

# Matematická analýza III

Stručné výpisky  
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

**Viktor Soukup**

Tyto poznámky jsem sepsal pro přípravu na zkoušku z přednášek pana doc. Klazara. Neprošly zatím žádnou korekcí, budou tedy pravděpodobně obsahovat mnoho chyb. Pokud v poznámkách najdete chybu, nebo pokud budete mít nějakou připomínku k tomu, jak jsou psané, kontaktujte mě prosím na Discordu, nebo mi dejte pull-request na <https://github.com/3011/ma3-poznamky>. Ke většině vět jsem vynechal důkazy, psal jsem je téměř výhradně k větám/tvrzením, která spadají k otázkám vypsáním ke zkoušce.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Metrické prostory</b>	<b>3</b>
1.1	Definice	3
1.2	Euklidovský prostor, Sférická metrika	3
1.3	$p$ -adické metriky	4
1.4	Kompaktnost množin v metrických prostorech	5
1.5	Topologická spojitost	7
1.6	Heine-Borelova věta	7
1.7	Souvislé množiny a metrické prostory	7
1.8	Základní věta algebry	8
1.9	Úplné množiny a metrické prostory	9
1.10	Baireova věta	9
<b>2</b>	<b>Řady</b>	<b>9</b>
2.1	Definice	9
2.2	Fourierova řada funkce	10
2.3	Basilejský problém	12
2.4	Divergentní řady	13
2.5	Konvergence řad	13
2.5.1	Absolutní konvergence	13
2.5.2	Stejněměrná a bodová konvergence	14
2.6	Mocninné řady	15
2.6.1	Pólyova věta o náhodných procházkách	17
<b>3</b>	<b>Komplexní analýza</b>	<b>18</b>
3.1	Holomorfní a analytické funkce	19
3.1.1	Odlišnosti reálné a komplexní analýzy	19
3.2	Úsečky a obdélníky	20
3.3	Integrály	21
3.4	Konstanta $\rho = 2\pi i$	22
3.5	Cauchy-Goursatova věta	23
3.6	Funkcionál $\int$	25
3.7	Meromorfní funkce a rezidua	26
<b>4</b>	<b>Úvod do diferenciálních rovnic</b>	<b>26</b>
4.1	Picardova věta	27
4.2	Peanova věta	27
4.3	Příklady diferenciálních rovnic	28
4.3.1	Obyčejné diferenciální rovnice	28
4.3.2	Parciální diferenciální rovnice	28
4.4	Obecný tvar ODR, (Ne)lineární diferenciální rovnice	29
4.5	Algebraické diferenciální rovnice	29
4.5.1	Výsledky o ADE	29
4.6	Rovnice se separovanými proměnnými	30
4.7	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	31

# 1 Metrické prostory

## 1.1 Definice

**Definice** (Metrický prostor): Metrický prostor je dvojice  $(M, d)$  množiny  $M \neq \emptyset$  a zobrazení

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které  $\forall x, y, z \in M$  splňuje:

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i  $d(x, y) \geq 0$ .

**Definice** (Podprostor): Každá podmnožina  $X \subset M$  určuje nový metrický prostor  $(X, d')$ , tak zvaný podprostor metrického prostoru  $(M, d)$ . Pro  $x, y \in X$  klademe  $d'(x, y) := d(x, y)$ . Obě metriky označíme stejným symbolem a máme  $(X, d)$ .

**Definice** (Izometrie): Izometrie  $f$  dvou metrických prostorů  $(M, d)$  a  $(N, e)$  je bijekce  $f : M \rightarrow N$ , jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li  $f$ , prostory  $M$  a  $N$  jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

## 1.2 Euklidovský prostor, Sférická metrika

**Příklad** (Euklidovský prostor): Euklidovský prostor  $(\mathbb{R}^n, e_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , s metrikou  $e_n$  danou pro  $\bar{x}, \bar{y}^1 \in \mathbb{R}^n$  formulí

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je  $e_n$  délka úsečky určené body  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$ . Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor  $(X, e_n)$ , když  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

**Příklad** (Sférická metrika): Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Funkci  $s : S \times S \rightarrow [0, \pi]$  definujeme pro  $\bar{x}, \bar{y} \in S$  jako

$$s(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 \dots \bar{x} = \bar{y} \\ \varphi \dots \bar{x} \neq \bar{y} \end{cases}$$

kde  $\varphi$  je úhel sevřený dvěma polopřímkami procházejícími počátkem  $\bar{0}$  a body  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$ . Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$  na jednotkové kružnici vytknuté na  $S$  rovinou určenou počátkem a body  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$ . Funkci  $s$  nazveme sférickou metrikou.

**Tvrzení:**  $(S, s)$  je metrický prostor.

**Definice** ((Horní) hemisféra): (Horní) hemisféra  $H$  je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

---

<sup>1</sup> $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

**Věta** ( $H$  není plochá): *Metrický prostor  $(H, s)$  není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru  $(X, e_n)$  s  $X \subset \mathbb{R}^n$*

**Důkaz: TODO** □

**Definice** (Ultrametrika): Metrika  $d$  v metrickém prostoru  $(M, d)$  je ultrametrika (nearchimédovská metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Protože  $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

**Tvrzení** (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru): *V ultrametrickém prostoru  $(M, d)$  je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

**Definice** (Otevřená koule): (Otevřená) koule v metrickém prostoru  $(M, d)$  se středem v  $a \in M$  a poloměrem  $r > 0$  je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M$$

Vždy  $B(a, r) \neq \emptyset$ , protože  $a \in B(a, r)$ .

### 1.3 $p$ -adické metriky

**Definice** ( $p$ -adický řád): Nechť  $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  je prvočíslo a nechť  $n \in \mathbb{Z}$  je nenulové celé číslo. Jako  $p$ -adický řád čísla  $n$  definujeme

$$\text{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě  $\forall p$  definujeme  $\text{ord}_p(0) := +\infty$ .

**Poznámka** (Rozšíření  $\text{ord}_p(\cdot)$  na zlomky): Pro nenulové  $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  definujeme

$$\text{ord}_p(\alpha) := \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$$

Jinak opět  $\text{ord}_p(0) = \text{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$ .

**Tvrzení** (aditivita  $\text{ord}_p(\cdot)$ ): *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \text{ord}_p(\alpha\beta) = \text{ord}_p(\alpha) + \text{ord}_p(\beta)$$

*kde  $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (+\infty) := +\infty$ , pro každé  $n \in \mathbb{Z}$ .*

**Definice** ( $p$ -adická norma): Fixujeme reálnou konstantu  $c \in (0, 1)$  a definujeme funkci  $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$  jako

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p := c^{\text{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe  $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

**Tvrzení** (multiplikativita  $|\cdot|_p$ ): *Pro každé  $p$  a každé dva zlomky  $\alpha, \beta$  (a každé  $c \in (0, 1)$ ) je*

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p |\beta|_p$$

---

<sup>2</sup>.  $|\cdot|$  značí relaci dělitelnosti.

**Definice** (Normované těleso): Normované těleso  $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$ , psáno zkráceně  $(F, |\cdot|_F)$ , je těleso vybavené normou  $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$ , jež splňuje tři následující požadavky

1.  $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2.  $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3.  $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

**Tvrzení:** Pro každé normované těleso  $(F, |\cdot|_F)$  je funkce  $d(x, y) := |x - y|_F$  metrika na  $F$ . Pokud  $|\cdot|_F$  splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je  $d$  ultrametrika.

**Tvrzení** (o  $|\cdot|_p$ ): Pro každé prvočíslo  $p$  a každé  $c \in (0, 1)$  je  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$  normované těleso. Příslušný metrický prostor  $(\mathbb{Q}, d)$  ( $d(x, y) := |x - y|_F$ ) je ultrametrický prostor.

**Definice** (Triviální norma): Triviální norma na libovolném tělese  $F$  je funkce  $\|\cdot\|$  s  $\|0_F\| = 0$  a  $\|x\| = 1$  pro  $x \neq 0_F$ .

**Tvrzení** (Mocnění obvyklé absolutní hodnoty): Pro  $c > 0$  je  $|\cdot|^c$  norma (na  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ ), právě když  $c \leq 1$ .

**Definice** (Kanonická  $p$ -adická norma): Pro  $\alpha \in \mathbb{Q}$  a prvočíslo  $p$  je kanonická  $p$ -adická norma  $\|\cdot\|_p$  definovaná jako

$$\|\alpha\|_p := p^{-\text{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné  $p$ -adické normě  $\|\cdot\|_p$  klademe  $c := \frac{1}{p}$ .

**Věta** (A. Ostrowski): Nechť  $\|\cdot\|$  je norma na tělese racionálních čísel  $\mathbb{Q}$ . Pak nastává jedna ze tří následujících možností.

1. Je to triviální norma.
2. Existuje reálné  $c \in (0, 1]$  takové, že  $\|x\| = |x|^c$ .
3. Existuje reálné  $c \in (0, 1)$  a prvočíslo  $p$ , že  $\|x\| = |x|_p = c^{\text{ord}_p(x)}$  (kde  $c^\infty := 0$ ).

Modifikovaná absolutní hodnota a  $p$ -adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

**Důkaz:** TODO

□

## 1.4 Kompaktnost množin v metrických prostorech

**Poznámka** (Konvence):  $\varepsilon > 0$  a  $\delta > 0$  jsou reálná čísla a  $n, n_0 \in \mathbb{N}$ . Limitu píšeme jako  $\lim a_n = a$  nebo  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**Definice** (Limita): Nechť je  $(M, d)$  metrický prostor,  $(a_n) \subset M$  je posloupnost bodů v něm a  $a \in M$  je bod.  $(a_n)$  má limitu v  $(M, d)$ , pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

.

**Definice** (Konvergence, Divergence): Pokud má  $(a_n)$  limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

**Definice** (Kompaktní metrický prostor): Buď  $(M, d)$  metrický prostor a  $X \subset M$ . Řekneme, že  $X$  je kompaktní, pokud

$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m_n} = a.$$

Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny  $X$  má konvergentní podposloupnost s limitou v  $X$ . Metrický prostor  $(M, d)$  je kompaktní, pokud  $M$  je kompaktní.

**Definice** (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory): Buďte  $(M, d)$  a  $(N, e)$  metrické prostory a buď  $f : M \rightarrow N$  zobrazení mezi nimi.  $f$  je spojité v  $a \in M$ , pokud

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Zobrazení  $f$  je spojité, pokud je spojité v každém bodě  $a \in M$ .

**Věta** (Princip maxima): *Nechť  $(M, d)$  je metrický prostor,*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

*je funkce z  $M$  do reálné osy a  $X \subset M$  je neprázdná kompaktní množina. Pak*

$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

*Funkce  $f$  tedy na  $X$  nabývá svou nejmenší hodnotu  $f(a)$  a největší hodnotu  $f(b)$ .*

**Definice** (Součin metrických prostorů): Pro metrické prostory  $(M, d)$  a  $(N, e)$  definujeme jejich součin  $(M \times N, d \times e)$  tak, že  $M \times N$  je kartézský součin množin  $M$  a  $N$  a metrika  $d \times e$  je na něm dána jako

$$(d \times e)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + e(a_2, b_2)^2}$$

**Definice** (Otevřená množina): Množina  $X \subset M$  v metrickém prostoru  $(M, d)$  je otevřená, pokud

$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a, r) \subset X.$$

**Definice** (Uzavřená množina): Množina  $X$  je uzavřená, pokud  $M \setminus X$  je otevřená.

**Definice** (Omezená množina): Množina  $X$  je omezená, pokud

$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a, r)$$

**Definice** (Diametr): Diametr (průměr) množiny  $X$  je s  $V := \{d(a, b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$  definovaný jako

$$\text{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \dots \text{množina } V \text{ je shora omezená} \\ +\infty & \dots \text{množina } V \text{ není shora omezená} \end{cases}$$

**Věta** (Kompaktní  $\Rightarrow$  uzavřená a omezená, součin): *Platí následující:*

1. *Když  $X \subset M$  je kompaktní množina v metrickém prostoru  $(M, d)$ , pak  $X$  je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*
2. *Jsou-li  $(M, d)$  a  $(N, e)$  dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin  $(M \times N, d \times e)$  je kompaktní metrický prostor.*

**Věta** (Kompaktní množina v  $\mathbb{R}^n$ ): *V každém Euklidovském metrickém prostoru  $(\mathbb{R}^n, e_n)$  je množina  $X \subset \mathbb{R}^n$  kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

## 1.5 Topologická spojitost

**Tvrzení** (Topologická spojitost): *Nechť  $f : M \rightarrow N$  je zobrazení mezi metrickými prostory  $(M, d)$  a  $(N, e)$ . prostorem*

$$f \text{ je spojité} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^3$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

**Tvrzení** (Topologická spojitost pro podprostory): *Nechť  $(M, d)$  a  $(N, e)$  jsou metrické prostory,  $X \subset M$  je neprázdna množina a  $f : X \rightarrow N$ . prostorem*

$$f \text{ je spojité zobrazení definované na } (X, d) \iff \forall \text{ OM } A \subset N : \exists \text{ OM } B \subset M : f^{-1}[A] = X \cap B.$$

Topologickou definici spojitosti jsme rozšířili na podprostory.

**Tvrzení** (Spojitý obraz kompaktu): *Nechť  $(M, d)$  a  $(N, e)$  jsou metrické prostory,  $X \subset M$  je neprázdna kompaktní množina a*

$$f : X \rightarrow N$$

*je spojitá funkce. Pak obraz  $f[X] \subset N$  je kompaktní množina.*

**Tvrzení** (Spojitost inverzu): *Nechť  $f : X \rightarrow N$  je spojité zobrazení z neprázdne kompaktní množiny  $X \subset M$  v metrickém prostoru  $(M, d)$  do  $(N, e)$ . Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \rightarrow X$$

*je spojité.*

**Definice** (Homeomorfismus): *Zobrazení  $f : M \rightarrow N$  mezi metrickými prostory  $(M, d)$  a  $(N, e)$  je jejich homeomorfismus, je-li  $f$  bijekce a jsou-li  $f$  a  $f^{-1}$  spojitá zobrazení. Pokud mezi  $(M, d)$  a  $(N, e)$  existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.*

## 1.6 Heine-Borelova věta

**Definice** (Topologická kompaktnost): *Podmnožina  $A \subset M$  metrického prostoru  $(M, d)$  je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin  $\{X_i \mid i \in I\}$  v  $M$  platí:*

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

**Věta** (Heine-Borelova): *Podmnožina  $A \subset M$  metrického prostoru  $(M, d)$  je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

**Důkaz:** **TODO**

□

## 1.7 Souvislé množiny a metrické prostory

**Definice** (Obojetná množina): *Podmnožina  $X \subset M$  v metrickém prostoru  $(M, d)$  je obojetná<sup>4</sup>, je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny  $\emptyset$  a  $M$ .*

**Definice** (Souvislý prostor): *Prostor  $(M, d)$  je souvislý, pokud v něm neexistuje netriviální<sup>5</sup> obojetná podmnožina. Jinak, má-li  $M$  obojetnou podmnožinu  $X \subset M$  s  $X \neq \emptyset$ , je nesouvislý.*

<sup>3</sup>OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.

<sup>4</sup>anglicky *clopen*

<sup>5</sup>Různou od  $M$  a  $\emptyset$ .



**Definice** (Souvislá podmnožina): Podmnožina  $X \subset M$  je souvislá, je-li podprostor  $(X, d)$  souvislý. Pokud podprostor  $(X, d)$  souvislý není, je nesouvislá.

**Definice** (Trhání množiny): Necht  $(M, d)$  je metrický prostor a  $X, A, B \subset M$ . Řekneme, že množiny  $A$  a  $B$  trhají množinu  $X$ , pokud  $A$  a  $B$  jsou otevřené a platí všechna následující

- $X \subset A \cup B$
- $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$
- $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \emptyset$

**Tvrzení:** Podmnožina  $X \subset M$  je nesouvislá množina v metrickém prostoru  $(M, d)$ , právě když existují  $A, B \subset M$ , které ji trhají.

## 1.8 Základní věta algebry

**Věta** (Základní věta algebry): Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{j=0}^n a_j \alpha^j = 0$$

**Věta** (Souvislost intervalů): Každý interval  $[a, b] \subset \mathbb{C}$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $a \leq b$ , je souvislá množina.

**Věta** (souvislost a spojitost): Necht  $f : X \rightarrow N$  je spojitě zobrazení ze souvislé množiny  $X \subset M$  v metrickém prostoru  $(M, d)$  do metrického prostoru  $(N, e)$ . Potom

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subset N$$

je souvislá množina.

**Poznámka:** Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

**Tvrzení:** Pro každé nezáporné  $x \in \mathbb{R}$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje nezáporné  $y \in \mathbb{R}$  takové, že  $y^n = x$ .

**Tvrzení** (Druhá odmocnina v  $\mathbb{C}$ ):  $\forall a + bi \in \mathbb{C}$  máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech

$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že  $(c + di)^2 = a + bi$ .

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé  $u \in S$  a pro každé liché  $n \in \mathbb{N}$   $\exists v \in S : v^n = u$ , pak platí následující věta.

**Věta** ( $n$ -té odmocniny v  $\mathbb{C}$ ): Komplexní čísla obsahují všechny  $n$ -té odmocniny, tedy

$$\forall u \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

**Důkaz:** TODO

□

**Tvrzení** (Redukce na  $n$ -té odmocniny): Když  $\mathbb{C}$  obsahuje všechny  $n$ -té odmocniny, pak platí Základní věta algebry a každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.

## 1.9 Úplné množiny a metrické prostory

**Definice** (Cauchyova posloupnost): Cauchyova posloupnost  $(a_n)$  splňuje, že

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

**Definice** (Úplný metrický prostor): Metrický prostor  $(M, d)$  je úplný, je-li každá Cauchyovská posloupnost  $(a_n) \subset M$  konvergentní.

**Definice** (Úplná množina): Množina  $X \subset M$  je úplná, je-li podprostor  $(X, d)$  úplný.

**Tvrzení** (úplnost uzavřených podprostorů): V úplném metrickém prostoru  $(M, d)$  je každá uzavřená množina  $X \subset M$  úplná.

## 1.10 Baireova věta

**Definice** (Řídká a hustá množina): Množina  $X \subset M$  v metrickém prostoru  $(M, d)$  je řídká(v  $M$ ), pokud

$$\forall a \in M \forall r > 0 \exists b \in M \exists s > 0 : B(b, s) \subset B(a, r) \wedge B(b, s) \cap X = \emptyset$$

Každá koule v  $(M, d)$  tedy obsahuje podkouli disjunktní s  $X$ . Podobně množina  $Y \subset M$  v metrickém prostoru  $(M, d)$  je hustá(v  $M$ ), pokud

$$\forall a \in M \forall r > 0 : B(a, r) \cap Y \neq \emptyset$$

**Tvrzení** (hustota a spojitost): Nechť  $(M, d)$  a  $(N, e)$  jsou metrické prostory,  $X \subset M$  je hustá v  $M$  a

$$f, g : M \rightarrow N$$

jsou taková spojitá zobrazení, že  $f|_X = g|_X$ <sup>6</sup> Potom  $f = g$ .

**Definice** (Uzavřená koule): Pro  $a \in M$  a reálné  $r > 0$  rozumíme v metrickém prostoru  $(M, d)$  uzavřenou kouli  $\overline{B}(a, r)$  množinu

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Uzavřená koule je uzavřená množina a pro každé  $a \in M$  a kladná čísla  $r, s \in \mathbb{R}$  t.ž.  $r < s$  je  $\overline{B}(a, r) \subset B(a, s)$ .

**Věta** (Baireova): Nechť  $(M, d)$  je úplný metrický prostor a

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Pak některá množina  $X_n$  není řídká.

**Důsledek** (o úplném metrickém prostoru): Každý úplný metrický prostor  $(M, d)$ , který neobsahuje izolované body, je nespočetný.

## 2 Řady

### 2.1 Definice

**Definice** (Řada, konvergence a divergence řady): Řada  $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je posloupnost  $(a_n) \subset \mathbb{R}$ , které je přiřazena posloupnost částečných součtů

$$(s_n) := (a_1 + \cdots + a_n) \subset \mathbb{R}.$$

<sup>6</sup>Zúžení obou funkcí na množinu  $X$  se shodují.

Pokud posloupnost  $(s_n)$  má limitu, řekneme, že řada má součet. Je-li tato limita vlastní ( $\in \mathbb{R}$ ), pak řada konverguje, jinak (součet je  $\pm\infty$  nebo neexistuje) diverguje. Součet řady se označuje stejným symbolem jako řada sama, takže také

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim s_n = \lim(a_1 + \dots + a_n).$$

**Tvrzení** (Nutná podmínka konvergence): *Když řada  $\sum a_n$  konverguje, pak  $\lim a_n = 0$ .*

**Tvrzení** (Harmonická řada):

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

**Tvrzení:**

$$\sum \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n^2} = 1$$

**Tvrzení** (Geometrická řada): *Pro každé  $q \in (-1, 1)$  je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

**Tvrzení** (Leibnizovo kritérium): *Když  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$  a  $\lim a_n = 0$ , pak řada  $\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$  konverguje.*

## 2.2 Fourierova řada funkce

**Definice** (Trigonometrická řada): Trigonometrická řada je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde  $a_n, b_n$  jsou její koefficienty a  $x \in \mathbb{R}$  je proměnná.

Trigonometrická řada je fakticky parametrický systém řad parametrizovaný proměnnou  $x$ . Chceme odvodit vyjádření široké třídy funkcí  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , pomocí trigonometrických řad.

**Definice** (Skoro skalární součin): Nechť  $\mathcal{R}(-\pi, \pi)$  je množina všech funkcí  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , které mají na  $[-\pi, \pi]$  Riemannův integrál. Pro  $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  definujeme

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg \in \mathbb{R}.^7$$

Pro tento skoro skalární součin platí následující

**Tvrzení** (Symetrie, nezápornost a linearita skoro skalárního součinu):

1.  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2.  $\langle f, f \rangle \geq 0$
3.  $\langle af + bg, h \rangle = a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle$

ale

<sup>7</sup>Z teorie Riemannova integrálu plyne, že pokud  $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ , pak i  $fg \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ .

**Tvrzení:** *Ekvivalence  $\langle f, f \rangle = 0 \iff f \equiv 0$  neplatí.*

**Definice** ( $2\pi$ -periodická funkce): Funkce je  $2\pi$ -periodická, když pro každé  $x \in \mathbb{R}$  je  $f(x + 2\pi) = f(x)$ .

**Tvrzení** (Ortogonalita sinů a cosinů): *Pro každá dvě celá čísla  $m, n \geq 0$  je*

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$$

*Pro každá dvě celá čísla  $m, n \geq 0$ , kromě  $m = n = 0$ , je*

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \dots & m = n \\ 0 & \dots & m \neq n. \end{cases}$$

*Konečně*

$$\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi.$$

**Definice** (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty): Pro každou funkci  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Definice** (Fourierova řada funkce): Fourierova řada funkce  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde  $a_n$  a  $b_n$  jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , v němž jsou „souřadnými osami“ (prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v  $\mathbb{R}^n$  se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

**Věta** (Besselova nerovnost): *Pro Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  funkce  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

**Důkaz:** **TODO**

□

**Tvrzení** (Riemannovo-Lebesgueovo lemma): *Pro každou funkci  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  je<sup>8</sup>*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = 0$$

<sup>8</sup>Lze dokázat pomocí Besselovy nerovnosti.

**Definice** (Po částech hladká funkce): Funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $a < b$  jsou reálná čísla, je po částech hladká, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b, k \in \mathbb{N},$$

intervalu  $[a, b]$ , že na každém intervalu  $a_{i-1}, a_i, i = 1, 2, \dots, k$ , má spojitou derivaci  $f'$  a pro každé  $i = 1, 2, \dots, k$  existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i - 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^-} f'(x)$$

a pro každé  $i = 0, 1, \dots, k - 1$  existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i + 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i + 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^+} f'(x)$$

Po částech hladká funkce tedy může být v několika bodech intervalu  $[a, b]$  nespojitá, ale v bodech nespojitosti má vlastní jednostranné limity a má v nich definované jednostranné nesvislé tečny.

**Tvrzení** (O Dirichletově jádře): Necht'  $n \in \mathbb{N}$  a

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx).$$

Pak pro každé  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  máme

$$J_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

také

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 J_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_n(x) dx = \frac{1}{2}.$$

**Věta** (Dirichletova): Necht'  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je taková  $2\pi$ -periodická funkce, že její zúžení na interval  $[-\pi, \pi]$  je po částech hladké. Pak její Fourierova řada  $F_f(x)$  má pro každé  $a \in \mathbb{R}$  součet

$$F_f(a) = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)}{2}$$

V každém bodu spojitosti  $a \in \mathbb{R}$  funkce  $f(x)$  tedy její Fourierova řada má součet rovný funkční hodnotě,  $F_f(a) = f(a)$ .

**Definice** (Hladká funkce): Řekneme, že funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je hladká, když má na intervalu  $(a, b)$  spojitou derivaci  $f'$  a v krajních bodech  $a$  a  $b$  mají  $f(x)$  a  $f'(x)$  vlastní jednostranné limity.

**Důsledek** (O hladké funkci): Necht'  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je  $2\pi$ -periodická a spojitá funkce, jejíž zúžení na interval  $[-\pi, \pi]$  je hladké. Potom pro každé  $a \in \mathbb{R}$  je

$$F_f(a) = f(a).$$

Spojitá a hladká funkce se tedy rovná součtu své Fourierovy řady.

## 2.3 Basilejský problém

**Příklad** (Basilejský problém): TODO

## 2.4 Divergentní řady

Řadě  $\sum a_n$ , to jest posloupnosti  $(a_n) \subset \mathbb{R}$ , lze přiřadit její „součet“ i mnoha jinými způsoby, než jen jako limitu

$$\lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$$

posloupnosti částečných součtů. Jako ilustrace jsou uvedeny dvě sumační metody.

**Fakt** (Abelovský součet):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

**Fakt** (Cesàrovský součet):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

## 2.5 Konvergence řad

### 2.5.1 Absolutní konvergence

**Definice** (Absolutní konvergence): Řekneme, že řada  $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolutně konverguje (je to absolutně konvergentní řada), pokud konverguje řada  $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

**Definice** (Obecná absolutní konvergence): Nechť  $A$  je nekonečná spočetná množina.

Pak řadou  $\sum_{x \in A} a_x$  (na  $A$ ) budeme rozumět každou funkci  $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ , kde pro  $x \in A$  místo  $a(x)$  stále píšeme  $a_x$ . Řekneme, že tato řada je obecná absolutně konvergentní řada, když

$$\exists c > 0 \forall \text{ konečnou množinu } B \subset A : \sum_{x \in B} |a_x| < c$$

**Věta** (O absolutně konvergentních řadách): Nechť  $\sum_{x \in A} a_x$  je řada na  $A$ . Pak  $\sum_{x \in A} a_x$  je obecná absolutně konvergentní řada, právě když pro libovolnou bijekci  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow A$  je klasická řada

$$B(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\pi)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b := a_{\pi(n)},$$

absolutně konvergentní řada. Všechny řady  $B(\pi)$  jsou pak absolutně konvergentní a mají též součet, nezávislý na bijekci  $\pi$ .

**Definice** (Součet obecné absolutně konvergentní řady): Pro obecnou absolutně konvergentní řadu  $\sum_{x \in A} a_x$  tak definujeme její součet jako součet  $\sum b_n$  řady  $\sum b_n$  s  $b_n := a_{\pi(n)}$  pro libovolnou bijekci  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

**Definice** (Součin řad): Buďte  $\sum_{x \in A} a_x$  a  $\sum_{x \in B} b_x$  dvě obecné řady. Jejich součin, či součinná řada, je řada

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} a_x b_x.$$

**Věta** (Součin absolutně konvergentních řad): Nechť  $\sum_{x \in A} a_x$  a  $\sum_{x \in B} b_x$  jsou obecné absolutně konvergentní řady se součty

$$r := \sum_{x \in A} a_x \in \mathbb{R} \quad a \quad \sum_{y \in B} b_y \in \mathbb{R}.$$

Pak i jejich součin je obecná absolutně konvergentní řada, která má součet  $rs$ .

**Tvrzení** (Exponenciála): Pro  $x \in \mathbb{R}$  necht'

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Pak pro každé  $x, y \in \mathbb{R}$  platí identita

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

**Tvrzení** (Prvočísel je  $\infty$  mnoho): Množina prvočísel

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

je nekonečná.

## 2.5.2 Stejněměrná a bodová konvergence

**Definice** (Stejněměrná konvergence): Necht'  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$ , jsou na ní definované funkce. Řekneme, že  $f_n$  konvergují (na  $M$ ) stejněměrně k  $f$ , symbolicky

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M)$$

když ( $\varepsilon > 0$ )

$$\forall \varepsilon \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall x \in M : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definice** (Bodová konvergence): Necht'  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$ , jsou na ní definované funkce. Pokud

$$\forall \varepsilon \forall x \in M \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

řekneme, že  $f_n$  konvergují (na  $M$ ) k  $f$  bodově, symbolicky

$$f_n \rightarrow f \quad (\text{na } M)$$

Jinými slovy,  $\forall x \in M : \lim f_n(x) = f(x)$ . Stejněměrná konvergence implikuje bodovou, ale ne naopak.

**Definice** (Supremová norma): Pro funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definujeme její supremovou normu  $\|f\|_{\infty}$  jako

$$\|f\|_{\infty} := \sup(\{|f(x)| \mid x \in M\}) \in [0, +\infty],$$

s hodnotou  $+\infty$  pro shora neomezenou množinu  $\{\dots\}$ .

**Tvrzení** (Kritérium  $\Rightarrow$ ): Necht'  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$ , jsou na ní definované funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0.$$

**Definice** (Lokálně stejněměrná konvergence): Necht'  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$ , jsou na ní definované funkce. Lokálně stejněměrná konvergence  $f_n$  k  $f$  (na  $M$ ), symbolicky  $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$  (na  $M$ ), znamená, že

$$\forall a \in M \exists \delta > 0 : f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M \cap (a - \delta, a + \delta)).$$

**Věta** ( $\xrightarrow{\text{loc}} \Rightarrow$  zachovává spojitost): Necht'  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ , každá funkce  $f_n$  je spojitá a

$$f_n \xrightarrow{\text{loc}} f \quad (\text{na } M).$$

Pak i  $f$  je spojitá.

**Důkaz:** Nechť  $a \in M$  a buď dáno  $\varepsilon > 0$ . Vezmeme  $\delta > 0$ , že  $f_n$  konvergují na  $N := M \cap (a - \delta, a + \delta)$  stejnoměrně. Vezmeme  $n_0$ , že  $n \geq n_0 \wedge x \in N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Vezmeme libovolné  $n_1 \geq n_0$  a pak, díky spojitosti  $f_{n_1}$ , takové  $\delta \in (0, \delta)$ , že

$$x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0) \subset N \Rightarrow |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pak pro každé  $x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0) \subset N$  máme, že

$$|f(a) - f(x)| \leq |f(a) - f_{n_1}(a)| + |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a$ . □

**Tvrzení** (Weierstrassův test): *Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\sum f_n \rightarrow f$  (na  $M$ ). Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow f \quad (\text{na } M), \text{ pokud } \sum_{n=1}^{\infty} F_n := \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty.$$

## 2.6 Mocninné řady

**Definice** (Mocninná řada): Mocninná řada se středem  $a \in \mathbb{R}$  a koeficienty  $a_n \in \mathbb{R}$  (a proměnnou  $x \in \mathbb{R}$ ) je funkční řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

**Definice** (Poloměr konvergence): Poloměr konvergence  $R$  mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je nezáporné reálné číslo nebo  $+\infty$ :

$$R := \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty],$$

kde  $\frac{1}{0} = +\infty$  a  $\frac{1}{+\infty} := 0$ . S těmito konvencemi máme i ekvivalentní vztah  $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$ .

**Věta** (O konvergencích mocninných řad): *Nechť*

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*je mocninná řada s poloměrem konvergence  $R$ . Pak pro každé reálné  $x$  s  $|x| < R$  řada  $F(x)$  absolutně konverguje a pro  $|x| > R$  diverguje. Když  $R > 0$ , pak na intervalu  $(-R, R)$  řada  $F(x)$  konverguje lokálně stejnoměrně ke svému (bodovému) součtu.*

**Věta** (Počítání s mocninnými řadami): *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{a} \quad B(x) := \sum_{n \geq 0} b_n x^n$$

*jsou mocninné řady konvergující na nějakém intervalu  $I := (-a, a)$ , kde  $a > 0$ . Označme stejně i odpovídající funkce  $A, B : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Pro jejich (formální) součet, součin, podíl a derivaci platí následující.*



## 1. Mocninná řada (Formální součet)

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

konverguje na  $I$  a pro každé  $x \in I$  je  $C(x) = A(x) + B(x)$ .

## 2. Mocninná řada (Formální součin)

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k} \right) x^n$$

konverguje na  $I$  a pro každé  $x \in I$  je  $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ .

3. Nechť  $b_0 \neq 0$  a  $d_n := -\frac{b_n}{b_0}$ . Pak existuje  $b > 0$ , že mocninná řada (Formální podíl)

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n = \frac{A(x)}{B(x)} := \frac{1}{b_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n$$

konverguje na intervalu  $J := (-b, b)$  a pro každé  $x \in J$  je  $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ .

## 4. Mocninná řada (Formální derivace)

$$C(x) := \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

konverguje na  $I$  a pro každé  $x \in I$  je  $C(x) = A'(x)$ .

Ve třetí části je použita formální geometrická řada:

$$\frac{1}{1 - (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)} = \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n.$$

**Tvrzení** (Abelova nerovnost): Pro  $i = 1, 2, \dots, n$  nechť  $a_i \in \mathbb{C}, b_i \in \mathbb{R}$  s  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ ,  $A_i := a_1 + a_2 + \dots + a_i$  a  $A[n] := \max(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|)$ . prostorem

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq A[n] \cdot b_1.$$

**Věta** (Abelova): Nechť

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence  $R \in (0, +\infty)$  a označme stejně odpovídající funkci  $A : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ . Když řada  $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$  konverguje a má součet

$$S := \sum_{n \geq 0} a_n R^n,$$

pak je limita zleva v  $R$  funkce  $A(x)$  rovna  $S$ :

$$\lim_{x \rightarrow R^-} A(x) = \lim_{a \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

### 2.6.1 Pólyova věta o náhodných procházkách

**Definice (Graf):** Graf  $G = (V, E)$  sestává z množiny vrcholů  $V$  a množiny hran  $E \subset \binom{V}{2}$ . Zde

$$\binom{V}{2} := \{A \mid A \subset V \wedge |A| = 2\}$$

je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ .

**Definice ( $d$ -regulární graf):** Graf  $G = (V, E)$  je  $d$ -regulární,  $D \in \mathbb{N}$ , má-li každý vrchol  $d$  sousedů, to jest

$$\forall v \in V : |\overbrace{\{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}}^{N(v)}| = d.$$

**Definice (Lokálně konečný graf):** Graf  $G$  je lokálně konečný, má-li každý vrchol  $v \in V$  jen konečně mnoho sousedů, tj. množina  $N(v)$  je konečná.

**Definice (Procházka):** Procházka  $w$  v grafu  $G = (V, E)$  je taková konečná,  $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  s délkou  $|w| := n \in \mathbb{N}_0$ , či nekonečná,  $w = (v_0, v_1, \dots)$ , posloupnost vrcholů  $v_i \in V$ , že pro každé  $i \in \mathbb{N}_0 (< n)$  je  $\{v_i, v_{i+1} \in E\}$ . Vrchol  $v_0$  pojmenujeme jako start procházky  $w$ .

**Definice (Počet procházek):** Definujeme

$$d_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je procházka se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|,$$

počet procházek v grafu  $G$  s daným startem  $v_0$  a s délkou  $n$ .

**Definice (Rekurentní procházka):** Rekurentní procházka  $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  opětovně prochází startem: existuje  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , že  $v_i = v_0$

**Definice (Počet rekurentních procházek):** Jako

$$a_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je rekurentní procházka se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|$$

označíme počet rekurentních procházek v grafu  $G$  s daným startem  $v_0$  a s délkou  $n$ .

**Definice (Automorfismus):** Automorfismus grafu  $G = (V, E)$  je taková bijekce  $f : V \rightarrow V$ , že

$$\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E.$$

**Definice ((Vrcholově) tranzitivní graf):** Graf  $G = (V, E)$  je (vrcholově) tranzitivní, když

$$\forall u, v \in V \exists F : F \text{ je automorfismus } G \wedge F(u) = v.$$

**Tvrzení (Procházky v grafech):** *Počet procházek, popř. rekurentních procházek, dané délky v tranzitivním grafu nezávisí na startu: když je  $G = (V, E)$  tranzitivní a lokálně konečný, pak pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  a každé dva vrcholy  $u, v \in V$  je*

$$d_n(u, G) = d_n(v, G), \quad \text{popř.} \quad a_n(u, G) = a_n(v, G).$$

V tranzitivních grafech  $G$  budeme stručně označovat počty procházek, resp. rekurentních procházek, s délkou  $n$  jako  $d_n(G)$ , resp.  $a_n(G)$ .

**Příklad (Nekonečná cesta):** Nekonečná cesta

$$P = (\mathbb{Z}, \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\})$$

je tranzitivní a 2-regulární.

**Definice** (Zobecněná nekonečná cesta): Zobecněním nekonečné cesty je pro  $d \in \mathbb{N}$  graf

$$\mathbb{Z}^d := \left( \mathbb{Z}^d, \left\{ \{\bar{u}, \bar{v}\} \mid \sum_{i=1}^d |u_i - v_i| = 1 \right\} \right),$$

kde píšeme  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$ .

**Tvrzení:** Grafy  $\mathbb{Z}^d$  jsou tranzitivní a  $2d$ -regulární.

**Věta** (Slabá Abelova): Když mocninná řada

$$U(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

konverguje pro každé  $x \in [0, R)$ , kde  $R \in (0, +\infty)$  je reálné číslo, a má všechny koeficienty  $u_n \geq 0$ , pak následující limita a suma jsou definované a rovnají se -

$$\lim_{x \rightarrow R^-} U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n \quad (= U(R))$$

- bez ohledu na to, zda jsou konečné nebo  $+\infty$ .

**Věta** (Stirlingův vzorec):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Věta** (Pólya): Pro  $d = 1$  a  $2$  je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} = 1$$

a pro  $d \geq 3$  je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} < 1$$

**Důkaz:** TODO

**Důkaz:** TODO



### 3 Komplexní analýza

**Definice** (Komplexní čísla): Komplexní čísla

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i = \sqrt{-1},$$

tvoří normované těleso  $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, |\cdot|)$ , s normou  $|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$ . Zároveň tvoří úplný metrický prostor  $(\mathbb{C}, d)$  s metrikou  $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ , který je izometrický klasické euklidovské rovině  $\mathbb{R}^2$ .

**Poznámka** (Značení):

$$\operatorname{re}(a + bi) := a \quad \text{a} \quad \operatorname{im}(a + bi) := b$$

**Definice** (Komplexní koule): Jako  $B(z, r) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u - z| < r\}$  označíme kouli se středem  $z$  a poloměrem  $r > 0$ .

### 3.1 Holomorfní a analytické funkce

**Definice** (Derivace): Pro funkci  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  a bod  $z_0 \in U$  je její derivace  $f'(z_0)$  v  $z_0$  definovaná jako pro reálné funkce:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C},$$

pokud tato limita existuje. Explicitně,  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  je derivace funkce  $f$  v bodě  $z_0$ , právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in U \wedge 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

**Definice** (Holomorfní funkce): Funkce  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfní (na  $U$ ), má-li v každém bodě  $z_0 \in U$  derivaci. Celá či celistvá funkce  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfní na celé komplexní rovině  $\mathbb{C}$ . Komplexní derivace má stejné algebraické vlastnosti jako derivace reálná.

**Tvrzení** (Vlastnosti derivace):  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  a  $h : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  buďte holomorfní funkce a  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Platí následující.

1. Funkce  $\alpha f + \beta g$  je holomorfní na  $U$  a  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ .
2. Součin  $fg$  je holomorfní na  $U$  a  $(fg)' = f'g + fg'$ .
3. Když  $g \neq 0$  na  $U$ , pak je podíl  $\frac{f}{g}$  holomorfní na  $U$  a  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .
4. Když  $h[U_0] \subset U$ , pak je složená funkce  $f(h) : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfní na  $U_0$  a  $(f(h))' = f'(h)h'$ .

**Poznámka** (K derivacím): Jako pro reálné funkce, pro  $n \in \mathbb{N}$  na  $\mathbb{C}$  máme  $(z^n)' = nz^{n-1}$ , derivace konstantní funkce je nulová funkce a každá racionální funkce je holomorfní na svém definičním oboru a její derivace je táž jako v reálném případě (tj. je daná stejnou formulí).

**Definice** (Analytická funkce): Funkce  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  je analytická (na  $U$ ), pokud pro každý bod  $z_0 \in U$  existují taková komplexní čísla  $a_0, a_1, \dots$ , že

$$z \in U \wedge B(z_0, |z - z_0|) \subset U \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Analytická funkce je v každém kruhu se středem  $z_0$ , který je obsažený v definičním oboru, vyjádřena mocninnou řadou s komplexními koeficienty a středem  $z_0$ . S mocninnými řadami s komplexními koeficienty počítáme úplně stejně jako s reálnými mocninnými řadami.

#### 3.1.1 Odlišnosti reálné a komplexní analýzy

##### 1. Odlišnost

**Věta** (Holomorfní  $\Rightarrow$  analytická): Je-li  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  celá funkce, pak existují komplexní koeficienty  $a_0, a_1, \dots$ , že pro každé  $z \in \mathbb{C}$  je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

##### 2. Odlišnost

**Poznámka:** Funkce  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  je omezená, když  $\exists c > 0 \forall z \in U : |f(z)| < c$ .

**Věta** (Liouville): Když je  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  celá a omezená funkce, pak je  $f$  konstantní.

##### 3. Odlišnost

**Důsledek** (Holomorfní funkce má  $\forall$  derivace): Každá holomorfní funkce  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  má derivace  $f^{(n)}(z)$  všech řádů  $n \in \mathbb{N}$ . Speciálně je její derivace  $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$  spojitá funkce.

#### 4. Odlišnost

**Věta** (Princip maxima modulu): *Nechť  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfní funkce. Pak*

$$\forall z_0 \in U \forall \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \wedge |f(z)| \geq |f(z_0)|.$$

### 3.2 Úsečky a obdélníky

**Definice** (Úsečka): Pro dva různé body je úsečka  $u = ab \subset \mathbb{C}$  obraz

$$u = ab := \varphi[[0, 1]] = \{\varphi(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{C}$$

intervalu  $[0, 1]$  lineární funkcí

$$\varphi(t) := (b - a)t + a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}.$$

**Poznámka** (Orientace úsečky): Úsečka je orientována pořadím svých konců, takže  $ab$  a  $ba$  jsou dvě různé úsečky.

**Definice** (Délka úsečky):

$$|u| = |ab| := |b - a| \geq 0$$

**Definice** (Dělení úsečky): Dělení  $p$  úsečky  $u = ab$  je  $k + 1$ -tice  $p = (a_0, a_1, \dots, a_k) \subset u, k \in \mathbb{N}$ , jejích bodů

$$a_i := \varphi(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

které jsou obrazy bodů  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  tvořících dělení intervalu  $[0, 1]$ . Takže  $a_0 = a, a_k = b$  a body  $a_0, a_1, \dots, a_k$  běží na  $u$  od  $a$  do  $b$ .

**Definice** (Norma dělení): Norma  $\|p\|$  dělení  $p$  je

$$\|p\| := \max_{1 \leq i \leq k} |a_{i-1}a_i| = \max_{1 \leq i \leq k} |a_i - a_{i-1}|,$$

tedy největší délka podúsečky dělení.

**Definice** (Cauchyova suma a její modifikace): Pro funkci  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  a dělení  $p = (a_0, a_1, \dots, a_k)$  úsečky  $u$  definujeme Cauchyovu sumu  $C(f, p)$  a její modifikaci  $C'(f, p)$  jako

$$C(f, p) := \sum_{i=1}^k f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}$$

$$C'(f, p) := \sum_{i=1}^k f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}.$$

**Definice** (Obdélník): Obdélník  $R \subset \mathbb{C}$  je množina

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \operatorname{re}(z) \leq \beta \wedge \gamma \leq \operatorname{im}(z) \leq \delta\}$$

dána reálnými čísly  $\alpha < \beta$  a  $\gamma < \delta$ . Jeho strany jsou rovnoběžné s reálnou a imaginární osou. Když  $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ , jde o čtverec.

**Definice** (Kanonické vrcholy obdélníka): Kanonické vrcholy obdélníka  $R$  jsou  $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ , kde

$$a := \alpha + \gamma i, b := \beta + \gamma i, c := \beta + \delta i \text{ a } d := \alpha + \delta i.$$

Začínají levým dolním vrcholem a jdou proti směru hodinových ručiček.

**Definice** (Hranice obdélníka): Hranice  $\partial R$  obdélníka  $R$  je sjednocení úseček

$$\partial R := ab \cup bc \cup cd \cup da.$$

**Definice** (Vnitřek obdélníka): Vnitřek  $\text{int}(R)$  obdélníka  $R$  je

$$\text{int}(R) := R \setminus \partial R.$$

**Definice** (Obvod obdélníka): Obvod  $\text{obv}(R)$  obdélníka  $R$  je součet délek jeho stran,

$$\text{obv}(R) := |ab| + |bc| + |cd| + |da|.$$

### 3.3 Integrály

**Definice** (Integrál přes úsečku a hranici obdélníka): Necht'  $f : u, \partial R \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá funkce definovaná na úsečce  $u$  nebo na hranici obdélníka  $R$ . Definujeme

$$\int_u f := \lim_{n \rightarrow \infty} C(f, p_n) \in \mathbb{C}$$

a

$$\int_{\partial R} f := \int_{ab} f + \int_{bc} f + \int_{cd} f + \int_{da} f,$$

kde  $(p_n)$  je libovolná posloupnost dělení  $p_n$  úsečky  $u$ , která splňuje  $\lim \|p_n\| = 0$ , a  $(a, b, c, d)$  jsou kanonické vrcholy obdélníka  $R$ . Hodnota  $\int_u f$  je integrál funkce  $f$  je funkce přes úsečku  $u$  a  $\int_{\partial R} f$  je integrál funkce  $f$  přes hranici obdélníka  $R$ .

**Věta** (O integrálech): Necht'  $u = ab$  je úsečka,  $R$  je obdélník a funkce  $f, g : u, \partial R \rightarrow \mathbb{C}$  jsou spojité. Limita definující  $\int_u f$  vždy existuje a nezávisí na posloupnosti  $(p_n)$ . Tedy i  $\int_{\partial R} f$  je vždy dobře definovaný. Oba integrály mají následující vlastnosti.

1. Pro každé  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  je  $\int_u (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_u f + \beta \int_u g$  a totéž platí pro  $\int_{\partial R}$ .
2. Platí ML odhady

$$\left| \int_u f \right| \leq \max_{z \in u} |f(z)| \cdot |u| \quad a \quad \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \max_{z \in \partial R} |f(z)| \cdot \text{obv}(R)$$

3. Pro každý vnitřní bod  $c$  úsečky  $u = ab$ , to jest  $c \in ab$  a  $c \neq a, b$ , je  $\int_{ab} f = \int_{ac} f + \int_{cb} f$ . Též  $\int_{ba} f = -\int_{ab} f$ .

**Tvrzení** (Stejněměrná spojitost): Necht'  $A \subset M$  je kompaktní množina v metrickém prostoru  $(M, d)$  a  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce. Pak je  $f$  stejnoměrně spojitá, takže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : a, b \in A \wedge d(a, b) < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

**Definice** ( $k$ -ekvidělení): Pro  $k \in \mathbb{N}$  a úsečku  $u \subset \mathbb{C}$  jejím  $k$ -ekvidělením rozumíme dělení  $u$  na  $k$  podúseček stejné délky  $\frac{|u|}{k}$ , které je dané obrazy dělení  $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \dots < \frac{k-1}{k} < 1$  jednotkového intervalu.

**Tvrzení:** Necht'  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  s  $a \neq b$ . Platí

$$\int_{ab} (\alpha z + \beta) = \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + \beta(b - a) = g(b) - g(a),$$

kde  $g(z) := \frac{\alpha z^2}{2} + \beta z$ .

**Tvrzení** (Jednoduchá Cauchy-Goursatova věta): *Nechť  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  a  $R \subset \mathbb{C}$  je obdélník. Pak*

$$\int_{\partial R} (\alpha z + \beta) = 0.$$

**Tvrzení** ( $\int_u$  a  $(R) \int$ ): *Nechť  $a, b \in \mathbb{C}$  s  $a \neq b$ ,  $f : ab \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá funkce a  $\varphi(t) := t(b-a) + a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  je parametrizace definující úsečku  $u = ab$ . Potom*

$$\begin{aligned} \int_u f &= \int_0^1 f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = (b-a) \int_0^1 f(\varphi(t)) dt \\ &= (b-a) \left( \int_0^1 \operatorname{re}(f(\varphi(t))) dt + i \cdot \int_0^1 \operatorname{im}(f(\varphi(t))) dt \right) \end{aligned}$$

(až na první integrál jsou všechny ostatní Riemannovy).

**Definice** (Křivkový integrál): Když

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ je funkce a } \varphi : [a, b] \rightarrow U$$

je spojitá a po částech hladká funkce, pak integrál funkce  $f$  přes křivku  $\varphi$  definujeme jako

$$\begin{aligned} \int_\varphi f &:= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{re}(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt + i \cdot \int_a^b \operatorname{im}(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt, \end{aligned}$$

pokud poslední dva (reálné) Riemannovy integrály existují. Náš „úsečkový integrál“  $\int_u$  je tedy podle předchozího tvrzení speciálním případem křivkového integrálu  $\int_\varphi$ .

### 3.4 Konstanta $\rho = 2\pi i$

**Tvrzení:** *Bud' dána konvergentní posloupnost komplexních čísel  $(z_n)$ . Platí  $\operatorname{im}(\lim z_n) = \lim \operatorname{im}(z_n)$ .*

**Věta** (Konstanta  $\rho$ ): *Nechť  $S$  je čtverec s vrcholy  $\pm 1 \pm i$ . Pak*

$$\rho := \int_{\partial S} \frac{1}{z} \neq 0, \text{ dokonce } \operatorname{im}(\rho) \geq 4.$$

**Důkaz:** Kanonické vrcholy čtverce  $S$  jsou  $a := -1 - i, b := 1 - i, c := 1 + i$  a  $d := -1 + i$ . Nechť  $p_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  je  $n$ -ekvidělení úsečky  $ab$ . Protože násobení číslem  $i$  je otočení kolem počátku kladným směrem<sup>9</sup> o úhel  $\frac{\pi}{2}$  je  $q_n = ip_n := (ia_0, ia_1, \dots, ia_n)$   $n$ -ekvidělení úsečky  $bc$ . Podobně je  $r_n = iq_n = -p_n$ , resp.  $s_n = ir_n = -ip_n$ ,  $n$ -ekvidělení úsečky  $cd$ , resp.  $da$ . Překvapivě pro  $f(z) = \frac{1}{z}$  je

$$C(f, p_n) = C(f, q_n) = C(f, r_n) = C(f, s_n)$$

Skutečně, rozšíření zlomku číslem  $i$  dává

$$\begin{aligned} C(f, p_n) &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\frac{b-a}{n}}{a + \frac{j(b-a)}{n}} \right) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\frac{ib-ia}{n}}{ia + \frac{j(ib-ia)}{n}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\frac{c-b}{n}}{b + \frac{j(c-b)}{n}} \right) = C(f, q_n) \end{aligned}$$

<sup>9</sup>proti směru hodinových ručiček

a podobně pro další dvě rovnosti. Dále vzhledem k  $b - a = 2$  a  $a = -1 - i$  rozšířením zlomku číslem  $\frac{2j}{n} - 1$  dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(C(f, p_n)) &= \operatorname{im} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\frac{2}{n}}{-1 - i + \frac{2j}{n}} \right) \\ &= \operatorname{im} \left( \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\frac{2j}{n} - 1 + i}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1} \right) \geq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Tedy, podle tvrzení výše,

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(\rho) &= \operatorname{im} \left( \int_{\partial S} \frac{1}{z} \right) = 4 \cdot \operatorname{im} \left( \int_{ab} \frac{1}{z} \right) \\ &= 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{im} \left( C \left( \frac{1}{z}, p_n \right) \right) \\ &\geq 4 \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

a skutečně  $\rho \neq 0$ . □

**Tvrzení:** *Nechť opět  $a := -1 - i$  a  $b := 1 - i$ . Potom  $\int_{ab} \frac{1}{z} = \frac{\pi i}{2}$ . Tedy, podle předchozího důkazu,  $\rho = 4 \cdot \frac{\pi i}{2} = 2\pi i$ .<sup>10</sup>*

### 3.5 Cauchy-Goursatova věta

Integrál  $\int_{\varphi} f$  holomorfní funkce  $f$  přes jednoduchou uzavřenou křivku  $\varphi$ , která leží v definičním oboru funkce  $f$  se svým celým vnitřkem, je 0.

**Definice** (Diametr množiny): Pro množinu  $x \subset \mathbb{C}$  je její diametr<sup>11</sup> definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) = \sup(\{|x - y| \mid x, y \in X\}).$$

Průměr množiny může být i  $+\infty$ .

**Tvrzení:** *Když  $A_n$ ,*

$$\mathbb{C} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots,$$

*jsou neprázdné a uzavřené množiny s  $\lim \operatorname{diam}(A_n) = 0$ , pak  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ .*

**Definice** (Čtvrtka obdélníka): Buď obdélník  $R$  s kanonickými vrcholy  $(a, b, c, d)$ . Když  $e := \frac{a+b}{2}$ ,  $f := \frac{b+c}{2}$ ,  $g := \frac{c+d}{2}$  a  $h := \frac{d+a}{2}$  jsou středy stran  $R$  a  $j := \frac{a+c}{2}$  je jeho celkový střed, pak jeho čtyři čtvrtky jsou obdélníky  $A, B, C$  a  $D$ , jejichž kanonické vrcholy jsou, po řadě,

$$(a, e, j, h), (e, b, f, j), (j, f, c, g) \text{ a } (h, j, g, d).$$

Obdélník se na čtvrtky rozpadne po rozříznutí podle úseček  $eg$  a  $hf$ . Pro každou z těchto čtvrtěk  $E$  patrně platí:  $\operatorname{obv}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{obv}(R)$  a  $\operatorname{diam}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(R)$ .

<sup>10</sup>  $\int \frac{1}{1+i^2} = \arctan t$

<sup>11</sup> průměr



**Věta** (Cauchy-Goursatova pro obdélníky): *Nechť*

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

*je holomorfní funkce a  $R \subset U$  je obdélník. Pak*

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

**Důkaz:** Mějme  $f, U$  a  $R$ . Sestrojíme takové vnořené obdélníky

$$R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots,$$

že pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  je  $R_{n+1}$  čtvrtka obdélníku  $R_n$  a

$$\left| \int_{\partial R_{n+1}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|.$$

Nechť už jsou takové obdélníky  $R_0, R_1, \dots, R_n$  definované a  $A, B, C, D$  jsou čtvrtky obdélníku  $R_n$ . Tvrdíme, že

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial A} f + \int_{\partial B} f + \int_{\partial C} f + \int_{\partial D} f$$

Tato identita plyne použitím třetí části věty o integrálech. Po rozvinutí každého integrálu  $\int_{\partial A} f, \dots, \int_{\partial D} f$  jako součtu čtyř integrálů přes strany dostáváme na pravé straně předchozí rovnosti 16 členů. Osm z nich odpovídá stranám čtvrtek uvnitř  $R_n$  a vzájemně se zruší, protože vytvoří čtyři dvojice opačných orientací stejné úsečky. Zbýlých osm členů odpovídá stranám čtvrtek ležících na  $\partial R_n$ , které se sečtou na integrál na levé straně předcházející rovnosti. Z této rovnosti plyne podle trojúhelníkové nerovnosti, že pro nějakou čtvrtku  $E \in \{A, B, C, D\}$  je  $\left| \int_{\partial E} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|$ . Položíme tedy  $R_{n+1} = E$ .

Podle předchozího tvrzení existuje bod  $z_0$ , že

$$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n.$$

Protože  $R_0 = R \subset U$ , je i  $z_0 \in U$ . Nyní použijeme existenci derivace  $f'(z_0)$ . Pro dané  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$ , že  $B(z_0, \delta) \subset U$  a pro nějakou funkci  $\Delta : B(z_0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$  pro každé  $z \in B(z_0, \delta)$  je  $|\Delta(z)| < \varepsilon$  a

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_{g(z)} + \underbrace{\Delta(z) \cdot (z - z_0)}_{h(z)}.$$

Uvážíme tyto funkce  $g(z)$  a  $h(z)$ . Je jasné, že  $g(z)$  je lineární a  $h(z) = f(z) - g(z)$  je spojitá<sup>12</sup>. Nechť  $n \in \mathbb{N}_\infty$  je tak velké, že  $R_n \subset B(z_0, \delta)$ <sup>13</sup>. Podle linearit integrálu a jednoduché Cauchyho-Goursatovy věty (JCG) máme

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial R_n} g + \int_{\partial R_n} h \stackrel{JCG}{=} \int_{\partial R_n} h.$$

Platí odhad

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R_n} h \right| &\stackrel{\text{ML odhad}}{\leq} \max_{z \in \partial R_n} |\Delta(z) \cdot (z - z_0)| \cdot \text{obv}(R_n) \\ &< \varepsilon \cdot \text{diam}(R_n) \cdot \text{obv}(R_n) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\text{diam}(R)}{2^n} \cdot \frac{\text{obv}(R)}{2^n} \\ &< \varepsilon \cdot \frac{\text{obv}(R)}{4^n}. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>na  $B(z_0, \delta)$

<sup>13</sup>potřebujeme jenom, že  $\lim \text{diam}(R_n) = 0$ , pro existenci  $z_0$  to není podstatné

Zde jsme použili výše zmíněné zmenšení průměru a obvodu na polovinu po čtvrcení a to, že průměr obdélníka je menší než jeho obvod. Podle předchozích výsledků tak máme

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \left| \int_{\partial R_n} f \right| = \left| \int_{\partial R} h \right| < \varepsilon \cdot \frac{\text{obv}(R)^2}{4^n}$$

a  $\left| \int_{\partial R} f \right| < \varepsilon \cdot \text{obv}(R)^2$ . Protože to platí pro každé  $\varepsilon > 0$ , je  $\int_{\partial R} f = 0$ .  $\square$

**Věta (Cauchy-Goursatova):** *Nechť  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfní funkce a  $\varphi : [a, b] \rightarrow U$  je spojitá a po částech hladká funkce, která je prostá, s výjimkou hodnoty  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , a jejíž vnitřek<sup>14</sup> je podmnožinou množiny  $U$ . Pak*

$$\int_{\varphi} f = 0.$$

### 3.6 Funkcionál $\int$

**Definice (Funkcionál):** Pro libovolnou kompaktní<sup>15</sup> množinu  $A \subset \mathbb{C}$  definujeme množiny holomorfních funkcí

$$H_A := \{f : \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ je holomorfní}\}$$

$$H := \bigcup_{A \subset \mathbb{C} \text{ je kompaktní}} H_A.$$

$H$  tedy obsahuje všechny funkce holomorfní na doplňcích kompakťů. Funkcionál  $\int$ , tedy funkci na množině  $H$ , definujeme předpisem

$$\int : H \rightarrow \mathbb{C}, \quad \int f := \int_{\partial R} f,$$

kde  $f \in H_A$  a  $R \subset \mathbb{C}$  je libovolný obdélník, že  $\text{int}(R) \supset A$ <sup>16</sup>.

**Tvrzení (Korektnost definice  $\int$ ):** *Definice funkcionálu  $\int$  je korektní, jeho hodnota  $\int f$  nezávisí na volbě obdélníku  $R$ .*

**Věta (Vlastnosti  $\int$ ):** *Důležité vlastnosti jsou tři.*

1. *Linearita: pro každé  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  a  $f, g \in H$  je*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

2. *Rozšíření Cauchy-Goursatovy věty: když  $a \in \mathbb{C}$  a funkce  $f \in H_{\{a\}}$  je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu  $a$ , pak*

$$\int f = 0.$$

3. *Pro každé  $a \in \mathbb{C}$  je*

$$\int \frac{1}{z - a} = \rho$$

kde  $\rho = 2\pi i$  je dříve zavedená konstanta.

**Věta (Cauchyův vzorec):** *Nechť  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je celá funkce. Pak je-li  $\rho = 2\pi i$  dříve definovaná konstanta, pro každé  $a \in \mathbb{C}$  je*

$$f(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{z - a}.$$

<sup>14</sup>ta komponenta ve dvojici komponent množiny  $\mathbb{C} \setminus \varphi[[a, b]]$ , která je omezená

<sup>15</sup>uzavřenou a omezenou

<sup>16</sup> $A$  je obsažena uvnitř obdélníku  $R$

### 3.7 Meromorfní funkce a rezidua

**Definice** (Diskrétní množina): Množina  $A \subset \mathbb{C}$  je diskrétní, pokud v každé kouli  $B(z, r) \subset \mathbb{C}$  leží jen konečně mnoho jejích prvků.

**Definice** (Meromorfní funkce, množina pólů): Holomorfní funkci

$$f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C},$$

kde  $A \subset \mathbb{C}$  je diskrétní, nazveme meromorfní funkcí a  $A$  nazveme množinou jejích pólů, když každý bod  $a \in A$  má okolí  $U_a \subset U$  s  $U_a \cap A = \{a\}$ , že pro nějakou holomorfní funkci  $g_a : U_a \rightarrow \mathbb{C}$  a nějaká čísla  $k_a \in \mathbb{N}_0$  a  $c_{j,a} \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, k_a$  že pro každé  $z \in U_a \setminus \{a\}$  je

$$f(z) = g_a(z) + \sum_{j=1}^{k_a} \frac{c_{j,a}}{(z-a)^j}.$$

Pro  $k_a = 0$  se suma definuje jako 0 a  $f = g_a$  pak je holomorfní na  $U_a$ .

**Definice** (Reziduum funkce  $f$ ): Koeficient  $c_{1,a}$  z předchozí definice je takzvané reziduum funkce  $f$  v bodě  $a$ , označované jako

$$\text{res}(f, a) := c_{1,a}.$$

Z Cauchyova vzorce plyne, že  $\text{res}(f, a)$  je jednoznačně určené funkcí  $f$ .

**Věta** (Reziduová): *Nechť  $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  je meromorfní funkce s množinou pólů  $A$  a  $R \subset U$  je obdélník, jehož hranice neobsahuje žádný bod z  $A$ . Potom platí rovnost*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f = \sum_{a \in A \cap \text{int}(R)} \text{res}(f, a) = \sum_{a \in A \cap R} \text{res}(f, a)$$

(suma v ní je konečná). Integrál funkce  $f$  přes hranici obdélníka  $R$ , dělený  $2\pi i$ , se tedy rovná součtu reziduí funkce  $f$  v pólech ležících uvnitř  $R$ .

**Tvrzení** (O funkci  $F(z)$ ): *Nechť*

$$F(z) := \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}.$$

*Funkce  $F$  je meromorfní s póly v  $\mathbb{Z}$  a v každém čísle má reziduum rovné 1.*

**Lemma:** *Nechť  $F(z)$  je jako v předešlém tvrzení a  $S_N \subset \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , je čtverec s vrcholy  $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ . Pak existuje konstanta  $c > 0$ , že*

$$\forall N \in \mathbb{N} \forall z \in \partial S_N : |F(z)| \leq c.$$

**Věta** (Sečtení řady  $\sum n^{-2k}$ ): *Pro každé  $k \in \mathbb{N}$  existuje kladný zlomek  $\alpha_k \in \mathbb{Q}$ , že*

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots = \alpha_k \pi^{2k}.$$

## 4 Úvod do diferenciálních rovnic

**Definice** (Kontrahující zobrazení): Kontrahující zobrazení  $f : M \rightarrow M$  metrického prostoru  $(M, d)$  do sebe. Je to každé zobrazení, že pro nějakou konstantu  $c \in (0, 1)$  pro každé  $a, b \in M$  je

$$d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a, b)$$

$f$  zkracuje vzdálenosti nějakým faktorem menším než 100%.

**Věta** (Banachova o pevném bodu): Každé kontrahující zobrazení  $f : M \rightarrow M$  úplného metrického prostoru do sebe má právě jeden pevný bod — takový bod  $a \in M$ , že

$$f(a) = a.$$

Dále platí, že každá posloupnost  $(a_n) \subset M$  iterací funkce  $f$ , kde bod  $a_1 \in M$  je libovolný a pro  $n > 1$  je  $a_n = f(a_{n-1})$ , konverguje k tomuto pevnému bodu  $a$ .

**Tvrzení** (Úplnost spojitých funkcí): Pro každá dvě reálná čísla  $a < b$  je metrický prostor

$$(C[a, b], d),$$

spojitých funkcí  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  s maximovou metrikou

$$d(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

úplný.

## 4.1 Picardova věta

**Věta** (Picardova): Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce, pro níž existuje konstanta  $M > 0$ , že pro každá tři čísla  $u, v, w \in \mathbb{R}$  je

$$|F(u, v) - F(u, w)| \leq M \cdot |v - w|.$$

Potom existuje  $\delta > 0$  a jednoznačně určená funkce

$$f : [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R},$$

že

$$f(a) = b \wedge \forall x \in [a - \delta, a + \delta] : f'(x) = F(x, f(x)).$$

V krajních bodech intervalů se zde i nadále hodnoty derivací berou jednostranně.

**Důkaz: TODO**

□

## 4.2 Peanova věta

**Věta** (Peanova): Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , kde  $U$  je otevřená množina v euklidovském metrickém prostoru  $\mathbb{R}^2$ , a  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce. Potom existuje  $\delta > 0$  a funkce

$$f : [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R},$$

že

$$f(a) = b \wedge \forall x \in [a - \delta, a + \delta] : f'(x) = F(x, f(x)).$$

**Věta** (Arzelà-Ascoliova): Nechť  $I = [a, b]$  je kompaktní reálný interval a  $C(I)$  je metrický prostor spojitých funkcí  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  s maximovou metrikou. Množina  $X \subset C(I)$  je kompaktní, právě když

$$\exists c > 0 \forall f \in X \forall x \in I : |f(x)| < c$$

— funkce v  $X$  jsou stejně omezené — a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in X \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

— funkce v  $X$  jsou stejně (stejněměrně) spojité.

## 4.3 Příklady diferenciálních rovnic

**Poznámka** (Dělení diferenciálních rovnic): Diferenciální rovnice dělíme na následující.

1. Obyčejné diferenciální rovnice<sup>17</sup>, v nichž vystupují funkce jedné proměnné.
2. Parciální diferenciální rovnice<sup>18</sup>, které obsahují funkce více proměnných a jejich parciální derivace.

### 4.3.1 Obyčejné diferenciální rovnice

**Příklad** (Newtonův zákon síly):

$$mx'' = F,$$

kde  $x = x(t) \in \mathbb{R}$  je poloha v čase  $t$  částice o hmotnosti  $m$  vystavené působení síly  $F$ <sup>19</sup>. Síla může být obecně funkcí času, polohy částice a její rychlosti:  $F = F(t, x, x')$ . Nejjednodušší situace je pro konstantní  $F$ , či obecněji pro  $F$  záviselý jen na  $t$  — pak  $x(t) = \int \int F$ . Nastává to třeba při působení tíhového pole Země. To se nemění v čase a nezávisí na poloze částice<sup>20</sup> a už vůbec ne na její rychlosti, což jsou ale všechno idealizace<sup>21</sup>. Rovnice volného pádu pak je

$$mx'' = -mg,$$

kde  $g$  je konstanta tíhového zrychlení. Všechna její řešení jsou právě a jen funkce

$$X := \left\{ x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

kde  $c_1$  a  $c_2$  jsou libovolné konstanty. Ty vyjadřují skutečnost, že pohyb padající částice je určen jednoznačně teprve zadáním její polohy  $x(t_0)$  a rychlosti  $x'(t_0)$  v nějakém časovém okamžiku  $t_0$ .

**Příklad** (Rovnice radioaktivního rozpadu): Rovnice radioaktivního rozpadu

$$\frac{dR}{dt} = -kR$$

popisuje vývoj množství  $R = R(t)$  rozpadajícího se radioaktivního materiálu v čase  $t$ <sup>22</sup>. Je jasné, že každá funkce

$$R = R(t) = c \exp(-kt),$$

kde  $c$  je konstanta, je řešením této rovnice.

### 4.3.2 Parciální diferenciální rovnice

**Příklad** (Laplaceova rovnice<sup>23</sup>):

$$u = u(x, y) : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

**Příklad** (Rovnice difuze<sup>24</sup>):

$$u = u(x, t) : \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

**Příklad** (Vlnová rovnice):

$$u = u(x, t) : a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

V předchozích příkladech jsou  $\alpha$  a  $a$  konstanty.

<sup>17</sup>ODR, *anglicky* ODE

<sup>18</sup>PDR, *anglicky* PDE

<sup>19</sup>zde uvažujeme jen jednoduchý jednorozměrný případ

<sup>20</sup>pro malá měřítka

<sup>21</sup>hlavně nezávislost na  $x$

<sup>22</sup> $k$  je materiálová konstanta

<sup>23</sup>rovnice potenciálu

<sup>24</sup>rovnice vedení tepla

## 4.4 Obecný tvar ODR, (Ne)lineární diferenciální rovnice

**Definice** (Obecný tvar): Obecný tvar obyčejné diferenciální rovnice pro neznámou funkci  $y = y(x)$  je ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde  $F$  je nějaká funkce  $n + 2$  proměnných.

**Definice** (Řád rovnice): Nejvyššímu řádu  $n$  derivace vyskytujícímu se v rovnici říkáme řád rovnice.

**Definice** ((Ne)lineární diferenciální rovnice): Diferenciální rovnice tvaru ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0(x)y = b(x),$$

kde  $a_i(x)$  a  $b(x)$  jsou zadané funkce a  $y = y(x)$  je neznámá funkce, je lineární diferenciální rovnice (řádu  $n$  a s pravou stranou  $b(x)$ ). Pokud je  $b(x)$  identicky nulová, mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici.

Diferenciální rovnice, které nejsou tohoto tvaru<sup>25</sup>, jsou nelineární diferenciální rovnice.

**Příklad** (Rovnice kyvadla): Například rovnice kyvadla

$$\theta'' + \left(\frac{g}{l}\right) \sin \theta = 0,$$

která popisuje pohyb kyvadla délky  $l$  kývajícího se v homogenním tíhovém poli<sup>26</sup> — úhel  $\theta = \theta(t)$  je odchylka kyvadla od svislice v čase  $t$  — je nelineární. Pro malé výchylky  $\theta$  platí  $\sin \theta \approx \theta$  a můžeme řešit lineární aproximaci rovnice kyvadla  $\theta'' + \left(\frac{g}{l}\right) \theta = 0$ , což už je lineární ODR.

**Poznámka:** Rovnice volného pádu i rovnice radioaktivního rozpadu jsou lineární.

## 4.5 Algebraické diferenciální rovnice

**Definice** (Algebraické diferenciální rovnice<sup>27</sup>): Diferenciální rovnice (opět  $n \in \mathbb{N}$ )

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

v nichž  $F$  je polynom v  $n + 2$  proměnných, jsou algebraické diferenciální rovnice.

### 4.5.1 Výsledky o ADE

#### 1. výsledek

**Příklad** (Eulerova gama funkce  $\Gamma(z)$ ): Eulerova gamma funkce  $\Gamma(z)$  je pro komplexní  $z$  s  $\operatorname{re}(z) > 0$  definována integrálem

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

**Věta** (Hölder): *Funkce gama nesplňuje žádnou ( netriviální ) ADE, pro žádný nenulový komplexní polynom  $F$  s  $n + 2$  proměnnými.*

<sup>25</sup>a závisejí tedy na některých proměnných pro neznámou a její derivace nelineárně

<sup>26</sup> $g$  je konstanta tíhového zrychlení

<sup>27</sup>anglická zkratka ADE

## 2. výsledek

**Příklad:** Zavedeme si v jednotkovém komplexním kruhu  $|z| < 1$  funkce

$$\vartheta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \quad \text{a} \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n}.$$

**Věta** (Pozitivně o ADE): *Obě funkce  $\vartheta(z)$  i  $P(z)$  splňují netriviální (a dosti složité) ADE.*

## 3. výsledek

**Příklad** (Stirlingova čísla (druhého druhu)): Definujeme formální mocninnou řadu

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)},$$

kde pro  $k=0$  položíme sčítanec rovný 1. Dále pro  $k \in \mathbb{N}$  definujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n, k) x^n := \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$$

Vždy platí  $S(n, k) \in \mathbb{N}_0$ . Tyto čísla nazýváme Stirlingova čísla (druhého druhu).

**Příklad** (Bellova čísla): V předchozím příkladě jsou koeficienty  $B_n$  vyjádřeny pomocí Stirlingových čísel jako

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$$

a  $B_n$  je počet všech množinových rozkladů  $n$ -prvkové množiny.  $B_n$  jsou takzvaná Bellova čísla.

**Věta** (Klazar): *Formální mocninná řada*

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n,$$

*to jest obyčejná generující funkce Bellových čísel, nespĺňuje žádnou netriviální ADE.*

## 4.6 Rovnice se separovanými proměnnými

**Definice** (Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými): DR se separovanými proměnnými je obecně nelineární diferenciální rovnice prvního řádu tvaru

$$y(a) = b \wedge y' = f(x) \cdot g(y)$$

pro neznámou funkci  $y = y(x)$  s předepsanou hodnotou  $y(a) = b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), kde  $f(x)$ , resp.  $g(y)$ , je funkce definovaná a spojitá na nějakém otevřeném intervalu  $I \ni a$ , resp.  $J \ni b$ , a  $g$  je na  $J$  nenulová.

**Poznámka:** Tento typ rovnice lze lokálně jednoznačně vyřešit funkcí  $y : I' \rightarrow J$ , pro nějaký otevřený interval  $I'$  splňující  $a \in I' \subset I$ . Řešení je vyjádřené (implicitně) pomocí neurčitých integrálů funkcí  $\frac{1}{g}$  a  $f$ . Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a ten přepíšeme pomocí pevně zvolené funkce  $G := \int \frac{1}{g}$  (funkce primitivní na intervalu  $J$  k funkci  $\frac{1}{g}$ ) jako

$$\forall x \in I' : G(y(x))' = f(x).$$

Máme tedy rovnici

$$\forall x \in I' : G(y(x)) = F(x) + c,$$

kde  $F := \int f$  je předem pevně zvolená funkce, primitivní na intervalu  $I$  k funkci  $f$ , a  $c$  je (integrační) konstanta. Řešení  $y(x)$  původní rovnice je tak dáno jako implicitní funkce vztahem

$$\forall x \in I' : \underbrace{G(y(x)) = F(x) + c}_{(*)}, \text{ kde } G = \int \frac{1}{g}, F = \int f$$

a konstanta  $c$  je určena vztahem  $G(b) = F(a) + c$ . Z věty o implicitní funkci<sup>28</sup> plyne, že existuje otevřený interval  $I'$  s  $a \in I' \subset I$  a jednoznačně určená funkce  $y : I' \rightarrow J$ , že  $y(a) = b$  na  $I'$  platí vztah (\*). Na  $I'$  tedy máme jednoznačné řešení rovnice (v definici).

## 4.7 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

**Poznámka** (Lineární diferenciální rovnice 1. řádu): Je to rovnice tvaru ( $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ )

$$y(x_0) = y_0 \wedge y' + a(x)y = b(x),$$

kde  $y = y(x)$  je neznámá funkce a funkce  $a(x)$  a  $b(x)$  jsou dané, definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu  $I \ni x_0$ .

**Poznámka** (Řešení lineární dif. rovnice 1. řádu): Lokální jednoznačnost a existence řešení rovnice plyne z *Picardovy věty*. Rovnici tedy stačí vyřešit<sup>29</sup>. Nejprve nalezneme takovou funkci  $c = c(x)$ , tzv. *integrační faktor*, že

$$c \cdot (y' + ay) = (cy)'.$$

Pak  $cy' + acy = cy' + c'y$  a  $c$  musí splňovat rovnici  $ac = c'$ , čili  $(\log c)' = a$ . Funkce  $c = e^A$ , kde  $A = \int a$ , má tedy požadovanou vlastnost. Výchozí lineární rovnici vynásobíme integračním faktorem a dostaneme

$$(cy)' = c(y' + ay) = cb.$$

Takže  $(cy)' = cb$  a  $cy = D + c_0$ , kde  $D = \int cb$  a  $c_0$  je integrační konstanta. Máme tedy řešení  $y = c^{-1}(D + c_0)$ . Shrnutí,

$$y(x) = e^{-A(x)} \left( \int e^{A(x)} b(x) dx + c_0 \right), \text{ kde } A(x) = \int a(x) dx.$$

Všimněte si, že  $y(x)$  je definovaná na celém  $I$  (definičním oboru funkcí  $a$  a  $b$ ) a že každé počáteční podmínce  $y(x_0) = y_0$  odpovídá právě jedna hodnota integrační konstanty  $c_0$ , pro níž je splněna.

# The End

<sup>28</sup>viz ma2-poznamky

<sup>29</sup>vyjádřit její řešení z koeficientů  $a$  a  $b$  pomocí známých funkcí a známých operací