que $r \sim_n b$.

i) Si $a > n$, por el teorema del residuo $a = nq + r$, $0 \leq r < n$, entonces si $\alpha \in [\,a\,]_n$ $\alpha = nk + a = nk + nq + r = n(k+q) + r$, entonces $\alpha \in [\,r\,]_n$. Luego, si $\beta \in [\,r\,]_n$ entonces $\beta = nq' + r$, como $r = a - nq$ $\beta = nq' + a - nq = n(q' - q) + a$, luego $\beta \in [\,a\,]_n$. Entonces

$$[\,a\,]_n = [\,r\,]_n.$$

ii) Si $a < 0$, por el teorema del residuo $a = nq + r$, $0 \leq r < n$, luego $r = a - nq$ y como $r \geq 0$ y $a < 0$ entonces $a < -nq$ y $-nq \geq 0$. Entonces si $\gamma \in [\,a\,]_n$ $\gamma = nk + a = nk + nq + r = n(k+q) + r = n(k+q) + (-nq + a)$, luego $\gamma \in [\,-nq + a\,]_n$ con $-nq + a \geq 0$. Así, podemos llegar a que

$$[\,a\,]_n = [\,-nq + a\,]_n$$

Ejemplo A.1: *1)* $[\,2\,]_6[\,3\,]_6 = [\,2 \cdot 3\,]_6 = [\,6\,]_6 = [\,0\,]_6$.

2) $[\,4\,]_{13} + [\,12\,]_{13} = [\,4 + 12\,]_{13} = [\,16\,]_{13} = [\,3\,]_{13}$.

3) $[-1]_5 + [16]_5 = [4]_5 + [16]_5 = [20]_5 = [0]_5$.

4) $[851]_{17}[5135]_{17}+[1000000]_{17} = [1]_{17}[1]_{17}+[1000000]_{17} = [1]_{17}+[1000000]_{17} = [1000001]_{17} = [10]_{17}$

Note que $(\mathbb{Z}/\sim_n, +)$ es un grupo abeliano y además $(\mathbb{Z}/\sim_n, +, \cdot)$ es un anillo. Cuando n es primo tenemos entonces un campo finito. Si ahora consideramos las unidades del anillo, se tiene entonces que $(\mathcal{U}_{\mathbb{Z}/\sim_n}, \cdot)$ es un grupo, llamado el grupo de unidades de $\mathbb{Z}/\sim_n$.

§ Ejercicios

1) Probar que la relación $\sim_n$ es de equivalencia.

2) Pruebe que si p es primo entonces $\mathbb{Z}/\sim_p$ es un campo con cardinalidad finita.

3) ¿Es $2^{19} - 1$ primo?

4) ¿120398091850928301972837828282828282828282828282828282828282 tiene raíz n-ésima entera para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$?

B
Espacios vectoriales de dimensión infinita

El estudiante interesado puede encontrar una sección dedicada a espacios vectoriales de dimensión infinita en [Jac53]

Las siguientes definiciones y resultados son utilizados en su mayoría de manera implícita en la sección 2.2.

§ El axioma de elección

Definición (Función selectora)***:*** Sea A un conjunto. Una **función selectora o de elección** para A es una función $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow A$ tal que, para todo

$$B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}, \quad f(B) = f_B \in B.$$

Con esto es momento de interpretar A.7:

Axioma 7 (de Elección)**:** Todo conjunto no vacío tiene una función selectora.

Aceptar el axioma de Elección en nuestra teoría equivale a aceptar el Teorema de Zermelo (del Buen orden) así como el Lema de Zorn y otros tantos resultados. Entre ellos, está la equivalencia con la existencia de las bases de cualquier F-espacio vectorial.

Implícitamente se utiliza esto para poder elegir un vector $\alpha \in V \setminus \{0_V\}$, al igual que en muchos otros teoremas se elige un elemento arbitrario del conjunto sin importar si este es un conjunto finito o infinito. El axioma de elección evita el problema de definir exactamente qué significa "tomar" una infinidad (o de una) de elementos, garantizando la existencia de una función de elección para cualquier conjunto.

§ Cardinales

Cardinalidad en conjuntos infinitos

Definición: La cardinalidad de A es menor o igual a la cardinalidad de B, si existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$.
$a \mapsto f(a)$

Teorema B.1: *Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.*

Demostración. [Her17]. Una prueba utilizando el teorema de Cantor-Bernstein puede encontrarse en libros de Cálculo IV u de otras maneras en [SF96]. Q.E.D.

Corolario B.1: *El producto cartesiano de una cantidad finita de conjuntos numerables es numerable. Consecuentemente, $\mathbb{N}^m$ es numerable para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Ejercicio. Q.E.D.

Corolario B.2: *El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ son numerables.*

Demostración. [Her17]. Sería buena idea ir preparándose para álgebra IV a la vez que ve la demostración de este corolario. Q.E.D.

Teorema B.2: *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un conjunto no numerable.*

Demostración. [Her17]. O, si lo prefiere, de una vez prepárase y vea en conjunto topología de $\mathbb{R}^n$ en [KF70]. Q.E.D.

Observación: La relación de orden en los números cardinales $\leq$ es un orden parcial.

Lema B.1: *Si $A_1 \subseteq B \subseteq A$ y $\text{card}(A_1) = \text{card}(A)$, entonces $\text{card}(B) = \text{card}(A)$.*

Demostración. [Her17] Q.E.D.

Aritmética de cardinales

Las siguientes definiciones son utilizadas de manera implícita en la demostración del caso infinito para la cardinalidad de las bases de un F-espacio vectorial.

Definición: Si $\text{card}(A) = \kappa, \text{card}(B) = \lambda$ y $A \cap B = \varnothing$, entonces

$$\kappa + \lambda = \text{card}(A \cup B).$$

La suma de cardinales no depende de la elección de los conjuntos A y B. El axioma de elección implica que si κ es infinito, entonces $\kappa + \kappa = \kappa$.

Definición: Si $\text{card}(A) = \kappa$ y $\text{card}(B) = \lambda$, entonces

$$\kappa \cdot \lambda = \text{card}(A \times B).$$

§ Un último teorema

Teorema B.3 (Invarianza en la cardinalidad de las bases de un F-e.v.)**:** *Toda base de un F-espacio vectorial tiene la misma cardinalidad.*

Demostración. (Caso infinito) Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ bases de un F-espacio vectorial V ordenadas por conjuntos de índices bien ordenados I y J respectivamente, con $\text{card}(\mathscr{A}) \geq \aleph_0$ e $i \in I$ y $j \in J$. Demostrado el caso finito, entonces tenemos que $\text{card}(\mathscr{B}) \geq \aleph_0$

Cada vector $\alpha_i \in \mathscr{A}$ es representado de forma única como una combinación lineal finita de vectores $\beta_j \in \mathscr{B}$. En efecto, sean $J_{i1} \subseteq J$ y $J_{i2} \subseteq J$ conjuntos finitos. Suponga que existen $\{c_k\}_{k\in J_{i1}} \subseteq F$ y $\{d_k\}_{k\in J_{i2}} \subseteq F$ y se tiene que

$$\alpha_i = \sum_{k\in J_{i1}} c_k\beta_k \text{ y } \alpha_i = \sum_{k\in J_{i2}} d_k\beta_k$$

Entonces

$$\sum_{k\in J_{i1}} c_k\beta_k = \sum_{k\in J_{i2}} d_k\beta_k$$
$$\sum_{k\in J_{i1}} c_k\beta_k - \sum_{k\in J_{i2}} d_k\beta_k = 0$$

Luego, separando las sumas en índices en común e índices no en común, se tiene

$$\sum_{k\in J_{i1}\cap J_{i2}} (c_k - d_k)\beta_k + \sum_{k\in J_{i1}\setminus J_{i2}} c_k\beta_k - \sum_{k\in J_{i2}\setminus J_{i1}} d_k\beta_k = 0$$

$\mathscr{B}$ es base, entonces $\forall c_k, k \in J_{i1} \setminus J_{i2}$ se tiene que $c_k = 0$ y del mismo modo $\forall d_k, k \in J_{i2} \setminus J_{i1}$ se tiene que $d_k = 0$. Luego, $\forall k \in J_{i1} \cap J_{i2}$, $c_k - d_k = 0$. Luego entonces $c_k = d_k$. Así, tenemos que la representación es única.

Ahora, cada $\beta_j \in \mathscr{B}$ aparece en una combinación lineal finita de un $\alpha_i \in \mathscr{A}$. Si no fuera así, entonces suponga que β_{j_0} no aparece en ninguna combinación lineal finita para todo $\alpha_i \in \mathscr{A}$. Luego, sea $I_{j_0} \subseteq I$ conjunto finito y sea $\{e_l\}_{l\in I_{j_0}} \subseteq F$, como $\mathscr{A}$ es base, entonces

$$\beta_{j_0} = \sum_{l\in I_{j_0}} e_l\alpha_l$$

Cada $\alpha_l, l \in I_{j_0}$ se representa como una combinación lineal finita de vectores en $\mathscr{B}$, sea $J_\alpha \subseteq J$ conjunto finito y $\{c_k\}_{k\in J_\alpha}$, supongamos entonces

$$\beta_{j_0} = \sum_{k\in J_\alpha} c_k\beta_k$$

luego entonces, $\mathscr{B}$ es linealmente dependiente, lo que contradice que $\mathscr{B}$ sea una base de V. Por lo tanto, todo vector $\beta_j \in \mathscr{B}$ aparece en alguna combinación lineal que representa a los $\alpha_i \in \mathscr{A}$.

Entonces se define $f : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ $\beta_j \mapsto \alpha_i$ que a un $\beta_j \in \mathscr{B}$ le asigna sólo un $\alpha_i \in \mathscr{A}$ donde β_j forma parte de la combinación lineal finita única que representa a α_i. Entonces $f : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ $\beta_j \mapsto \alpha_i$ es una función.

Luego, sea $J_i \subseteq J$ conjunto finito y $\alpha_i' \in f(\mathscr{B})$, entonces $f^{-1}(\{\alpha_i'\}) = \{\beta_j\}_{j \in J_i}$, $J_i \subset J$ es un conjunto tal que β_j forma parte de la combinación lineal finita única que representa a α_i, entonces $f^{-1}(\{\alpha_i'\})$ es un conjunto finito.

Sea $\Gamma := \{f^{-1}(\{\alpha_i'\}) \in \mathcal{P}(\mathscr{B}) \mid \alpha_i' \in f(\mathscr{B})\}$. Luego $\mathscr{B} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$, la cual, como f es función, es una unión disjunta. Así $\text{card}(\mathscr{B}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{card}(\gamma) \leq \text{card}(f(\mathscr{B}))$ y como $f(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$, $\text{card}(f(\mathscr{B})) \leq \text{card}(\mathscr{A})$. Luego entonces $\text{card}(\mathscr{B}) \leq \text{card}(\mathscr{A})$ y se tiene que existe $\phi : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ función inyectiva.

De manera análoga, intercambiando los papeles de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A}$, se llega a que $\text{card}(\mathscr{A}) \leq \text{card}(\mathscr{B})$ y entonces existe una función inyectiva $\psi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$. Luego, por el Teorema 0.1 se tiene que $\text{card}(\mathscr{A}) = \text{card}(\mathscr{B})$.

Q.E.D.

§ Ejercicios

1) Demostrar el Teorema B.1.
2) Demostrar el Corolario B.1.
3) a) Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
   b) Sea $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ¿Es el conjunto $\mathscr{B} = \{e_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
4) Sea F un campo. Encontrar una base para $F[x]$ como F-espacio vectorial.

Frases célebres del Dr. Hugo Méndez Delgadillo:

- *El conjunto de los perros rabiosos.*
- *Abusamos de la notación para no ahogarnos en ella.*
- *Que sea legal y nos convenga.*
- *Santiago, te pusiste modo entero. Zzzzzzz.*
- *Je, je, je.*
- *Eso puede que venga en el examen.*

ひなは... わたしたちを永遠にしてくれる？(manio) [man22].

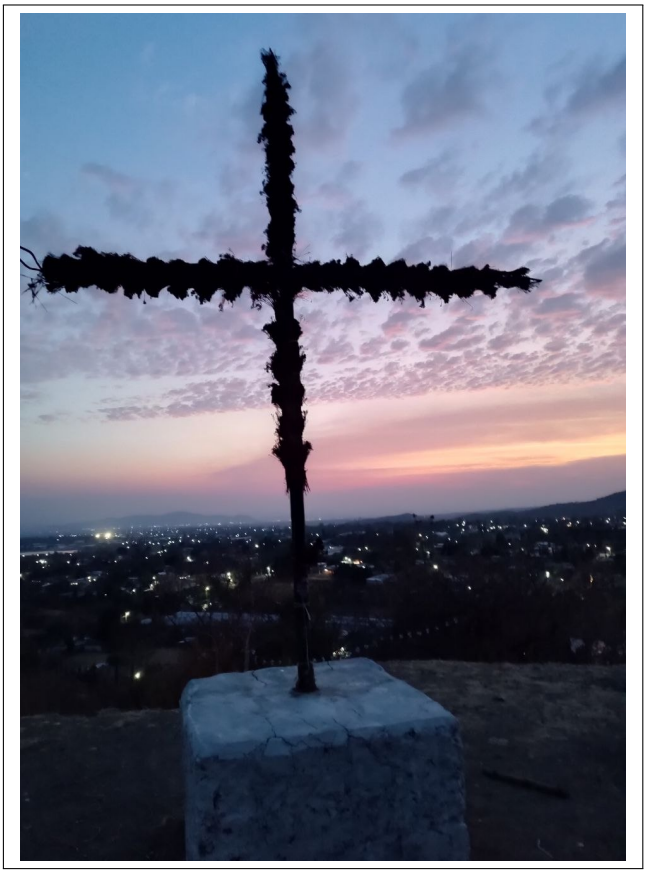


Figura B.1: Ya nos vamos, Miku. Ya es de noche.

...Fin.