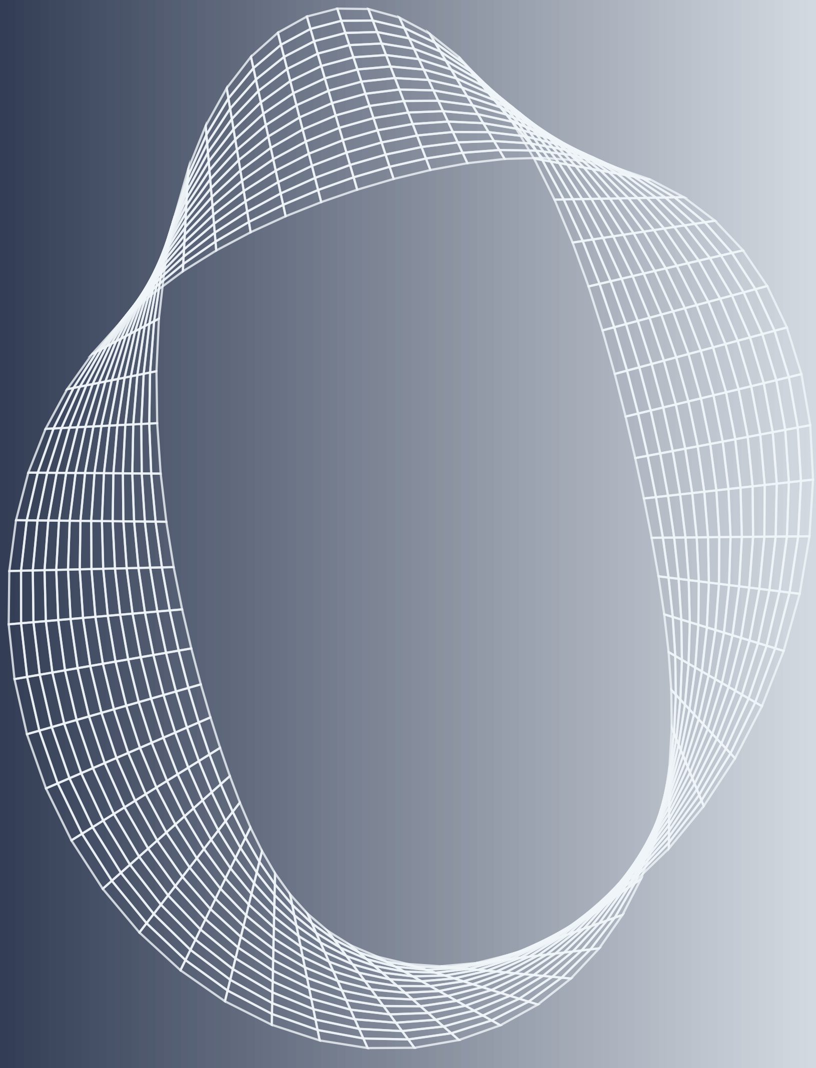
NOTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL:

Un trabajo en colaboración.



Adiel González, Santiago Méndez,
Obed Leyva

Índice general

1
Fundamentos de la geometría euclidiana

1.1 Espacios vectoriales euclidianos

Definición. Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita. E se llamará un *espacio vectorial euclidiano* si está dada una transformación $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ llamada **producto escalar** que goza de las siguientes propiedades:

(a) **(Bilinealidad)**:

$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle \quad \forall x_1, x_2, y \in E$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

$\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\rangle = \beta_1\langle x, y_1\rangle + \beta_2\langle x, y_2\rangle \quad \forall y_1, y_2, x \in E$ y $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

(b) **(Simetría)**:

$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in E$.

(c) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad x \in E$.

(d) $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Orientación en $\mathbb{R}^n$.

Sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ bases de $\mathbb{R}^n$. Existe $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_j.$$

Sea $A \in \mathbb{M}_n$ con $(A)_{ij} = a_{ij}$ y $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha \mapsto A\alpha$. Supóngase que $\alpha = \sum_{k=1}^n c_k\alpha_k$. Note que $T_A(\alpha) = \sum_{k=1}^n d_k\beta_k$ para algunos $d_k \in \mathbb{R}$. Si se tiene que $T_A(\alpha) = 0_{\mathbb{R}^n}$, como $\{b_k\}_{k=1}^n$ es base, se tiene que $d_k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$. Por lo tanto $\alpha = 0$, luego T_A es no singular. Aún más, T_A es un isomorfismo, por lo que A es invertible. A se dice ser la matriz de cambio de base de la base $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ a la base $\{\beta_k\}_{k=1}^n$.

Sea $\mathfrak{B}$ el conjunto de todas las bases de $\mathbb{R}^n$. Sobre este conjunto, se define: Dadas $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ decimos que: $B_1 \sim B_2$ si y sólo si la matriz de cambio de base de la base B_1 a la base B_2 tiene determinante positivo.

Claramente la matriz cambio de base de B_1 a B_1 es $\mathrm{id}_{\mathbb{M}_n}$ por lo que $B_1 \sim B_2$. Como la matriz de cambio de base es invertible y $|A^{-1}| = 1/|A|$ entonces si $B_1 \sim B_2$ entonces $B_2 \sim B_1$. Si C es la matriz cambio de base de B_1 a B_2 y D es la matriz cambio de base de B_2 a B_3, se tiene que la matriz de cambio de base de B_1 a B_3 es DC. De este modo, si $B_1 \sim B_2$ y $B_2 \sim B_3$ entonces $|DC| = |D||C| > 0$. Luego $\sim$ define una relación de equivalencia.

Notamos que $\mathfrak{B}/\sim$ es un conjunto con dos elementos. Si $B \in \mathfrak{B}$ y $B \in [\{e_k\}_{k=1}^n]$ entonces diremos que el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado con la base B tiene orientación positiva. Si $B \notin [\{e_k\}_{k=1}^n]$ entonces decimos que $\mathbb{R}^n$ dotado con la base B tiene orientación negativa.