Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Verze 0.3
7. července 2021

Tyto poznámky jsem sepsal pro přípravu na zkoušku z přednášek pana doc. Klazara. Neprošly zatím žádnou korekcí, budou tedy pravděpodobně obsahovat mnoho chyb. Pokud v poznámkách najdete chybu, nebo pokud budete mít nějakou připomínku k tomu, jak jsou psané, kontaktujte mě prosím na Discordu, nebo mi dejte pull-request na `https://github.com/3011/ma3-poznamky`. Ke většině vět jsem vynechal důkazy, psal jsem je téměř výhradně k větám/tvrzením, která spadají k otázkám vypsaným ke zkoušce.

Obsah

1 Metrické prostory

1.1 Definice

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor)**:** Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d'), tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d). Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d).

Definice (Izometrie)**:** Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \to N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f, prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

1.2 Euklidovský prostor, Sférická metrika

Příklad (Euklidovský prostor)**:** Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, e_n), n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\overline{x}, \overline{y}$[1] $\in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n), když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \ldots \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \ldots \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřimkami procházejícími počátkem $\overline{0}$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: (S, s) *je metrický prostor.*

Definice ((Horní) hemisféra)**:** (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

[1] $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

Věta (H není plochá)**:** *Metrický prostor* (H, s) *není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru* (X, e_n) *s* $X \subset \mathbb{R}^n$

Důkaz: TODO $\square$

Definice (Ultrametrika)**:** Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika(nearchimédovká metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru)**:** *V ultrametrickém prostoru* (M, d) *je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule)**:** (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M, d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

1.3 p-adické metriky

Definice (p-adický řád)**:** Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p-adický řád čísla n definujeme

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

Poznámka (Rozšíření $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ na zlomky)**:** Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (aditivita $\mathrm{ord}_p(\cdot)$)**:** *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : ord_p(\alpha\beta) = ord_p(\alpha) + ord_p(\beta)$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (\infty) := +\infty$*, pro každé* $n \in \mathbb{Z}$.

Definice (p-adická norma)**:** Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Tvrzení (multiplikativita $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé* p *a každé dva zlomky* α, β*(a každé* $c \in (0, 1)$*) je*

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p |\beta|_p$$

[2]. $\mid \cdot$ značí relaci dělitelnosti.

Definice (Normované těleso)**:** Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso vybavené normou $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

Tvrzení: *Pro každé normované těleso $(F, |\cdot|_F)$ je funkce $d(x, y) := |x - y|_F$ metrika na F. Pokud $|\cdot|_F$ splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je d ultrametrika.*

Tvrzení (o $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé prvočíslo p a každé $c \in (0, 1)$ je $\mathbb{Q}, |\cdot|_p$ normované těleso. Příslušný metrický prostor $(\mathbb{Q}, d)$(s $d(x, y) := |x - y|_F$) je ultrametrický prostor.*

Definice (Triviální norma)**:** Triviální norma na libovolném tělese F je funkce $||\cdot||$ s $||0_F|| = 0$ a $||x|| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Tvrzení (Mocnění obvyklé absolutní hodnoty)**:** *Pro $c > 0$ je $|\cdot|^c$ norma(na $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$), právě když $c \leq 1$.*

Definice (Kanonická p-adická norma)**:** Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p-adická norma $||\cdot||_p$ definovaná jako

$$||\alpha||_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p-adické normě $||\cdot||_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Věta (A. Ostrowski)**:** *Nechť $||\cdot||$ je norma na tělese racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Pak nastává jedna ze tří následujících možností.*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné $c \in (0, 1]$ takové, že $||x|| = |x|^c$.*
3. *Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p, že $||x|| = |x|_p = c^{ord_p(x)}$(kde $c^\infty := 0$).*

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: TODO □

1.4 Kompaktnost množin v metrických prostorech

Poznámka (Konvence)**:** $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ jsou reálná čísla a $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Limitu píšeme jako $\lim a_n = a$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definice (Limita)**:** Nechť je (M, d) metrický prostor, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. (a_n) má limitu v (M, d), pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

.

Definice (Konvergence, Divergence)**:** Pokud má (a_n) limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

Definice (Kompaktní metrický prostor)**:** Buď (M,d) metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že X je kompaktní, pokud
$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n\to\infty} a_{m_n} = a.$$
Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X. Metrický prostor (M,d) je kompaktní, pokud M je kompaktní.

Definice (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory)**:** Buďte (M,d) a (N,e) metrické prostory a buď $f : M \to N$ zobrazení mezi nimi. f je spojité v $a \in M$, pokud
$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x,a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$
Zobrazení f je spojité, pokud je spojité v každém bodě $a \in M$.

Věta (Princip maxima)**:** *Nechť (M,d) je metrický prostor,*
$$f : M \to \mathbb{R}$$
je funkce z M do reálné osy a $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina. Pak
$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$
Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší hodnotu $f(a)$ a největší hodnotu $f(b)$.

Definice (Součin metrických prostorů)**:** Pro metrické prostory (M,d) a (N,e) definujeme jejich součin $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ je na něm dána jako
$$(d \times e)((a_1,a_2),(b_1,b_2)) := \sqrt{d(a_1,b_1)^2 + e(a_2,b_2)^2}$$

Definice (Otevřená množina)**:** Množina $X \in M$ v metrickém prostoru (M,d) je otevřená, pokud
$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a,r) \subset X.$$

Definice (Uzavřená množina)**:** Množina X je uzavřená, pokud $M \backslash X$ je otevřená.

Definice (Omezená množina)**:** Množina X je omezená, pokud
$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a,r)$$

Definice (Diametr)**:** Diametr(průměr) množiny X je s $V := \{d(a,b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako
$$\operatorname{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \dots \text{ množina} V \text{je shora omezená} \\ +\infty & \dots \text{ množina} V \text{není shora omezená} \end{cases}$$

Věta (Kompaktní $\Rightarrow$ uzavřená a omezená, součin)**:** *Platí následující:*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M,d), pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*

2. *Jsou-li (M,d) a (N,e) dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní metrický prostor.*

Věta (Kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$)**:** *V každém Euklidovském metrickém prostoru $(\mathbb{R}^n, e_n)$ je množina $X \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

1.5 Topologická spojitost

Tvrzení (Topologická spojitost)**:** *Nechť $f : M \to N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e). prostorem*

$$f \text{ je spojité} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^3$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Topologická spojitost pro podprostory)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná množina a $f : X \to N$. prostorem*

$$f \text{ je spojité zobrazení definované na } (X, d) \iff \forall \text{ OM } A \subset N : \exists \text{ OM } B \subset M : f^{-1}[A] = X \cap B.$$

Topologickou definici spojitosti jsme rozšířili na podprostory.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina a*

$$f : X \to N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení z neprázdné kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do (N, e). Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \to X$$

je spojité.

Definice (Homeomorfismus)**:** Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M, d) a (N, e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.

1.6 Heine-Borelova věta

Definice (Topologická kompaktnost)**:** Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova)**:** *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: TODO $\square$

1.7 Souvislé množiny a metrické prostory

Definice (Obojetná množina)**:** Podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je obojetná[4], je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny $\emptyset$ a M.

Definice (Souvislý prostor)**:** Prostor (M, d) je souvislý, pokud v něm neexistuje netriviální[5] obojetná podmnožina. Jinak, má-li M obojetnou podmnožinu $X \subset M$ s $X \neq \emptyset$, je nesouvislý.

[3] OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.
[4] anglicky *clopen*
[5] Různou od M a $\emptyset$.

Definice (Souvislá podmnožina)**:** Podmnožina $X \subset M$ je souvislá, je-li podprostor (X, d) souvislý. Pokud podprostor (X, d) souvislý není, je nesouvislá.

Definice (Trhání množiny)**:** Nechť (M, d) je metrický prostor a $X, A, B \subset M$. Řekneme, že množiny A a B trhají množinu X, pokud A a B jsou otevřené a platí všechna následující

- $X \subset A \cup B$
- $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$
- $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \emptyset$

Tvrzení: *Podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá množina v metrickém prostoru (M, d), právě když existují $A, B \subset M$, které ji trhají.*

1.8 Základní věta algebry

Věta (Základní věta algebry)**:** *Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy*

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j = 0$$

Věta (Souvislost intervalů)**:** *Každý interval $[a, b] \subset \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$, je souvislá množina.*

Věta (souvislost a spojitost)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení ze souvislé množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do metrického prostoru (N, e). Potom*

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in N\} \subset N$$

je souvislá množina.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

Tvrzení: *Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.*

Tvrzení (Druhá odmocnina v $\mathbb{C}$)**:** *$\forall a + bi \in \mathbb{C}$ máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech*

$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že $(c + di)^2 = a + bi$.

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n-té odmocniny v $\mathbb{C}$)**:** *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*

$$\forall u \in \mathbb{C}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: TODO $\square$

Tvrzení (Redukce na n-té odmocniny)**:** *Když $\mathbb{C}$ obsahuje všechny n-té odmocniny, pak platí Základní věta algebry a každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.*

1.9 Úplné množiny a metrické prostory

Definice (Cauchyova posloupnost)**:** Cauchyova posloupnost (a_n) splňuje, že

$$\forall \varepsilon\ \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Definice (Úplný metrický prostor)**:** Metrický prostor (M, d) je úplný, je-li každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset M$ konvergentní.

Definice (Úplná množina)**:** Množina $X \subset M$ je úplná, je-li podprostor (X, d) úplný.

Tvrzení (úplnost uzavřených podprostorů)**:** *V úplném metrickém prostoru (M, d) je každá uzavřená množina $X \subset M$ úplná.*

1.10 Baireova věta

Definice (Řídká a hustá množina)**:** Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je řídká(v M), pokud

$$\forall a \in M\ \forall r > 0\ \exists b \in M\ \exists s > 0 : B(b, s) \subset B(a, r) \wedge B(b, s) \cap X = \emptyset$$

Každá koule v (M, d) tedy obsahuje podkouli disjunktní s X. Podobně množina $Y \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je hustá(v M), pokud

$$\forall a \in M\ \forall r > 0 : B(a, r) \cap Y \neq \emptyset$$

Tvrzení (hustota a spojitost)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je hustá v M a*

$$f, g : M \to N$$

jsou taková spojitá zobrazení, že $f|X = g|X$[6] *Potom $f = g$.*

Definice (Uzavřená koule)**:** Pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ rozumíme v metrickém prostoru (M, d) uzavřenou koulí $\overline{B}(a, r)$ množinu

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Uzavřená koule je uzavřená množina a pro každé $a \in M$ a kladná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ t.ž. $r < s$ je $\overline{B}(a, r) \subset B(a, s)$.

Věta (Baireova)**:** *Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Pak některá množina X_n není řídká.

Důsledek (o úplném metrickém prostoru)**:** Každý úplný metrický prostor (M, d), který neobsahuje izolované body, je nespočetný.

2 Řady

2.1 Definice

Definice (Řada, konvergence a divergence řady)**:** Řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, které je přiřazena posloupnost částečných součtů

$$(s_n) := (a_1 + \cdots + a_n) \subset \mathbb{R}.$$

[6] Zúžení obou funkcí na množinu X se shodují.

Pokud posloupnost (s_n) má limitu, řekneme, že řada má součet. Je-li tato limita vlastní($\in \mathbb{R}$), pak řada konverguje, jinak(součet je $\pm\infty$ nebo neexistuje) diverguje. Součet řady se označuje stejným symbolem jako řada sama, takže také

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n).$$

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence)**:** *Když řada* $\sum a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Tvrzení (Harmonická řada)**:**

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

Tvrzení:

$$\sum \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n^2} = 1$$

Tvrzení (Geometrická řada)**:** *Pro každé* $q \in (-1, 1)$ *je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Tvrzení (Leibnizovo kritérium)**:** *Když* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *a* $\lim a_n = 0$*, pak řada* $\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ *konverguje.*

2.2 Fourierova řada funkce

Definice (Trigonometrická řada)**:** Trigonometrická řada je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde a_n, b_n jsou její koeficienty a $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.

Trigonometrická řada je fakticky parametrický systém řad parametrizovaný proměnnou x. Chceme odvodit vyjádření široké třídy funkcí $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, pomocí trigonometrických řad.

Definice (Skoro skalární součin)**:** Nechť $\mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je množina všech funkcí $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, které mají na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál. Pro $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg \in \mathbb{R}.^7$$

Pro tento skoro skalární součin platí následující

Tvrzení (Symetrie, nezápornost a linearita skoro skalárního součinu)**:**

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2. $\langle f, f \rangle = \geq 0$
3. $\langle af + bg, h \rangle = a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle$

ale

[7] Z teorie Riemannova integrálu plyne, že pokud $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$, pak i $fg \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$.

Tvrzení: *Ekvivalence* $\langle f, f\rangle = 0 \iff f \equiv 0$ *neplatí.*

Definice (2π-periodická funkce)**:** Funkce je 2π-periodická, když pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(x+2\pi) = f(x)$.

Tvrzení (Ortogonalita sinů a cosinů)**:** *Pro každá dvě celá čísla* $m, n \geq 0$ *je*

$$\langle \sin(mx), \cos(nx)\rangle = 0.$$

Pro každá dvě delá čísla $m, n \geq 0$*, kromě* $m = n = 0$*, je*

$$\langle \sin(mx), \sin(nx)\rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx)\rangle = \begin{cases} \pi & \dots \quad m = n \\ 0 & \dots \quad m \neq n. \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x), \sin(0x)\rangle = 0 \qquad a \qquad \langle \cos(0x), \cos(0x)\rangle = 2\pi.$$

Definice (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty)**:** Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx}, n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}, n = 1, 2, \dots$$

Definice (Fourierova řada funkce)**:** Fourierova řada funkce $f(\in \mathcal{R}(-\pi, \pi))$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

kde a_n a b_n jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$, v němž jsou „souřadnými osami“(prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v $\mathbb{R}^n$ se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

Věta (Besselova nerovnost)**:** *Pro Fourierovy koeficienty* a_n *a* b_n *funkce* $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ *platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Důkaz: TODO ☐

Tvrzení (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**:** *Pro každou funkci* $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ *je*[8]

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$

[8] Lze dokázat pomocí Besselovy nerovnosti.

Definice (Po částech hladká funkce)**:** Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, je po částech hladká, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b, k \in \mathbb{N},$$

intervalu $[a, b]$, že na každém intervalu $a_{i-1}, a_i, i = 1, 2, \ldots, k$, má spojitou derivaci f' a pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i - 0) := \lim_{x \to a_i^-} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x \to a_i^-} f'(x)$$

a pro každé $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i + 0) := \lim_{x \to a_i^+} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x \to a_i^+} f'(x)$$

Po částech hladká funkce tedy může být v několika bodech intervalu $[a, b]$ nespojitá, ale v bodech nespojitosti má vlastní jednostranné limity a má v nich definované jednostranné nesvislé tečny.

Tvrzení (O Dirichletově jádře)**:** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a*

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos(x) + cos(2x) + \cdots + \cos(nx).$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R} \backslash \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ máme

$$J_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

také

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} J_n(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} J_n(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

Věta (Dirichletova)**:** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková 2π-periodická funkce, že její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Pak její Fourierova řada $F_f(x)$ má pro každé $a \in \mathbb{R}$ součet*

$$F_f(a) = \frac{f(a + 0) + f(a - 0)}{2} = \frac{\lim_{x \to a_i^+} f(x) + \lim_{x \to a_i^-} f(x)}{2}$$

V každém bodu spojitosti $a \in \mathbb{R}$ funkce $f(x)$ tedy její Fourierova řada má součet rovný funkční hodnotě, $F_f(a) = f(a)$.

Definice (Hladká funkce)**:** Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je hladká, když má na intervalu (a, b) spojitou derivaci f' a v krajních bodech a a b mají $f(x)$ a $f'(x)$ vlastní jednostranné limity.

Důsledek (O hladké funkci)**:** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická a spojitá funkce, jejíž zůžení na interval $[-\pi, \pi]$ je hladké. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$F_f(a) = f(a).$$

Spojitá a hladká funkce se tedy rovná součtu své Fourierovy řady.

2.3 Basilejský problém

Příklad (Basilejský problém)**:** TODO

2.4 Divergentní řady

Řadě $\sum a_n$, to jest posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, lze přiřadit její „součet“ i mnoha jinými způsoby, než jen jako limitu

$$\lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$$

posloupnosti částečných součtů. Jako ilustrace jsou uvedeny dvě sumační metody.

Fakt (Abelovský součet)**:**

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ „=“ } s.$$

Fakt (Cesàrovský součet)**:**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ „=“ } s$$

2.5 Konvergence řad

2.5.1 Absolutní konvergence

Definice (Absolutní konvergence)**:** Řekneme, že řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje(je to absolutně konvergentní řada), pokud konverguje řada $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Definice (Obecná absolutní konvergence)**:** Nechť A je nekonečná spočetná množina.
Pak řadou $\sum_{x \in A} a_x$(na A) budeme rozumět každou funkci $a : A \to \mathbb{R}$, kde pro $x \in A$ místo $a(x)$ stále píšeme a_x. Řekneme, že tato řada je obecná absolutně konvergentní řada, když

$$\exists c > 0 \, \forall \text{ konečnou množinu } B \subset A : \sum_{x \in B} |a_x| < c$$

Věta (O absolutně konvergentních řadách)**:** *Nechť $\sum_{x \in A} a_x$ je řada an A. Pak $\sum_{x \in A} a_x$ je obecná absolutně konvergentní řada, právě když pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \to A$ je klasická řada*

$$B(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\pi)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b := a_{\pi(n)},$$

absolutně konvergentní řada. Všechny řady $B(\pi)$ jsou pak absolutně konvergentní a mají týž součet, nezávislý na bijekci π.

Definice (Součet obecné absolutně konvergentní řady)**:** Pro obecnou absolutně konvergentní řadu $\sum_{x \in A} a_x$ tak definujeme její součet jako součet $\sum b_n$ řady $\sum b_n$ s $b_n := a_{\pi(n)}$ pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \to A$.

Definice (Součin řad)**:** Buďte $\sum_{x \in A} a_x$ a $\sum_{x \in B} b_x$ dvě obecné řady. Jejich součin, či součinová řada, je řada

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} a_x b_x.$$

Věta (Součin absolutně konvergentních řad)**:** *Nechť $\sum_{x \in A} a_x$ a $\sum_{x \in B} b_x$ jsou obecné absolutně konvergentní řady se součty*

$$r := \sum_{x \in A} a_x \in \mathbb{R} \quad a \quad \sum_{y \in B} b_y \in \mathbb{R}.$$

Pak i jejich součin je obecná absolutně konvergentní řada, která má součet rs.

Tvrzení (Exponenciála)**:** *Pro $x \in \mathbb{R}$ nechť*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí identita

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Tvrzení (Prvočísel je ∞ mnoho)**:** *Množina prvočísel*

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

je nekonečná.

2.5.2 Stejnoměrná konvergence

2.6 Mocninné řady

2.7 Funkční řady

3 Komplexní analýza

3.1 Holomorfní funkce

3.2 Póly funkcí

3.3 Aplikace

4 Úvod do diferenciálních rovnic

4.1 Rovnice se separovanými proměnými

4.2 Lineární rovnice

4.3 Věta o existenci

The End