1 Definujte metrický prostor a sférickou metriku. Dokažte, že hemisféra není plochá.

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \ldots \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \ldots \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřimkami procházejícími počátkem $\overline{0}$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Věta (H není plochá)**:** *Metrický prostor* (H, s) *není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru* (X, e_n) *s* $X \subset \mathbb{R}^n$

Důkaz: Následující vlastnost vzdáleností daných čtyřmi body t, u, v a w v Euklidovském prostoru $(\mathbb{R}^n, e_n)$ není splňena v (H, s):

$$e_n(t, u) = e_n(t, v) = e_n > 0 \wedge e_n(t, w) = e_n(w, u) = \frac{1}{2} e_n(t, u) \Rightarrow e_n(w, v) = \frac{\sqrt{3}}{2} e_n(t, v) \ (< e_n(t, v)).$$

Podle předpokladu implikace body t, u a v tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky $x > 0$ a w má od t i u vzdálenost $\frac{x}{2}$. Podle předchozího tvrzení je pak w středem úsečky tu. Tyto čtyři body jsou tedy koplanární(leží v jedné rovině) a úsečka vw je výčka spoštěná z vrcholu v rovnostranného trojúhélníka tuv na stranu tu. Podle Pythagorovy věty se její délka $e_2(v, w) = e_n(v, w)$ rovná $\frac{\sqrt{3}}{2} x$, což říká závěr implikace.

Na hemisféře (H, s) nalezneme čtyři různé body t, u, v a w splňující předpoklad předchozí implikace, ale ne její závěr. Z toho plyne, že izometrie mezi hemisférou a Euklidovským prostorem neexistuje, protože každá izometrie ze své definice implikaci zachovává. Tyto body jsou

$$t = (1, 0, 0), u = (0, 1, 0), v = (0, 0, 1) \text{ a } w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Patrně $s(t, u) = s(t, v) = s(u, v) = \frac{\pi}{2}$ a $s(t, w) = s(w, u) = \frac{1}{2} s(t, u) = \frac{\pi}{4}$. Bod v je „severní pól“ $(x_3 = 0)$ a w je střed oblouku tu. Ale všechny body na rovníku mají od pólu vzdálenost $\frac{\pi}{2}$. Takže $s(w, v) = s(t, v)$ a závěr implikace neplatí. □

2 Dokažte Ostrowskiho větu.

Definice (p-adický řád)**:** Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p-adický řád čísla n definujeme

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^1$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

Poznámka (Rozšíření $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ na zlomky)**:** Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Definice (p-adická norma)**:** Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Definice (Kanonická p-adická norma)**:** Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p-adická norma $||\cdot||_p$ definovaná jako

$$||\alpha||_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p-adické normě $||\cdot||_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Tvrzení: *Nechť $\|\cdot\|$ je netriviální norma na tělese $\mathbb{Q}$. Potom $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \|n\| \neq 1$.*

Tvrzení: *Pro každá dvě nesoudělná $a, b \in \mathbb{Z}$ existují čísla $c, d \in \mathbb{Z}$, že*

$$ac + bd = 1$$

Věta (A. Ostrowski)**:** *Nechť $||\cdot||$ je norma na tělese racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Pak nastává jedna ze tří následujících možností.*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné $c \in (0, 1]$ takové, že $||x|| = |x|^c$.*
3. *Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p, že $||x|| = |x|_p = c^{ord_p(x)}$(kde $c^\infty := 0$).*

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: Nechť $\|\cdot\|$ je netriviální. Pak díky prvnímu z pomocných tvrzení existuje $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, že $\|n\| \neq 1$. Máme dva případy.

1. **Existuje** $n \in \mathbb{N}$**, že** $\|n\| > 1$. Jako n_0 označíme nejmenší takové n. Patrně $n_0 \geq 2$ a

$$1 \leq m < n_0 \Rightarrow \|m\| \leq 1.$$

Existuje jednoznačné reálné číslo $c > 0$, že

$$\|n_0\| = n_0^c.$$

[1]. $|\cdot$ značí relaci dělitelnosti.

Každé $n \in \mathbb{N}$ lze při základu n_0 zapsat jako

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s, \text{ kde } a_i, s \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_i < n_0 \text{ a } a_s \neq 0.$$

Pro $n_0 = 10$ jde o obvyklý zápis v desítkové soustavě. Takže

$$\begin{aligned}
\|n\| &= \left\|a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s\right\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{s} \|a_j\| \cdot \|n_0\|^j \\
&\leq \sum_{j=0}^{s} n_0^{js} \leq n_0^{sc} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i \\
&\leq n^c C, \quad \text{kde } C := \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i
\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \leq C n^c.$$

Tato nerovnost ve skutečnosti platí dokonce s $C = 1$. PRo každé $m, n \in \mathbb{N}$ multiplikativita normy a předchozí nerovnost dávají

$$\|n\|^m = \|n^m\| \leq C(n^m)^c = C(n^c)^m.$$

Vezmeme-li zde m-tou odmocninu, dostaneme $\|n\| \leq C^{\frac{1}{m}} n^c$. Pro $m \to \infty$ máme $C^{\frac{1}{m}} \to 1$. Takže skutečně

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \leq n^c.$$

Nyní podobně odvodíme opačnou nerovnost $\|n\| \geq n^c, n \in \mathbb{N}_0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ hořejší zápis čísla n při základu n_0 dává

$$n_0^{s+1} > n \geq n_0^s.$$

Podle Δ-ové nerovnosti máme

$$\|n_0\|^{s+1} = \left\|n_0^{s+1}\right\| \leq \|n\| + \left\|n_0^{s+1} - n\right\|.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\|n\| &\geq \|n_0\|^{s+1} - \left\|n_0^{s+1} - n\right\| \geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n)^c \\
&\geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^c = n_0^{(s+1)c}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c\right) \\
&\geq n^c C', \text{ kde } C' := 1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c > 0.
\end{aligned}$$

Trik s m-tou odmocninou opět dává

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \geq n^c$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| = n^c.$$

Z multiplikativity normy dostáváme $\|x\| = |x|^c$ pro každý zlomek $x \in \mathbb{Q}$. Podle tvrzení výše je $c \in (0, 1]$. Odvodili jsme, že platí případ 2 Ostrowskiho věty.

2. **Zbývá případ, kdy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|n\| \leq 1$ a existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\|n\| < 1$.** Nechť n_0 je nejmenší takové n, opět $n_0 \geq 2$. Tvrdíme, že $n_0 = p$ je prvočíslo. Kdyby totiž n_0 mělo rozklad $n_0 = n_1 n_2$ s $n_i \in \mathbb{Z}$ a $1 < n_1, n_2 < n_0$, dostali bychom spor

$$1 > \|n_0\| = \|n_1 n_2\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1 \cdot 1 = 1,$$

kde jsme použili multiplikativitu normy a to, že $\|m\| = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ s $1 \leq m < n_0$. Ukážeme, že každé jiné prvočíslo $q \neq p$ má normu $\|q\| = 1$. Pro spor nechť $q \neq p$ je další prvočíslo s normou $\|q\| < 1$. Vezmeme tak velké $m \in \mathbb{N}$, že $\|p\|^m, \|q\|^m < \frac{1}{2}$. Podle známého výsledku v elementární teorii čísel výše existují celá čísla a a b, že $aq^m + bp^m = 1$. Znormování této rovnosti dává spor

$$1 = \|1\| = \|aq^m + bp^m\| \leq \|a\| \cdot \|q\|^m + \|b\| \cdot \|p\|^m < 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Zde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost, multiplikativitu normy a to, že nyní $\|a\| \leq 1$ pro každé $a \in \mathbb{Z}$.

Tedy $\|q\| = 1$ pro každé prvočíslo q různé od p. Odtud pomocí multiplikativity normt a rozkladu nenulového zlomku x na součin mocnin prvočísel dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\| \prod_{q=2,3,5,\dots} q^{\mathrm{ord}_q(x)} \right\| = \prod_{q=2,3,5,\dots} \left\| q^{\mathrm{ord}_q(x)} \right\| = \|p\|^{\mathrm{ord}_p(x)} \\ &= c^{\mathrm{ord}_p(x)} \text{ kde } c := \|p\| \in (0,1).\end{aligned}$$

Též $\|0\| = c^{\mathrm{ord}_p(0)} = c^{\infty} = 0$. Dostali jsme případ 3 Ostrowskiho věty.

□

3 Dokažte Heine-Borelovu větu.

Tvrzení (Topologická spojitost)**:** *Nechť $f : M \to N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e). prostorem*

$$f \text{ je spojité} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^2$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina a*

$$f : X \to N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení z neprázdné kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do (N, e). Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \to X$$

je spojité.

Definice (Homeomorfismus)**:** Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M, d) a (N, e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.

[2]OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.

Definice (Topologická kompaktnost)**:** Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i\in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i\in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova)**:** *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme vzít $A = M$.

- **Implikace $\Rightarrow$:**
  Nechť (M, d) je kompaktní metrický prostor a

  $$M = \bigcup_{i\in I} X_i$$

  je jeho otevřené pokrytí, takže každá množina X_i je otevřená. Nalezneme jeho konečné podpokrytí. Nejprve dokážeme, že

  $$\forall \delta > 0 \, \exists \text{ konečná množina } S_\delta \subset M : \bigcup_{a\in S_\delta} B(a, \delta) = M.$$

  Kdyby to tak nebylo, pak by existovalo $\delta_0 > 0$ a posloupnost $(a_n) \subset M$, že $m < n \Rightarrow d(a_m, a_n) \geq \delta_0$ — ve sporu s předpokládanou kompaktností množiny M tato posloupnost nemá konvergentní podposloupnost. Skutečně, kdyby(negujeme hořejší tvrzení o δ a S_δ) existovalo $\delta_0 > 0$, že pro každou konečnou množinu $S \subset M$ je

  $$M \setminus \bigcup_{a\in S} B(a, \delta_0) \neq \emptyset,$$

  pak — máme-li již definované body $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s $d(a_i, a_j) \geq \delta_0$ pro každé $1 \leq i < j \leq n$ — vezmeme $a_{n+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta_0)$ a a_{n+1} má od každého bodu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vzdálenost alespoň δ_0. Tak definujeme celou posloupnost (a_n).

  Pro spor nyní předpokládejme, že hořejší otevřené pokrytí množiny M množinami X_i nemá konečné podpokrytí. Tvrdíme, že odtud vyplývá, že

  $$\forall n \in \mathbb{N} \, \exists b_n \in S_{\frac{1}{n}} \, \forall i \in I : B\left(b_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset X_i.$$

  Kdyby to tak nebylo, pak(negujeme předchozí tvrzení) by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $b \in S_{\frac{1}{n_0}}$ existuje $i_b \in I$, že $B\left(b, \frac{1}{n_0}\right) \subset X_{i_b}$. Pak ale, protože $M = \bigcup_{b\in S_{\frac{1}{n_0}}} B\left(b, \frac{1}{n_0}\right)$, dávají indexy $J = \{i_b \mid b \in S_{\frac{1}{n_0}}\} \subset I$ ve sporu s předpokladem konečné podpokrytí množiny M.

  Na samostatném řádku uvedené tvrzení o n a b_n tak platí a lze vzít posloupnost $(b_n) \subset M$. Podle předpokladu má konvergentní podposloupnost b_{k_n} s $b := \lim b_{k_n} \in M$. Protože X_i pokrývají M, existuje $j \in I$, že $b \in X_j$. Díky otevřenosti X_i existuje $r > 0$, že $B(b, r) \subset X_j$. Vezmeme tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{k_n} < \frac{r}{2}$ a $d(b, b_{k_n}) < \frac{r}{2}$. Pro každé $x \in B\left(b_{k_n}, \frac{1}{k_n}\right)$ pak podle Δ-ové nerovnosti máme, že $d(x, b) \leq d(x, b_{k_n}) + d(b_{k_n}, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Tedy

  $$B\left(b_{k_n}, \frac{1}{k_n}\right) \subset B(b, r) \subset X_j,$$

  ve sporu s hořejší vlastností bodů b_n. Předpoklad, že konečné podpokrytí neexistuje, vede ke sporu. Proto pokrytí M množinami $X_i, i \in I$, má konečné podpokrytí.

- **Implikace $\Leftarrow$:**
Předpokládáme, že každé otevřené pokrytí množiny M má konečné podpokrytí a odvodíme z toho, že každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost. Nejprve ukážeme, že předpoklad
$$\forall b \in M \, \exists r_b > 0 : M_b := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r_0)\} \text{ je konečná}$$
vede ke sporu. Z pokrytí $M = \bigcup_{b \in M} B(b, r_b)$ bychom totiž vybrali konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$ a nahlédli, že existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \notin \bigcup_{b \in N} B(b, r_b)$, protože množina indexů $\bigcup_{b \in N} M_b$ je konečná (konečné sjednocení konečných množin). To je spor, protože $\bigcup_{b \in N} B(b, r_b) = M$. Předpoklad tedy neplatí a naopak je pravda, že
$$\exists b \in M \, r > 0 : M_r := \{n \in N \mid a_n \in B(b, r)\} \text{ je nekonečná.}$$
Teď už lehce z (a_n) vybereme konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) a limitou b. Nechť už jsme definovali indexy $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, že $d(b, a_{k_i}) < \frac{1}{i}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Množina indexů $M_{\frac{1}{n+1}}$ je nekonečná, takže můžeme zvolit takové $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, že $k_{n+1} > k_n$ a $k_{n+1} \in M_{\frac{1}{n+1}}$. Pak i $d(b, a_{k_{n+1}}) < \frac{1}{n+1}$. Takto je definována posloupnost (a_{k_n}) konvergující k b.

$\square$

4 Dokažte existenci n-tých odmocnin v $\mathbb{C}$.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice
$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$
je souvislá množina.

Tvrzení: *Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.*

Tvrzení (Druhá odmocnina v $\mathbb{C}$)**:** $\forall a + bi \in \mathbb{C}$ *máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech*
$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$
že $(c + di)^2 = a + bi$.

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n-té odmocniny v $\mathbb{C}$)**:** *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*
$$\forall u \in \mathbb{C} \, \forall n \in \mathbb{N} \, \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: TODO $\square$

5 Dokažte Besselovu nerovnost.

Tvrzení (Ortogonalita sinů a cosinů)**:** *Pro každá dvě celá čísla $m, n \geq 0$ je*
$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$$
Pro každá dvě delá čísla $m, n \geq 0$, kromě $m = n = 0$, je
$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \ldots \quad m = n \\ 0 & \ldots \quad m \neq n. \end{cases}$$
Konečně
$$\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi.$$

Definice (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty)**:** Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx}, n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}, n = 1, 2, \dots$$

Definice (Fourierova řada funkce)**:** Fourierova řada funkce $f(\in \mathcal{R}(-\pi, \pi))$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right),$$

kde a_n a b_n jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$, v němž jsou „souřadnými osami“(prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v $\mathbb{R}^n$ se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

Věta (Besselova nerovnost)**:** *Pro Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Důkaz: TODO □

6 Spočítejte, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Příklad (Basilejský problém)**:** TODO

7 Dokažte, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce.

8 Dokažte případ 2 nebo případ 3 Pólyovy věty.

9 Dokažte, že $\rho \neq 0$.

10 Dokažte Caychy-Goursatovu větu pro obdélníky.

11 Vyřešte diferenciální rovnici $y' + ay = b$.