Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Verze 0.5
7. července 2021

Tyto poznámky jsem sepsal pro přípravu na zkoušku z přednášek pana doc. Klazara. Neprošly zatím žádnou korekcí, budou tedy pravděpodobně obsahovat mnoho chyb. Pokud v poznámkách najdete chybu, nebo pokud budete mít nějakou připomínku k tomu, jak jsou psané, kontaktujte mě prosím na Discordu, nebo mi dejte pull-request na `https://github.com/3011/ma3-poznamky`. Ke většině vět jsem vynechal důkazy, psal jsem je téměř výhradně k větám/tvrzením, která spadají k otázkám vypsaným ke zkoušce.

Obsah

1 Metrické prostory

1.1 Definice

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor)**:** Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d'), tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d). Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d).

Definice (Izometrie)**:** Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \to N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f, prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

1.2 Euklidovský prostor, Sférická metrika

Příklad (Euklidovský prostor)**:** Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, e_n), n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\overline{x}, \overline{y}$[1] $\in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n), když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \ldots \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \ldots \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřimkami procházejícími počátkem $\overline{0}$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: *(S, s) je metrický prostor.*

Definice ((Horní) hemisféra)**:** (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

[1] $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

Věta (H není plochá)**:** *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

Důkaz: TODO $\square$

Definice (Ultrametrika)**:** Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika(nearchimédovká metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru)**:** *V ultrametrickém prostoru (M, d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule)**:** (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M, d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

1.3 p-adické metriky

Definice (p-adický řád)**:** Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p-adický řád čísla n definujeme

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

Poznámka (Rozšíření $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ na zlomky)**:** Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (aditivita $\mathrm{ord}_p(\cdot)$)**:** *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : ord_p(\alpha\beta) = ord_p(\alpha) + ord_p(\beta)$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (\infty) := +\infty$, pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Definice (p-adická norma)**:** Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Tvrzení (multiplikativita $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé p a každé dva zlomky α, β(a každé $c \in (0, 1)$) je*

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p|\beta|_p$$

[2]. $|$ · značí relaci dělitelnosti.

Definice (Normované těleso)**:** Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso vybavené normou $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

Tvrzení: *Pro každé normované těleso* $(F, |\cdot|_F)$ *je funkce* $d(x, y) := |x - y|_F$ *metrika na* F*. Pokud* $|\cdot|_F$ *splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je* d *ultrametrika.*

Tvrzení (o $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé prvočíslo* p *a každé* $c \in (0, 1)$ *je* $\mathbb{Q}, |\cdot|_p$ *normované těleso. Příslušný metrický prostor* $(\mathbb{Q}, d)$ *(s* $d(x, y) := |x - y|_F$*) je ultrametrický prostor.*

Definice (Triviální norma)**:** Triviální norma na libovolném tělese F je funkce $|| \cdot ||$ s $||0_F|| = 0$ a $||x|| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Tvrzení (Mocnění obvyklé absolutní hodnoty)**:** *Pro* $c > 0$ *je* $| \cdot |^c$ *norma(na* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *a* $\mathbb{C}$*), právě když* $c \leq 1$.

Definice (Kanonická p-adická norma)**:** Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p-adická norma $|| \cdot ||_p$ definovaná jako

$$||\alpha||_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p-adické normě $|| \cdot ||_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Věta (A. Ostrowski)**:** *Nechť* $|| \cdot ||$ *je norma na tělese racionálních čísel* $\mathbb{Q}$*. Pak nastává jedna ze tří následujících možností.*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné* $c \in (0, 1]$ *takové, že* $||x|| = |x|^c$.
3. *Existuje reálné* $c \in (0, 1)$ *a prvočíslo* p*, že* $||x|| = |x|_p = c^{ord_p(x)}$ *(kde* $c^\infty := 0$*).*

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: TODO □

1.4 Kompaktnost množin v metrických prostorech

Poznámka (Konvence)**:** $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ jsou reálná čísla a $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Limitu píšeme jako $\lim a_n = a$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definice (Limita)**:** Nechť je (M, d) metrický prostor, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. (a_n) má limitu v (M, d), pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

.

Definice (Konvergence, Divergence)**:** Pokud má (a_n) limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

Definice (Kompaktní metrický prostor)**:** Buď (M, d) metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že X je kompaktní, pokud

$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n\to\infty} a_{m_n} = a.$$

Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X. Metrický prostor (M, d) je kompaktní, pokud M je kompaktní.

Definice (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory)**:** Buďte (M, d) a (N, e) metrické prostory a buď $f : M \to N$ zobrazení mezi nimi. f je spojité v $a \in M$, pokud

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Zobrazení f je spojité, pokud je spojité v každém bodě $a \in M$.

Věta (Princip maxima)**:** *Nechť (M, d) je metrický prostor,*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

je funkce z M do reálné osy a $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina. Pak

$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \le f(x) \le f(b)$$

Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší hodnotu $f(a)$ a největší hodnotu $f(b)$.

Definice (Součin metrických prostorů)**:** Pro metrické prostory (M, d) a (N, e) definujeme jejich součin $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ je na něm dána jako

$$(d \times e)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + e(a_2, b_2)^2}$$

Definice (Otevřená množina)**:** Množina $X \in M$ v metrickém prostoru (M, d) je otevřená, pokud

$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a, r) \subset X.$$

Definice (Uzavřená množina)**:** Množina X je uzavřená, pokud $M \backslash X$ je otevřená.

Definice (Omezená množina)**:** Množina X je omezená, pokud

$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a, r)$$

Definice (Diametr)**:** Diametr(průměr) množiny X je s $V := \{d(a, b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \dots \text{ množina} V \text{je shora omezená} \\ +\infty & \dots \text{ množina} V \text{není shora omezená} \end{cases}$$

Věta (Kompaktní $\Rightarrow$ uzavřená a omezená, součin)**:** *Platí následující:*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d), pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*

2. *Jsou-li (M, d) a (N, e) dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní metrický prostor.*

Věta (Kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$)**:** *V každém Euklidovském metrickém prostoru $(\mathbb{R}^n, e_n)$ je množina $X \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

1.5 Topologická spojitost

Tvrzení (Topologická spojitost)**:** *Nechť $f : M \to N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e). prostorem*

$$f \text{ je spojité} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^3$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Topologická spojitost pro podprostory)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná množina a $f : X \to N$. prostorem*

$$f \text{ je spojité zobrazení definované na } (X, d) \iff \forall \text{ OM } A \subset N : \exists \text{ OM } B \subset M : f^{-1}[A] = X \cap B.$$

Topologickou definici spojitosti jsme rozšířili na podprostory.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina a*

$$f : X \to N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení z neprázdné kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do (N, e). Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \to X$$

je spojité.

Definice (Homeomorfismus)**:** Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M, d) a (N, e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.

1.6 Heine-Borelova věta

Definice (Topologická kompaktnost)**:** Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova)**:** *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: TODO $\square$

1.7 Souvislé množiny a metrické prostory

Definice (Obojetná množina)**:** Podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je obojetná[4], je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny $\emptyset$ a M.

Definice (Souvislý prostor)**:** Prostor (M, d) je souvislý, pokud v něm neexistuje netriviální[5] obojetná podmnožina. Jinak, má-li M obojetnou podmnožinu $X \subset M$ s $X \neq \emptyset$, je nesouvislý.

[3] OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.
[4] anglicky *clopen*
[5] Různou od M a $\emptyset$.

Definice (Souvislá podmnožina)**:** Podmnožina $X \subset M$ je souvislá, je-li podprostor (X,d) souvislý. Pokud podprostor (X,d) souvislý není, je nesouvislá.

Definice (Trhání množiny)**:** Nechť (M,d) je metrický prostor a $X, A, B \subset M$. Řekneme, že množiny A a B trhají množinu X, pokud A a B jsou otevřené a platí všechna následující

- $X \subset A \cup B$
- $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$
- $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \emptyset$

Tvrzení: *Podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá množina v metrickém prostoru (M,d), právě když existují $A, B \subset M$, které ji trhají.*

1.8 Základní věta algebry

Věta (Základní věta algebry)**:** *Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy*

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j = 0$$

Věta (Souvislost intervalů)**:** *Každý interval $[a,b] \subset \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$, je souvislá množina.*

Věta (souvislost a spojitost)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení ze souvislé množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M,d) do metrického prostoru (N,e). Potom*

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in N\} \subset N$$

je souvislá množina.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

Tvrzení: *Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.*

Tvrzení (Druhá odmocnina v $\mathbb{C}$)**:** *$\forall a + bi \in \mathbb{C}$ máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech*

$$c := \pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}},$$

že $(c+di)^2 = a + bi$.

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n-té odmocniny v $\mathbb{C}$)**:** *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*

$$\forall u \in \mathbb{C}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: TODO □

Tvrzení (Redukce na n-té odmocniny)**:** *Když $\mathbb{C}$ obsahuje všechny n-té odmocniny, pak platí Základní věta algebry a každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.*

1.9 Úplné množiny a metrické prostory

Definice (Cauchyova posloupnost)**:** Cauchyova posloupnost (a_n) splňuje, že

$$\forall \varepsilon \, \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Definice (Úplný metrický prostor)**:** Metrický prostor (M, d) je úplný, je-li každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset M$ konvergentní.

Definice (Úplná množina)**:** Množina $X \subset M$ je úplná, je-li podprostor (X, d) úplný.

Tvrzení (úplnost uzavřených podprostorů)**:** *V úplném metrickém prostoru (M, d) je každá uzavřená množina $X \subset M$ úplná.*

1.10 Baireova věta

Definice (Řídká a hustá množina)**:** Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je řídká(v M), pokud

$$\forall a \in M \, \forall r > 0 \, \exists b \in M \, \exists s > 0 : B(b, s) \subset B(a, r) \wedge B(b, s) \cap X = \emptyset$$

Každá koule v (M, d) tedy obsahuje podkouli disjunktní s X. Podobně množina $Y \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je hustá(v M), pokud

$$\forall a \in M \, \forall r > 0 : B(a, r) \cap Y \neq \emptyset$$

Tvrzení (hustota a spojitost)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je hustá v M a*

$$f, g : M \to N$$

jsou taková spojitá zobrazení, že $f|X = g|X$[6] *Potom $f = g$.*

Definice (Uzavřená koule)**:** Pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ rozumíme v metrickém prostoru (M, d) uzavřenou koulí $\overline{B}(a, r)$ množinu

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Uzavřená koule je uzavřená množina a pro každé $a \in M$ a kladná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ t.ž. $r < s$ je $\overline{B}(a, r) \subset B(a, s)$.

Věta (Baireova)**:** *Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Pak některá množina X_n není řídká.

Důsledek (o úplném metrickém prostoru)**:** Každý úplný metrický prostor (M, d), který neobsahuje izolované body, je nespočetný.

2 Řady

2.1 Definice

Definice (Řada, konvergence a divergence řady)**:** Řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, které je přiřazena posloupnost <u>částečných součtů</u>

$$(s_n) := (a_1 + \cdots + a_n) \subset \mathbb{R}.$$

[6] Zúžení obou funkcí na množinu X se shodují.

Pokud posloupnost (s_n) má limitu, řekneme, že řada má součet. Je-li tato limita vlastní($\in \mathbb{R}$), pak řada konverguje, jinak(součet je $\pm\infty$ nebo neexistuje) diverguje. Součet řady se označuje stejným symbolem jako řada sama, takže také

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n).$$

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence)**:** *Když řada* $\sum a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Tvrzení (Harmonická řada)**:**

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

Tvrzení:

$$\sum \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n^2} = 1$$

Tvrzení (Geometrická řada)**:** *Pro každé* $q \in (-1, 1)$ *je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Tvrzení (Leibnizovo kritérium)**:** *Když* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *a* $\lim a_n = 0$, *pak řada* $\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ *konverguje.*

2.2 Fourierova řada funkce

Definice (Trigonometrická řada)**:** Trigonometrická řada je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde a_n, b_n jsou její koeficienty a $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.

Trigonometrická řada je fakticky parametrický systém řad parametrizovaný proměnnou x. Chceme odvodit vyjádření široké třídy funkcí $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, pomocí trigonometrických řad.

Definice (Skoro skalární součin)**:** Nechť $\mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je množina všech funkcí $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, které mají na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál. Pro $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg \in \mathbb{R}.^7$$

Pro tento skoro skalární součin platí následující

Tvrzení (Symetrie, nezápornost a linearita skoro skalárního součinu)**:**

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2. $\langle f, f \rangle =\geq 0$
3. $\langle af + bg, h \rangle = a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle$

ale

[7] Z teorie Riemannova integrálu plyne, že pokud $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$, pak i $fg \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$.

Tvrzení: *Ekvivalence* $\langle f, f\rangle = 0 \iff f \equiv 0$ *neplatí.*

Definice (2π-periodická funkce)**:** Funkce je 2π-periodická, když pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(x+2\pi) = f(x)$.

Tvrzení (Ortogonalita sinů a cosinů)**:** *Pro každá dvě celá čísla* $m, n \geq 0$ *je*

$$\langle \sin(mx), \cos(nx)\rangle = 0.$$

Pro každá dvě delá čísla $m, n \geq 0$*, kromě* $m = n = 0$*, je*

$$\langle \sin(mx), \sin(nx)\rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx)\rangle = \begin{cases} \pi & \dots \quad m = n \\ 0 & \dots \quad m \neq n. \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x), \sin(0x)\rangle = 0 \qquad a \qquad \langle \cos(0x), \cos(0x)\rangle = 2\pi.$$

Definice (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty)**:** Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx}, n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}, n = 1, 2, \dots$$

Definice (Fourierova řada funkce)**:** Fourierova řada funkce $f(\in \mathcal{R}(-\pi, \pi))$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

kde a_n a b_n jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, v němž jsou „souřadnými osami“(prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v $\mathbb{R}^n$ se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

Věta (Besselova nerovnost)**:** *Pro Fourierovy koeficienty* a_n *a* b_n *funkce* $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ *platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Důkaz: TODO □

Tvrzení (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**:** *Pro každou funkci* $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ *je*[8]

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$

[8]Lze dokázat pomocí Besselovy nerovnosti.

Definice (Po částech hladká funkce)**:** Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, je po částech hladká, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b, k \in \mathbb{N},$$

intervalu $[a, b]$, že na každém intervalu $a_{i-1}, a_i, i = 1, 2, \ldots, k$, má spojitou derivaci f' a pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i - 0) := \lim_{x \to a_i^-} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x \to a_i^-} f'(x)$$

a pro každé $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i + 0) := \lim_{x \to a_i^+} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x \to a_i^+} f'(x)$$

Po částech hladká funkce tedy může být v několika bodech intervalu $[a, b]$ nespojitá, ale v bodech nespojitosti má vlastní jednostranné limity a má v nich definované jednostranné nesvislé tečny.

Tvrzení (O Dirichletově jádře)**:** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a*

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos(x) + cos(2x) + \cdots + \cos(nx).$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R} \backslash \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ máme

$$J_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

také

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} J_n(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} J_n(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

Věta (Dirichletova)**:** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková 2π-periodická funkce, že její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Pak její Fourierova řada $F_f(x)$ má pro každé $a \in \mathbb{R}$ součet*

$$F_f(a) = \frac{f(a + 0) + f(a - 0)}{2} = \frac{\lim_{x \to a_i^+} f(x) + \lim_{x \to a_i^-} f(x)}{2}$$

V každém bodu spojitosti $a \in \mathbb{R}$ funkce $f(x)$ tedy její Fourierova řada má součet rovný funkční hodnotě, $F_f(a) = f(a)$.

Definice (Hladká funkce)**:** Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je hladká, když má na intervalu (a, b) spojitou derivaci f' a v krajních bodech a a b mají $f(x)$ a $f'(x)$ vlastní jednostranné limity.

Důsledek (O hladké funkci)**:** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická a spojitá funkce, jejíž zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je hladké. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$F_f(a) = f(a).$$

Spojitá a hladká funkce se tedy rovná součtu své Fourierovy řady.

2.3 Basilejský problém

Příklad (Basilejský problém)**:** TODO

2.4 Divergentní řady

Řadě $\sum a_n$, to jest posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, lze přiřadit její „součet“ i mnoha jinými způsoby, než jen jako limitu

$$\lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$$

posloupnosti částečných součtů. Jako ilustrace jsou uvedeny dvě sumační metody.

Fakt (Abelovský součet)**:**

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ „=“ } s.$$

Fakt (Cesàrovský součet)**:**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ „=“ } s$$

2.5 Konvergence řad

2.5.1 Absolutní konvergence

Definice (Absolutní konvergence)**:** Řekneme, že řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje(je to absolutně konvergentní řada), pokud konverguje řada $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Definice (Obecná absolutní konvergence)**:** Nechť A je nekonečná spočetná množina.
Pak řadou $\sum_{x \in A} a_x$(na A) budeme rozumět každou funkci $a : A \to \mathbb{R}$, kde pro $x \in A$ místo $a(x)$ stále píšeme a_x. Řekneme, že tato řada je obecná absolutně konvergentní řada, když

$$\exists c > 0 \, \forall \text{ konečnou množinu } B \subset A : \sum_{x \in B} |a_x| < c$$

Věta (O absolutně konvergentních řadách)**:** *Nechť $\sum_{x \in A} a_x$ je řada an A. Pak $\sum_{x \in A} a_x$ je obecná absolutně konvergentní řada, právě když pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \to A$ je klasická řada*

$$B(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\pi)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b := a_{\pi(n)},$$

absolutně konvergentní řada. Všechny řady $B(\pi)$ jsou pak absolutně konvergentní a mají týž součet, nezávislý na bijekci π.

Definice (Součet obecné absolutně konvergentní řady)**:** Pro obecnou absolutně konvergentní řadu $\sum_{x \in A} a_x$ tak definujeme její součet jako součet $\sum b_n$ řady $\sum b_n$ s $b_n := a_{\pi(n)}$ pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \to A$.

Definice (Součin řad)**:** Buďte $\sum_{x \in A} a_x$ a $\sum_{x \in B} b_x$ dvě obecné řady. Jejich součin, či součinová řada, je řada

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} a_x b_x.$$

Věta (Součin absolutně konvergentních řad)**:** *Nechť $\sum_{x \in A} a_x$ a $\sum_{x \in B} b_x$ jsou obecné absolutně konvergentní řady se součty*

$$r := \sum_{x \in A} a_x \in \mathbb{R} \quad a \quad \sum_{y \in B} b_y \in \mathbb{R}.$$

Pak i jejich součin je obecná absolutně konvergentní řada, která má součet rs.

Tvrzení (Exponenciála)**:** *Pro $x \in \mathbb{R}$ nechť*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí identita

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

Tvrzení (Prvočísel je ∞ mnoho)**:** *Množina prvočísel*

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

je nekonečná.

2.5.2 Stejnoměrná a bodová konvergence

Definice (Stejnoměrná konvergence)**:** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $f_n : M \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ jsou na ní definované funkce. Řekneme, že f_n konvergují (na M) stejnoměrně k f, symbolicky

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M)$$

když ($\varepsilon > 0$)

$$\forall \varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall x \in M : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice (Bodová konvergence)**:** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $f_n : M \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ jsou na ní definované funkce. Pokud

$$\forall \varepsilon\ \forall x \in M\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

řekneme, že f_n konvergují (na M) k f bodově, symbolicky

$$f_n \to f \quad (\text{na } M)$$

Jinými slovy, $\forall x \in M : \lim f_n(x) = f(x)$. Stejnoměrná konvergence implikuje bodovou, ale ne naopak.

Definice (Supremová norma)**:** Pro funkci $f : M \to \mathbb{R}$ definujeme její supremovou normu $\|f\|_\infty$ jako

$$\|f\|_\infty := \sup(\{|f(x)| \mid x \in M\}) \in [0, +\infty],$$

s hodnotou $+\infty$ pro shora neomezenou množinu $\{\dots\}$.

Tvrzení (Kritérium $\rightrightarrows$)**:** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $f_n : M \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ jsou na ní definované funkce. Pak*

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\textit{na } M) \iff \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Definice (Lokálně stejnoměrná konvergence)**:** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $f_n : M \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ jsou na ní definované funkce. Lokálně stejnoměrná konvergence f_nk f (na M), symbolicky $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ (na M), znamená, že

$$\forall a \in M\ \exists \delta > 0 : f_n \rightrightarrows f \ (\text{na } M \cap (a - \delta, a + \delta)).$$

Věta ($\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ zachovává spojitost)**:** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$, $f_n : M \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$, každá funkce f_n je spojitá a*

$$f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \ (\textit{na } M).$$

Pak i f je spojitá.

Důkaz: Nechť $a \in M$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme $\delta > 0$, že f_n konvergují na $N := M \cap (a - \delta, a + \delta)$ stejnoměrně. Vezmeme n_0, že $n \geq n_0 \wedge x \in N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vezmeme libovolné $n_1 \geq n_0$ a pak, díky spojitosti f_{n_1}, takové $\delta \in (0, \delta)$, že

$$x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)(\subset N) \Rightarrow |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pak pro každé $x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)(\subset N)$ máme, že

$$|f(a) - f(x)| \leq |f(a) - f_{n_1}(a)| + |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v bodě a. □

Tvrzení (Weierstrassův test)**:** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $f : M \to \mathbb{R}$, $f_n : M \to \mathbb{R}$ a $\sum f_n \to f$ (na M). Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f \quad (na\ M),\ pokud\ \sum_{n=1}^{\infty} F_n := \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty.$$

2.6 Mocninné řady

Definice (Mocninná řada)**:** Mocninná řada se středem $a \in \mathbb{R}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{R}$(a proměnnou $x \in \mathbb{R}$) je funkční řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

Definice (Poloměr konvergence)**:** Poloměr konvergence R mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$:

$$R := \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty],$$

kde $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} := 0$. S těmito konvencemi máme i ekvivalentní vztah $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$.

Věta (O konvergencích mocninných řad)**:** *Nechť*

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence R. Pak pro každé reálné x s $|x| < R$ řada $F(x)$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Když $R > 0$, pak na intervalu $(-R, R)$ řada $F(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně ke svému (bodovému) součtu.

Věta (Počítání s mocninnými řadami)**:** *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad a \quad B(x) := \sum_{n \geq 0} b_n x^n$$

jsou mocninné řady konvergující na nějakém intervalu $I := (-a, a)$, kde $a > 0$. Označme stejně i odpovídající funkce $A, B : I \to \mathbb{R}$. Pro jejich (formální) součet, součin, podíl a derivaci platí následující.

1. *Mocninná řada (Formální součet)*

$$C(x) := \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) + B(x)$.

2. *Mocninná řada (Formální součin)*

$$C(x) := \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}\right) x^n$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

3. *Nechť $b_0 \neq 0$ a $d_n := -\frac{b_n}{b_0}$. Pak existuje $b > 0$, že mocninná řada (Formální podíl)*

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = \frac{A(x)}{B(x)} := \frac{1}{b_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty}(d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n$$

konverguje na intervalu $J := (-b, b)$ a pro každé $x \in J$ je $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

4. *Mocninná řada (Formální derivace)*

$$C(x) := \sum_{n\geq 1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A'(x)$.

Ve třetí části je použita formální geometrická řada:

$$\frac{1}{1 - (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)} = \sum_{n=0}^{\infty}(d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n.$$

Tvrzení (Abelova nerovnost)**:** *Pro $i = 1, 2, \dots, n$ nechť $a_i \in \mathbb{C}, b_i \in \mathbb{R}$ s $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, $A_i := a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a $A[n] := \max(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|)$. prostorem*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq A[n] \cdot b_1.$$

Věta (Abelova)**:** *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, +\infty)$ a označme stejně odpovídající funkci $A : (-R, R) \to \mathbb{R}$. Když řada $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ konverguje a má součet

$$S := \sum_{n\geq 0} a_n R^n,$$

pak je limita zleva v R funkce $A(x)$ rovna S:

$$\lim_{x\to R^-} A(x) = \lim_{a\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

2.6.1 Pólyova věta o náhodných procházkách

Definice (Graf)**:** Graf $G = (V, E)$ sestává z množiny <u>vrcholů</u> V a množiny <u>hran</u> $E \subset \binom{V}{2}$. Zde

$$\binom{V}{2} := \{A \mid A \subset V \wedge |A| = 2\}$$

je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny V.

Definice (d-regulární graf)**:** Graf $G = (V, E)$ je d-regulární, $D \in \mathbb{N}$, má-li každý vrchol d sousedů, to jest

$$\forall v \in V : |\overbrace{\{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}}^{N(v)}| = d.$$

Definice (Lokálně konečný graf)**:** Graf G je lokálně konečný, má-li každý vrchol $v \in V$ jen konečně mnoho sousedů, tj. množina $N(v)$ je konečná.

Definice (Procházka)**:** Procházka w v grafu $G = (V, E)$ je taková <u>konečná</u>, $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ s délkou $|w| := n \in \mathbb{N}_0$, či <u>nekonečná</u>, $w = (v_0, v_1, \dots)$, posloupnost vrcholů $v_i \in V$, že pro každé $i \in \mathbb{N}_0(< n)$ je $\{v_i, v_{i+1} \in E\}$. Vrchol v_0 pojmenujeme jako <u>start procházky</u> w.

Definice (Počet procházek)**:** Definujeme

$$d_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je procházka se startem } v_0 \ a \ |w| = n\}|,$$

počet procházek v grafu G s daným startem v_0 a s délkou n.

Definice (Rekurentní procházka)**:** Rekurentní procházka $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ opětovně prochází start: existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, že $v_i = v_0$

Definice (Počet rekurentních procházek)**:** Jako

$$a_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je rekurentní procházka se startem } v_0 \ a \ |w| = n\}|$$

označíme počet rekurentních procházek v grafu G s daným startem v_0 a s délkou n.

Definice (Automorfismus)**:** Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je taková bijekce $f : V \to V$, že

$$\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v) \in E\}.$$

Definice ((Vrcholově) tranzitivní graf)**:** Graf $G = (V, E)$ je (vrcholově) tranzitivní, když

$$\forall u, v \in V \ \exists F : F \text{ je automorfismus } G \wedge F(u) = v.$$

Tvrzení (Procházky v grafech)**:** *Počet procházek, popř. rekurentních procházek, dané délky v tranzitivním grafu nezávisí na startu: když je $G = (V, E)$ tranzitivní a lokálně konečný, pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každé dva vrcholy $u, v \in V$ je*

$$d_n(u, G) = d_n(v, G), \quad \textit{popř.} \quad a_n(u, G) = a_n(v, G).$$

V tranzitivních grafech G budeme stručně označovat počty procházek, resp. rekurentních procházek, s délkou n jako $d_n(G)$, resp. $a_n(G)$.

Příklad (Nekonečná cesta)**:** Nekonečná cesta

$$P = (\mathbb{Z}, \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\})$$

je tranzitivní a 2-regulární.

Definice (Zobecněná nekonečná cesta)**:** Zobecnněním nekonečné cesty je pro $d \in \mathbb{N}$ graf

$$\mathbb{Z}^d := \left(\mathbb{Z}^d, \left\{ \{\overline{u}, \overline{v}\} \mid \sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i| = 1 \right\} \right),$$

kde píšeme $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Tvrzení: *Grafy $\mathbb{Z}^d$ jsou tranzitivní a 2d-regulární.*

Věta (Slabá Abelova)**:** *Když mocninná řada*

$$U(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

konverguje pro každé $x \in [0, R)$, kde $R \in (0, +\infty)$ je reálné číslo, a má všechny koeficienty $u_n \geq 0$, pak následující limita a suma jsou definované a rovnají se -

$$\lim_{x \to R^-} U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n \quad (=: U(R))$$

- bez ohledu na to, zda jsou konečné nebo $+\infty$.

Věta (Stirlingův vzorec)**:**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n, \quad n \to \infty.$$

Věta (Pólya)**:** *Pro $d = 1$ a 2 je*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} = 1$$

a pro $d \geq 3$ je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} < 1$$

Důkaz: TODO □
Důkaz: TODO □

3 Komplexní analýza

Definice (Komplexní čísla)**:** Komplexní čísla

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i = \sqrt{-1},$$

tvoří normované těleso $\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, |\ldots|$, s normou $|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Zároveň tvoří úplný metrický prostor $(\mathbb{C}, d)$ s metrikou $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$, který je izometrický klasické euklidovkské rovině $\mathbb{R}^2$.

Poznámka (Značení)**:**

$$\mathrm{re}(a + bi) := a \quad \text{a} \quad \mathrm{im}(a + bi) := b$$

Definice (Komplexní koule)**:** Jako $B(z, r) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u - z| < r\}$ označíme kouli se středem z a poloměrem $r > 0$.

3.1 Holomorfní a analytické funkce

Definice (Derivace)**:** Pro funkci $f : U \to \mathbb{C}$ a bod $z_0 \in U$ je její derivace $f'(z_0)$ v z_0 definovaná jako pro reálné funkce:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C},$$

pokud tato limita existuje. Explicitně, $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ je derivace funkce f v bodě z_0, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : z \in U \wedge 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Definice (Holomorfní funkce)**:** Funkce $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní(na U), má-li v každém bodě $z_0 \in U$ derivaci. Celá či celistvá funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je lohomorfní na celé komplexní rovině $\mathbb{C}$. Komplexní derivace má stejné algebraické vlastnosti jako derivace reálná.

Tvrzení (Vlastnosti derivace)**:** *$f, g : U \to \mathbb{C}$ a $h : U_0 \to \mathbb{C}$ buďte holomorfní funkce a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Platí následující.*

1. *Funkce $\alpha f + \beta g$ je holomorfní na U a $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.*
2. *Součin fg je holomorfní na U a $(fg)' = f'g + fg'$.*
3. *Když $g \neq 0$ na U, pak je podíl $\frac{f}{g}$ holomorfní na U a $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.*
4. *Když $h[U_0] \subset U$, pak je složená funkce $f(h) : U_0 \to \mathbb{C}$ holomorfní na U_0 a $(f(h))' = f'(h)h'$.*

Poznámka (K derivacím)**:** Jako pro reálné funkce, pro $n \in \mathbb{N}$ na $\mathbb{C}$ máme $(z^n)' = nz^{n-1}$, derivace konstantní funkce je nulová funkce a každá racionální funkce je holomorfní na svém definičním oboru a její derivace je táž jako v reálném případě(tj. je daná stejnou formulí).

Definice (Analytická funkce)**:** Funkce $f : U \to \mathbb{C}$ je analytická (na U), pokud pro každý bod $z_0 \in U$ existují taková komplexní čísla $a_0, a_1, \ldots$, že

$$z \in U \wedge B(z_0, |z - z_0|) \subset U \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Analytická funkce je v každém kruhu se středem z_0, který je obsažený v definičním oboru, vyjádřena mocninnou řadou s komplexními koeficienty a středem z_0. S mocninnými řadami s komplexními koeficienty počítáme úplně stejně jako s reálnými mocninnými řadami.

3.1.1 Odlišnosti reálné a komplexní analýzy

1. Odlišnost

Věta (Holomorfní $\Rightarrow$ analytická)**:** *Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ celá funkce, pak existují komplexní koeficienty $a_0, a_1, \ldots$, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

2. Odlišnost

Poznámka: Funkce $f : U \to \mathbb{C}$ je omezená, když $\exists c > 0\ \forall c \in U : |f(z)| < c$.

Věta (Liouville)**:** *Když je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ celá a omezená funkce, pak je f konstantní.*

3. Odlišnost

Důsledek (Holomorfní funkce má $\forall$ derivace)**:** Každá holomorfní funkce $f : U \to \mathbb{C}$ má derivace $f^{(n)}(z)$ všech řádů $n \in \mathbb{N}$. Speciálně je její derivace $f' : U \to \mathbb{C}$ spojitá funkce.

4. Odlišnost

Věta (Princip maxima modulu)**:** *Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pak*

$$\forall z_0 \in U\ \forall \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \wedge |f(z)| \geq |f(z_0)|.$$

3.2 Úsečky a obdélníky

Definice (Úsečka)**:** Pro dva různé body je úsečka $u = ab \subset \mathbb{C}$ obraz

$$u = ab := \varphi[[0,1]] = \{\varphi(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{C}$$

intervalu $[0,1]$ lineární funkcí

$$\varphi(t) := (b-a)t + a : [0,1] \to \mathbb{C}.$$

Poznámka (Orientace úsečky)**:** Úsečka je orientována pořadím svých konců, takže ab a ba jsou dvě různé úsečky.

Definice (Délka úsečky)**:**

$$|u| = |ab| := |b-a| \geq 0$$

Definice (Dělení úsečky)**:** Dělení p úsečky $u = ab$ je $k+1$-tice $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k) \subset u, k \in \mathbb{N}$, jejích bodů

$$a_i := \varphi(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

které jsou obrazy bodů $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tvořících dělení intervalu $[0,1]$. Takže $a_0 = a, a_k = b$ a body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ běží na u od a do b.

Definice (Norma dělení)**:** Norma $\|p\|$ dělení p je

$$\|p\| := \max_{1 \leq i \leq k} |a_{i-1}a_i| = \max_{1 \leq i \leq k} |a_i - a_{i-1}|,$$

tedy největší délka podúsečky dělení.

Definice (Cauchyova suma a její modifikace)**:** Pro funkci $f : U \to \mathbb{C}$ a dělení $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ úsečky u definujeme Cauchyovu sumu $C(f,p)$ a její modifikaci $C'(f,p)$ jako

$$C(f,p) := \sum_{i=1}^{k} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}$$

$$C'(f,p) := \sum_{i=1}^{k} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}.$$

Definice (Obdélník)**:** Obdélník $R \subset \mathbb{C}$ je množina

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \mathrm{re}(z) \leq \beta \wedge \gamma \leq \mathrm{im}(z) \leq \delta\}$$

dána reálnými čísly $\alpha < \beta$ a $\gamma < \delta$. Jeho strany jsou rovnoběžné s reálnou a imaginární osou. Když $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, jde o čtverec.

Definice (Kanonické vrcholy obdélníka)**:** Kanonické vrcholy obdélníka R jsou $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, kde

$$a := \alpha + \gamma i, b := \beta + \gamma i, c := \beta + \delta i \text{ a } d := \alpha + \delta i.$$

Začínají levým dolním vrcholem a jdou proti směru hodinových ručiček.

Definice (Hranice obdélníka)**:** Hranice ∂R obdélníka R je sjednocení úseček

$$\partial R := ab \cup bc \cup cd \cup da.$$

Definice (Vnitřek obdélníka)**:** Vnitřek $\mathrm{int}(R)$ obdélníka R je

$$\mathrm{int}(R) := R \backslash \partial R.$$

Definice (Obvod obdélníka)**:** Obvod $\mathrm{obv}(R)$ obdélníka R je součet délek jeho stran,

$$\mathrm{obv}(R) := |ab| + |bc| + |cd| + |da|.$$

3.3 Integrály

Definice (Integrál přes úsečku a hranici obdélníka)**:** Nechť $f : u, \partial R \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce definovaná na úsečce u nebo na hranici obdélníka R. Definujeme

$$\underline{\int_u} f := \lim_{n\to\infty} C(f, p_n) \in \mathbb{C}$$

a

$$\underline{\int_{\partial R}} f := \int_{ab} f + \int_{bc} f + \int_{cd} f + \int_{da} f,$$

kde (p_n) je libovolná posloupnost dělení p_n úsečky u, která splňuje $\lim \|p_n\| = 0$, a (a, b, c, d) jsou kanonické vrcholy obdélníka R. Hodnota $\int_u f$ je integrál funkce f je funkce přes úsečku u a $\int_{\partial R} f$ je integrál funkce f přes hranici obdélníka R.

Věta (O integrálech)**:** *Nechť $u = ab$ je úsečka, R je obdélník a funkce $f, g : u, \partial R \to \mathbb{C}$ jsou spojité. Limita definující $\int_u f$ vždy existuje a nezávisí na posloupnosti (p_n). Tedy i $\int_{\partial R} f$ je vždy dobře definovaný. Oba integrály mají následující vlastnosti.*

1. *Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je $\int_u(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_u f + \beta \int_u g$ a totéž platí pro $\int_{\partial R}$.*
2. *Platí ML odhady*

$$\left|\int_u f\right| \leq \max_{z\in u}|f(z)| \cdot |u| \quad a \quad \left|\int_{\partial R} f\right| \leq \max_{z\in \partial R}|f(z)| \cdot obv(R)$$

3. *Pro každý vnitřní bod c úsečky $u = ab$, to jest $c \in ab$ a $c \neq a, b$, je $\int_{ab} f = \int_{ac} f + \int_{cb} f$. Též $\int_{ba} f = -\int_{ab} f$.*

Tvrzení (Stejnoměrná spojitost)**:** *Nechť $A \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d) a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak je f stejnoměrně spojitá, takže*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : a, b \in A \wedge d(a, b) < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Definice (k-ekvidělení)**:** Pro $k \in \mathbb{N}$ a úsečku $u \subset \mathbb{C}$ jejím k-ekvidělením rozumíme dělení u na k podúseček stejné délky $\frac{|u|}{k}$, které je dané obrazy dělení $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \cdots < \frac{k-1}{k} < 1$ jednotkového intervalu.

Tvrzení: *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$. Platí*

$$\int_{ab} (\alpha z + \beta) = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + \beta(b - a) = g(b) - g(a),$$

kde $g(z) := \frac{\alpha z^2}{2} + \beta z$.

Tvrzení (Jednoduchá Cauchy-Goursatova věta)**:** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník. pak*

$$\int_{\partial R} (\alpha z + \beta) = 0.$$

Tvrzení ($\int_u$ a $(R) \int$)**:** *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$, $f : ab \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a $\varphi(t) := t(b-a) + a : [0,1] \to \mathbb{C}$ je parametrizace definující úsečku $u = ab$. Potom*

$$\begin{aligned} \int_u f &= \int_0^1 f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = (b-a) \int_0^1 f(\varphi(t))\, dt \\ &= (b-a) \left(\int_0^1 re(f(\varphi(t)))\, dt + i \cdot \int_0^1 im(f(\varphi(t)))\, dt \right) \end{aligned}$$

(až na první integrál jsou všechny ostatní Riemannovy).

Definice (Křivkový integrál)**:** Když

$$f : U \to \mathbb{C} \text{ je funkce a } \varphi : [a,b] \to U$$

je spojitá a po částech hladká funkce, pak integrál funkce f přes křivku φ definujeme jako

$$\begin{aligned} \int_\varphi f &:= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, \mathrm{dt} \\ &= \int_a^b \mathrm{re}\left(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\right) \mathrm{dt} + i \cdot \int_a^b \mathrm{im}\left(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\right) \mathrm{dt}, \end{aligned}$$

pokud poslední dva (reálné) Riemannovy integrály existují. Náš „úsečkový integrál“ $\int_u$ je tedy podle předchozího tvrzení speciálním případem křivkového integrálu $\int_\varphi$.

3.4 Konstanta $\rho = 2\pi i$

Tvrzení: *Buď dána konvergentní posloupnost komplexních čísel (z_n). Platí $im(\lim z_n) = \lim im(z_n)$.*

Věta (Konstanta ρ)**:** *Nechť S je čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$. Pak*

$$\rho := \int_{\partial S} \frac{1}{z} \neq 0, \text{ dokonce } im(\rho) \geq 4.$$

Důkaz: Kanonické vrcholy čtverce S jsou $a := -1 - i, b := 1 - i, c := 1 + i$ a $d := -1 + i$. Nechť $p_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je n-ekvidělení úsečky ab. Protože násobení číslem i je otočení kolem počátku kladným směrem[9] o úhel $\frac{\pi}{2}$ je $q_n = ip_n := (ia_0, ia_1, \ldots, ia_n)$ n-ekvidělení úsečky bc. Podobně je $r_n = iq_n = -p_n$, resp. $s_n = ir_n = -ip_n$, n-ekvidělení úsečky cd, resp. da. Překvapivě pro $f(z) = \frac{1}{z}$ je

$$C(f, p_n) = C(f, q_n) = C(f, r_n) = C(f, s_n)$$

Skutečně, rozšíření zlomku číslem i dává

$$\begin{aligned} C(f, p_n) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\frac{b-a}{n}}{a + \frac{j(b-a)}{n}} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{ib-ia}{n}}{ia + \frac{j(ib-ia)}{n}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\frac{c-b}{n}}{b + \frac{j(c-b)}{n}} \right) = C(f, q_n) \end{aligned}$$

[9] proti směru hodinových ručiček

a podobně pro další dvě rovnosti. Dále vzhledem k $b - a = 2$ a $a = -1 - i$ rozšířením zlomku číslem $\frac{2j}{n} - 1$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(C(f, p_n)) &= \operatorname{im}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{2}{n}}{-1 - i + \frac{2j}{n}}\right) \\
&= \operatorname{im}\left(\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{2j}{n} - 1 + i}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1}\right) \\
&= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1}\right) \geq \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Tedy, podle tvrzení výše,

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(\rho) = \operatorname{im}\left(\int_{\partial S}\frac{1}{z}\right) &= 4 \cdot \operatorname{im}\left(\int_{ab}\frac{1}{z}\right) \\
&= 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \operatorname{im}\left(C\left(\frac{1}{z}, p_n\right)\right) \\
&\geq 4 \cdot 1 = 4
\end{aligned}$$

a skutečně $\rho \neq 0$. □

Tvrzení: *Nechť opět $a := -1 - i$ a $b := 1 - i$. Potom $\int_{ab}\frac{1}{z} = \frac{\pi i}{2}$. Tedy, podle předchozího důkazu, $\rho = 4 \cdot \frac{\pi i}{2} = 2\pi i$.*[10]

3.5 Cauchy-Goursatova věta

Integrál $\int_\varphi f$ holomorfní funkce f přes *jednoduchou uzavřenou křivku* φ, která leží v definičním oboru funkce f se svým celým vnitřkem, je 0.

Definice (Diametr množiny)**:** Pro množinu $x \subset \mathbb{C}$ je její diametr[11] definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) = \sup(\{|x - y| \mid x, y \in X\}).$$

Průměr množiny může být i $+\infty$.

Tvrzení: *Když A_n,*

$$\mathbb{C} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots,$$

jsou neprázdné a uzavřené množiny s $\lim$ *diam*$(A_n) = 0$, *pak* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Definice (Čtvrtka obdélníka)**:** Buď obdélník R s kanonickými vrcholy (a, b, c, d). Když $e := \frac{a+b}{2}$, $f := \frac{b+c}{2}$, $g := \frac{c+d}{2}$ a $h := \frac{d+a}{2}$ jsou středy stran R a $j := \frac{a+c}{2}$ je jeho celkový střed, pak jeho čtyři čtvrtky jsou obdélníky A, B, C a D, jejichž kanonické vrcholy jsou, po řadě,

$$(a, e, j, h), (e, b, f, j), (j, f, c, g) \text{ a } (h, j, g, d).$$

Obdélník se na čtvrtky rozpadne po rozříznutí podle úseček eg a hf. Pro každou z těchto čtvrtek E patrně platí: $\operatorname{obv}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{obv}(R)$ a $\operatorname{diam}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(R)$.

[10] $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t$
[11] průměr

Věta (Cauchy-Goursatova pro obdélníky)**:** *Nechť*

$$f : U \to \mathbb{C}$$

je holomorfní funkce a $R \subset U$ je obdélník. Pak

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

Důkaz: Mějme f, U a R. Sestrojíme takové vnořené obdélníky

$$R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots,$$

že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $R_n + 1$ čtvrtka obdélníku R_n a

$$\left| \int_{\partial R_{n+1}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|.$$

Nechť už jsou takové obdélníky $R_0, R_1, \dots, R_n$ definované a A, B, C, D jsou čtvrtky obdélníku R_n. Tvrdíme, že

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial A} f + \int_{\partial B} f + \int_{\partial C} f + \int_{\partial D} f$$

Tato identita plyne použitím třetí části věty o integrálech. Po rozvinutí každého integrálu $\int_{\partial A} f, \dots, \int_{\partial D} f$ jako součtu čtyř integrálů přes strany dostáváme na pravé straně předchozí rovnosti 16 členů. Osm z nich odpovídá stranám čtvrtek uvnitř R_n a vzájemně se zruší, protože vytvoří čtyři dvojice opačných orientací stejné úsečky. Zbylých osm členů odpovídá stranám čtvrtek ležících na ∂R_n, které se sečtou na integrál na levé straně předcházející rovnosti. Z této rovnosti plyne podle trojúhelníkové nerovnosti, že pro nějakou čtvrtku $E \in \{A, B, C, D\}$ je $\left|\int_{\partial E} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial R_n} f\right|$. Položíme tedy $R_{n+1} = E$.

Podle předchozího tvrzení existuje bod z_0, že

$$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n.$$

Protože $R_0 = R \subset U$, je i $z_0 \in U$. Nyní použijeme existenci derivace $f'(z_0)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $B(z_0, \delta) \subset U$ a pro nějakou funkci $\Delta : B(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ pro každé $z \in B(z_0, \delta)$ je $|\Delta(z)| < \varepsilon$ a

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_{g(z)} + \underbrace{\Delta(z) \cdot (z - z_0)}_{h(z)}.$$

Uvážíme tyto funkce $g(z)$ a $h(z)$. Je jasné, že $g(z)$ je lineární a $h(z) = f(z) - g(z)$ je spojitá[12]. Nechť $n \in \mathbb{N}_{\not{0}}$ je tak velké, že $R_n \subset B(z_0, \delta)$[13]. Podle linearity integrálu a jednoduché Cauchyho-Goursatovy věty(JCG) máme

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial R_n} g + \int_{\partial R_n} h \overset{JCG}{=} \int_{\partial R_n} h.$$

Platí odhad

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R_n} h \right| &\overset{\text{ML odhad}}{\leq} \max_{z \in \partial R_n} |\Delta(z) \cdot (z - z_0)| \cdot \mathrm{obv}(R_n) \\ &< \varepsilon \cdot \mathrm{diam}(R_n) \cdot \mathrm{obv}(R_n) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{diam}(R)}{2^n} \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)}{2^n} \\ &< \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)}{4^n}. \end{aligned}$$

[12] na $B(z_0, \delta)$

[13] potřebujeme jenom, že $\lim \mathrm{diam}(R_n) = 0$, pro esxistenci z_0 to není podstatné

Zde jsme použili výše zmíněné zmenšení průměru a obvodu na polovinu po čtvrcení a to, že průměr obdélníka je menší než jeho obvod. Podle předchozích výsledků tak máme

$$\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial R} f\right| \leq \left|\int_{\partial R_n} f\right| = \left|\int_{\partial R} h\right| < \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)^2}{4^n}$$

a $\left|\int_{\partial R} f\right| < \varepsilon \cdot \mathrm{obv}(R)^2$. Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, je $\int_{\partial R} f = 0$. □

Věta (Cauchy-Goursatova)**:** *Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a $\varphi : [a,b] \to U$ je spojitá a po částech hladká fuknce, která je prostá, s vyjímkou hodnoty $\varphi(a) = \varphi(b)$, a jejíž vnitřek*[14] *je podmnožinou množiny U. Pak*

$$\int_\varphi f = 0.$$

3.6 Funkcionál $\int$

Definice (Funkcionál)**:** Pro libovolnou kompaktní[15] množinu $A \subset \mathbb{C}$ definujeme množiny holomorfních funkcí

$$H_A := \{f : \mathbb{C} \backslash A \to \mathbb{C} \mid f \text{ je holomorfní}\}$$
$$H := \bigcup_{A \subset \mathbb{C} \text{ je kompaktní}} H_A.$$

H tedy obsahuje všechny funkce holomorfní na doplňcích kompaktů. Funkcionál $\int$, tedy funkci na množině H, definujeme předpisem

$$\int : H \to \mathbb{C}, \ \int f := \int_{\partial R} f,$$

kde $f \in H_A$ a $R \subset \mathbb{C}$ je libovolný obdélník, že $\mathrm{int}(R) \supset A$[16].

Tvrzení (Korektnost definice $\int$)**:** *Definice funkcionálu $\int$ je korektní, jeho hodnota $\int f$ nezávisí na volbě obdélníku R.*

Věta (Vlastnosti $\int$)**:** *Důležité vlastnosti jsou tři.*

1. *Linearita: pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $f, g \in H$ je*
$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$
2. *Rozšíření Cauchy-Goursatovy věty: když $a \in \mathbb{C}$ a funkce $f \in H_{\{a\}}$ je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak*
$$\int f = 0.$$
3. *Pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*
$$\int \frac{1}{z-a} = \rho$$
kde $\rho = 2\pi i$ je dříve zavedená konstanta.

Věta (Cauchyův vzorec)**:** *Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkce. Pak je-li $\rho = 2\pi i$ dříve definovaná konstanta, pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*

$$f(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{z-a}.$$

[14] ta komponenta ve dvojici komponent množiny $\mathbb{C} \backslash \varphi[[a,b]]$, která je omezená

[15] uzavřenou a omezenou

[16] A je obsažena uvnitř obdélníku R

3.7 Meromorfní funkce a rezidua

Definice (Diskrétní množina)**:** Množina $A \subset \mathbb{C}$ je diskrétní, pokud v každé kouli $B(z,r) \subset \mathbb{C}$ leží jen konečně mnoho jejích prvků.

Definice (Meromorfní funkce, množina pólů)**:** Holomorfní funkci

$$f : U \backslash A \to \mathbb{C},$$

kde $A \subset \mathbb{C}$ je diskrétní, nazveme meromorfní funkcí a A nazveme množinou jejích pólů, když každý bod $a \in A$ má okolí $U_a \subset U$ s $U_a \cap A = \{a\}$, že pro nějakou holomorfní funkci $g_a : U_a \to \mathbb{C}$ a nějaká čísla $k_a \in \mathbb{N}_0$ a $c_{j,a} \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \ldots, k_a$ že pro každé $z \in U_a \backslash \{a\}$ je

$$f(z) = g_a(z) + \sum_{j=1}^{k_a} \frac{c_{j,a}}{(z-a)^j}.$$

Pro $k_a = 0$ se suma definuje jako 0 a $f = g_a$ pak je holomorfní na U_a.

Definice (Reziduum funkce f)**:** Koeficient $c_{1,a}$ z předchozí definice je takzvané reziduum funkce f v bodě a, označované jako

$$\operatorname{res}(f,a) := c_{1,a}.$$

Z Cauchyova vzorce plyne, že $\operatorname{res}(f,a)$ je jednoznačně určené funkcí f.

Věta (Reziduová)**:** *Nechť $f : U \backslash A \to \mathbb{C}$ je meromorfní funkce s množinou pólů A a $R \subset U$ je obdélník, jehož hranice neobsauje žádný bod z A. Potom platí rovnost*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f = \sum_{a \in A \cap int(R)} res(f,a) = \sum_{a \in A \cap R} res(f,a)$$

(suma v ní je konečná). Integrál funkce f přes hranici obdélníka R, dělený $2\pi i$, se tedy rovná součtu reziduí funkce f v pólech ležících uvnitř R.

Tvrzení (O funkci $F(z)$)**:** *Nechť*

$$F(z) := \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} : \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z} \to \mathbb{C}.$$

Funkce F je meromorfní s póly v $\mathbb{Z}$ a v každém čísle má reziduum rovné 1.

Lemma: *Nechť $F(z)$ je jako v předešlém tvrzení a $S_N \subset \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, je čtverec s vrcholy $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Pak existuje konstanta $c > 0$, že*

$$\forall N \in \mathbb{N} \forall z \in \partial S_N : |F(z)| \leq c.$$

Věta (Sečtení řady $\sum n^{-2k}$)**:** *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje kladný zlomek $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, že*

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots = \alpha_k \pi^{2k}.$$

4 Úvod do diferenciálních rovnic

4.1 Rovnice se separovanými proměnými

4.2 Lineární rovnice

4.3 Věta o existenci

The End