1 Definujte metrický prostor a sférickou metriku. Dokažte, že hemisféra není plochá.

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \dots \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \dots \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřimkami procházejícími počátkem $\overline{0}$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Věta (H není plochá)**:** *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

Důkaz: TODO □

2 Dokažte Ostrowskiho větu.

Definice (p-adický řád)**:** Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p-adický řád čísla n definujeme

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^1$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

Poznámka (Rozšíření $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ na zlomky)**:** Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Definice (p-adická norma)**:** Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right)}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

[1]. $|$ · značí relaci dělitelnosti.

Definice (Kanonická p-adická norma)**:** Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p-adická norma $||\cdot||_p$ definovaná jako

$$||\alpha||_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p-adické normě $||\cdot||_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Věta (A. Ostrowski)**:** *Nechť $||\cdot||$ je norma na tělese racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Pak nastává jedna ze tří následujících možností.*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné $c \in (0,1]$ takové, že $||x|| = |x|^c$.*
3. *Existuje reálné $c \in (0,1)$ a prvočíslo p, že $||x|| = |x|_p = c^{ord_p(x)}$(kde $c^\infty := 0$).*

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: TODO □

3 Dokažte Heine-Borelovu větu.

Tvrzení (Topologická spojitost)**:** *Nechť $f : M \to N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M,d) a (N,e). prostorem*

$$f \text{ je spojité} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^2$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu)**:** *Nechť (M,d) a (N,e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina a*

$$f : X \to N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení z neprázdné kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M,d) do (N,e). Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \to X$$

je spojité.

Definice (Homeomorfismus)**:** Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory (M,d) a (N,e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M,d) a (N,e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.

Definice (Topologická kompaktnost)**:** Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M,d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova)**:** *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M,d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: TODO □

[2] OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.

4 Dokažte existenci n-tých odmocnin v $\mathbb{C}$.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

Tvrzení: *Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.*

Tvrzení (Druhá odmocnina v $\mathbb{C}$)**:** *$\forall a + bi \in \mathbb{C}$ máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech*

$$c := \pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že $(c + di)^2 = a + bi$.

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n-té odmocniny v $\mathbb{C}$)**:** *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*

$$\forall u \in \mathbb{C}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: TODO $\square$

5 Dokažte Besselovu nerovnost.

Tvrzení (Ortogonalita sinů a cosinů)**:** *Pro každá dvě celá čísla $m, n \geq 0$ je*

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$$

Pro každá dvě delá čísla $m, n \geq 0$, kromě $m = n = 0$, je

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \dots \quad m = n \\ 0 & \dots \quad m \neq n. \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi.$$

Definice (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty)**:** Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x, n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x, n = 1, 2, \dots$$

Definice (Fourierova řada funkce)**:** Fourierova řada funkce $f(\in \mathcal{R}(-\pi, \pi))$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

kde a_n a b_n jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, v němž jsou „souřadnými osami"(prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v $\mathbb{R}^n$ se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

Věta (Besselova nerovnost)**:** *Pro Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Důkaz: TODO □

6 Spočítejte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Příklad (Basilejský problém)**:** TODO

7 Dokažte, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce.

8 Dokažte případ 2 nebo případ 3 Pólyovy věty.

9 Dokažte, že $\rho \neq 0$.

10 Dokažte Caychy-Goursatovu větu pro obdélníky.

11 Vyřešte diferenciální rovnici $y' + ay = b$.