Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak

Verze 0.7
14. června 2023

Tyto poznámky jsem sepsal pro přípravu na zkoušku z přednášek pana doc. Klazara. Neprošly zatím žádnou korekcí, budou tedy pravděpodobně obsahovat mnoho chyb. Pokud v poznámkách najdete chybu, nebo pokud budete mít nějakou připomínku k tomu, jak jsou psané, kontaktujte mě prosím na Discordu, nebo mi dejte pull-request na `https://github.com/3011/ma3-poznamky`. Ke většině vět jsem vynechal důkazy, psal jsem je téměř výhradně k větám/tvrzením, která spadají k otázkám vypsaným ke zkoušce.

Obsah

1 Metrické prostory

1.1 Definice

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor)**:** Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d'), tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d). Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d).

Definice (Izometrie)**:** Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \to N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f, prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

1.2 Euklidovský prostor, Sférická metrika

Příklad (Euklidovský prostor)**:** Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, e_n), n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\overline{x}, \overline{y}$[1] $\in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n), když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \ldots \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \ldots \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřimkami procházejícími počátkem $\overline{0}$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: *(S, s) je metrický prostor.*

Definice ((Horní) hemisféra)**:** (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

[1] $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

Tvrzení: *Když $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ jsou různé body z Euklidovském prostoru se vzdálenostmi $e_n(c,a) = e_n(c,b) = \frac{1}{2}e_n(a,b)$, pak c je středem úsečky ab.*

Věta (H není plochá)**:** *Metrický prostor (H,s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X,e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

Důkaz: Následující vlastnost vzdáleností daných čtyřmi body t, u, v a w v Euklidovském prostoru $(\mathbb{R}^n, e_n)$ není splňena v (H,s):

$$e_n(t,u) = e_n(t,v) = e_n(u,v) > 0 \wedge e_n(t,w) = e_n(w,u) = \frac{1}{2}e_n(t,u) \Rightarrow e_n(w,v) = \frac{\sqrt{3}}{2}e_n(t,v)\ (< e_n(t,v)).$$

Podle předpokladu implikace body t, u a v tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky $x > 0$ a w má od t i u vzdálenost $\frac{x}{2}$. Podle předchozího tvrzení je pak w středem úsečky tu. Tyto čtyři body jsou tedy koplanární(leží v jedné rovině) a úsečka vw je výčka spoštěná z vrcholu v rovnostranného trojúhélníka tuv na stranu tu. Podle Pythagorovy věty se její délka $e_2(v,w) = e_n(v,w)$ rovná $\frac{\sqrt{3}}{2}x$, což říká závěr implikace.

Na hemisféře (H,s) nalezneme čtyři různé body t, u, v a w splňující předpoklad předchozí implikace, ale ne její závěr. Z toho plyne, že izometrie mezi hemisférou a Euklidovským prostorem neexistuje, protože každá izometrie ze své definice implikaci zachovává. Tyto body jsou

$$t = (1,0,0), u = (0,1,0), v = (0,0,1) \text{ a } w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Patrně $s(t,u) = s(t,v) = s(u,v) = \frac{\pi}{2}$ a $s(t,w) = s(w,u) = \frac{1}{2}s(t,u) = \frac{\pi}{4}$. Bod v je „severní pól" $(x_3 = 0)$ a w je střed oblouku tu. Ale všechny body na rovníku mají od pólu vzdálenost $\frac{\pi}{2}$. Takže $s(w,v) = s(t,v)$ a závěr implikace neplatí. $\square$

Definice (Ultrametrika)**:** Metrika d v metrickém prostoru (M,d) je ultrametrika(nearchimédovká metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$$

Protože $\max(d(x,z), d(z,y)) \leq d(x,z) + d(z,y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru)**:** *V ultrametrickém prostoru (M,d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule)**:** (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M,d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a,r) := \{x \in M \mid d(x,a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a,r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a,r)$.

1.3 p-adické metriky

Definice (p-adický řád)**:** Nechť $p \in \{2,3,5,7,11,\dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p-adický řád čísla n definujeme

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

[2]. $|$ · značí relaci dělitelnosti.

Poznámka (Rozšíření $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ na zlomky)**:** Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (aditivita $\mathrm{ord}_p(\cdot)$)**:** *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : ord_p(\alpha\beta) = ord_p(\alpha) + ord_p(\beta)$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (\infty) := +\infty$*, pro každé* $n \in \mathbb{Z}$.

Definice (p-adická norma)**:** Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0,1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Tvrzení (multiplikativita $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé* p *a každé dva zlomky* α, β*(a každé* $c \in (0,1)$*) je*

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p |\beta|_p$$

Definice (Normované těleso)**:** Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso vybavené normou $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

Tvrzení: *Pro každé normované těleso* $(F, |\cdot|_F)$ *je funkce* $d(x,y) := |x - y|_F$ *metrika na* F*. Pokud* $|\cdot|_F$ *splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je* d *ultrametrika.*

Tvrzení (o $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé prvočíslo* p *a každé* $c \in (0,1)$ *je* $\mathbb{Q}, |\cdot|_p$ *normované těleso. Příslušný metrický prostor* $(\mathbb{Q}, d)$*(s* $d(x,y) := |x - y|_F$*) je ultrametrický prostor.*

Definice (Triviální norma)**:** Triviální norma na libovolném tělese F je funkce $||\cdot||$ s $||0_F|| = 0$ a $||x|| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Tvrzení (Mocnění obvyklé absolutní hodnoty)**:** *Pro* $c > 0$ *je* $|\cdot|^c$ *norma(na* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *a* $\mathbb{C}$*), právě když* $c \leq 1$.

Definice (Kanonická p-adická norma)**:** Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p-adická norma $||\cdot||_p$ definovaná jako

$$||\alpha||_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p-adické normě $||\cdot||_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Tvrzení: *Nechť* $\|\cdot\|$ *je netriviální norma na tělese* $\mathbb{Q}$*. Potom* $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \|n\| \neq 1$.

Tvrzení: *Pro každá dvě nesoudělná* $a, b \in \mathbb{Z}$ *existují čísla* $c, d \in \mathbb{Z}$*, že*

$$ac + bd = 1$$

Věta (A. Ostrowski)**:** *Nechť* $||\cdot||$ *je norma na tělese racionálních čísel* $\mathbb{Q}$*. Pak nastává jedna ze tří následujících možností.*

1. Je to triviální norma.

2. Existuje reálné $c \in (0,1]$ takové, že $||x|| = |x|^c$.

3. Existuje reálné $c \in (0,1)$ a prvočíslo p, že $||x|| = |x|_p = c^{ord_p(x)}$(kde $c^\infty := 0$).

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: Nechť $\|\cdot\|$ je netriviální. Pak díky prvnímu z pomocných tvrzení existuje $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, že $\|n\| \neq 1$. Máme dva případy.

1. **Existuje** $n \in \mathbb{N}$**, že** $\|n\| > 1$. Jako n_0 označíme nejmenší takové n. Patrně $n_0 \geq 2$ a

$$1 \leq m < n_0 \Rightarrow \|m\| \leq 1.$$

Existuje jednoznačné reálné číslo $c > 0$, že

$$\|n_0\| = n_0^c.$$

Každé $n \in \mathbb{N}$ lze při základu n_0 zapsat jako

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s, \text{ kde } a_i, s \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_i < n_0 \text{ a } a_s \neq 0.$$

Pro $n_0 = 10$ jde o obvyklý zápis v desítkové soustavě. Takže

$$\begin{aligned}
\|n\| &= \left\|a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s\right\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{s} \|a_j\| \cdot \|n_0\|^j \\
&\leq \sum_{j=0}^{s} n_0^{js} \leq n_0^{sc} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i \\
&\leq n^c C, \quad \text{kde } C := \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i
\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \leq C n^c.$$

Tato nerovnost ve skutečnosti platí dokonce s $C = 1$. PRo každé $m, n \in \mathbb{N}$ multiplikativita normy a předchozí nerovnost dávají

$$\|n\|^m = \|n^m\| \leq C(n^m)^c = C(n^c)^m.$$

Vezmeme-li zde m-tou odmocninu, dostaneme $\|n\| \leq C^{\frac{1}{m}} n^c$. Pro $m \to \infty$ máme $C^{\frac{1}{m}} \to 1$. Takže skutečně

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \leq n^c.$$

Nyní podobně odvodíme opačnou nerovnost $\|n\| \geq n^c, n \in \mathbb{N}_0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ hořejší zápis čísla n při základu n_0 dává

$$n_0^{s+1} > n \geq n_0^s.$$

Podle Δ-ové nerovnosti máme

$$\|n_0\|^{s+1} = \left\|n_0^{s+1}\right\| \leq \|n\| + \left\|n_0^{s+1} - n\right\|.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\|n\| &\geq \|n_0\|^{s+1} - \left\|n_0^{s+1} - n\right\| \geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n)^c \\ &\geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^c = n_0^{(s+1)c}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c\right) \\ &\geq n^c C', \text{ kde } C' := 1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c > 0.\end{aligned}$$

Trik s m-tou odmocninou opět dává

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \geq n^c$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| = n^c.$$

Z multiplikativity normy dostáváme $\|x\| = |x|^c$ pro každý zlomek $x \in \mathbb{Q}$. Podle tvrzení výše je $c \in (0, 1]$. Odvodili jsme, že platí případ 2 Ostrowskiho věty.

2. **Zbývá případ, kdy pro každé** $n \in \mathbb{N}$ **je** $\|n\| \leq 1$ **a existuje** $n \in \mathbb{N}$**, že** $\|n\| < 1$**.** Nechť n_0 je nejmenší takové n, opět $n_0 \geq 2$. Tvrdíme, že $n_0 = p$ je prvočíslo. Kdyby totiž n_0 mělo rozklad $n_0 = n_1 n_2$ s $n_i \in \mathbb{Z}$ a $1 < n_1, n_2 < n_0$, dostali bychom spor

$$1 > \|n_0\| = \|n_1 n_2\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1 \cdot 1 = 1,$$

kde jsme použili multiplikativitu normy a to, že $\|m\| = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ s $1 \leq m < n_0$. Ukážeme, že každé jiné prvočíslo $q \neq p$ má normu $\|q\| = 1$. Pro spor nechť $q \neq p$ je další prvočíslo s normou $\|q\| < 1$. Vezmeme tak velké $m \in \mathbb{N}$, že $\|p\|^m, \|q\|^m < \frac{1}{2}$. Podle známého výsledku v elementární teorii čísel výše existují celá čísla a a b, že $aq^m + bp^m = 1$. Znormování této rovnosti dává spor

$$1 = \|1\| = \|aq^m + bp^m\| \leq \|a\| \cdot \|q\|^m + \|b\| \cdot \|p\|^m < 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Zde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost, multiplikativitu normy a to, že nyní $\|a\| \leq 1$ pro každé $a \in \mathbb{Z}$.

Tedy $\|q\| = 1$ pro každé prvočíslo q různé od p. Odtud pomocí multiplikativity normt a rozkladu nenulového zlomku x na součin mocnin prvočísel dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\| \prod_{q=2,3,5,\ldots} q^{\mathrm{ord}_q(x)} \right\| = \prod_{q=2,3,5,\ldots} \left\| q^{\mathrm{ord}_q(x)} \right\| = \|p\|^{\mathrm{ord}_p(x)} \\ &= c^{\mathrm{ord}_p(x)} \text{ kde } c := \|p\| \in (0, 1).\end{aligned}$$

Též $\|0\| = c^{\mathrm{ord}_p(0)} = c^\infty = 0$. Dostali jsme případ 3 Ostrowskiho věty.

□

1.4 Kompaktnost množin v metrických prostorech

Poznámka (Konvence)**:** $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ jsou reálná čísla a $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Limitu píšeme jako $\lim a_n = a$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definice (Limita)**:** Nechť je (M, d) metrický prostor, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. (a_n) má limitu v (M, d), pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

.

Definice (Konvergence, Divergence)**:** Pokud má (a_n) limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

Definice (Kompaktní metrický prostor)**:** Buď (M, d) metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že X je kompaktní, pokud

$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n\to\infty} a_{m_n} = a.$$

Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X. Metrický prostor (M, d) je kompaktní, pokud M je kompaktní.

Definice (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory)**:** Buďte (M, d) a (N, e) metrické prostory a buď $f : M \to N$ zobrazení mezi nimi. f je spojité v $a \in M$, pokud

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Zobrazení f je spojité, pokud je spojité v každém bodě $a \in M$.

Věta (Princip maxima)**:** *Nechť (M, d) je metrický prostor,*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

je funkce z M do reálné osy a $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina. Pak

$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší hodnotu $f(a)$ a největší hodnotu $f(b)$.

Definice (Součin metrických prostorů)**:** Pro metrické prostory (M, d) a (N, e) definujeme jejich součin $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ je na něm dána jako

$$(d \times e)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + e(a_2, b_2)^2}$$

Definice (Otevřená množina)**:** Množina $X \in M$ v metrickém prostoru (M, d) je otevřená, pokud

$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a, r) \subset X.$$

Definice (Uzavřená množina)**:** Množina X je uzavřená, pokud $M \backslash X$ je otevřená.

Definice (Omezená množina)**:** Množina X je omezená, pokud

$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a, r)$$

Definice (Diametr)**:** Diametr(průměr) množiny X je s $V := \{d(a, b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \ldots \text{ množina} V \text{je shora omezená} \\ +\infty & \ldots \text{ množina} V \text{není shora omezená} \end{cases}$$

Věta (Kompaktní $\Rightarrow$ uzavřená a omezená, součin)**:** *Platí následující:*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d), pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*

2. *Jsou-li (M, d) a (N, e) dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní metrický prostor.*

Věta (Kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$)**:** *V každém Euklidovském metrickém prostoru $(\mathbb{R}^n, e_n)$ je množina $X \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

1.5 Topologická spojitost

Tvrzení (Topologická spojitost)**:** *Nechť $f : M \to N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e). prostorem*

$$f \textit{ je spojité} \iff \forall \textit{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \textit{ je OM.}^3$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Topologická spojitost pro podprostory)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná množina a $f : X \to N$. prostorem*

$$f \textit{ je spojité zobrazení definované na } (X, d) \iff \forall \textit{ OM } A \subset N : \exists \textit{ OM } B \subset M : f^{-1}[A] = X \cap B.$$

Topologickou definici spojitosti jsme rozšířili na podprostory.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina a*

$$f : X \to N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení z neprázdné kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do (N, e). Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \to X$$

je spojité.

Definice (Homeomorfismus)**:** Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M, d) a (N, e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.

1.6 Heine-Borelova věta

Definice (Topologická kompaktnost)**:** Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova)**:** *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme vzít $A = M$.

- **Implikace $\Rightarrow$:**
  Nechť (M, d) je kompaktní metrický prostor a

  $$M = \bigcup_{i \in I} X_i$$

  je jeho otevřené pokrytí, takže každá množina X_i je otevřená. Nalezneme jeho konečné podpokrytí. Nejprve dokážeme, že

  $$\forall \delta > 0 \, \exists \text{ konečná množina } S_\delta \subset M : \bigcup_{a \in S_\delta} B(a, \delta) = M.$$

[3] OM zkracuje sousloví „otevřená množina".

Kdyby to tak nebylo, pak by existovalo $\delta_0 > 0$ a posloupnost $(a_n) \subset M$, že $m < n \Rightarrow d(a_m, a_n) \geq \delta_0$ — ve sporu s předpokládanou kompaktností množiny M tato posloupnost nemá konvergentní podposloupnost. Skutečně, kdyby(negujeme hořejší tvrzení o δ a S_δ) existovalo $\delta_0 > 0$, že pro každou konečnou množinu $S \subset M$ je

$$M \setminus \bigcup_{a \in S} B(a, \delta_0) \neq \emptyset,$$

pak — máme-li již definované body $a_1, a_2, \dots, a_n$ s $d(a_i, a_j) \geq \delta_0$ pro každé $1 \leq i < j \leq n$ — vezmeme $a_{n+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \delta_0)$ a a_{n+1} má od každého bodu $a_1, a_2, \dots, a_n$ vzdálenost alespoň δ_0. Tak definujeme celou posloupnost (a_n).

Pro spor nyní předpokládejme, že hořejší otevřené pokrytí množiny M množinami X_i nemá konečné podpokrytí. Tvrdíme, že odtud vyplývá, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists b_n \in S_{\frac{1}{n}}\, \forall i \in I : B\left(b_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset X_i.$$

Kdyby to tak nebylo, pak(negujeme předchozí tvrzení) by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $b \in S_{\frac{1}{n_0}}$ existuje $i_b \in I$, že $B\left(b, \frac{1}{n_0}\right) \subset X_{i_b}$. Pak ale, protože $M = \bigcup_{b \in S_{\frac{1}{n_0}}} B\left(b, \frac{1}{n_0}\right)$, dávají indexy $J = \{i_b \mid b \in S_{\frac{1}{n_0}}\} \subset I$ ve sporu s předpokladem konečné podpokrytí množiny M.

Na samostatném řádku uvedené tvrzení o n a b_n tak platí a lze vzít posloupnost $(b_n) \subset M$. Podle předpokladu má konvergentní podposloupnost b_{k_n} s $b := \lim b_{k_n} \in M$. Protože X_i pokrývají M, existuje $j \in I$, že $b \in X_j$. Díky otevřenosti X_i existuje $r > 0$, že $B(b, r) \subset X_j$. Vezmeme tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{k_n} < \frac{r}{2}$ a $d(b, b_{k_n}) < \frac{r}{2}$. Pro každé $x \in B\left(b_{k_n}, \frac{1}{k_n}\right)$ pak podle Δ-ové nerovnosti máme, že $d(x, b) \leq d(x, b_{k_n}) + d(b_{k_n}, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Tedy

$$B\left(b_{k_n}, \frac{1}{k_n}\right) \subset B(b, r) \subset X_j,$$

ve sporu s hořejší vlastností bodů b_n. Předpoklad, že konečné podpokrytí neexistuje, vede ke sporu. Proto pokrytí M množinami $X_i, i \in I$, má konečné podpokrytí.

- **Implikace $\Leftarrow$:**
Předpokládáme, že každé otevřené pokrytí množiny M má konečné podpokrytí a odvodíme z toho, že každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost. Nejprve ukážeme, že předpoklad
$$\forall b \in M\, \exists r_b > 0 : M_b := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r_0)\} \text{ je konečná}$$
vede ke sporu. Z pokrytí $M = \bigcup_{b \in M} B(b, r_b)$ bychom totiž vybrali konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$ a nahlédli, že existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \notin \bigcup_{b \in N} B(b, r_b)$, protože množina indexů $\bigcup_{b \in N} M_b$ je konečná (konečné sjednocení konečných množin). To je spor, protože $\bigcup_{b \in N} B(b, r_b) = M$. Předpoklad tedy neplatí a naopak je pravda, že
$$\exists b \in M\, r > 0 : M_r := \{n \in N \mid a_n \in B(b, r)\} \text{ je nekonečná.}$$
Teď už lehce z (a_n) vybereme konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) a limitou b. Nechť už jsme definovali indexy $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, že $d(b, a_{k_i}) < \frac{1}{i}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Množina indexů $M_{\frac{1}{n+1}}$ je nekonečná, takže můžeme zvolit takové $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, že $k_{n+1} > k_n$ a $k_{n+1} \in M_{\frac{1}{n+1}}$. Pak i $d(b, a_{k_{n+1}}) < \frac{1}{n+1}$. Takto je definována posloupnost (a_{k_n}) konvergující k b.

$\square$

1.7 Souvislé množiny a metrické prostory

Definice (Obojetná množina)**:** Podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je obojetná[4], je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny $\emptyset$ a M.

Definice (Souvislý prostor)**:** Prostor (M, d) je souvislý, pokud v něm neexistuje netriviální[5] obojetná podmnožina. Jinak, má-li M obojetnou podmnožinu $X \subset M$ s $X \neq \emptyset$, je nesouvislý.

Definice (Souvislá podmnožina)**:** Podmnožina $X \subset M$ je souvislá, je-li podprostor (X, d) souvislý. Pokud podprostor (X, d) souvislý není, je nesouvislá.

Definice (Trhání množiny)**:** Nechť (M, d) je metrický prostor a $X, A, B \subset M$. Řekneme, že množiny A a B trhají množinu X, pokud A a B jsou otevřené a platí všechna následující

- $X \subset A \cup B$
- $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$
- $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \emptyset$

Tvrzení: *Podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá množina v metrickém prostoru (M, d), právě když existují $A, B \subset M$, které ji trhají.*

1.8 Základní věta algebry

Věta (Základní věta algebry)**:** *Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy*

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j = 0$$

Věta (Souvislost intervalů)**:** *Každý interval $[a, b] \subset \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$, je souvislá množina.*

Věta (souvislost a spojitost)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení ze souvislé množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do metrického prostoru (N, e). Potom*

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in N\} \subset N$$

je souvislá množina.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

Tvrzení: *Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.*

Tvrzení (Druhá odmocnina v $\mathbb{C}$)**:** *$\forall a + bi \in \mathbb{C}$ máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech*

$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že $(c + di)^2 = a + bi$.

[4] anglicky *clopen*
[5] Různou od M a $\emptyset$.

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n-té odmocniny v $\mathbb{C}$)**:** *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*

$$\forall u \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: Předpokládáme, že $u \in S$ a že $n \in \mathbb{N}$ je liché. Potřebujeme dokázat, že zobrazení

$$f(z) = z^n : S \to S,$$

které je zřejmě spojité, je na. Pro spor předpokládejme, že existuje číslo

$$w \in S \backslash f[S]$$

to jest w nemá n-tou odmocninu. Vzhledem k lichosti ni $-w \in S\backslash f[S]$, protože vždy $f(-z) = -f(z)$. Body w a $-w$ vedeme přímku $\ell \subset \mathbb{C}$. Pak máme rozklad

$$\mathbb{C} = A \cup \ell \cup B$$

kde A a B jsou otevřené poloroviny určené přímkou ℓ. Máme: $(A \cup B) \cap S = S\backslash\{w, -w\}, \{1, -1\} \subset f[S] \cap (A \cup B)$ a $\mid A\cap \{1, -1\} \mid= 1$. Množiny A a B tedy trhají množinu $f[S]$ a ta je nesouvislá. To je ale spor s větou o souvislosti a spojitosti, protože $f[S]$ je obraz souvislé množiny S (její souvislost jsme zdůvodnili) spojitou funkcí f a je tedy souvislá. $\square$

Tvrzení (Redukce na n-té odmocniny)**:** *Když $\mathbb{C}$ obsahuje všechny n-té odmocniny, pak platí Základní věta algebry a každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.*

1.9 Úplné množiny a metrické prostory

Definice (Cauchyova posloupnost)**:** Cauchyova posloupnost (a_n) splňuje, že

$$\forall \varepsilon\ \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Definice (Úplný metrický prostor)**:** Metrický prostor (M, d) je úplný, je-li každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset M$ konvergentní.

Definice (Úplná množina)**:** Množina $X \subset M$ je úplná, je-li podprostor (X, d) úplný.

Tvrzení (úplnost uzavřených podprostorů)**:** *V úplném metrickém prostoru (M, d) je každá uzavřená množina $X \subset M$ úplná.*

1.10 Baireova věta

Definice (Řídká a hustá množina)**:** Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je řídká(v M), pokud

$$\forall a \in M\ \forall r > 0\ \exists b \in M\ \exists s > 0 : B(b, s) \subset B(a, r) \wedge B(b, s) \cap X = \emptyset$$

Každá koule v (M, d) tedy obsahuje podkouli disjunktní s X. Podobně množina $Y \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je hustá(v M), pokud

$$\forall a \in M\ \forall r > 0 : B(a, r) \cap Y \neq \emptyset$$

Tvrzení (hustota a spojitost)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je hustá v M a*

$$f, g : M \to N$$

jsou taková spojitá zobrazení, že $f|X = g|X$[6] *Potom $f = g$.*

[6] Zúžení obou funkcí na množinu X se shodují.

Definice (Uzavřená koule)**:** Pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ rozumíme v metrickém prostoru (M, d) uzavřenou koulí $\overline{B}(a, r)$ množinu

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Uzavřená koule je uzavřená množina a pro každé $a \in M$ a kladná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ t.ž. $r < s$ je $\overline{B}(a, r) \subset B(a, s)$.

Věta (Baireova)**:** *Nechť* (M, d) *je úplný metrický prostor a*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Pak některá množina X_n *není řídká.*

Důsledek (o úplném metrickém prostoru)**:** Každý úplný metrický prostor (M, d), který neobsahuje izolované body, je nespočetný.

2 Řady

2.1 Definice

Definice (Řada, konvergence a divergence řady)**:** Řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, které je přiřazena posloupnost částečných součtů

$$(s_n) := (a_1 + \cdots + a_n) \subset \mathbb{R}.$$

Pokud posloupnost (s_n) má limitu, řekneme, že řada má součet. Je-li tato limita vlastní($\in \mathbb{R}$), pak řada konverguje, jinak(součet je $\pm\infty$ nebo neexistuje) diverguje. Součet řady se označuje stejným symbolem jako řada sama, takže také

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n).$$

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence)**:** *Když řada* $\sum a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Tvrzení (Harmonická řada)**:**

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

Tvrzení:

$$\sum \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n^2} = 1$$

Tvrzení (Geometrická řada)**:** *Pro každé* $q \in (-1, 1)$ *je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Tvrzení (Leibnizovo kritérium)**:** *Když* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *a* $\lim a_n = 0$, *pak řada* $\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ *konverguje.*

2.2 Fourierova řada funkce

Definice (Trigonometrická řada)**:** Trigonometrická řada je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde a_n, b_n jsou její koeficienty a $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.

Trigonometrická řada je fakticky parametrický systém řad parametrizovaný proměnnou x. Chceme odvodit vyjádření široké třídy funkcí $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, pomocí trigonometrických řad.

Definice (Skoro skalární součin)**:** Nechť $\mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je množina všech funkcí $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, které mají na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál. Pro $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg \in \mathbb{R}.^7$$

Pro tento skoro skalární součin platí následující

Tvrzení (Symetrie, nezápornost a linearita skoro skalárního součinu)**:**

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2. $\langle f, f \rangle =\geq 0$
3. $\langle af + bg, h \rangle = a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle$

ale

Tvrzení: *Ekvivalence* $\langle f, f \rangle = 0 \iff f \equiv 0$ *neplatí.*

Definice (2π-periodická funkce)**:** Funkce je 2π-periodická, když pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Tvrzení (Ortogonalita sinů a cosinů)**:** *Pro každá dvě celá čísla* $m, n \geq 0$ *je*

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$$

Pro každá dvě delá čísla $m, n \geq 0$, *kromě* $m = n = 0$, *je*

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \dots \quad m = n \\ 0 & \dots \quad m \neq n. \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi.$$

Definice (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty)**:** Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{dx}, n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{dx}, n = 1, 2, \dots$$

[7] Z teorie Riemannova integrálu plyne, že pokud $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$, pak i $fg \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$.

Definice (Fourierova řada funkce)**:** Fourierova řada funkce $f(\in \mathcal{R}(-\pi,\pi))$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

kde a_n a b_n jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$, v němž jsou „souřadnými osami“(prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v $\mathbb{R}^n$ se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

Věta (Besselova nerovnost)**:** *Pro Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in \mathcal{R}(-\pi,\pi)$ platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{\langle f, f\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Důkaz: TODO □

Tvrzení (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**:** *Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi,\pi)$ je*[8]

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$

Definice (Po částech hladká funkce)**:** Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, je po částech hladká, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b, k \in \mathbb{N},$$

intervalu $[a,b]$, že na každém intervalu $a_{i-1}, a_i, i = 1,2,\ldots,k$, má spojitou derivaci f' a pro každé $i = 1,2,\ldots,k$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i - 0) := \lim_{x\to a_i^-} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x\to a_i^-} f'(x)$$

a pro každé $i = 0,1,\ldots,k-1$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i + 0) := \lim_{x\to a_i^+} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x\to a_i^+} f'(x)$$

Po částech hladká funkce tedy může být v několika bodech intervalu $[a,b]$ nespojitá, ale v bodech nespojitosti má vlastní jednostranné limity a má v nich definované jednostranné nesvislé tečny.

Tvrzení (O Dirichletově jádře)**:** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a*

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos(x) + cos(2x) + \cdots + \cos(nx).$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ máme

$$J_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

také

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} J_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} J_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

[8] Lze dokázat pomocí Besselovy nerovnosti.

Věta (Dirichletova)**:** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková 2π-periodická funkce, že její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Pak její Fourierova řada $F_f(x)$ má pro každé $a \in \mathbb{R}$ součet*

$$F_f(a) = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2} = \frac{\lim_{x \to a_i^+} f(x) + \lim_{x \to a_i^-} f(x)}{2}$$

V každém bodu spojitosti $a \in \mathbb{R}$ funkce $f(x)$ tedy její Fourierova řada má součet rovný funkční hodnotě, $F_f(a) = f(a)$.

Definice (Hladká funkce)**:** Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je hladká, když má na intervalu (a, b) spojitou derivaci f' a v krajních bodech a a b mají $f(x)$ a $f'(x)$ vlastní jednostranné limity.

Důsledek (O hladké funkci)**:** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická a spojitá funkce, jejíž zůžení na interval $[-\pi, \pi]$ je hladké. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$F_f(a) = f(a).$$

Spojitá a hladká funkce se tedy rovná součtu své Fourierovy řady.

2.3 Basilejský problém

Příklad (Basilejský problém)**:** TODO

2.4 Divergentní řady

Řadě $\sum a_n$, to jest posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, lze přiřadit její „součet“ i mnoha jinými způsoby, než jen jako limitu

$$\lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$$

posloupnosti částečných součtů. Jako ilustrace jsou uvedeny dvě sumační metody.

Fakt (Abelovský součet)**:**

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ „=“ } s.$$

Fakt (Cesàrovský součet)**:**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ „=“ } s$$

2.5 Konvergence řad

2.5.1 Absolutní konvergence

Definice (Absolutní konvergence)**:** Řekneme, že řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje(je to absolutně konvergentní řada), pokud konverguje řada $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Definice (Obecná absolutní konvergence)**:** Nechť A je nekonečná spočetná množina.
Pak řadou $\sum_{x \in A} a_x$(na A) budeme rozumět každou funkci $a : A \to \mathbb{R}$, kde pro $x \in A$ místo $a(x)$ stále píšeme a_x. Řekneme, že tato řada je obecná absolutně konvergentní řada, když

$$\exists c > 0 \, \forall \text{ konečnou množinu } B \subset A : \sum_{x \in B} |a_x| < c$$

Věta (O absolutně konvergentních řadách)**:** *Nechť* $\sum_{x\in A} a_x$ *je řada an* A. *Pak* $\sum_{x\in A} a_x$ *je obecná absolutně konvergentní řada, právě když pro libovolnou bijekci* $\pi : \mathbb{N} \to A$ *je klasická řada*

$$B(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\pi)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b := a_{\pi(n)},$$

absolutně konvergentní řada. Všechny řady $B(\pi)$ *jsou pak absolutně konvergentní a mají týž součet, nezávislý na bijekci* π.

Definice (Součet obecné absolutně konvergentní řady)**:** Pro obecnou absolutně konvergentní řadu $\sum_{x\in A} a_x$ tak definujeme její součet jako součet $\sum b_n$ řady $\sum b_n$ s $b_n := a_{\pi(n)}$ pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \to A$.

Definice (Součin řad)**:** Buďte $\sum_{x\in A} a_x$ a $\sum_{x\in B} b_x$ dvě obecné řady. Jejich součin, či součinová řada, je řada

$$\sum_{(a,b)\in A\times B} a_x b_x.$$

Věta (Součin absolutně konvergentních řad)**:** *Nechť* $\sum_{x\in A} a_x$ *a* $\sum_{x\in B} b_x$ *jsou obecné absolutně konvergentní řady se součty*

$$r := \sum_{x\in A} a_x \in \mathbb{R} \quad a \quad \sum_{y\in B} b_y \in \mathbb{R}.$$

Pak i jejich součin je obecná absolutně konvergentní řada, která má součet rs.

Tvrzení (Exponenciála)**:** *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *nechť*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ *platí identita*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Tvrzení (Prvočísel je ∞ mnoho)**:** *Množina prvočísel*

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

je nekonečná.

2.5.2 Stejnoměrná a bodová konvergence

Definice (Stejnoměrná konvergence)**:** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $f_n : M \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ jsou na ní definované funkce. Řekneme, že f_n konvergují (na M) stejnoměrně k f, symbolicky

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M)$$

když ($\varepsilon > 0$)

$$\forall \varepsilon\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall x \in M : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice (Bodová konvergence)**:** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $f_n : M \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ jsou na ní definované funkce. Pokud

$$\forall \varepsilon\ \forall x \in M\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

řekneme, že f_n konvergují (na M) k f bodově, symbolicky

$$f_n \to f \quad (\text{na } M)$$

Jinými slovy, $\forall x \in M : \lim f_n(x) = f(x)$. Stejnoměrná konvergence implikuje bodovou, ale ne naopak.

Definice (Supremová norma)**:** Pro funkci $f : M \to \mathbb{R}$ definujeme její supremovou normu $\|f\|_\infty$ jako

$$\|f\|_\infty := \sup(\{|f(x)| \mid x \in M\}) \in [0, +\infty],$$

s hodnotou $+\infty$ pro shora neomezenou množinu $\{\dots\}$.

Tvrzení (Kritérium $\rightrightarrows$)**:** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $f_n : M \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ jsou na ní definované funkce. Pak*

$$f_n \rightrightarrows f \quad (na\, M) \iff \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Definice (Lokálně stejnoměrná konvergence)**:** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $f_n : M \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ jsou na ní definované funkce. Lokálně stejnoměrná konvergence f_nk f (na M), symbolicky $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ (na M), znamená, že

$$\forall a \in M\ \exists \delta > 0 : f_n \rightrightarrows f \text{ (na } M \cap (a - \delta, a + \delta)).$$

Věta ($\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ zachovává spojitost)**:** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$, $f_n : M \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$, každá funkce f_n je spojitá a*

$$f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \ (na\, M).$$

Pak i f je spojitá.

Důkaz: Nechť $a \in M$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme $\delta > 0$, že f_n konvergují na $N := M \cap (a - \delta, a + \delta)$ stejnoměrně. Vezmeme n_0, že $n \geq n_0 \wedge x \in N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vezmeme libovolné $n_1 \geq n_0$ a pak, díky spojitosti f_{n_1}, takové $\delta \in (0, \delta)$, že

$$x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)(\subset N) \Rightarrow |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pak pro každé $x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)(\subset N)$ máme, že

$$|f(a) - f(x)| \leq |f(a) - f_{n_1}(a)| + |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v bodě a. □

Tvrzení (Weierstrassův test)**:** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $f : M \to \mathbb{R}$, $f_n : M \to \mathbb{R}$ a $\sum f_n \to f$ (na M). Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f \quad (na\, M),\ pokud\ \ \sum_{n=1}^{\infty} F_n := \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty.$$

2.6 Mocninné řady

Definice (Mocninná řada)**:** Mocninná řada se středem $a \in \mathbb{R}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{R}$(a proměnnou $x \in \mathbb{R}$) je funkční řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

Definice (Poloměr konvergence)**:** Poloměr konvergence R mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$:

$$R := \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty],$$

kde $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} := 0$. S těmito konvencemi máme i ekvivalentní vztah $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$.

Věta (O konvergencích mocninných řad)**:** *Nechť*

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence R. Pak pro každé reálné x s $|x| < R$ řada $F(x)$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Když $R > 0$, pak na intervalu $(-R, R)$ řada $F(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně ke svému (bodovému) součtu.

Věta (Počítání s mocninnými řadami)**:** *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad a \quad B(x) := \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

jsou mocninné řady konvergující na nějakém intervalu $I := (-a, a)$, kde $a > 0$. Označme stejně i odpovídající funkce $A, B : I \to \mathbb{R}$. Pro jejich (formální) součet, součin, podíl a derivaci platí následující.

1. *Mocninná řada (Formální součet)*

$$C(x) := \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

   konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) + B(x)$.

2. *Mocninná řada (Formální součin)*

$$C(x) := \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} \right) x^n$$

   konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

3. *Nechť $b_0 \neq 0$ a $d_n := -\frac{b_n}{b_0}$. Pak existuje $b > 0$, že mocninná řada (Formální podíl)*

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = \frac{A(x)}{B(x)} := \frac{1}{b_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n$$

   konverguje na intervalu $J := (-b, b)$ a pro každé $x \in J$ je $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

4. *Mocninná řada (Formální derivace)*

$$C(x) := \sum_{n\geq 1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

   konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A'(x)$.

Ve třetí části je použita formální geometrická řada:

$$\frac{1}{1 - (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)} = \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n.$$

Tvrzení (Abelova nerovnost)**:** *Pro* $i = 1, 2, \dots, n$ *nechť* $a_i \in \mathbb{C}, b_i \in \mathbb{R}$ *s* $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, $A_i := a_1 + a_2 + \dots + a_i$ *a* $A[n] := \max(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|)$. *prostorem*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq A[n] \cdot b_1.$$

Věta (Abelova)**:** *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, +\infty)$ *a označme stejně odpovídající funkci* $A : (-R, R) \to \mathbb{R}$. *Když řada* $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ *konverguje a má součet*

$$S := \sum_{n\geq 0} a_n R^n,$$

pak je limita zleva v R *funkce* $A(x)$ *rovna* S*:*

$$\lim_{x\to R^-} A(x) = \lim_{a\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

2.6.1 Pólyova věta o náhodných procházkách

Definice (Graf)**:** Graf $G = (V, E)$ sestává z množiny vrcholů V a množiny hran $E \subset \binom{V}{2}$. Zde

$$\binom{V}{2} := \{A \mid A \subset V \wedge |A| = 2\}$$

je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny V.

Definice (d-regulární graf)**:** Graf $G = (V, E)$ je d-regulární, $D \in \mathbb{N}$, má-li každý vrchol d sousedů, to jest

$$\forall v \in V : |\overbrace{\{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}}^{N(v)}| = d.$$

Definice (Lokálně konečný graf)**:** Graf G je lokálně konečný, má-li každý vrchol $v \in V$ jen konečně mnoho sousedů, tj. množina $N(v)$ je konečná.

Definice (Procházka)**:** Procházka w v grafu $G = (V, E)$ je taková konečná, $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ s délkou $|w| := n \in \mathbb{N}_0$, či nekonečná, $w = (v_0, v_1, \dots)$, posloupnost vrcholů $v_i \in V$, že pro každé $i \in \mathbb{N}_0(< n)$ je $\{v_i, v_{i+1} \in E\}$. Vrchol v_0 pojmenujeme jako start procházky w.

Definice (Počet procházek)**:** Definujeme

$$d_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je procházka se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|,$$

počet procházek v grafu G s daným startem v_0 a s délkou n.

Definice (Rekurentní procházka)**:** Rekurentní procházka $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ opětovně prochází startem: existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, že $v_i = v_0$

Definice (Počet rekurentních procházek)**:** Jako

$$a_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je rekurentní procházka se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|$$

označíme počet rekurentních procházek v grafu G s daným startem v_0 a s délkou n.

Definice (Automorfismus)**:** Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je taková bijekce $f : V \to V$, že

$$\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v) \in E\}.$$

Definice ((Vrcholově) tranzitivní graf)**:** Graf $G = (V, E)$ je (vrcholově) tranzitivní, když

$$\forall u, v \in V \; \exists F : F \text{ je automorfismus } G \wedge F(u) = v.$$

Tvrzení (Procházky v grafech)**:** *Počet procházek, popř. rekurentních procházek, dané délky v tranzitivním grafu nezávisí na startu: když je $G = (V, E)$ tranzitivní a lokálně konečný, pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každé dva vrcholy $u, v \in V$ je*

$$d_n(u, G) = d_n(v, G), \quad \textit{popř.} \quad a_n(u, G) = a_n(v, G).$$

V tranzitivních grafech G budeme stručně označovat počty procházek, resp. rekurentních procházek, s délkou n jako $d_n(G)$, resp. $a_n(G)$.

Příklad (Nekonečná cesta)**:** Nekonečná cesta

$$P = (\mathbb{Z}, \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\})$$

je tranzitivní a 2-regulární.

Definice (Zobecněná nekonečná cesta)**:** Zobecnněním nekonečné cesty je pro $d \in \mathbb{N}$ graf

$$\mathbb{Z}^d := \left(\mathbb{Z}^d, \left\{\{\overline{u}, \overline{v}\} \mid \sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i| = 1\right\}\right),$$

kde píšeme $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Tvrzení: *Grafy $\mathbb{Z}^d$ jsou tranzitivní a $2d$-regulární.*

Věta (Slabá Abelova)**:** *Když mocninná řada*

$$U(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

konverguje pro každé $x \in [0, R)$, kde $R \in (0, +\infty)$ je reálné číslo, a má všechny koeficienty $u_n \geq 0$, pak následující limita a suma jsou definované a rovnají se -

$$\lim_{x \to R^-} U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n \quad (=: U(R))$$

- bez ohledu na to, zda jsou konečné nebo $+\infty$.

Věta (Stirlingův vzorec)**:**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \to \infty.$$

Věta (Pólya)**:** *Pro $d = 1$ a 2 je*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} = 1$$

a pro $d \geq 3$ je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} < 1$$

Důkaz: Nechť $d = 2$ a $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ je procházka v grafu $\mathbb{Z}^2$ s délkou $n \in \mathbb{N}_0$. Nechť b_n je počet procházek w s $v_0 = v_n = \bar{0}$ a c_n je počet procházek w s $v_0 = v_n = \bar{0}$, ale $v_j \neq \bar{0}$ pro $0 < j < n$. Položíme $c_0 := 0$. Je jasné, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $a_n \leq d_n, c_n \leq b_n \leq d_n$ a $d_n = 4^n$. Procházky počítané a_n rozdělíme do skupin podle jejich prvního návratu do $\bar{0}$ ve vrcholu v_j. Pomocí vztahů $d_n = 4^n$ a $a_n \leq 4^n$ dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ rovnice

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} c_j d_{n-j}, \text{ takže } \frac{a_n}{4^n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j}{4^j} \leq 1.$$

Tedy stačí dokázat, že

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{c_j}{4^j} = 1.$$

Druhý vztah, který použijeme, je mezi mocninnými řadami

$$B(x) = \sum_{n=\geq 0} \frac{b_n}{4^n} x^n = 1 + \ldots \text{ a } C(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{4^n} x^n = \frac{x^2}{4} + \ldots,$$

totiž, že

$$B(x) = \frac{1}{1 - C(x)} = \sum_{k \geq 0} C(x)^k.$$

Snadno se to nahlédne formálně, tedy jako vztah mezi formálními mocninnými řadami, rozdělením procházky počítané b_n jejími $k+1$ návraty do $\ldots 0$ na k úseků s délkami $j_1, \ldots, j_k$ splňujícími $j_1 + \cdots + j_k = n$. Ty jsou počítány čísly $c_{j1}, \ldots, c_{jk}$. Tento vztah také platí na úrovni reálných funkcí $B(x)$ a $C(x)$ pro $x \in [0, 1)$, protože obě mocinné řady mají poloměry konvergence ≥ 1. Nyní stačí dokázat, že

$$\lim_{x \to 1^-} B(x) = +\infty.$$

Skutečně, pak hořejší vztah implikuje, že $\lim_{x \to 1^-} C(x) = 1$ a tedy podle slabé Abelove věty dává, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{4^j} =: C(1) = \lim_{x \to 1^-} C(x) = 1.$$

To je přesně požadovaný součet nekonečné řady. Abychom dokázali, že $\lim_{x \to 1^-} B(x) = +\infty$, stačí dokázat, že

$$B(1) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{4^j} = +\infty.$$

To dokážeme spočtením b_j. Patrně $b_n = 0$ pro liché n. Pro sudé délky n je

$$b_{2n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2n)!}{j! \cdot (n-j)! \cdot j! \cdot (n-j)!} = \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}^2.$$

První rovnost plyne uvážením všech j kroků doprava v procházce w. Ty vynucují týž počet j kroků doleva a stejný počet $n - j$ kroků nahoru a dolů. Tyto možnosti počítá multinomický koeficient $\binom{2n}{j, j, n-j, n-j}$. Poslední rovnost plyne ze známé binomické identity. Stirlingův vzorec pro aproximaci faktoriálu vede na asymptotiku $\binom{2n}{n} \sim cn^{-\frac{1}{2}} 4^n$ pro $n \to \infty$ a nějaké $c > 0$. Tedy $2n$-tý sčítanec v řadě $B(1)$ je $\sim c^2 n^{-1}$. Proto

$$B(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 4^{-2n} = +\infty,$$

protože řada $\sum n^{-1} = +\infty$. $\square$

3 Komplexní analýza

Definice (Komplexní čísla)**:** Komplexní čísla

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i = \sqrt{-1},$$

tvoří normované těleso $\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, |\dots|$, s normou $|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Zároveň tvoří úplný metrický prostor $(\mathbb{C}, d)$ s metrikou $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$, který je izometrický klasické euklidovkské rovině $\mathbb{R}^2$.

Poznámka (Značení)**:**

$$\mathrm{re}(a + bi) := a \quad \text{a} \quad \mathrm{im}(a + bi) := b$$

Definice (Komplexní koule)**:** Jako $B(z, r) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u - z| < r\}$ označíme kouli se středem z a poloměrem $r > 0$.

3.1 Holomorfní a analytické funkce

Definice (Derivace)**:** Pro funkci $f : U \to \mathbb{C}$ a bod $z_0 \in U$ je její derivace $f'(z_0)$ v z_0 definovaná jako pro reálné funkce:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C},$$

pokud tato limita existuje. Explicitně, $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ je derivace funkce f v bodě z_0, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : z \in U \wedge 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Definice (Holomorfní funkce)**:** Funkce $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní(na U), má-li v každém bodě $z_0 \in U$ derivaci. Celá či celistvá funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je lohomorfní na celé komplexní rovině $\mathbb{C}$. Komplexní derivace má stejné algebraické vlastnosti jako derivace reálná.

Tvrzení (Vlastnosti derivace)**:** *$f, g : U \to \mathbb{C}$ a $h : U_0 \to \mathbb{C}$ buďte holomorfní funkce a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Platí následující.*

1. *Funkce $\alpha f + \beta g$ je holomorfní na U a $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.*
2. *Součin fg je holomorfní na U a $(fg)' = f'g + fg'$.*
3. *Když $g \neq 0$ na U, pak je podíl $\frac{f}{g}$ holomorfní na U a $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.*
4. *Když $h[U_0] \subset U$, pak je složená funkce $f(h) : U_0 \to \mathbb{C}$ holomorfní na U_0 a $(f(h))' = f'(h)h'$.*

Poznámka (K derivacím)**:** Jako pro reálné funkce, pro $n \in \mathbb{N}$ na $\mathbb{C}$ máme $(z^n)' = nz^{n-1}$, derivace konstantní funkce je nulová funkce a každá racionální funkce je holomorfní na svém definičním oboru a její derivace je táž jako v reálném případě(tj. je daná stejnou formulí).

Definice (Analytická funkce)**:** Funkce $f : U \to \mathbb{C}$ je analytická (na U), pokud pro každý bod $z_0 \in U$ existují taková komplexní čísla $a_0, a_1, \dots$, že

$$z \in U \wedge B(z_0, |z - z_0|) \subset U \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Analytická funkce je v každém kruhu se středem z_0, který je obsažený v definičním oboru, vyjádřena mocninnou řadou s komplexními koeficienty a středem z_0. S mocninnými řadami s komplexními koeficienty počítáme úplně stejně jako s reálnými mocninnými řadami.

3.1.1 Odlišnosti reálné a komplexní analýzy

1. Odlišnost

Věta (Holomorfní $\Rightarrow$ analytická)**:** *Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ celá funkce, pak existují komplexní koeficienty $a_0, a_1, \ldots,$ že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

2. Odlišnost

Poznámka: Funkce $f : U \to \mathbb{C}$ je omezená, když $\exists c > 0 \; \forall c \in U : |f(z)| < c$.

Věta (Liouville)**:** *Když je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ celá a omezená funkce, pak je f konstantní.*

3. Odlišnost

Důsledek (Holomorfní funkce má $\forall$ derivace)**:** Každá holomorfní funkce $f : U \to \mathbb{C}$ má derivace $f^{(n)}(z)$ všech řádů $n \in \mathbb{N}$. Speciálně je její derivace $f' : U \to \mathbb{C}$ spojitá funkce.

4. Odlišnost

Věta (Princip maxima modulu)**:** *Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pak*

$$\forall z_0 \in U \; \forall \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \wedge |f(z)| \geq |f(z_0)|.$$

3.2 Úsečky a obdélníky

Definice (Úsečka)**:** Pro dva různé body je úsečka $u = ab \subset \mathbb{C}$ obraz

$$u = ab := \varphi[[0,1]] = \{\varphi(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{C}$$

intervalu $[0,1]$ lineární funkcí

$$\varphi(t) := (b-a)t + a : [0,1] \to \mathbb{C}.$$

Poznámka (Orientace úsečky)**:** Úsečka je orientována pořadím svých konců, takže ab a ba jsou dvě různé úsečky.

Definice (Délka úsečky)**:**

$$|u| = |ab| := |b-a| \geq 0$$

Definice (Dělení úsečky)**:** Dělení p úsečky $u = ab$ je $k+1$-tice $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k) \subset u, k \in \mathbb{N}$, jejích bodů

$$a_i := \varphi(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

které jsou obrazy bodů $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tvořících dělení intervalu $[0,1]$. Takže $a_0 = a, a_k = b$ a body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ běží na u od a do b.

Definice (Norma dělení)**:** Norma $\|p\|$ dělení p je

$$\|p\| := \max_{1 \leq i \leq k} |a_{i-1}a_i| = \max_{1 \leq i \leq k} |a_i - a_{i-1}|,$$

tedy největší délka podúsečky dělení.

Definice (Cauchyova suma a její modifikace)**:** Pro funkci $f : U \to \mathbb{C}$ a dělení $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ úsečky u definujeme Cauchyovu sumu $C(f,p)$ a její modifikaci $C'(f,p)$ jako

$$C(f,p) := \sum_{i=1}^{k} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}$$
$$C'(f,p) := \sum_{i=1}^{k} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}.$$

Definice (Obdélník)**:** Obdélník $R \subset \mathbb{C}$ je množina

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \le \mathrm{re}(z) \le \beta \wedge \gamma \le \mathrm{im}(z) \le \delta\}$$

dána reálnými čísly $\alpha < \beta$ a $\gamma < \delta$. Jeho strany jsou rovnoběžné s reálnou a imaginární osou. Když $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, jde o <u>čtverec</u>.

Definice (Kanonické vrcholy obdélníka)**:** Kanonické vrcholy obdélníka R jsou $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, kde

$$a := \alpha + \gamma i, b := \beta + \gamma i, c := \beta + \delta i \text{ a } d := \alpha + \delta i.$$

Začínají levým dolním vrcholem a jdou proti směru hodinových ručiček.

Definice (Hranice obdélníka)**:** Hranice ∂R obdélníka R je sjednocení úseček

$$\partial R := ab \cup bc \cup cd \cup da.$$

Definice (Vnitřek obdélníka)**:** Vnitřek $\mathrm{int}(R)$ obdélníka R je

$$\mathrm{int}(R) := R \backslash \partial R.$$

Definice (Obvod obdélníka)**:** Obvod $\mathrm{obv}(R)$ obdélníka R je součet délek jeho stran,

$$\mathrm{obv}(R) := |ab| + |bc| + |cd| + |da|.$$

3.3 Integrály

Definice (Integrál přes úsečku a hranici obdélníka)**:** Nechť $f : u, \partial R \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce definovaná na úsečce u nebo na hranici obdélníka R. Definujeme

$$\underline{\int_u f} := \lim_{n \to \infty} C(f, p_n) \in \mathbb{C}$$

a

$$\underline{\int_{\partial R} f} := \int_{ab} f + \int_{bc} f + \int_{cd} f + \int_{da} f,$$

kde (p_n) je libovolná posloupnost dělení p_n úsečky u, která splňuje $\lim \|p_n\| = 0$, a (a,b,c,d) jsou kanonické vrcholy obdélníka R. Hodnota $\int_u f$ je integrál funkce f je funkce přes úsečku u a $\int_{\partial R} f$ je integrál funkce f přes hranici obdélníka R.

Věta (O integrálech)**:** *Nechť $u = ab$ je úsečka, R je obdélník a funkce $f, g : u, \partial R \to \mathbb{C}$ jsou spojité. Limita definující $\int_u f$ vždy existuje a nezávisí na posloupnosti (p_n). Tedy i $\int_{\partial R} f$ je vždy dobře definovaný. Oba integrály mají následující vlastnosti.*

1. *Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je $\int_u (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_u f + \beta \int_u g$ a totéž platí pro $\int_{\partial R}$.*

2. *Platí ML odhady*

$$\left|\int_u f\right| \le \max_{z\in u}|f(z)|\cdot|u| \quad a \quad \left|\int_{\partial R} f\right| \le \max_{z\in\partial R}|f(z)|\cdot obv(R)$$

3. *Pro každý vnitřní bod c úsečky $u = ab$, to jest $c \in ab$ a $c \neq a, b$, je $\int_{ab} f = \int_{ac} f + \int_{cb} f$. Též $\int_{ba} f = -\int_{ab} f$.*

Tvrzení (Stejnoměrná spojitost)**:** *Nechť $A \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d) a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak je f stejnoměrně spojitá, takže*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : a, b \in A \wedge d(a, b) < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Definice (k-ekvidělení)**:** Pro $k \in \mathbb{N}$ a úsečku $u \subset \mathbb{C}$ jejím k-ekvidělením rozumíme dělení u na k podúseček stejné délky $\frac{|u|}{k}$, které je dané obrazy dělení $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \cdots < \frac{k-1}{k} < 1$ jednotkového intervalu.

Tvrzení: *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$. Platí*

$$\int_{ab}(\alpha z + \beta) = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + \beta(b - a) = g(b) - g(a),$$

kde $g(z) := \frac{\alpha z^2}{2} + \beta z$.

Tvrzení (Jednoduchá Cauchy-Goursatova věta)**:** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník. pak*

$$\int_{\partial R}(\alpha z + \beta) = 0.$$

Tvrzení ($\int_u$ a $(R)\int$)**:** *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$, $f : ab \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a $\varphi(t) := t(b - a) + a : [0, 1] \to \mathbb{C}$ je parametrizace definující úsečku $u = ab$. Potom*

$$\begin{aligned}\int_u f &= \int_0^1 f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = (b - a)\int_0^1 f(\varphi(t))\,dt\\ &= (b - a)\left(\int_0^1 re(f(\varphi(t)))\,dt + i\cdot\int_0^1 im(f(\varphi(t)))\,dt\right)\end{aligned}$$

(až na první integrál jsou všechny ostatní Riemannovy).

Definice (Křivkový integrál)**:** Když

$$f : U \to \mathbb{C} \text{ je funkce a } \varphi : [a, b] \to U$$

je spojitá a po částech hladká funkce, pak integrál funkce f přes křivku φ definujeme jako

$$\begin{aligned}\int_\varphi f &:= \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \mathrm{re}\left(f\left(\varphi\left(t\right)\right)\cdot\varphi'\left(t\right)\right)\,\mathrm{d}t + i\cdot\int_a^b \mathrm{im}\left(f\left(\varphi\left(t\right)\right)\cdot\varphi'\left(t\right)\right)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

pokud poslední dva (reálné) Riemannovy integrály existují. Náš „úsečkový integrál“ $\int_u$ je tedy podle předchozího tvrzení speciálním případem křivkového integrálu $\int_\varphi$.

3.4 Konstanta $\rho = 2\pi i$

Tvrzení: *Buď dána konvergentní posloupnost komplexních čísel* (z_n). *Platí* $im(\lim z_n) = \lim im(z_n)$.

Věta (Konstanta ρ)**:** *Nechť* S *je čtverec s vrcholy* $\pm 1 \pm i$. *Pak*

$$\rho := \int_{\partial S} \frac{1}{z} \neq 0, \ \textit{dokonce } im(\rho) \geq 4.$$

Důkaz: Kanonické vrcholy čtverce S jsou $a := -1 - i, b := 1 - i, c := 1 + i$ a $d := -1 + i$. Nechť $p_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je n-ekvidělení úsečky ab. Protože násobení číslem i je otočení kolem počátku kladným směrem[9] o úhel $\frac{\pi}{2}$ je $q_n = ip_n := (ia_0, ia_1, \ldots, ia_n)$ n-ekvidělení úsečky bc. Podobně je $r_n = iq_n = -p_n$, resp. $s_n = ir_n = -ip_n$, n-ekvidělení úsečky cd, resp. da. Překvapivě pro $f(z) = \frac{1}{z}$ je

$$C(f, p_n) = C(f, q_n) = C(f, r_n) = C(f, s_n)$$

Skutečně, rozšíření zlomku číslem i dává

$$\begin{aligned} C(f, p_n) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\frac{b-a}{n}}{a + \frac{j(b-a)}{n}} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{ib-ia}{n}}{ia + \frac{j(ib-ia)}{n}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\frac{c-b}{n}}{b + \frac{j(c-b)}{n}} \right) = C(f, q_n) \end{aligned}$$

a podobně pro další dvě rovnosti. Dále vzhledem k $b - a = 2$ a $a = -1 - i$ rozšířením zlomku číslem $\frac{2j}{n} - 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(C(f, p_n)) &= \mathrm{im} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{2}{n}}{-1 - i + \frac{2j}{n}} \right) \\ &= \mathrm{im} \left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{2j}{n} - 1 + i}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1} \right) \geq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Tedy, podle tvrzení výše,

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(\rho) = \mathrm{im} \left(\int_{\partial S} \frac{1}{z} \right) &= 4 \cdot \mathrm{im} \left(\int_{ab} \frac{1}{z} \right) \\ &= 4 \cdot \lim_{n \to \infty} \mathrm{im} \left(C \left(\frac{1}{z}, p_n \right) \right) \\ &\geq 4 \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

a skutečně $\rho \neq 0$. □

Tvrzení: *Nechť opět* $a := -1 - i$ *a* $b := 1 - i$. *Potom* $\int_{ab} \frac{1}{z} = \frac{\pi i}{2}$. *Tedy, podle předchozího důkazu,* $\rho = 4 \cdot \frac{\pi i}{2} = 2\pi i$.[10]

[9] proti směru hodinových ručiček

[10] $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t$

3.5 Cauchy-Goursatova věta

Integrál $\int_\varphi f$ holomorfní funkce f přes *jednoduchou uzavřenou křivku* φ, která leží v definičním oboru funkce f se svým celým vnitřkem, je 0.

Definice (Diametr množiny)**:** Pro množinu $x \subset \mathbb{C}$ je její diametr[11] definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) = \sup(\{|x-y| \mid x, y \in X\}).$$

Průměr množiny může být i $+\infty$.

Tvrzení: *Když A_n,*

$$\mathbb{C} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots,$$

jsou neprázdné a uzavřené množiny s $\lim$ *diam*$(A_n) = 0$*, pak* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$*.*

Definice (Čtvrtka obdélníka)**:** Buď obdélník R s kanonickými vrcholy (a, b, c, d). Když $e := \frac{a+b}{2}$, $f := \frac{b+c}{2}$, $g := \frac{c+d}{2}$ a $h := \frac{d+a}{2}$ jsou středy stran R a $j := \frac{a+c}{2}$ je jeho celkový střed, pak jeho čtyři čtvrtky jsou obdélníky A, B, C a D, jejichž kanonické vrcholy jsou, po řadě,

$$(a, e, j, h), (e, b, f, j), (j, f, c, g) \text{ a } (h, j, g, d).$$

Obdélník se na čtvrtky rozpadne po rozříznutí podle úseček eg a hf. Pro každou z těchto čtvrtek E patrně platí: $\operatorname{obv}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{obv}(R)$ a $\operatorname{diam}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(R)$.

Věta (Cauchy-Goursatova pro obdélníky)**:** *Nechť*

$$f : U \to \mathbb{C}$$

je holomorfní funkce a $R \subset U$ je obdélník. Pak

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

Důkaz: Mějme f, U a R. Sestrojíme takové vnořené obdélníky

$$R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots,$$

že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $R_n + 1$ čtvrtka obdélníku R_n a

$$\left| \int_{\partial R_{n+1}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|.$$

Nechť už jsou takové obdélníky $R_0, R_1, \dots, R_n$ definované a A, B, C, D jsou čtvrtky obdélníku R_n. Tvrdíme, že

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial A} f + \int_{\partial B} f + \int_{\partial C} f + \int_{\partial D} f$$

Tato identita plyne použitím třetí části věty o integrálech. Po rozvinutí každého integrálu $\int_{\partial A} f, \dots, \int_{\partial D} f$ jako součtu čtyř integrálů přes strany dostáváme na pravé straně předchozí rovnosti 16 členů. Osm z nich odpovídá stranám čtvrtek uvnitř R_n a vzájemně se zruší, protože vytvoří čtyři dvojice opačných orientací stejné úsečky. Zbylých osm členů odpovídá stranám čtvrtek ležících na ∂R_n, které se sečtou na integrál na levé straně předcházející rovnosti. Z této rovnosti plyne podle trojúhelníkové nerovnosti, že pro nějakou čtvrtku $E \in \{A, B, C, D\}$ je $\left|\int_{\partial E} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial R_n} f\right|$. Položíme tedy $R_{n+1} = E$.

[11] průměr

Podle předchozího tvrzení existuje bod z_0, že

$$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n.$$

Protože $R_0 = R \subset U$, je i $z_0 \in U$. Nyní použijeme existenci derivace $f'(z_0)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $B(z_0, \delta) \subset U$ a pro nějakou funkci $\Delta : B(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ pro každé $z \in B(z_0, \delta)$ je $|\Delta(z)| < \varepsilon$ a

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_{g(z)} + \underbrace{\Delta(z) \cdot (z - z_0)}_{h(z)}.$$

Uvážíme tyto funkce $g(z)$ a $h(z)$. Je jasné, že $g(z)$ je lineární a $h(z) = f(z) - g(z)$ je spojitá[12]. Nechť $n \in \mathbb{N}_{\not{0}}$ je tak velké, že $R_n \subset B(z_0, \delta)$[13]. Podle linearity integrálu a jednoduché Cauchyho-Goursatovy věty(JCG) máme

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial R_n} g + \int_{\partial R_n} h \overset{JCG}{=} \int_{\partial R_n} h.$$

Platí odhad

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R_n} h \right| &\overset{\text{ML odhad}}{\leq} \max_{z \in \partial R_n} |\Delta(z) \cdot (z - z_0)| \cdot \operatorname{obv}(R_n) \\ &< \varepsilon \cdot \operatorname{diam}(R_n) \cdot \operatorname{obv}(R_n) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{diam}(R)}{2^n} \cdot \frac{\operatorname{obv}(R)}{2^n} \\ &< \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{obv}(R)}{4^n}. \end{aligned}$$

Zde jsme použili výše zmíněné zmenšení průměru a obvodu na polovinu po čtvrcení a to, že průměr obdélníka je menší než jeho obvod. Podle předchozích výsledků tak máme

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \left| \int_{\partial R_n} f \right| = \left| \int_{\partial R} h \right| < \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{obv}(R)^2}{4^n}$$

a $\left| \int_{\partial R} f \right| < \varepsilon \cdot \operatorname{obv}(R)^2$. Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, je $\int_{\partial R} f = 0$. □

Věta (Cauchy-Goursatova)**:** *Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a $\varphi : [a, b] \to U$ je spojitá a po částech hladká fuknce, která je prostá, s vyjímkou hodnoty $\varphi(a) = \varphi(b)$, a jejíž vnitřek*[14] *je podmnožinou množiny U. Pak*

$$\int_{\varphi} f = 0.$$

3.6 Funkcionál $\int$

Definice (Funkcionál)**:** Pro libovolnou kompaktní[15] množinu $A \subset \mathbb{C}$ definujeme množiny holomorfních funkcí

$$\begin{aligned} H_A &:= \{f : \mathbb{C} \backslash A \to \mathbb{C} \mid f \text{ je holomorfní}\} \\ H &:= \bigcup_{A \subset \mathbb{C} \text{ je kompaktní}} H_A. \end{aligned}$$

[12] na $B(z_0, \delta)$
[13] potřebujeme jenom, že $\lim \operatorname{diam}(R_n) = 0$, pro esxistenci z_0 to není podstatné
[14] ta komponenta ve dvojici komponent množiny $\mathbb{C} \backslash \varphi[[a, b]]$, která je omezená
[15] uzavřenou a omezenou

H tedy obsahuje všechny funkce holomorfní na doplňcích kompaktů. Funkcionál $\int$, tedy funkci na množině H, definujeme předpisem

$$\int : H \to \mathbb{C}, \quad \int f := \int_{\partial R} f,$$

kde $f \in H_A$ a $R \subset \mathbb{C}$ je libovolný obdélník, že $\mathrm{int}(R) \supset A$[16].

Tvrzení (Korektnost definice $\int$)**:** *Definice funkcionálu $\int$ je korektní, jeho hodnota $\int f$ nezávisí na volbě obdélníku R.*

Věta (Vlastnosti $\int$)**:** *Důležité vlastnosti jsou tři.*

1. *Linearita: pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $f, g \in H$ je*
$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$
2. *Rozšíření Cauchy-Goursatovy věty: když $a \in \mathbb{C}$ a funkce $f \in H_{\{a\}}$ je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak*
$$\int f = 0.$$
3. *Pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*
$$\int \frac{1}{z-a} = \rho$$
kde $\rho = 2\pi i$ je dříve zavedená konstanta.

Věta (Cauchyův vzorec)**:** *Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkce. Pak je-li $\rho = 2\pi i$ dříve definovaná konstanta, pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*

$$f(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{z-a}.$$

3.7 Meromorfní funkce a rezidua

Definice (Diskrétní množina)**:** Množina $A \subset \mathbb{C}$ je diskrétní, pokud v každé kouli $B(z, r) \subset \mathbb{C}$ leží jen konečně mnoho jejích prvků.

Definice (Meromorfní funkce, množina pólů)**:** Holomorfní funkci

$$f : U \backslash A \to \mathbb{C},$$

kde $A \subset \mathbb{C}$ je diskrétní, nazveme meromorfní funkcí a A nazveme množinou jejích pólů, když každý bod $a \in A$ má okolí $U_a \subset U$ s $U_a \cap A = \{a\}$, že pro nějakou holomorfní funkci $g_a : U_a \to \mathbb{C}$ a nějaká čísla $k_a \in \mathbb{N}_0$ a $c_{j,a} \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \ldots, k_a$ že pro každé $z \in U_a \backslash \{a\}$ je

$$f(z) = g_a(z) + \sum_{j=1}^{k_a} \frac{c_{j,a}}{(z-a)^j}.$$

Pro $k_a = 0$ se suma definuje jako 0 a $f = g_a$ pak je holomorfní na U_a.

Definice (Reziduum funkce f)**:** Koeficient $c_{1,a}$ z předchozí definice je takzvané reziduum funkce f v bodě a, označované jako

$$\mathrm{res}(f, a) := c_{1,a}.$$

Z Cauchyova vzorce plyne, že $\mathrm{res}(f, a)$ je jednoznačně určené funkcí f.

[16] A je obsažena uvnitř obdélníku R

Věta (Reziduová)**:** *Nechť $f : U\backslash A \to \mathbb{C}$ je meromorfní funkce s množinou pólů A a $R \subset U$ je obdélník, jehož hranice neobsauje žádný bod z A. Potom platí rovnost*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f = \sum_{a\in A\cap int(R)} res(f,a) = \sum_{a\in A\cap R} res(f,a)$$

(suma v ní je konečná). Integrál funkce f přes hranici obdélníka R, dělený $2\pi i$, se tedy rovná součtu reziduí funkce f v pólech ležících uvnitř R.

Tvrzení (O funkci $F(z)$)**:** *Nechť*

$$F(z) := \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz}-1} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}.$$

Funkce F je meromorfní s póly v $\mathbb{Z}$ a v každém čísle má reziduum rovné 1.

Lemma: *Nechť $F(z)$ je jako v předešlém tvrzení a $S_N \subset \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, je čtverec s vrcholy $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Pak existuje konstanta $c > 0$, že*

$$\forall N \in \mathbb{N}\, \forall z \in \partial S_N : |F(z)| \le c.$$

Věta (Sečtení řady $\sum n^{-2k}$)**:** *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje kladný zlomek $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, že*

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots = \alpha_k \pi^{2k}.$$

4 Úvod do diferenciálních rovnic

Definice (Kontrahující zobrazení)**:** Kontrahující zobrazení $f : M \to M$ metrického prostoru (M,d) do sebe. Je to každé zobrazení, že pro nějakou konstantu $c \in (0,1)$ pro každé $a, b \in M$ je

$$d(f(a), f(b)) \le c \cdot d(a,b)$$

f zkracuje vzdálenosti nějakým faktorem menším než 100%.

Věta (Banachova o pevném bodu)**:** *Každé kontrahující zobrazení $f : M \to M$ úlpného metrického prostoru do sebe má právě jeden pevný bod — takový bod $a \in M$, že*

$$f(a) = a.$$

Dále platí, že každá posloupnost $(a_n) \subset M$ iterací funkce f, kde bod $a_1 \in M$ je libovolný a pro $n > 1$ je $a_n = f(a_{n-1})$, konverguje k tomuto pevnému bodu a.

Tvrzení (Úplnost spojitých funkcí)**:** *Pro každá dvě reálná čísla $a < b$ je metrický prostor*

$$(C[a,b], d),$$

spojitých funkcí $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ s maximovou metrikou

$$d(f,g) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|$$

úplný.

Důkaz: Nechť $(f_n) \subset C(I)$ je Cauchyovská posloupnost, t. j.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists m (n, n' > m \Rightarrow ||f_n - f_{n'}|| < \varepsilon)$$

Pak pro každé $x \in I$ je posloupnost $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ Cauchyovská, tedy konverguje a můžeme definovat

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Tedy máme funkci $f : I \to \mathbb{R}$, s vlastností $f_n \to f$ bodově. Dokážeme uniformní konvergenci, t. j. $||f - f_n|| \to 0$. Nechť $x \in I$ a $\varepsilon > 0$. Můžeme vzít m takové, že cauchyovská podmínka platí pro $\varepsilon/2$. Pak pro $k \geq m$ takové, že $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon/2$, získáme, že $n \geq m$ implikuje

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Tedy limita $f_n = f$ je v tomhle metrickém prostoru. Zůstává dokázat, že f je spojitá. Nechť $x_0 \in I$ a $\varepsilon > 0$. Zvolme n_0 takové, že

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2.$$

Zvolme $\delta > 0$ takové, že

$$x \in U(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| < \varepsilon/2.$$

Pak $\forall x \in U(x_0, \delta) \cap I$ platí

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

a tedy f je spojitá v x_0. □

4.1 Picardova věta

Věta (Picardova)**:** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pro níž existuje konstanta $M > 0$, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbb{R}$ je*

$$|F(u, v) - F(u, w)| \leq M \cdot |v - w|.$$

Potom existuje $\delta > 0$ a jednoznačně určená funkce

$$f : [a - \delta, a + \delta] \to \mathbb{R},$$

že

$$f(a) = b \wedge \forall x \in [a - \delta, a + \delta] : f'(x) = F(x, f(x)).$$

V krajních bodech intervalů se zde i nadále hodnoty derivací berou jednostranně.

Důkaz: Nechť $I = [a - \delta, a + \delta]$ je libovolný kompaktní interval, kde $\delta > 0$ je z předpokladu věty. Je jednoduché ukázat, že řešení rovnice pro neznámou funkci f je ekvivalentní hledání řešení pro rovnici

$$\forall x \in I : f(x) = b + \int_a^x F(t, f(t) \, \mathrm{d}t).$$

Ukážeme, že pro jakékoliv malé $\delta > 0$, tahle rovnice, a tedy taky původní rovnice, má právě jedno řešení na I. Pravou stranu rovnice definuje mapování

$$A : C(I) \to C(I)$$

z prostoru spojitých funkcí $f : I \to \mathbb{R}$ do sebe, tedy $A(f) = g$, kde

$$\text{pro } x \in I, g(x) := b + \int_a^x F(t, f(t) \, \mathrm{d}t).$$

Ukážeme, že A je kontrahující zobrazení metrického prostoru $(C(I), d)$ s maximovou metrikou d do sebe. Dle Banachovy věty o pevném bodu má tedy A jediněčný pevný bod, funkce $f \in C(I)$, taková že $A(f) = f$, a obě rovnice mají jediněčné řešení. Dokážeme, že pro jakékoliv malé $\delta > 0$ je A kontrahující zobrazení. Nechť $f, g \in C(I)$, pak

$$\begin{aligned}
d(A(f), A(g)) &= \max_{x\in I} |A(f)(x) - A(g)(x)| \\
&= \max_{x\in I} \left| \int_a^x F(t, f(t)) \,\mathrm{dt} - \int_a^x F(t, g(t)) \,\mathrm{dt} \right| \\
&= \max_{x\in I} \left| \int_a^x F(t, f(t)) - F(t, g(t)) \,\mathrm{dt} \right| \\
&\le \max_{x\in I} \int_a^x |F(t, f(t)) - F(t, g(t))| \,\mathrm{dt} \\
&\le \max_{x\in I} \int_a^x M \cdot |f(t) - g(t)| \,\mathrm{dt} \\
&\le \max_{x\in I} \int_a^x M \cdot d(f, g) \,\mathrm{dt} \\
&= \delta M \cdot d(f, g).
\end{aligned}$$

Ku příkladu, když $\delta = \frac{1}{2}M$, pak A je kontrahující zobrazení s konstantou $c = \frac{1}{2}$. □

4.2 Peanova věta

Věta (Peanova)**:** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in U \subset \mathbb{R}^2$, kde U je otevřená množina v euklidovském metrickém prostoru $\mathbb{R}^2$, a $F : U \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce*

$$f : [a - \delta, a + \delta] \to \mathbb{R},$$

že

$$f(a) = b \wedge \forall x \in [a - \delta, a + \delta] : f'(x) = F(x, f(x)).$$

Věta (Arzelà-Ascoliova)**:** *Nechť $I = [a, b]$ je kompaktní reálný interval a $C(I)$ je metrický prostor spojitých funkcí $f : I \to \mathbb{R}$ s maximovou metrikou. Množina $X \subset C(I)$ je kompaktní, právě když*

$$\exists c > 0 \,\forall f \in X \,\forall x \in I : |f(x)| < c$$

— funkce v X jsou stejně omezené — a

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall f \in X \,\forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

— funkce v X jsou stejně (stejnoměrně) spojité.

4.3 Příklady diferenciálních rovnic

Poznámka (Dělení diferenciálních rovnic)**:** Diferenciální rovnice dělíme na následující.

1. Obyčejné diferenciální rovnice[17], v nichž vystupují funkce jedné proměnné.

2. Parciální diferenciální rovnice[18], které obsahují funce více proměnných a jejich parciální derivace.

[17] ODR, *anglicky* ODE
[18] PDR, *anglicky* PDE

4.3.1 Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad (Newtonův zákon síly):

$$mx'' = F,$$

kde $x = x(t) \in \mathbb{R}$ je poloha v čase t částice o hmotnosti m vystavené působení síly F[19]. Síla může být obecně funkcí času, polohy částice a její rychlosti: $F = F(t, x, x')$. Nejjednodušší situace je pro konstantní F, či obecněji pro F závisející jen na t — pak $x(t) = \int\int F$. Nastává to třeba při působení tíhového pole Země. To se nemění v čase a nezávisí na poloze částice[20] a už vůbec ne na její rychlosti, což jsou ale všechno idealizace[21]. Rovnice volného pádu pak je

$$mx'' = -mg,$$

kde g je konstanta tíhového zrychlení. Všechna její řešení jsou právě a jen funkce

$$X := \left\{x(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Ty vyjadřují skutečnost, že pohyb padající částice je určen jednoznačně teprve zadáním její polohy $x(t_0)$ a rychlosti $x'(t_0)$ v nějakém časovém okamžiku t_0.

Příklad (Rovnice radioaktivního rozpadu): Rovnice radioaktivního rozpadu

$$\frac{dR}{dt} = -kR$$

popisuje vývoj množství $R = R(t)$ rozpadajícího se radioaktivního materiálu v čase t[22]. Je jasné, že každá funkce

$$R = R(t) = c\exp(-kt),$$

kde c je konstanta, je řešením této rovnice.

4.3.2 Parciální diferenciální rovnice

Příklad (Laplaceova rovnice[23]):

$$u = u(x, y) \ :\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Příklad (Rovnice difuze[24]):

$$u = u(x, t) \ :\ \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Příklad (Vlnová rovnice):

$$u = u(x, t) \ :\ a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

V předchozích příkladech jsou α a a konstanty.

[19] zde uvažujeme jen jednoduchý jednorozměrný případ
[20] pro malá měřítka
[21] hlavně nezávislost na x
[22] k je materiálová konstanta
[23] rovnice potenciálu
[24] rovnice vedení tepla

4.4 Obecný tvar ODR, (Ne)lineární diferenciální rovnice

Definice (Obecný tvar)**:** Obecný tvar obyčejné diferenciální rovnice pro neznámou funkci $y = y(x)$ je ($n \in \mathbb{N}$)

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde F je nějaká funkce $n + 2$ proměnných.

Definice (Řád rovnice)**:** Nejvyššímu řádu n derivace vyskytujícímu se v rovnici říkáme řád rovnice.

Definice ((Ne)lineární diferenciální rovnice)**:** Diferenciální rovnice tvaru ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0(x)y = b(x),$$

kde $a_i(x)$ a $b(x)$ jsou zadané funkce a $y = y(x)$ je neznámá funkce, je lineární direfenciální rovnice (řádu n a s pravou stranou $b(x)$). Pokud je $b(x)$ identicky nulová, mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici.

Diferenciální rovnice, které nejsou tohoto tvaru[25], jsou nelineární diferenciální rovnice.

Příklad (Rovnice kyvadla)**:** Například rovnice kyvadla

$$\theta'' + \left(\frac{g}{l}\right) \sin\theta = 0,$$

která popisuje pohyb kyvadla délky l kývajícího se v homogenním tíhovém poli[26] — úhel $\theta = \theta(t)$ je odchylka kyvadla od svislice v čase t — je nelineární. Pro malé výchylky θ platí $\sin\theta = \theta$ a můžeme řešit lineární aproximaci rovnice kyvadla $\theta'' + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0$, což už je lineární ODR.

Poznámka: Rovnice volného pádu i rovnice radioaktivního rozpadu jsou lineární.

4.5 Algebraické diferenciální rovnice

Definice (Algebraické diferenciální rovnice[27])**:** Diferenciální rovnice (opět $n \in \mathbb{N}$)

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

v nichž F je polynom v $n + 2$ proměnných, jsou algebraické diferenciální rovnice.

4.5.1 Výsledky o ADE

1. výsledek

Příklad (Eulerova gama funkce $\Gamma(z)$)**:** Eulerova gamma funkce $\Gamma(z)$ je pro komplexní z s $\mathrm{re}(z) > 0$ definována integrálem

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Věta (Hölder)**:** *Funkce gama nesplňuje žádnou (netriviální) ADE, pro žádný nenulový komplexní polynom F s $n + 2$ proměnnými.*

[25] a závisejí tedy na některých proměnných pro neznámou a její derivace nelineárně
[26] g je konstanta tíhového zrychlení
[27] *anglická* zkratka ADE

2. výsledek

Příklad: Zavedeme si v jednotkovém komplexním kruhu $|z| < 1$ funkce

$$\vartheta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \quad \text{a} \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^n}.$$

Věta (Pozitivně o ADE)**:** *Obě funkce $\vartheta(z)$ i $P(z)$ splňují netriviální (a dosti složité) ADE.*

3. výsledek

Příklad (Stirlingova čísla (druhého druhu))**:** Definujeme formální mocninnou řadu

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)},$$

kde pro $k = 0$ položíme sčítanec rovný 1. Dále pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n,k) x^n := \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$$

Vždy platí $S(n,k) \in \mathbb{N}_0$. Tyto čísla nazýváme Stirlingova čísla(druhého druhu).

Příklad (Bellova čísla)**:** V předchozím příkladě jsou koeficienty B_n vyjádřeny pomocí Stirlingových čísel jako

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

a B_n je počet všech množinových rozkladů n-prvkové množiny. B_n jsou takzvaná Bellova čísla.

Věta (Klazar)**:** *Formální mocninná řada*

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n,$$

to jest obyčejná generující funkce Bellových čísel, nesplňuje žádnou netriviální ADE.

4.6 Rovnice se separovanými proměnými

Definice (Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými)**:** DR se separovanými proměnnými je obecně nelineární diferenciální rovnice prvního řádu tvaru

$$y(a) = b \wedge y' = f(x) \cdot g(y)$$

pro neznámou funkci $y = y(x)$ s předepsanou hodnotou $y(a) = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, kde $f(x)$, resp. $g(y)$, je funkce definovaná a spojitá na nějakém otevřeném intervalu $I \ni a$, resp. $J \ni b$, a g je na J nenulová.

Poznámka: Tento typ rovnice lze lokálně jednoznačně vyřešit funkcí $y : I' \to J$, pro nějaký otevřený interval I' splňující $a \in I' \subset I$. Řešení je vyjádřené (implicitně) pomocí neurčitých integrálů funkcí $\frac{1}{g}$ a f. Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a ten přepíšeme pomocí pevně zvolené funkce $G := \int \frac{1}{g}$(funkce primitivní na intervalu J k funkci $\frac{1}{g}$) jako

$$\forall x \in I' : G(y(x))' = f(x).$$

Máme tedy rovnici
$$\forall x \in I' : G(y(x)) = F(x) + c,$$
kde $F := \int f$ je předem pevně zvolená funkce, primitivní na intervalu I k funkci f, a c je (integrační) konstanta. Řešení $y(x)$ původní rovnice je tak dáno jako implicitní funkce vztahem

$$\forall x \in I' : \underbrace{G(y(x)) = F(x) + c}_{(*)}, \text{ kde } G = \int \frac{1}{g}, F = \int f$$

a konstanta c je určená vztahem $G(b) = F(a) + c$. Z věty o implicitní funkci[28] plyne, že existuje otevřený onterval I' s $a \in I' \subset I$ a jednoznačně určená funkce $y : I' \to J$, že $y(a) = b$ na I' platí vztah $(*)$. Na I' tedy máme jednoznačné řešení rovnice(v definici).

4.7 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Poznámka (Lineární diferenciální rovnice 1. řádu)**:** Je to rovnice tvaru($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$)

$$y(x_0) = y_0 \wedge y' + a(x)y = b(x),$$

kde $y = y(x)$ je neznámí funkce a funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou dané, definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu $I \ni x_0$.

Poznámka (Řešení lineární dif. rovnice 1. řádu)**:** Lokální jednoznačnost a existence řešení rovnice plyne z *Picardovy věty*. Rovnici tedy stačí vyřešit[29]. Nejprve nalezneme takovou funkci $c = c(x)$, tzv. *integrační faktor*, že
$$c \cdot (y' + ay) = (cy)'.$$
Pak $cy' + acy = cy' + c'y$ a c musí splňovat rovnici $ac = c'$, čili $(\log c)' = a$. Funkce $c = e^A$, kde $A = \int a$, má tedy požadovanou vlastnost. Výchozí lineární rovnici vynásobíme integračním faktorem a dostaneme
$$(cy)' = c(y' + ay) = cb.$$
Takže $(cy)' = cb$ a $cy = D + c_0$, kde $D = \int cb$ a c_0 je integrační konstanta. Máme tedy řešení $y = c^{-1}(D + c_0)$. Shrnuto,

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} b(x) \,\mathrm{dx} + c_0 \right), \text{ kde } A(x) = \int a(x) \,\mathrm{dx}.$$

Všimněte si, že $y(x)$ je definovaná na celém I(definičním oboru funkcí a a b) a že každé počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ odpovídá právě jedna hodnota integrační konstanty c_0, pro níž je splňena.

The End

[28] viz ma2-poznamky
[29] vyjádřit její řešení z koeficientů a a b pomocí známých funkcí a známých operací