

Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Tyto poznámky jsem sepsal pro přípravu na zkoušku z přednášek pana doc. Klazara. Neprošly zatím žádnou korekcí, budou tedy pravděpodobně obsahovat mnoho chyb. Pokud v poznámkách najdete chybu, nebo pokud budete mít nějakou připomínku k tomu, jak jsou psané, kontaktujte mě prosím na Discordu, nebo mi dejte pull-request na <https://github.com/3011/ma3-poznamky>. Ke většině vět jsem vynechal důkazy, psal jsem je téměř výhradně k větám/tvrzením, která spadají k otázkám vypsáním ke zkoušce.

Obsah

1	Metrické prostory	3
1.1	Definice	3
1.2	Euklidovský prostor, Sférická metrika	3
1.3	p -adické metriky	4
1.4	Kompaktnost množin v metrických prostorech	5
1.5	Topologická spojitost	7
1.6	Heine-Borelova věta	7
1.7	Souvislé množiny a metrické prostory	7
1.8	Základní věta algebry	8
1.9	Úplné množiny a metrické prostory	9
1.10	Baireova věta	9
2	Řady	9
2.1	Definice	9
2.2	Fourierova řada funkce	10
2.3	Basilejský problém	12
2.4	Divergentní řady	13
2.5	Konvergence řad	13
2.5.1	Absolutní konvergence	13
2.5.2	Stejněměrná a bodová konvergence	14
2.6	Mocninné řady	15
2.6.1	Pólyova věta o náhodných procházkách	17
3	Komplexní analýza	18
3.1	Holomorfní a analytické funkce	19
3.1.1	Odlišnosti reálné a komplexní analýzy	19
3.2	Úsečky a obdélníky	20
3.3	Integrály	21
3.4	Konstanta $\rho = 2\pi i$	22
3.5	Cauchy-Goursatova věta	23
3.6	Funkcionál \int	25
3.6.1	Meromorfní funkce a rezidua	26
4	Úvod do diferenciálních rovnic	26
4.1	Rovnice se separovanými proměnnými	26
4.2	Lineární rovnice	26
4.3	Věta o existenci	26

1 Metrické prostory

1.1 Definice

Definice (Metrický prostor): Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor): Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d') , tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d) . Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d) .

Definice (Izometrie): Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \rightarrow N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f , prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

1.2 Euklidovský prostor, Sférická metrika

Příklad (Euklidovský prostor): Euklidovský prostor (\mathbb{R}^n, e_n) , $n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\bar{x}, \bar{y}^1 \in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body \bar{x} a \bar{y} . Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n) , když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika): Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru \mathbb{R}^n . Funkci $s : S \times S \rightarrow [0, \pi]$ definujeme pro $\bar{x}, \bar{y} \in S$ jako

$$s(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 \dots \bar{x} = \bar{y} \\ \varphi \dots \bar{x} \neq \bar{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřímkami procházejícími počátkem $\bar{0}$ a body \bar{x} a \bar{y} . Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body \bar{x} a \bar{y} na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body \bar{x} a \bar{y} . Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: (S, s) je metrický prostor.

Definice ((Horní) hemisféra): (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

¹ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

Věta (H není plochá): *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

Důkaz: TODO □

Definice (Ultrametrika): Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika (nearchimédovská metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru): *V ultrametrickém prostoru (M, d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule): (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M, d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

1.3 p -adické metriky

Definice (p -adický řád): Necht $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a necht $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p -adický řád čísla n definujeme

$$\text{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\text{ord}_p(0) := +\infty$.

Poznámka (Rozšíření $\text{ord}_p(\cdot)$ na zlomky): Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\text{ord}_p(\alpha) := \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\text{ord}_p(0) = \text{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (aditivita $\text{ord}_p(\cdot)$): *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \text{ord}_p(\alpha\beta) = \text{ord}_p(\alpha) + \text{ord}_p(\beta)$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (+\infty) := +\infty$, pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Definice (p -adická norma): Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$ jako

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p := c^{\text{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Tvrzení (multiplikativita $|\cdot|_p$): *Pro každé p a každé dva zlomky α, β (a každé $c \in (0, 1)$) je*

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p |\beta|_p$$

². $|\cdot|$ značí relaci dělitelnosti.

Definice (Normované těleso): Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso vybavené normou $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

Tvrzení: Pro každé normované těleso $(F, |\cdot|_F)$ je funkce $d(x, y) := |x - y|_F$ metrika na F . Pokud $|\cdot|_F$ splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je d ultrametrika.

Tvrzení (o $|\cdot|_p$): Pro každé prvočíslo p a každé $c \in (0, 1)$ je $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ normované těleso. Příslušný metrický prostor (\mathbb{Q}, d) s $d(x, y) := |x - y|_F$ je ultrametrický prostor.

Definice (Triviální norma): Triviální norma na libovolném tělese F je funkce $\|\cdot\|$ s $\|0_F\| = 0$ a $\|x\| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Tvrzení (Mocnění obvyklé absolutní hodnoty): Pro $c > 0$ je $|\cdot|^c$ norma (na \mathbb{Q}, \mathbb{R} a \mathbb{C}), právě když $c \leq 1$.

Definice (Kanonická p -adická norma): Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p -adická norma $\|\cdot\|_p$ definovaná jako

$$\|\alpha\|_p := p^{-\text{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p -adické normě $\|\cdot\|_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Věta (A. Ostrowski): Nechť $\|\cdot\|$ je norma na tělese racionálních čísel \mathbb{Q} . Pak nastává jedna ze tří následujících možností.

1. Je to triviální norma.
2. Existuje reálné $c \in (0, 1]$ takové, že $\|x\| = |x|^c$.
3. Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p , že $\|x\| = |x|_p = c^{\text{ord}_p(x)}$ (kde $c^\infty := 0$).

Modifikovaná absolutní hodnota a p -adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: TODO

□

1.4 Kompaktnost množin v metrických prostorech

Poznámka (Konvence): $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ jsou reálná čísla a $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Limitu píšeme jako $\lim a_n = a$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Definice (Limita): Nechť je (M, d) metrický prostor, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. (a_n) má limitu v (M, d) , pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

.

Definice (Konvergence, Divergence): Pokud má (a_n) limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

Definice (Kompaktní metrický prostor): Buď (M, d) metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že X je kompaktní, pokud

$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m_n} = a.$$

Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X . Metrický prostor (M, d) je kompaktní, pokud M je kompaktní.

Definice (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory): Buďte (M, d) a (N, e) metrické prostory a buď $f : M \rightarrow N$ zobrazení mezi nimi. f je spojité v $a \in M$, pokud

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Zobrazení f je spojité, pokud je spojité v každém bodě $a \in M$.

Věta (Princip maxima): *Nechť (M, d) je metrický prostor,*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

je funkce z M do reálné osy a $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina. Pak

$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší hodnotu $f(a)$ a největší hodnotu $f(b)$.

Definice (Součin metrických prostorů): Pro metrické prostory (M, d) a (N, e) definujeme jejich součin $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ je na něm dána jako

$$(d \times e)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + e(a_2, b_2)^2}$$

Definice (Otevřená množina): Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je otevřená, pokud

$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a, r) \subset X.$$

Definice (Uzavřená množina): Množina X je uzavřená, pokud $M \setminus X$ je otevřená.

Definice (Omezená množina): Množina X je omezená, pokud

$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a, r)$$

Definice (Diametr): Diametr (průměr) množiny X je s $V := \{d(a, b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako

$$\text{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \dots \text{množina } V \text{ je shora omezená} \\ +\infty & \dots \text{množina } V \text{ není shora omezená} \end{cases}$$

Věta (Kompaktní \Rightarrow uzavřená a omezená, součin): *Platí následující:*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d) , pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*
2. *Jsou-li (M, d) a (N, e) dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní metrický prostor.*

Věta (Kompaktní množina v \mathbb{R}^n): *V každém Euklidovském metrickém prostoru (\mathbb{R}^n, e_n) je množina $X \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

1.5 Topologická spojitost

Tvrzení (Topologická spojitost): *Nechť $f : M \rightarrow N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) . prostorem*

$$f \text{ je spojité} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^3$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Topologická spojitost pro podprostory): *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdňá množina a $f : X \rightarrow N$. prostorem*

$$f \text{ je spojité zobrazení definované na } (X, d) \iff \forall \text{ OM } A \subset N : \exists \text{ OM } B \subset M : f^{-1}[A] = X \cap B.$$

Topologickou definici spojitosti jsme rozšířili na podprostory.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu): *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdňá kompaktní množina a*

$$f : X \rightarrow N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu): *Nechť $f : X \rightarrow N$ je spojité zobrazení z neprázdňé kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do (N, e) . Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \rightarrow X$$

je spojité.

Definice (Homeomorfismus): *Zobrazení $f : M \rightarrow N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M, d) a (N, e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.*

1.6 Heine-Borelova věta

Definice (Topologická kompaktnost): *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:*

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova): *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: TODO

□

1.7 Souvislé množiny a metrické prostory

Definice (Obojetná množina): *Podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je obojetná⁴, je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny \emptyset a M .*

Definice (Souvislý prostor): *Prostor (M, d) je souvislý, pokud v něm neexistuje netriviální⁵ obojetná podmnožina. Jinak, má-li M obojetnou podmnožinu $X \subset M$ s $X \neq \emptyset$, je nesouvislý.*

³OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.

⁴anglicky *clopen*

⁵Různou od M a \emptyset .

Definice (Souvislá podmnožina): Podmnožina $X \subset M$ je souvislá, je-li podprostor (X, d) souvislý. Pokud podprostor (X, d) souvislý není, je nesouvislá.

Definice (Trhání množiny): Necht (M, d) je metrický prostor a $X, A, B \subset M$. Řekneme, že množiny A a B trhají množinu X , pokud A a B jsou otevřené a platí všechna následující

- $X \subset A \cup B$
- $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$
- $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \emptyset$

Tvrzení: Podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá množina v metrickém prostoru (M, d) , právě když existují $A, B \subset M$, které ji trhají.

1.8 Základní věta algebry

Věta (Základní věta algebry): Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{j=0}^n a_j \alpha^j = 0$$

Věta (Souvislost intervalů): Každý interval $[a, b] \subset \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$, je souvislá množina.

Věta (souvislost a spojitost): Necht $f : X \rightarrow N$ je spojitě zobrazení ze souvislé množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do metrického prostoru (N, e) . Potom

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subset N$$

je souvislá množina.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

Tvrzení: Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.

Tvrzení (Druhá odmocnina v \mathbb{C}): $\forall a + bi \in \mathbb{C}$ máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech

$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že $(c + di)^2 = a + bi$.

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n -té odmocniny v \mathbb{C}): Komplexní čísla obsahují všechny n -té odmocniny, tedy

$$\forall u \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: TODO

□

Tvrzení (Redukce na n -té odmocniny): Když \mathbb{C} obsahuje všechny n -té odmocniny, pak platí Základní věta algebry a každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.

1.9 Úplné množiny a metrické prostory

Definice (Cauchyova posloupnost): Cauchyova posloupnost (a_n) splňuje, že

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Definice (Úplný metrický prostor): Metrický prostor (M, d) je úplný, je-li každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset M$ konvergentní.

Definice (Úplná množina): Množina $X \subset M$ je úplná, je-li podprostor (X, d) úplný.

Tvrzení (úplnost uzavřených podprostorů): V úplném metrickém prostoru (M, d) je každá uzavřená množina $X \subset M$ úplná.

1.10 Baireova věta

Definice (Řídká a hustá množina): Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je řídká(v M), pokud

$$\forall a \in M \forall r > 0 \exists b \in M \exists s > 0 : B(b, s) \subset B(a, r) \wedge B(b, s) \cap X = \emptyset$$

Každá koule v (M, d) tedy obsahuje podkouli disjunktní s X . Podobně množina $Y \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je hustá(v M), pokud

$$\forall a \in M \forall r > 0 : B(a, r) \cap Y \neq \emptyset$$

Tvrzení (hustota a spojitost): Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je hustá v M a

$$f, g : M \rightarrow N$$

jsou taková spojitá zobrazení, že $f|_X = g|_X$ ⁶ Potom $f = g$.

Definice (Uzavřená koule): Pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ rozumíme v metrickém prostoru (M, d) uzavřenou kouli $\overline{B}(a, r)$ množinu

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Uzavřená koule je uzavřená množina a pro každé $a \in M$ a kladná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ t.ž. $r < s$ je $\overline{B}(a, r) \subset B(a, s)$.

Věta (Baireova): Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Pak některá množina X_n není řídká.

Důsledek (o úplném metrickém prostoru): Každý úplný metrický prostor (M, d) , který neobsahuje izolované body, je nespočetný.

2 Řady

2.1 Definice

Definice (Řada, konvergence a divergence řady): Řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, které je přiřazena posloupnost částečných součtů

$$(s_n) := (a_1 + \cdots + a_n) \subset \mathbb{R}.$$

⁶Zúžení obou funkcí na množinu X se shodují.

Pokud posloupnost (s_n) má limitu, řekneme, že řada má součet. Je-li tato limita vlastní ($\in \mathbb{R}$), pak řada konverguje, jinak (součet je $\pm\infty$ nebo neexistuje) diverguje. Součet řady se označuje stejným symbolem jako řada sama, takže také

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim s_n = \lim(a_1 + \dots + a_n).$$

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence): *Když řada $\sum a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.*

Tvrzení (Harmonická řada):

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

Tvrzení:

$$\sum \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n^2} = 1$$

Tvrzení (Geometrická řada): *Pro každé $q \in (-1, 1)$ je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Tvrzení (Leibnizovo kritérium): *Když $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$ a $\lim a_n = 0$, pak řada $\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ konverguje.*

2.2 Fourierova řada funkce

Definice (Trigonometrická řada): Trigonometrická řada je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde a_n, b_n jsou její koefficienty a $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.

Trigonometrická řada je fakticky parametrický systém řad parametrizovaný proměnnou x . Chceme odvodit vyjádření široké třídy funkcí $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, pomocí trigonometrických řad.

Definice (Skoro skalární součin): Nechť $\mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je množina všech funkcí $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, které mají na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál. Pro $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg \in \mathbb{R}.^7$$

Pro tento skoro skalární součin platí následující

Tvrzení (Symetrie, nezápornost a linearita skoro skalárního součinu):

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2. $\langle f, f \rangle \geq 0$
3. $\langle af + bg, h \rangle = a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle$

ale

⁷Z teorie Riemannova integrálu plyne, že pokud $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$, pak i $fg \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$.

Tvrzení: *Ekvivalence $\langle f, f \rangle = 0 \iff f \equiv 0$ neplatí.*

Definice (2π -periodická funkce): Funkce je 2π -periodická, když pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Tvrzení (Ortogonalita sinů a cosinů): *Pro každá dvě celá čísla $m, n \geq 0$ je*

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$$

Pro každá dvě celá čísla $m, n \geq 0$, kromě $m = n = 0$, je

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \dots & m = n \\ 0 & \dots & m \neq n. \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi.$$

Definice (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty): Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Definice (Fourierova řada funkce): Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde a_n a b_n jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, v němž jsou „souřadnými osami“ (prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v \mathbb{R}^n se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

Věta (Besselova nerovnost): *Pro Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Důkaz: **TODO**

□

Tvrzení (Riemannovo-Lebesgueovo lemma): *Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je⁸*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = 0$$

⁸Lze dokázat pomocí Besselovy nerovnosti.

Definice (Po částech hladká funkce): Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, je po částech hladká, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b, k \in \mathbb{N},$$

intervalu $[a, b]$, že na každém intervalu $a_{i-1}, a_i, i = 1, 2, \dots, k$, má spojitou derivaci f' a pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i - 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^-} f'(x)$$

a pro každé $i = 0, 1, \dots, k - 1$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i + 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i + 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^+} f'(x)$$

Po částech hladká funkce tedy může být v několika bodech intervalu $[a, b]$ nespojitá, ale v bodech nespojitosti má vlastní jednostranné limity a má v nich definované jednostranné nesvislé tečny.

Tvrzení (O Dirichletově jádře): Nechť $n \in \mathbb{N}$ a

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx).$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ máme

$$J_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

také

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 J_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_n(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Věta (Dirichletova): Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je taková 2π -periodická funkce, že její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Pak její Fourierova řada $F_f(x)$ má pro každé $a \in \mathbb{R}$ součet

$$F_f(a) = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)}{2}$$

V každém bodu spojitosti $a \in \mathbb{R}$ funkce $f(x)$ tedy její Fourierova řada má součet rovný funkční hodnotě, $F_f(a) = f(a)$.

Definice (Hladká funkce): Řekneme, že funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká, když má na intervalu (a, b) spojitou derivaci f' a v krajních bodech a a b mají $f(x)$ a $f'(x)$ vlastní jednostranné limity.

Důsledek (O hladké funkci): Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je 2π -periodická a spojitá funkce, jejíž zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je hladké. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$F_f(a) = f(a).$$

Spojitá a hladká funkce se tedy rovná součtu své Fourierovy řady.

2.3 Basilejský problém

Příklad (Basilejský problém): TODO

2.4 Divergentní řady

Řadě $\sum a_n$, to jest posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, lze přiřadit její „součet“ i mnoha jinými způsoby, než jen jako limitu

$$\lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$$

posloupnosti částečných součtů. Jako ilustrace jsou uvedeny dvě sumační metody.

Fakt (Abelovský součet):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Fakt (Cesàrovský součet):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

2.5 Konvergence řad

2.5.1 Absolutní konvergence

Definice (Absolutní konvergence): Řekneme, že řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje (je to absolutně konvergentní řada), pokud konverguje řada $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Definice (Obecná absolutní konvergence): Nechť A je nekonečná spočetná množina.

Pak řadou $\sum_{x \in A} a_x$ (na A) budeme rozumět každou funkci $a : A \rightarrow \mathbb{R}$, kde pro $x \in A$ místo $a(x)$ stále píšeme a_x . Řekneme, že tato řada je obecná absolutně konvergentní řada, když

$$\exists c > 0 \forall \text{ konečnou množinu } B \subset A : \sum_{x \in B} |a_x| < c$$

Věta (O absolutně konvergentních řadách): *Nechť $\sum_{x \in A} a_x$ je řada na A . Pak $\sum_{x \in A} a_x$ je obecná absolutně konvergentní řada, právě když pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \rightarrow A$ je klasická řada*

$$B(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\pi)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b := a_{\pi(n)},$$

absolutně konvergentní řada. Všechny řady $B(\pi)$ jsou pak absolutně konvergentní a mají též součet, nezávislý na bijekci π .

Definice (Součet obecné absolutně konvergentní řady): Pro obecnou absolutně konvergentní řadu $\sum_{x \in A} a_x$ tak definujeme její součet jako součet $\sum b_n$ řady $\sum b_n$ s $b_n := a_{\pi(n)}$ pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Definice (Součin řad): Buďte $\sum_{x \in A} a_x$ a $\sum_{x \in B} b_x$ dvě obecné řady. Jejich součin, či součinná řada, je řada

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} a_x b_x.$$

Věta (Součin absolutně konvergentních řad): *Nechť $\sum_{x \in A} a_x$ a $\sum_{x \in B} b_x$ jsou obecné absolutně konvergentní řady se součty*

$$r := \sum_{x \in A} a_x \in \mathbb{R} \quad a \quad \sum_{y \in B} b_y \in \mathbb{R}.$$

Pak i jejich součin je obecná absolutně konvergentní řada, která má součet rs .

Tvrzení (Exponenciála): Pro $x \in \mathbb{R}$ nechť

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí identita

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

Tvrzení (Prvočísel je ∞ mnoho): Množina prvočísel

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

je nekonečná.

2.5.2 Stejněměrná a bodová konvergence

Definice (Stejněměrná konvergence): Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Řekneme, že f_n konvergují (na M) stejněměrně k f , symbolicky

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M)$$

když ($\varepsilon > 0$)

$$\forall \varepsilon \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall x \in M : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice (Bodová konvergence): Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Pokud

$$\forall \varepsilon \forall x \in M \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

řekneme, že f_n konvergují (na M) k f bodově, symbolicky

$$f_n \rightarrow f \quad (\text{na } M)$$

Jinými slovy, $\forall x \in M : \lim f_n(x) = f(x)$. Stejněměrná konvergence implikuje bodovou, ale ne naopak.

Definice (Supremová norma): Pro funkci $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme její supremovou normu $\|f\|_{\infty}$ jako

$$\|f\|_{\infty} := \sup(\{|f(x)| \mid x \in M\}) \in [0, +\infty],$$

s hodnotou $+\infty$ pro shora neomezenou množinu $\{\dots\}$.

Tvrzení (Kritérium \Rightarrow): Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0.$$

Definice (Lokálně stejněměrná konvergence): Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Lokálně stejněměrná konvergence f_n k f (na M), symbolicky $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$ (na M), znamená, že

$$\forall a \in M \exists \delta > 0 : f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M \cap (a - \delta, a + \delta)).$$

Věta ($\xrightarrow{\text{loc}} \Rightarrow$ zachovává spojitost): Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$, každá funkce f_n je spojitá a

$$f_n \xrightarrow{\text{loc}} f \quad (\text{na } M).$$

Pak i f je spojitá.

Důkaz: Necht' $a \in M$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme $\delta > 0$, že f_n konvergují na $N := M \cap (a - \delta, a + \delta)$ stejnoměrně. Vezmeme n_0 , že $n \geq n_0 \wedge x \in N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vezmeme libovolné $n_1 \geq n_0$ a pak, díky spojitosti f_{n_1} , takové $\delta \in (0, \delta)$, že

$$x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0) \subset N \Rightarrow |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pak pro každé $x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0) \subset N$ máme, že

$$|f(a) - f(x)| \leq |f(a) - f_{n_1}(a)| + |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v bodě a . □

Tvrzení (Weierstrassův test): *Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $\sum f_n \rightarrow f$ (na M). Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow f \quad (\text{na } M), \text{ pokud } \sum_{n=1}^{\infty} F_n := \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty.$$

2.6 Mocninné řady

Definice (Mocninná řada): Mocninná řada se středem $a \in \mathbb{R}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{R}$ (a proměnnou $x \in \mathbb{R}$) je funkční řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

Definice (Poloměr konvergence): Poloměr konvergence R mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$:

$$R := \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty],$$

kde $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} := 0$. S těmito konvencemi máme i ekvivalentní vztah $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$.

Věta (O konvergencích mocninných řad): *Necht'*

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence R . Pak pro každé reálné x s $|x| < R$ řada $F(x)$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Když $R > 0$, pak na intervalu $(-R, R)$ řada $F(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně ke svému (bodovému) součtu.

Věta (Počítání s mocninnými řadami): *Necht'*

$$A(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{a} \quad B(x) := \sum_{n \geq 0} b_n x^n$$

jsou mocninné řady konvergující na nějakém intervalu $I := (-a, a)$, kde $a > 0$. Označme stejně i odpovídající funkce $A, B : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pro jejich (formální) součet, součin, podíl a derivaci platí následující.

1. Mocninná řada (Formální součet)

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) + B(x)$.

2. Mocninná řada (Formální součin)

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_n b_{n-k} \right) x^n$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

3. Nechť $b_0 \neq 0$ a $d_n := -\frac{b_n}{b_0}$. Pak existuje $b > 0$, že mocninná řada (Formální podíl)

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n = \frac{A(x)}{B(x)} := \frac{1}{b_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n$$

konverguje na intervalu $J := (-b, b)$ a pro každé $x \in J$ je $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

4. Mocninná řada (Formální derivace)

$$C(x) := \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A'(x)$.

Ve třetí části je použita formální geometrická řada:

$$\frac{1}{1 - (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)} = \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n.$$

Tvrzení (Abelova nerovnost): Pro $i = 1, 2, \dots, n$ nechť $a_i \in \mathbb{C}, b_i \in \mathbb{R}$ s $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, $A_i := a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a $A[n] := \max(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|)$. prostorem

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq A[n] \cdot b_1.$$

Věta (Abelova): Nechť

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, +\infty)$ a označme stejně odpovídající funkci $A : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$. Když řada $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ konverguje a má součet

$$S := \sum_{n \geq 0} a_n R^n,$$

pak je limita zleva v R funkce $A(x)$ rovna S :

$$\lim_{x \rightarrow R^-} A(x) = \lim_{a \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

2.6.1 Pólyova věta o náhodných procházkách

Definice (Graf): Graf $G = (V, E)$ sestává z množiny vrcholů V a množiny hran $E \subset \binom{V}{2}$. Zde

$$\binom{V}{2} := \{A \mid A \subset V \wedge |A| = 2\}$$

je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny V .

Definice (d -regulární graf): Graf $G = (V, E)$ je d -regulární, $D \in \mathbb{N}$, má-li každý vrchol d sousedů, to jest

$$\forall v \in V : |\overbrace{\{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}}^{N(v)}| = d.$$

Definice (Lokálně konečný graf): Graf G je lokálně konečný, má-li každý vrchol $v \in V$ jen konečně mnoho sousedů, tj. množina $N(v)$ je konečná.

Definice (Procházka): Procházka w v grafu $G = (V, E)$ je taková konečná, $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ s délkou $|w| := n \in \mathbb{N}_0$, či nekonečná, $w = (v_0, v_1, \dots)$, posloupnost vrcholů $v_i \in V$, že pro každé $i \in \mathbb{N}_0 (< n)$ je $\{v_i, v_{i+1} \in E\}$. Vrchol v_0 pojmenujeme jako start procházky w .

Definice (Počet procházek): Definujeme

$$d_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je procházka se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|,$$

počet procházek v grafu G s daným startem v_0 a s délkou n .

Definice (Rekurentní procházka): Rekurentní procházka $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ opětovně prochází startem: existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, že $v_i = v_0$

Definice (Počet rekurentních procházek): Jako

$$a_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je rekurentní procházka se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|$$

označíme počet rekurentních procházek v grafu G s daným startem v_0 a s délkou n .

Definice (Automorfismus): Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je taková bijekce $f : V \rightarrow V$, že

$$\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E.$$

Definice ((Vrcholově) tranzitivní graf): Graf $G = (V, E)$ je (vrcholově) tranzitivní, když

$$\forall u, v \in V \exists F : F \text{ je automorfismus } G \wedge F(u) = v.$$

Tvrzení (Procházky v grafech): *Počet procházek, popř. rekurentních procházek, dané délky v tranzitivním grafu nezávisí na startu: když je $G = (V, E)$ tranzitivní a lokálně konečný, pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každé dva vrcholy $u, v \in V$ je*

$$d_n(u, G) = d_n(v, G), \quad \text{popř.} \quad a_n(u, G) = a_n(v, G).$$

V tranzitivních grafech G budeme stručně označovat počty procházek, resp. rekurentních procházek, s délkou n jako $d_n(G)$, resp. $a_n(G)$.

Příklad (Nekonečná cesta): Nekonečná cesta

$$P = (\mathbb{Z}, \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\})$$

je tranzitivní a 2-regulární.

Definice (Zobecněná nekonečná cesta): Zobecněním nekonečné cesty je pro $d \in \mathbb{N}$ graf

$$\mathbb{Z}^d := \left(\mathbb{Z}^d, \left\{ \{\bar{u}, \bar{v}\} \mid \sum_{i=1}^d |u_i - v_i| = 1 \right\} \right),$$

kde píšeme $\bar{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Tvrzení: Grafy \mathbb{Z}^d jsou tranzitivní a $2d$ -regulární.

Věta (Slabá Abelova): Když mocninná řada

$$U(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

konverguje pro každé $x \in [0, R)$, kde $R \in (0, +\infty)$ je reálné číslo, a má všechny koeficienty $u_n \geq 0$, pak následující limita a suma jsou definované a rovnají se -

$$\lim_{x \rightarrow R^-} U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n \quad (= U(R))$$

- bez ohledu na to, zda jsou konečné nebo $+\infty$.

Věta (Stirlingův vzorec):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Věta (Pólya): Pro $d = 1$ a 2 je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} = 1$$

a pro $d \geq 3$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} < 1$$

Důkaz: TODO

Důkaz: TODO



3 Komplexní analýza

Definice (Komplexní čísla): Komplexní čísla

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i = \sqrt{-1},$$

tvoří normované těleso $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, |\cdot|)$, s normou $|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Zároveň tvoří úplný metrický prostor (\mathbb{C}, d) s metrikou $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$, který je izometrický klasické euklidovské rovině \mathbb{R}^2 .

Poznámka (Značení):

$$\operatorname{re}(a + bi) := a \quad \text{a} \quad \operatorname{im}(a + bi) := b$$

Definice (Komplexní koule): Jako $B(z, r) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u - z| < r\}$ označíme kouli se středem z a poloměrem $r > 0$.

3.1 Holomorfní a analytické funkce

Definice (Derivace): Pro funkci $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ a bod $z_0 \in U$ je její derivace $f'(z_0)$ v z_0 definovaná jako pro reálné funkce:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C},$$

pokud tato limita existuje. Explicitně, $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ je derivace funkce f v bodě z_0 , právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in U \wedge 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Definice (Holomorfní funkce): Funkce $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní (na U), má-li v každém bodě $z_0 \in U$ derivaci. Celá či celistvá funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní na celé komplexní rovině \mathbb{C} . Komplexní derivace má stejné algebraické vlastnosti jako derivace reálná.

Tvrzení (Vlastnosti derivace): $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ a $h : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ buďte holomorfní funkce a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Platí následující.

1. Funkce $\alpha f + \beta g$ je holomorfní na U a $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
2. Součin fg je holomorfní na U a $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Když $g \neq 0$ na U , pak je podíl $\frac{f}{g}$ holomorfní na U a $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
4. Když $h[U_0] \subset U$, pak je složená funkce $f(h) : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfní na U_0 a $(f(h))' = f'(h)h'$.

Poznámka (K derivacím): Jako pro reálné funkce, pro $n \in \mathbb{N}$ na \mathbb{C} máme $(z^n)' = nz^{n-1}$, derivace konstantní funkce je nulová funkce a každá racionální funkce je holomorfní na svém definičním oboru a její derivace je táž jako v reálném případě (tj. je daná stejnou formulí).

Definice (Analytická funkce): Funkce $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je analytická (na U), pokud pro každý bod $z_0 \in U$ existují taková komplexní čísla a_0, a_1, \dots , že

$$z \in U \wedge B(z_0, |z - z_0|) \subset U \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Analytická funkce je v každém kruhu se středem z_0 , který je obsažený v definičním oboru, vyjádřena mocninnou řadou s komplexními koeficienty a středem z_0 . S mocninnými řadami s komplexními koeficienty počítáme úplně stejně jako s reálnými mocninnými řadami.

3.1.1 Odlišnosti reálné a komplexní analýzy

1. Odlišnost

Věta (Holomorfní \Rightarrow analytická): Je-li $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ celá funkce, pak existují komplexní koeficienty a_0, a_1, \dots , že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

2. Odlišnost

Poznámka: Funkce $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je omezená, když $\exists c > 0 \forall z \in U : |f(z)| < c$.

Věta (Liouville): Když je $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ celá a omezená funkce, pak je f konstantní.

3. Odlišnost

Důsledek (Holomorfní funkce má \forall derivace): Každá holomorfní funkce $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ má derivace $f^{(n)}(z)$ všech řádů $n \in \mathbb{N}$. Speciálně je její derivace $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce.

4. Odlišnost

Věta (Princip maxima modulu): *Nechť $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pak*

$$\forall z_0 \in U \forall \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \wedge |f(z)| \geq |f(z_0)|.$$

3.2 Úsečky a obdélníky

Definice (Úsečka): Pro dva různé body je úsečka $u = ab \subset \mathbb{C}$ obraz

$$u = ab := \varphi[[0, 1]] = \{\varphi(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{C}$$

intervalu $[0, 1]$ lineární funkcí

$$\varphi(t) := (b - a)t + a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}.$$

Poznámka (Orientace úsečky): Úsečka je orientována pořadím svých konců, takže ab a ba jsou dvě různé úsečky.

Definice (Délka úsečky):

$$|u| = |ab| := |b - a| \geq 0$$

Definice (Dělení úsečky): Dělení p úsečky $u = ab$ je $k + 1$ -tice $p = (a_0, a_1, \dots, a_k) \subset u, k \in \mathbb{N}$, jejích bodů

$$a_i := \varphi(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

které jsou obrazy bodů $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tvořících dělení intervalu $[0, 1]$. Takže $a_0 = a, a_k = b$ a body a_0, a_1, \dots, a_k běží na u od a do b .

Definice (Norma dělení): Norma $\|p\|$ dělení p je

$$\|p\| := \max_{1 \leq i \leq k} |a_{i-1}a_i| = \max_{1 \leq i \leq k} |a_i - a_{i-1}|,$$

tedy největší délka podúsečky dělení.

Definice (Cauchyova suma a její modifikace): Pro funkci $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ a dělení $p = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ úsečky u definujeme Cauchyovu sumu $C(f, p)$ a její modifikaci $C'(f, p)$ jako

$$C(f, p) := \sum_{i=1}^k f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}$$

$$C'(f, p) := \sum_{i=1}^k f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}.$$

Definice (Obdélník): Obdélník $R \subset \mathbb{C}$ je množina

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \operatorname{re}(z) \leq \beta \wedge \gamma \leq \operatorname{im}(z) \leq \delta\}$$

dána reálnými čísly $\alpha < \beta$ a $\gamma < \delta$. Jeho strany jsou rovnoběžné s reálnou a imaginární osou. Když $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, jde o čtverec.

Definice (Kanonické vrcholy obdélníka): Kanonické vrcholy obdélníka R jsou $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, kde

$$a := \alpha + \gamma i, b := \beta + \gamma i, c := \beta + \delta i \text{ a } d := \alpha + \delta i.$$

Začínají levým dolním vrcholem a jdou proti směru hodinových ručiček.

Definice (Hranice obdélníka): Hranice ∂R obdélníka R je sjednocení úseček

$$\partial R := ab \cup bc \cup cd \cup da.$$

Definice (Vnitřek obdélníka): Vnitřek $\text{int}(R)$ obdélníka R je

$$\text{int}(R) := R \setminus \partial R.$$

Definice (Obvod obdélníka): Obvod $\text{obv}(R)$ obdélníka R je součet délek jeho stran,

$$\text{obv}(R) := |ab| + |bc| + |cd| + |da|.$$

3.3 Integrály

Definice (Integrál přes úsečku a hranici obdélníka): Necht' $f : u, \partial R \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce definovaná na úsečce u nebo na hranici obdélníka R . Definujeme

$$\int_u f := \lim_{n \rightarrow \infty} C(f, p_n) \in \mathbb{C}$$

a

$$\int_{\partial R} f := \int_{ab} f + \int_{bc} f + \int_{cd} f + \int_{da} f,$$

kde (p_n) je libovolná posloupnost dělení p_n úsečky u , která splňuje $\lim \|p_n\| = 0$, a (a, b, c, d) jsou kanonické vrcholy obdélníka R . Hodnota $\int_u f$ je integrál funkce f je funkce přes úsečku u a $\int_{\partial R} f$ je integrál funkce f přes hranici obdélníka R .

Věta (O integrálech): Necht' $u = ab$ je úsečka, R je obdélník a funkce $f, g : u, \partial R \rightarrow \mathbb{C}$ jsou spojité. Limita definující $\int_u f$ vždy existuje a nezávisí na posloupnosti (p_n) . Tedy i $\int_{\partial R} f$ je vždy dobře definovaný. Oba integrály mají následující vlastnosti.

1. Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je $\int_u (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_u f + \beta \int_u g$ a totéž platí pro $\int_{\partial R}$.
2. Platí ML odhady

$$\left| \int_u f \right| \leq \max_{z \in u} |f(z)| \cdot |u| \quad a \quad \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \max_{z \in \partial R} |f(z)| \cdot \text{obv}(R)$$

3. Pro každý vnitřní bod c úsečky $u = ab$, to jest $c \in ab$ a $c \neq a, b$, je $\int_{ab} f = \int_{ac} f + \int_{cb} f$. Též $\int_{ba} f = -\int_{ab} f$.

Tvrzení (Stejněměrná spojitost): Necht' $A \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d) a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak je f stejnoměrně spojitá, takže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : a, b \in A \wedge d(a, b) < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Definice (k -ekvidělení): Pro $k \in \mathbb{N}$ a úsečku $u \subset \mathbb{C}$ jejím k -ekvidělením rozumíme dělení u na k podúseček stejné délky $\frac{|u|}{k}$, které je dané obrazy dělení $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \dots < \frac{k-1}{k} < 1$ jednotkového intervalu.

Tvrzení: Necht' $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$. Platí

$$\int_{ab} (\alpha z + \beta) = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + \beta(b - a) = g(b) - g(a),$$

kde $g(z) := \frac{\alpha z^2}{2} + \beta z$.

Tvrzení (Jednoduchá Cauchy-Goursatova věta): *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník. Pak*

$$\int_{\partial R} (\alpha z + \beta) = 0.$$

Tvrzení (\int_u a $(R) \int$): *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$, $f : ab \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce a $\varphi(t) := t(b-a) + a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ je parametrizace definující úsečku $u = ab$. Potom*

$$\begin{aligned} \int_u f &= \int_0^1 f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = (b-a) \int_0^1 f(\varphi(t)) dt \\ &= (b-a) \left(\int_0^1 \operatorname{re}(f(\varphi(t))) dt + i \cdot \int_0^1 \operatorname{im}(f(\varphi(t))) dt \right) \end{aligned}$$

(až na první integrál jsou všechny ostatní Riemannovy).

Definice (Křivkový integrál): Když

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ je funkce a } \varphi : [a, b] \rightarrow U$$

je spojitá a po částech hladká funkce, pak integrál funkce f přes křivku φ definujeme jako

$$\begin{aligned} \int_\varphi f &:= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{re}(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt + i \cdot \int_a^b \operatorname{im}(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt, \end{aligned}$$

pokud poslední dva (reálné) Riemannovy integrály existují. Náš „úsečkový integrál“ \int_u je tedy podle předchozího tvrzení speciálním případem křivkového integrálu \int_φ .

3.4 Konstanta $\rho = 2\pi i$

Tvrzení: *Bud' dána konvergentní posloupnost komplexních čísel (z_n) . Platí $\operatorname{im}(\lim z_n) = \lim \operatorname{im}(z_n)$.*

Věta (Konstanta ρ): *Nechť S je čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$. Pak*

$$\rho := \int_{\partial S} \frac{1}{z} \neq 0, \text{ dokonce } \operatorname{im}(\rho) \geq 4.$$

Důkaz: Kanonické vrcholy čtverce S jsou $a := -1 - i, b := 1 - i, c := 1 + i$ a $d := -1 + i$. Nechť $p_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ je n -ekvidělení úsečky ab . Protože násobení číslem i je otočení kolem počátku kladným směrem⁹ o úhel $\frac{\pi}{2}$ je $q_n = ip_n := (ia_0, ia_1, \dots, ia_n)$ n -ekvidělení úsečky bc . Podobně je $r_n = iq_n = -p_n$, resp. $s_n = ir_n = -ip_n$, n -ekvidělení úsečky cd , resp. da . Překvapivě pro $f(z) = \frac{1}{z}$ je

$$C(f, p_n) = C(f, q_n) = C(f, r_n) = C(f, s_n)$$

Skutečně, rozšíření zlomku číslem i dává

$$\begin{aligned} C(f, p_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\frac{b-a}{n}}{a + \frac{j(b-a)}{n}} \right) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\frac{ib-ia}{n}}{ia + \frac{j(ib-ia)}{n}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\frac{c-b}{n}}{b + \frac{j(c-b)}{n}} \right) = C(f, q_n) \end{aligned}$$

⁹proti směru hodinových ručiček

a podobně pro další dvě rovnosti. Dále vzhledem k $b - a = 2$ a $a = -1 - i$ rozšířením zlomku číslem $\frac{2j}{n} - 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(C(f, p_n)) &= \operatorname{im} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\frac{2}{n}}{-1 - i + \frac{2j}{n}} \right) \\ &= \operatorname{im} \left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\frac{2j}{n} - 1 + i}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1} \right) \geq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Tedy, podle tvrzení výše,

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(\rho) &= \operatorname{im} \left(\int_{\partial S} \frac{1}{z} \right) = 4 \cdot \operatorname{im} \left(\int_{ab} \frac{1}{z} \right) \\ &= 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{im} \left(C \left(\frac{1}{z}, p_n \right) \right) \\ &\geq 4 \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

a skutečně $\rho \neq 0$. □

Tvrzení: *Nechť opět $a := -1 - i$ a $b := 1 - i$. Potom $\int_{ab} \frac{1}{z} = \frac{\pi i}{2}$. Tedy, podle předchozího důkazu, $\rho = 4 \cdot \frac{\pi i}{2} = 2\pi i$.¹⁰*

3.5 Cauchy-Goursatova věta

Integrál $\int_{\varphi} f$ holomorfní funkce f přes jednoduchou uzavřenou křivku φ , která leží v definičním oboru funkce f se svým celým vnitřkem, je 0.

Definice (Diametr množiny): Pro množinu $x \subset \mathbb{C}$ je její diametr¹¹ definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) = \sup(\{|x - y| \mid x, y \in X\}).$$

Průměr množiny může být i $+\infty$.

Tvrzení: *Když A_n ,*

$$\mathbb{C} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots,$$

jsou neprázdné a uzavřené množiny s $\lim \operatorname{diam}(A_n) = 0$, pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Definice (Čtvrtka obdélníka): Buď obdélník R s kanonickými vrcholy (a, b, c, d) . Když $e := \frac{a+b}{2}$, $f := \frac{b+c}{2}$, $g := \frac{c+d}{2}$ a $h := \frac{d+a}{2}$ jsou středy stran R a $j := \frac{a+c}{2}$ je jeho celkový střed, pak jeho čtyři čtvrtky jsou obdélníky A, B, C a D , jejichž kanonické vrcholy jsou, po řadě,

$$(a, e, j, h), (e, b, f, j), (j, f, c, g) \text{ a } (h, j, g, d).$$

Obdélník se na čtvrtky rozpadne po rozříznutí podle úseček eg a hf . Pro každou z těchto čtvrtěk E patrně platí: $\operatorname{obv}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{obv}(R)$ a $\operatorname{diam}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(R)$.

¹⁰ $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t$

¹¹ průměr

Věta (Cauchy-Goursatova pro obdélníky): *Nechť*

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

je holomorfní funkce a $R \subset U$ je obdélník. Pak

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

Důkaz: Mějme f, U a R . Sestrojíme takové vnořené obdélníky

$$R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots,$$

že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je R_{n+1} čtvrtka obdélníku R_n a

$$\left| \int_{\partial R_{n+1}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|.$$

Nechť už jsou takové obdélníky R_0, R_1, \dots, R_n definované a A, B, C, D jsou čtvrtky obdélníku R_n . Tvrdíme, že

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial A} f + \int_{\partial B} f + \int_{\partial C} f + \int_{\partial D} f$$

Tato identita plyne použitím třetí části věty o integrálech. Po rozvinutí každého integrálu $\int_{\partial A} f, \dots, \int_{\partial D} f$ jako součtu čtyř integrálů přes strany dostáváme na pravé straně předchozí rovnosti 16 členů. Osm z nich odpovídá stranám čtvrtek uvnitř R_n a vzájemně se zruší, protože vytvoří čtyři dvojice opačných orientací stejné úsečky. Zbýlých osm členů odpovídá stranám čtvrtek ležících na ∂R_n , které se sečtou na integrál na levé straně předcházející rovnosti. Z této rovnosti plyne podle trojúhelníkové nerovnosti, že pro nějakou čtvrtku $E \in \{A, B, C, D\}$ je $\left| \int_{\partial E} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|$. Položíme tedy $R_{n+1} = E$.

Podle předchozího tvrzení existuje bod z_0 , že

$$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n.$$

Protože $R_0 = R \subset U$, je i $z_0 \in U$. Nyní použijeme existenci derivace $f'(z_0)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $B(z_0, \delta) \subset U$ a pro nějakou funkci $\Delta : B(z_0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$ pro každé $z \in B(z_0, \delta)$ je $|\Delta(z)| < \varepsilon$ a

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_{g(z)} + \underbrace{\Delta(z) \cdot (z - z_0)}_{h(z)}.$$

Uvážíme tyto funkce $g(z)$ a $h(z)$. Je jasné, že $g(z)$ je lineární a $h(z) = f(z) - g(z)$ je spojitá¹². Nechť $n \in \mathbb{N}_\infty$ je tak velké, že $R_n \subset B(z_0, \delta)$ ¹³. Podle linearit integrálu a jednoduché Cauchyho-Goursatovy věty (JCG) máme

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial R_n} g + \int_{\partial R_n} h \stackrel{JCG}{=} \int_{\partial R_n} h.$$

Platí odhad

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R_n} h \right| &\stackrel{\text{ML odhad}}{\leq} \max_{z \in \partial R_n} |\Delta(z) \cdot (z - z_0)| \cdot \text{obv}(R_n) \\ &< \varepsilon \cdot \text{diam}(R_n) \cdot \text{obv}(R_n) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\text{diam}(R)}{2^n} \cdot \frac{\text{obv}(R)}{2^n} \\ &< \varepsilon \cdot \frac{\text{obv}(R)}{4^n}. \end{aligned}$$

¹²na $B(z_0, \delta)$

¹³potřebujeme jenom, že $\lim \text{diam}(R_n) = 0$, pro existenci z_0 to není podstatné

Zde jsme použili výše zmíněné zmenšení průměru a obvodu na polovinu po čtvrcení a to, že průměr obdélníka je menší než jeho obvod. Podle předchozích výsledků tak máme

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \left| \int_{\partial R_n} f \right| = \left| \int_{\partial R} h \right| < \varepsilon \cdot \frac{\text{obv}(R)^2}{4^n}$$

a $\left| \int_{\partial R} f \right| < \varepsilon \cdot \text{obv}(R)^2$. Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, je $\int_{\partial R} f = 0$. \square

Věta (Cauchy-Goursatova): *Nechť $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a $\varphi : [a, b] \rightarrow U$ je spojitá a po částech hladká funkce, která je prostá, s výjimkou hodnoty $\varphi(a) = \varphi(b)$, a jejíž vnitřek¹⁴ je podmnožinou množiny U . Pak*

$$\int_{\varphi} f = 0.$$

3.6 Funkcionál \int

Definice (Funkcionál): Pro libovolnou kompaktní¹⁵ množinu $A \subset \mathbb{C}$ definujeme množiny holomorfních funkcí

$$H_A := \{f : \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ je holomorfní}\}$$

$$H := \bigcup_{A \subset \mathbb{C} \text{ je kompaktní}} H_A.$$

H tedy obsahuje všechny funkce holomorfní na doplňcích kompakťů. Funkcionál \int , tedy funkci na množině H , definujeme předpisem

$$\int : H \rightarrow \mathbb{C}, \quad \int f := \int_{\partial R} f,$$

kde $f \in H_A$ a $R \subset \mathbb{C}$ je libovolný obdélník, že $\text{int}(R) \supset A$ ¹⁶.

Tvrzení (Korektnost definice \int): *Definice funkcionálu \int je korektní, jeho hodnota $\int f$ nezávisí na volbě obdélníku R .*

Věta (Vlastnosti \int): *Důležité vlastnosti jsou tři.*

1. *Linearita: pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $f, g \in H$ je*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

2. *Rozšíření Cauchy-Goursatovy věty: když $a \in \mathbb{C}$ a funkce $f \in H_{\{a\}}$ je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a , pak*

$$\int f = 0.$$

3. *Pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*

$$\int \frac{1}{z - a} = \rho$$

kde $\rho = 2\pi i$ je dříve zavedená konstanta.

Věta (Cauchyův vzorec): *Nechť $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je celá funkce. Pak je-li $\rho = 2\pi i$ dříve definovaná konstanta, pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*

$$f(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{z - a}.$$

¹⁴ta komponenta ve dvojici komponent množiny $\mathbb{C} \setminus \varphi[[a, b]]$, která je omezená

¹⁵uzavřenou a omezenou

¹⁶ A je obsažena uvnitř obdélníku R

3.6.1 Meromorfní funkce a rezidua

Definice (Diskrétní množina): Množina $A \subset \mathbb{C}$ je diskrétní, pokud v každé kouli $B(z, r) \subset \mathbb{C}$ leží jen konečně mnoho jejích prvků.

Definice (Meromorfní funkce, množina pólů): Holomorfní funkci

$$f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C},$$

kde $A \subset \mathbb{C}$ je diskrétní, nazveme meromorfní funkcí a A nazveme množinou jejích pólů, když každý bod $a \in A$ má okolí $U_a \subset U$ s $U_a \cap A = \{a\}$, že pro nějakou holomorfní funkci $g_a : U_a \rightarrow \mathbb{C}$ a nějaká čísla $k_a \in \mathbb{N}_0$ a $c_{j,a} \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, k_a$ že pro každé $z \in U_a \setminus \{a\}$ je

$$f(z) = g_a(z) + \sum_{j=1}^{k_a} \frac{c_{j,a}}{(z-a)^j}.$$

Pro $k_a = 0$ se suma definuje jako 0 a $f = g_a$ pak je holomorfní na U_a .

Definice (Reziduum funkce f): Koeficient $c_{1,a}$ z předchozí definice je takzvané reziduum funkce f v bodě a , označované jako

$$\text{res}(f, a) := c_{1,a}.$$

Z Cauchyova vzorce plyne, že $\text{res}(f, a)$ je jednoznačně určené funkcí f .

Věta (Reziduová): *Nechť $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ je meromorfní funkce s množinou pólů A a $R \subset U$ je obdélník, jehož hranice neobsahuje žádný bod z A . Potom platí rovnost*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f = \sum_{a \in A \cap \text{int}(R)} \text{res}(f, a) = \sum_{a \in A \cap R} \text{res}(f, a)$$

(suma v ní je konečná). Integrál funkce f přes hranici obdélníka R , dělený $2\pi i$, se tedy rovná součtu reziduí funkce f v pólech ležících uvnitř R .

Tvrzení (O funkci $F(z)$): *Nechť*

$$F(z) := \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Funkce F je meromorfní s póly v \mathbb{Z} a v každém čísle má reziduum rovné 1.

Lemma: *Nechť $F(z)$ je jako v předešlém tvrzení a $S_N \subset \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, je čtverec s vrcholy $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Pak existuje konstanta $c > 0$, že*

$$\forall N \in \mathbb{N} \forall z \in \partial S_N : |F(z)| \leq c.$$

Věta (Sečtení řady $\sum n^{-2k}$): *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje kladný zlomek $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, že*

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots = \alpha_k \pi^{2k}.$$

4 Úvod do diferenciálních rovnic

4.1 Rovnice se separovanými proměnnými

4.2 Lineární rovnice

4.3 Věta o existenci

The End