

Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Obsah

1	Metrické prostory	2
2	Řady	3
2.1	Mocninné řady	3
2.2	Funkční řady	3
2.3	Konvergence a operace s řadami	3
2.4	Fourierovy řady	3
3	Komplexní analýza	3
3.1	Holomorfní funkce	3
3.2	Póly funkcí	3
3.3	Aplikace	3
4	Úvod do diferenciálních rovnic	3
4.1	Rovnice se separovanými proměnnými	3
4.2	Lineární rovnice	3
4.3	Věta o existenci	3

1 Metrické prostory

Definice (Metrický prostor): Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor): Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d') , tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d) . Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d) .

Definice (Izometrie): Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \rightarrow N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f , prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

Příklad (Euklidovský prostor): Euklidovský prostor (\mathbb{R}^n, e_n) , $n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\bar{x}, \bar{y}^1 \in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body \bar{x} a \bar{y} . Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n) , když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika): Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru \mathbb{R}^n . Funkci $s : S \times S \rightarrow [0, \pi]$ definujeme pro $\bar{x}, \bar{y} \in S$ jako

$$s(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 \dots \bar{x} = \bar{y} \\ \varphi \dots \bar{x} \neq \bar{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma přímkami procházejícími počátkem $\bar{0}$ a body \bar{x} a \bar{y} . Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body \bar{x} a \bar{y} na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body \bar{x} a \bar{y} . Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: (S, s) je metrický prostor.

Definice ((Horní) hemisféra): (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

Věta (H není plochá): Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$

¹ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

Definice (Ultrametrika): Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika (nearchimédovská metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru): *V ultrametrickém prostoru (M, d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule): (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M, d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

p -adické metriky jsem prozatím vynechal.

2 Řady

2.1 Mocninné řady

2.2 Funkční řady

2.3 Konvergence a operace s řadami

2.4 Fourierovy řady

3 Komplexní analýza

3.1 Holomorfní funkce

3.2 Póly funkcí

3.3 Aplikace

4 Úvod do diferenciálních rovnic

4.1 Rovnice se separovanými proměnnými

4.2 Lineární rovnice

4.3 Věta o existenci

The End