

Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Tyto poznámky jsem sepsal pro přípravu na zkoušku z přednášek pana doc. Klazara. Neprošly zatím žádnou korekcí, budou tedy pravděpodobně obsahovat mnoho chyb. Pokud v poznámkách najdete chybu, nebo pokud budete mít nějakou připomínku k tomu, jak jsou psané, kontaktujte mě prosím na Discordu, nebo mi dejte pull-request na <https://github.com/3011/ma3-poznamky>. Ke většině vět jsem vynechal důkazy, psal jsem je téměř výhradně k větám/tvrzením, která spadají k otázkám vypsáním ke zkoušce.

Obsah

1	Metrické prostory	3
1.1	Definice	3
1.2	Euklidovský prostor, Sférická metrika	3
1.3	p -adické metriky	4
1.4	Kompaktnost množin v metrických prostorech	5
1.5	Topologická spojitost	7
1.6	Heine-Borelova věta	7
1.7	Souvislé množiny a metrické prostory	7
1.8	Základní věta algebry	8
1.9	Úplné množiny a metrické prostory	9
1.10	Baireova věta	9
2	Řady	10
2.1	Mocninné řady	10
2.2	Funkční řady	10
2.3	Konvergence a operace s řadami	10
2.4	Fourierovy řady	10
3	Komplexní analýza	10
3.1	Holomorfní funkce	10
3.2	Póly funkcí	10
3.3	Aplikace	10
4	Úvod do diferenciálních rovnic	10
4.1	Rovnice se separovanými proměnnými	10
4.2	Lineární rovnice	10
4.3	Věta o existenci	10

1 Metrické prostory

1.1 Definice

Definice (Metrický prostor): Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor): Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d') , tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d) . Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d) .

Definice (Izometrie): Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \rightarrow N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f , prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

1.2 Euklidovský prostor, Sférická metrika

Příklad (Euklidovský prostor): Euklidovský prostor (\mathbb{R}^n, e_n) , $n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\bar{x}, \bar{y}^1 \in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body \bar{x} a \bar{y} . Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n) , když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika): Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru \mathbb{R}^n . Funkci $s : S \times S \rightarrow [0, \pi]$ definujeme pro $\bar{x}, \bar{y} \in S$ jako

$$s(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 \dots \bar{x} = \bar{y} \\ \varphi \dots \bar{x} \neq \bar{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřímkami procházejícími počátkem $\bar{0}$ a body \bar{x} a \bar{y} . Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body \bar{x} a \bar{y} na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body \bar{x} a \bar{y} . Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: (S, s) je metrický prostor.

Definice ((Horní) hemisféra): (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

¹ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

Věta (H není plochá): *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

Důkaz: TODO □

Definice (Ultrametrika): Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika (nearchimédovská metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru): *V ultrametrickém prostoru (M, d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule): (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M, d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

1.3 p -adické metriky

Definice (p -adický řád): Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p -adický řád čísla n definujeme

$$\text{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\text{ord}_p(0) := +\infty$.

Poznámka (Rozšíření $\text{ord}_p(\cdot)$ na zlomky): Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\text{ord}_p(\alpha) := \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\text{ord}_p(0) = \text{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (aditivita $\text{ord}_p(\cdot)$): *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \text{ord}_p(\alpha\beta) = \text{ord}_p(\alpha) + \text{ord}_p(\beta)$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (+\infty) := +\infty$, pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Definice (p -adická norma): Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$ jako

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p := c^{\text{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Tvrzení (multiplikativita $|\cdot|_p$): *Pro každé p a každé dva zlomky α, β (a každé $c \in (0, 1)$) je*

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p |\beta|_p$$

². $|\cdot|$ značí relaci dělitelnosti.

Definice (Normované těleso): Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso vybavené normou $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

Tvrzení: Pro každé normované těleso $(F, |\cdot|_F)$ je funkce $d(x, y) := |x - y|_F$ metrika na F . Pokud $|\cdot|_F$ splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je d ultrametrika.

Tvrzení (o $|\cdot|_p$): Pro každé prvočíslo p a každé $c \in (0, 1)$ je $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ normované těleso. Příslušný metrický prostor (\mathbb{Q}, d) s $d(x, y) := |x - y|_F$ je ultrametrický prostor.

Definice (Triviální norma): Triviální norma na libovolném tělese F je funkce $\|\cdot\|$ s $\|0_F\| = 0$ a $\|x\| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Tvrzení (Mocnění obvyklé absolutní hodnoty): Pro $c > 0$ je $|\cdot|^c$ norma (na \mathbb{Q}, \mathbb{R} a \mathbb{C}), právě když $c \leq 1$.

Definice (Kanonická p -adická norma): Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p -adická norma $\|\cdot\|_p$ definovaná jako

$$\|\alpha\|_p := p^{-\text{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p -adické normě $\|\cdot\|_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Věta (A. Ostrowski): Nechť $\|\cdot\|$ je norma na tělese racionálních čísel \mathbb{Q} . Pak nastává jedna ze tří následujících možností.

1. Je to triviální norma.
2. Existuje reálné $c \in (0, 1]$ takové, že $\|x\| = |x|^c$.
3. Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p , že $\|x\| = |x|_p = c^{\text{ord}_p(x)}$ (kde $c^\infty := 0$).

Modifikovaná absolutní hodnota a p -adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: TODO

□

1.4 Kompaktnost množin v metrických prostorech

Poznámka (Konvence): $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ jsou reálná čísla a $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Limitu píšeme jako $\lim a_n = a$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Definice (Limita): Nechť je (M, d) metrický prostor, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. (a_n) má limitu v (M, d) , pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

.

Definice (Konvergence, Divergence): Pokud má (a_n) limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

Definice (Kompaktní metrický prostor): Buď (M, d) metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že X je kompaktní, pokud

$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m_n} = a.$$

Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X . Metrický prostor (M, d) je kompaktní, pokud M je kompaktní.

Definice (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory): Buďte (M, d) a (N, e) metrické prostory a buď $f : M \rightarrow N$ zobrazení mezi nimi. f je spojité v $a \in M$, pokud

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Zobrazení f je spojité, pokud je spojité v každém bodě $a \in M$.

Věta (Princip maxima): *Nechť (M, d) je metrický prostor,*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

je funkce z M do reálné osy a $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina. Pak

$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší hodnotu $f(a)$ a největší hodnotu $f(b)$.

Definice (Součin metrických prostorů): Pro metrické prostory (M, d) a (N, e) definujeme jejich součin $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ je na něm dána jako

$$(d \times e)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + e(a_2, b_2)^2}$$

Definice (Otevřená množina): Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je otevřená, pokud

$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a, r) \subset X.$$

Definice (Uzavřená množina): Množina X je uzavřená, pokud $M \setminus X$ je otevřená.

Definice (Omezená množina): Množina X je omezená, pokud

$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a, r)$$

Definice (Diametr): Diametr (průměr) množiny X je s $V := \{d(a, b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako

$$\text{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \dots \text{množina } V \text{ je shora omezená} \\ +\infty & \dots \text{množina } V \text{ není shora omezená} \end{cases}$$

Věta (Kompaktní \Rightarrow uzavřená a omezená, součin): *Platí následující:*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d) , pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*
2. *Jsou-li (M, d) a (N, e) dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní metrický prostor.*

Věta (Kompaktní množina v \mathbb{R}^n): *V každém Euklidovském metrickém prostoru (\mathbb{R}^n, e_n) je množina $X \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

1.5 Topologická spojitost

Tvrzení (Topologická spojitost): *Nechť $f : M \rightarrow N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) . prostorem*

$$f \text{ je spojité} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^3$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Topologická spojitost pro podprostory): *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdňá množina a $f : X \rightarrow N$. prostorem*

$$f \text{ je spojité zobrazení definované na } (X, d) \iff \forall \text{ OM } A \subset N : \exists \text{ OM } B \subset M : f^{-1}[A] = X \cap B.$$

Topologickou definici spojitosti jsme rozšířili na podprostory.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu): *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdňá kompaktní množina a*

$$f : X \rightarrow N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu): *Nechť $f : X \rightarrow N$ je spojité zobrazení z neprázdňé kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do (N, e) . Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \rightarrow X$$

je spojité.

Definice (Homeomorfismus): Zobrazení $f : M \rightarrow N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M, d) a (N, e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.

1.6 Heine-Borelova věta

Definice (Topologická kompaktnost): Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova): *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: TODO

□

1.7 Souvislé množiny a metrické prostory

Definice (Obojetná množina): Podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je obojetná⁴, je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny \emptyset a M .

Definice (Souvislý prostor): Prostor (M, d) je souvislý, pokud v něm neexistuje netriviální⁵ obojetná podmnožina. Jinak, má-li M obojetnou podmnožinu $X \subset M$ s $X \neq \emptyset$, je nesouvislý.

³OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.

⁴anglicky *clopen*

⁵Různou od M a \emptyset .

Definice (Souvislá podmnožina): Podmnožina $X \subset M$ je souvislá, je-li podprostor (X, d) souvislý. Pokud podprostor (X, d) souvislý není, je nesouvislá.

Definice (Trhání množiny): Necht (M, d) je metrický prostor a $X, A, B \subset M$. Řekneme, že množiny A a B trhají množinu X , pokud A a B jsou otevřené a platí všechna následující

- $X \subset A \cup B$
- $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$
- $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \emptyset$

Tvrzení: Podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá množina v metrickém prostoru (M, d) , právě když existují $A, B \subset M$, které ji trhají.

1.8 Základní věta algebry

Věta (Základní věta algebry): Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{j=0}^n a_j \alpha^j = 0$$

Věta (Souvislost intervalů): Každý interval $[a, b] \subset \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$, je souvislá množina.

Věta (souvislost a spojitost): Necht $f : X \rightarrow N$ je spojitě zobrazení ze souvislé množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do metrického prostoru (N, e) . Potom

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subset N$$

je souvislá množina.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

Tvrzení: Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.

Tvrzení (Druhá odmocnina v \mathbb{C}): $\forall a + bi \in \mathbb{C}$ máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech

$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že $(c + di)^2 = a + bi$.

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n -té odmocniny v \mathbb{C}): Komplexní čísla obsahují všechny n -té odmocniny, tedy

$$\forall u \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: TODO

□

Tvrzení (Redukce na n -té odmocniny): Když \mathbb{C} obsahuje všechny n -té odmocniny, pak platí Základní věta algebry a každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.

1.9 Úplné množiny a metrické prostory

Definice (Cauchyova posloupnost): Cauchyova posloupnost (a_n) splňuje, že

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Definice (Úplný metrický prostor): Metrický prostor (M, d) je úplný, je-li každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset M$ konvergentní.

Definice (Úplná množina): Množina $X \subset M$ je úplná, je-li podprostor (X, d) úplný.

Tvrzení (úplnost uzavřených podprostorů): V úplném metrickém prostoru (M, d) je každá uzavřená množina $X \subset M$ úplná.

1.10 Baireova věta

Definice (Řídká a hustá množina): Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je řídká(v M), pokud

$$\forall a \in M \forall r > 0 \exists b \in M \exists s > 0 : B(b, s) \subset B(a, r) \wedge B(b, s) \cap X = \emptyset$$

Každá koule v (M, d) tedy obsahuje podkouli disjunktní s X . Podobně množina $Y \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je hustá(v M), pokud

$$\forall a \in M \forall r > 0 : B(a, r) \cap Y \neq \emptyset$$

Tvrzení (hustota a spojitost): Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je hustá v M a

$$f, g : M \rightarrow N$$

jsou taková spojitá zobrazení, že $f|_X = g|_X$ ⁶ Potom $f = g$.

Definice (Uzavřená koule): Pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ rozumíme v metrickém prostoru (M, d) uzavřenou koulí $\overline{B}(a, r)$ množinu

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Uzavřená koule je uzavřená množina a pro každé $a \in M$ a kladná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ t.ž. $r < s$ je $\overline{B}(a, r) \subset B(a, s)$.

Věta (Baireova): Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Pak některá množina X_n není řídká.

Důsledek (o úplném metrickém prostoru): Každý úplný metrický prostor (M, d) , který neobsahuje izolované body, je nespočetný.

⁶Zúžení obou funkcí na množinu X se shodují.

2 Řady

2.1 Mocninné řady

2.2 Funkční řady

2.3 Konvergence a operace s řadami

2.4 Fourierovy řady

3 Komplexní analýza

3.1 Holomorfní funkce

3.2 Póly funkcí

3.3 Aplikace

4 Úvod do diferenciálních rovnic

4.1 Rovnice se separovanými proměnnými

4.2 Lineární rovnice

4.3 Věta o existenci

The End