

Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Tyto poznámky jsem sepsal pro přípravu na zkoušku z přednášek pana doc. Klazara. Neprošly zatím žádnou korekcí, budou tedy pravděpodobně obsahovat mnoho chyb. Pokud v poznámkách najdete chybu, nebo pokud budete mít nějakou připomínku k tomu, jak jsou psané, kontaktujte mě prosím na Discordu, nebo mi dejte pull-request na <https://github.com/3011/ma3-poznamky>. Ke většině vět jsem vynechal důkazy, psal jsem je téměř výhradně k větám/tvrzením, která spadají k otázkám vypsáním ke zkoušce.

Obsah

1	Metrické prostory	3
1.1	Definice	3
1.2	Euklidovský prostor, Sférická metrika	3
1.3	p -adické metriky	4
1.4	Kompaktnost množin v metrických prostorech	7
1.5	Topologická spojitost	9
1.6	Heine-Borelova věta	9
1.7	Souvislé množiny a metrické prostory	11
1.8	Základní věta algebry	11
1.9	Úplné množiny a metrické prostory	12
1.10	Baireova věta	12
2	Řady	13
2.1	Definice	13
2.2	Fourierova řada funkce	13
2.3	Basilejský problém	16
2.4	Divergentní řady	16
2.5	Konvergence řad	16
2.5.1	Absolutní konvergence	16
2.5.2	Stejněměrná a bodová konvergence	17
2.6	Mocninné řady	18
2.6.1	Pólyova věta o náhodných procházkách	20
3	Komplexní analýza	21
3.1	Holomorfní a analytické funkce	22
3.1.1	Odlišnosti reálné a komplexní analýzy	22
3.2	Úsečky a obdélníky	23
3.3	Integrály	24
3.4	Konstanta $\rho = 2\pi i$	25
3.5	Cauchy-Goursatova věta	26
3.6	Funkcionál \int	28
3.7	Meromorfní funkce a rezidua	29
4	Úvod do diferenciálních rovnic	29
4.1	Picardova věta	30
4.2	Peanova věta	30
4.3	Příklady diferenciálních rovnic	31
4.3.1	Obyčejné diferenciální rovnice	31
4.3.2	Parciální diferenciální rovnice	31
4.4	Obecný tvar ODR, (Ne)lineární diferenciální rovnice	32
4.5	Algebraické diferenciální rovnice	32
4.5.1	Výsledky o ADE	32
4.6	Rovnice se separovanými proměnnými	33
4.7	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	34

1 Metrické prostory

1.1 Definice

Definice (Metrický prostor): Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor): Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d') , tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d) . Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d) .

Definice (Izometrie): Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \rightarrow N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f , prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

1.2 Euklidovský prostor, Sférická metrika

Příklad (Euklidovský prostor): Euklidovský prostor (\mathbb{R}^n, e_n) , $n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\bar{x}, \bar{y}^1 \in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body \bar{x} a \bar{y} . Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n) , když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika): Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru \mathbb{R}^n . Funkci $s : S \times S \rightarrow [0, \pi]$ definujeme pro $\bar{x}, \bar{y} \in S$ jako

$$s(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 \dots \bar{x} = \bar{y} \\ \varphi \dots \bar{x} \neq \bar{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřímkami procházejícími počátkem $\bar{0}$ a body \bar{x} a \bar{y} . Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body \bar{x} a \bar{y} na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body \bar{x} a \bar{y} . Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: (S, s) je metrický prostor.

Definice ((Horní) hemisféra): (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

¹ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

Tvrzení: *Když $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ jsou různé body z Euklidovském prostoru se vzdálenostmi $e_n(c, a) = e_n(c, b) = \frac{1}{2}e_n(a, b)$, pak c je středem úsečky ab .*

Věta (H není plochá): *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

Důkaz: Následující vlastnost vzdáleností daných čtyřmi body t, u, v a w v Euklidovském prostoru (\mathbb{R}^n, e_n) není splněna v (H, s) :

$$e_n(t, u) = e_n(t, v) = e_n(u, v) > 0 \wedge e_n(t, w) = e_n(w, u) = \frac{1}{2}e_n(t, u) \Rightarrow e_n(w, v) = \frac{\sqrt{3}}{2}e_n(t, v) (< e_n(t, v)).$$

Podle předpokladu implikace body t, u a v tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky $x > 0$ a w má od t i u vzdálenost $\frac{x}{2}$. Podle předchozího tvrzení je pak w středem úsečky tu . Tyto čtyři body jsou tedy koplanární (leží v jedné rovině) a úsečka vw je výška spoštěná z vrcholu v rovnostranného trojúhelníka tuv na stranu tu . Podle Pythagorovy věty se její délka $e_2(v, w) = e_n(v, w)$ rovná $\frac{\sqrt{3}}{2}x$, což říká závěr implikace.

Na hemisféře (H, s) nalezneme čtyři různé body t, u, v a w splňující předpoklad předchozí implikace, ale ne její závěr. Z toho plyne, že izometrie mezi hemisférou a Euklidovským prostorem neexistuje, protože každá izometrie ze své definice implikaci zachovává. Tyto body jsou

$$t = (1, 0, 0), u = (0, 1, 0), v = (0, 0, 1) \text{ a } w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Patrně $s(t, u) = s(t, v) = s(u, v) = \frac{\pi}{2}$ a $s(t, w) = s(w, u) = \frac{1}{2}s(t, u) = \frac{\pi}{4}$. Bod v je „severní pól“ ($x_3 = 0$) a w je střed oblouku tu . Ale všechny body na rovníku mají od pólu vzdálenost $\frac{\pi}{2}$. Takže $s(w, v) = s(t, v)$ a závěr implikace neplatí. \square

Definice (Ultrametrika): Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika (nearchimédovská metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru): *V ultrametrickém prostoru (M, d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule): (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M, d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

1.3 p -adické metriky

Definice (p -adický řád): Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p -adický řád čísla n definujeme

$$\text{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\text{ord}_p(0) := +\infty$.

². \mid značí relaci dělitelnosti.

Poznámka (Rozšíření $\text{ord}_p(\cdot)$ na zlomky): Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\text{ord}_p(\alpha) := \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\text{ord}_p(0) = \text{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (aditivita $\text{ord}_p(\cdot)$): Platí, že

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \text{ord}_p(\alpha\beta) = \text{ord}_p(\alpha) + \text{ord}_p(\beta)$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (\infty) := +\infty$, pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Definice (p -adická norma): Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$ jako

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p := c^{\text{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Tvrzení (multiplikativita $|\cdot|_p$): Pro každé p a každé dva zlomky α, β (a každé $c \in (0, 1)$) je

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p |\beta|_p$$

Definice (Normované těleso): Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso vybavené normou $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

Tvrzení: Pro každé normované těleso $(F, |\cdot|_F)$ je funkce $d(x, y) := |x - y|_F$ metrika na F . Pokud $|\cdot|_F$ splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je d ultrametrika.

Tvrzení (o $|\cdot|_p$): Pro každé prvočíslo p a každé $c \in (0, 1)$ je $\mathbb{Q}, |\cdot|_p$ normované těleso. Příslušný metrický prostor (\mathbb{Q}, d) ($d(x, y) := |x - y|_F$) je ultrametrický prostor.

Definice (Triviální norma): Triviální norma na libovolném tělese F je funkce $\|\cdot\|$ s $\|0_F\| = 0$ a $\|x\| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Tvrzení (Mocnění obvyklé absolutní hodnoty): Pro $c > 0$ je $|\cdot|^c$ norma (na \mathbb{Q}, \mathbb{R} a \mathbb{C}), právě když $c \leq 1$.

Definice (Kanonická p -adická norma): Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p -adická norma $\|\cdot\|_p$ definovaná jako

$$\|\alpha\|_p := p^{-\text{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p -adické normě $\|\cdot\|_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Tvrzení: Nechť $\|\cdot\|$ je netriviální norma na tělese \mathbb{Q} . Potom $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \|n\| \neq 1$.

Tvrzení: Pro každá dvě nesoudělná $a, b \in \mathbb{Z}$ existují čísla $c, d \in \mathbb{Z}$, že

$$ac + bd = 1$$

Věta (A. Ostrowski): Nechť $\|\cdot\|$ je norma na tělese racionálních čísel \mathbb{Q} . Pak nastává jedna ze tří následujících možností.

1. Je to triviální norma.

2. Existuje reálné $c \in (0, 1]$ takové, že $\|x\| = |x|^c$.

3. Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p , že $\|x\| = |x|_p = c^{\text{ord}_p(x)}$ (kde $c^\infty := 0$).

Modifikovaná absolutní hodnota a p -adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: Nechť $\|\cdot\|$ je netriviální. Pak díky prvnímu z pomocných tvrzení existuje $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, že $\|n\| \neq 1$. Máme dva případy.

1. **Existuje** $n \in \mathbb{N}$, že $\|n\| > 1$. Jako n_0 označíme nejmenší takové n . Patrně $n_0 \geq 2$ a

$$1 \leq m < n_0 \Rightarrow \|m\| \leq 1.$$

Existuje jednoznačné reálné číslo $c > 0$, že

$$\|n_0\| = n_0^c.$$

Každé $n \in \mathbb{N}$ lze při základu n_0 zapsat jako

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s, \text{ kde } a_i, s \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_i < n_0 \text{ a } a_s \neq 0.$$

Pro $n_0 = 10$ jde o obvyklý zápis v desítkové soustavě. Takže

$$\begin{aligned} \|n\| &= \|a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s\| \\ &\leq \sum_{j=0}^s \|a_j\| \cdot \|n_0\|^j \\ &\leq \sum_{j=0}^s n_0^{js} \leq n_0^{sc} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i \\ &\leq n^c C, \text{ kde } C := \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i \end{aligned}$$

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \leq C n^c.$$

Tato nerovnost ve skutečnosti platí dokonce s $C = 1$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ multiplikativita normy a předchozí nerovnost dávají

$$\|n\|^m = \|n^m\| \leq C(n^m)^c = C(n^c)^m.$$

Vezmeme-li zde m -tou odmocninu, dostaneme $\|n\| \leq C^{\frac{1}{m}} n^c$. Pro $m \rightarrow \infty$ máme $C^{\frac{1}{m}} \rightarrow 1$. Takže skutečně

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \leq n^c.$$

Nyní podobně odvodíme opačnou nerovnost $\|n\| \geq n^c, n \in \mathbb{N}_0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ hořejší zápis čísla n při základu n_0 dává

$$n_0^{s+1} > n \geq n_0^s.$$

Podle Δ -ové nerovnosti máme

$$\|n_0\|^{s+1} = \|n_0^{s+1}\| \leq \|n\| + \|n_0^{s+1} - n\|.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\|n\| &\geq \|n_0\|^{s+1} - \|n_0^{s+1} - n\| \geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n)^c \\ &\geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^c = n_0^{(s+1)c} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c\right) \\ &\geq n^c C', \text{ kde } C' := 1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c > 0.\end{aligned}$$

Trik s m -tou odmocninou opět dává

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \geq n^c$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| = n^c.$$

Z multiplikativnosti normy dostáváme $\|x\| = |x|^c$ pro každý zlomek $x \in \mathbb{Q}$. Podle tvrzení výše je $c \in (0, 1]$. Odvodili jsme, že platí případ 2 Ostrowského věty.

2. **Zbývá případ, kdy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|n\| \leq 1$ a existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\|n\| < 1$.** Nechť n_0 je nejmenší takové n , opět $n_0 \geq 2$. Tvrdíme, že $n_0 = p$ je prvočíslo. Kdyby totiž n_0 mělo rozklad $n_0 = n_1 n_2$ s $n_i \in \mathbb{Z}$ a $1 < n_1, n_2 < n_0$, dostali bychom spor

$$1 > \|n_0\| = \|n_1 n_2\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1 \cdot 1 = 1,$$

kde jsme použili multiplikativitu normy a to, že $\|m\| = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ s $1 \leq m < n_0$. Ukážeme, že každé jiné prvočíslo $q \neq p$ má normu $\|q\| = 1$. Pro spor nechť $q \neq p$ je další prvočíslo s normou $\|q\| < 1$. Vezmeme tak velké $m \in \mathbb{N}$, že $\|p\|^m, \|q\|^m < \frac{1}{2}$. Podle známého výsledku v elementární teorii čísel výše existují celá čísla a a b , že $aq^m + bp^m = 1$. Znormování této rovnosti dává spor

$$1 = \|1\| = \|aq^m + bp^m\| \leq \|a\| \cdot \|q\|^m + \|b\| \cdot \|p\|^m < 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Zde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost, multiplikativitu normy a to, že nyní $\|a\| \leq 1$ pro každé $a \in \mathbb{Z}$.

Tedy $\|q\| = 1$ pro každé prvočíslo q různé od p . Odtud pomocí multiplikativnosti normy a rozkladu nenulového zlomku x na součin mocnin prvočísel dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\| \prod_{q=2,3,5,\dots} q^{\text{ord}_q(x)} \right\| = \prod_{q=2,3,5,\dots} \|q^{\text{ord}_q(x)}\| = \|p\|^{\text{ord}_p(x)} \\ &= c^{\text{ord}_p(x)} \text{ kde } c := \|p\| \in (0, 1).\end{aligned}$$

Těž $\|0\| = c^{\text{ord}_p(0)} = c^\infty = 0$. Dostali jsme případ 3 Ostrowského věty.

□

1.4 Kompaktnost množin v metrických prostorech

Poznámka (Konvence): $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ jsou reálná čísla a $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Limitu píšeme jako $\lim a_n = a$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Definice (Limita): Nechť je (M, d) metrický prostor, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. (a_n) má limitu v (M, d) , pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

Definice (Konvergence, Divergence): Pokud má (a_n) limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

Definice (Kompaktní metrický prostor): Buď (M, d) metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že X je kompaktní, pokud

$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m_n} = a.$$

Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X . Metrický prostor (M, d) je kompaktní, pokud M je kompaktní.

Definice (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory): Buďte (M, d) a (N, e) metrické prostory a buď $f : M \rightarrow N$ zobrazení mezi nimi. f je spojité v $a \in M$, pokud

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Zobrazení f je spojité, pokud je spojité v každém bodě $a \in M$.

Věta (Princip maxima): *Nechť (M, d) je metrický prostor,*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

je funkce z M do reálné osy a $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina. Pak

$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší hodnotu $f(a)$ a největší hodnotu $f(b)$.

Definice (Součin metrických prostorů): Pro metrické prostory (M, d) a (N, e) definujeme jejich součin $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ je na něm dána jako

$$(d \times e)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + e(a_2, b_2)^2}$$

Definice (Otevřená množina): Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je otevřená, pokud

$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a, r) \subset X.$$

Definice (Uzavřená množina): Množina X je uzavřená, pokud $M \setminus X$ je otevřená.

Definice (Omezená množina): Množina X je omezená, pokud

$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a, r)$$

Definice (Diametr): Diametr(průměr) množiny X je s $V := \{d(a, b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako

$$\text{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \dots \text{množina } V \text{ je shora omezená} \\ +\infty & \dots \text{množina } V \text{ není shora omezená} \end{cases}$$

Věta (Kompaktní \Rightarrow uzavřená a omezená, součin): *Platí následující:*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d) , pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*
2. *Jsou-li (M, d) a (N, e) dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní metrický prostor.*

Věta (Kompaktní množina v \mathbb{R}^n): *V každém Euklidovském metrickém prostoru (\mathbb{R}^n, e_n) je množina $X \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

1.5 Topologická spojitost

Tvrzení (Topologická spojitost): *Nechť $f : M \rightarrow N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) . prostorem*

$$f \text{ je spojitý} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^3$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Topologická spojitost pro podprostory): *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná množina a $f : X \rightarrow N$. prostorem*

$$f \text{ je spojitý zobrazení definované na } (X, d) \iff \forall \text{ OM } A \subset N : \exists \text{ OM } B \subset M : f^{-1}[A] = X \cap B.$$

Topologickou definici spojitosti jsme rozšířili na podprostory.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu): *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina a*

$$f : X \rightarrow N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu): *Nechť $f : X \rightarrow N$ je spojitý zobrazení z neprázdné kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do (N, e) . Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \rightarrow X$$

je spojitý.

Definice (Homeomorfismus): Zobrazení $f : M \rightarrow N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M, d) a (N, e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.

1.6 Heine-Borelova věta

Definice (Topologická kompaktnost): Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova): *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme vzít $A = M$.

- **Implikace \Rightarrow :**

Nechť (M, d) je kompaktní metrický prostor a

$$M = \bigcup_{i \in I} X_i$$

je jeho otevřené pokrytí, takže každá množina X_i je otevřená. Nalezneme jeho konečné podpokrytí. Nejprve dokážeme, že

$$\forall \delta > 0 \exists \text{ konečná množina } S_\delta \subset M : \bigcup_{a \in S_\delta} B(a, \delta) = M.$$

³OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.

Kdyby to tak nebylo, pak by existovalo $\delta_0 > 0$ a posloupnost $(a_n) \subset M$, že $m < n \Rightarrow d(a_m, a_n) \geq \delta_0$ — ve sporu s předpokládanou kompaktností množiny M tato posloupnost nemá konvergentní podposloupnost. Skutečně, kdyby(negujeme hořejší tvrzení o δ a S_δ) existovalo $\delta_0 > 0$, že pro každou konečnou množinu $S \subset M$ je

$$M \setminus \bigcup_{a \in S} B(a, \delta_0) \neq \emptyset,$$

pak — máme-li již definované body a_1, a_2, \dots, a_n s $d(a_i, a_j) \geq \delta_0$ pro každé $1 \leq i < j \leq n$ — vezmeme $a_{n+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \delta_0)$ a a_{n+1} má od každého bodu a_1, a_2, \dots, a_n vzdálenost alespoň δ_0 . Tak definujeme celou posloupnost (a_n) .

Pro spor nyní předpokládejme, že hořejší otevřené pokrytí množiny M množinami X_i nemá konečné podpokrytí. Tvrdíme, že odtud vyplývá, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists b_n \in S_{\frac{1}{n}} \forall i \in I : B\left(b_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset X_i.$$

Kdyby to tak nebylo, pak(negujeme předchozí tvrzení) by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $b \in S_{\frac{1}{n_0}}$ existuje $i_b \in I$, že $B\left(b, \frac{1}{n_0}\right) \subset X_{i_b}$. Pak ale, protože $M = \bigcup_{b \in S_{\frac{1}{n_0}}} B\left(b, \frac{1}{n_0}\right)$, dávají indexy $J = \{i_b \mid b \in S_{\frac{1}{n_0}}\} \subset I$ ve sporu s předpokladem konečné podpokrytí množiny M .

Na samostatném řádku uvedené tvrzení o n a b_n tak platí a lze vzít posloupnost $(b_n) \subset M$. Podle předpokladu má konvergentní podposloupnost b_{k_n} s $b := \lim b_{k_n} \in M$. Protože X_i pokrývají M , existuje $j \in I$, že $b \in X_j$. Díky otevřenosti X_j existuje $r > 0$, že $B(b, r) \subset X_j$. Vezmeme tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{k_n} < \frac{r}{2}$ a $d(b, b_{k_n}) < \frac{r}{2}$. Pro každé $x \in B\left(b_{k_n}, \frac{1}{k_n}\right)$ pak podle Δ -ové nerovnosti máme, že $d(x, b) \leq d(x, b_{k_n}) + d(b_{k_n}, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Tedy

$$B\left(b_{k_n}, \frac{1}{k_n}\right) \subset B(b, r) \subset X_j,$$

ve sporu s hořejší vlastností bodů b_n . Předpoklad, že konečné podpokrytí neexistuje, vede ke sporu. Proto pokrytí M množinami $X_i, i \in I$, má konečné podpokrytí.

• Implikace \Leftarrow :

Předpokládáme, že každé otevřené pokrytí množiny M má konečné podpokrytí a odvodíme z toho, že každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost. Nejprve ukážeme, že předpoklad

$$\forall b \in M \exists r_b > 0 : M_b := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r_b)\} \text{ je konečná}$$

vede ke sporu. Z pokrytí $M = \bigcup_{b \in M} B(b, r_b)$ bychom totiž vybrali konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$ a nahlédli, že existuje n_0 , že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \notin \bigcup_{b \in N} B(b, r_b)$, protože množina indexů $\bigcup_{b \in N} M_b$ je konečná (konečné sjednocení konečných množin). To je spor, protože $\bigcup_{b \in N} B(b, r_b) = M$. Předpoklad tedy neplatí a naopak je pravda, že

$$\exists b \in M \forall r > 0 : M_r := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r)\} \text{ je nekonečná.}$$

Tedy už lehce z (a_n) vybereme konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) a limitou b . Necht' už jsme definovali indexy $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$, že $d(b, a_{k_i}) < \frac{1}{i}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Množina indexů $M_{\frac{1}{n+1}}$ je nekonečná, takže můžeme zvolit takové $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, že $k_{n+1} > k_n$ a $k_{n+1} \in M_{\frac{1}{n+1}}$. Pak i $d(b, a_{k_{n+1}}) < \frac{1}{n+1}$. Takto je definována posloupnost (a_{k_n}) konvergující k b .

□

1.7 Souvislé množiny a metrické prostory

Definice (Obojetná množina): Podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je obojetná⁴, je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny \emptyset a M .

Definice (Souvislý prostor): Prostor (M, d) je souvislý, pokud v něm neexistuje netriviální⁵ obojetná podmnožina. Jinak, má-li M obojetnou podmnožinu $X \subset M$ s $X \neq \emptyset$, je nesouvislý.

Definice (Souvislá podmnožina): Podmnožina $X \subset M$ je souvislá, je-li podprostor (X, d) souvislý. Pokud podprostor (X, d) souvislý není, je nesouvislá.

Definice (Trhání množiny): Necht (M, d) je metrický prostor a $X, A, B \subset M$. Řekneme, že množiny A a B trhají množinu X , pokud A a B jsou otevřené a platí všechna následující

- $X \subset A \cup B$
- $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$
- $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \emptyset$

Tvrzení: Podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá množina v metrickém prostoru (M, d) , právě když existují $A, B \subset M$, které ji trhají.

1.8 Základní věta algebry

Věta (Základní věta algebry): Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{j=0}^n a_j \alpha^j = 0$$

Věta (Souvislost intervalů): Každý interval $[a, b] \subset \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$, je souvislá množina.

Věta (souvislost a spojitost): Necht $f : X \rightarrow N$ je spojitě zobrazení ze souvislé množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do metrického prostoru (N, e) . Potom

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subset N$$

je souvislá množina.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

Tvrzení: Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.

Tvrzení (Druhá odmocnina v \mathbb{C}): $\forall a + bi \in \mathbb{C}$ máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech

$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že $(c + di)^2 = a + bi$.

⁴anglicky *clopen*

⁵Různou od M a \emptyset .

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n -té odmocniny v \mathbb{C}): *Komplexní čísla obsahují všechny n -té odmocniny, tedy*

$$\forall u \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: TODO □

Tvrzení (Redukce na n -té odmocniny): *Když \mathbb{C} obsahuje všechny n -té odmocniny, pak platí Základní věta algebry a každý nekonzstantní komplexní polynom má kořen.*

1.9 Úplné množiny a metrické prostory

Definice (Cauchyova posloupnost): Cauchyova posloupnost (a_n) splňuje, že

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Definice (Úplný metrický prostor): Metrický prostor (M, d) je úplný, je-li každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset M$ konvergentní.

Definice (Úplná množina): Množina $X \subset M$ je úplná, je-li podprostor (X, d) úplný.

Tvrzení (úplnost uzavřených podprostorů): *V úplném metrickém prostoru (M, d) je každá uzavřená množina $X \subset M$ úplná.*

1.10 Baireova věta

Definice (Řídká a hustá množina): Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je řídká(v M), pokud

$$\forall a \in M \forall r > 0 \exists b \in M \exists s > 0 : B(b, s) \subset B(a, r) \wedge B(b, s) \cap X = \emptyset$$

Každá koule v (M, d) tedy obsahuje podkouli disjunktní s X . Podobně množina $Y \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je hustá(v M), pokud

$$\forall a \in M \forall r > 0 : B(a, r) \cap Y \neq \emptyset$$

Tvrzení (hustota a spojitost): *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je hustá v M a*

$$f, g : M \rightarrow N$$

jsou taková spojitá zobrazení, že $f|X = g|X$ ⁶ Potom $f = g$.

Definice (Uzavřená koule): Pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ rozumíme v metrickém prostoru (M, d) uzavřenou kouli $\overline{B}(a, r)$ množinu

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Uzavřená koule je uzavřená množina a pro každé $a \in M$ a kladná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ t.ž. $r < s$ je $\overline{B}(a, r) \subset B(a, s)$.

Věta (Baireova): *Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Pak některá množina X_n není řídká.

Důsledek (o úplném metrickém prostoru): Každý úplný metrický prostor (M, d) , který neobsahuje izolované body, je nespočetný.

⁶Zúžení obou funkcí na množinu X se shodují.

2 Řady

2.1 Definice

Definice (Řada, konvergence a divergence řady): Řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, které je přiřazena posloupnost částečných součtů

$$(s_n) := (a_1 + \dots + a_n) \subset \mathbb{R}.$$

Pokud posloupnost (s_n) má limitu, řekneme, že řada má součet. Je-li tato limita vlastní ($\in \mathbb{R}$), pak řada konverguje, jinak (součet je $\pm\infty$ nebo neexistuje) diverguje. Součet řady se označuje stejným symbolem jako řada sama, takže také

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim s_n = \lim(a_1 + \dots + a_n).$$

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence): *Když řada $\sum a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.*

Tvrzení (Harmonická řada):

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

Tvrzení:

$$\sum \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n^2} = 1$$

Tvrzení (Geometrická řada): *Pro každé $q \in (-1, 1)$ je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Tvrzení (Leibnizovo kritérium): *Když $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$ a $\lim a_n = 0$, pak řada $\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ konverguje.*

2.2 Fourierova řada funkce

Definice (Trigonometrická řada): Trigonometrická řada je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde a_n, b_n jsou její koefficienty a $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.

Trigonometrická řada je fakticky parametrický systém řad parametrizovaný proměnnou x . Chceme odvodit vyjádření široké třídy funkcí $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, pomocí trigonometrických řad.

Definice (Skoro skalární součin): Nechť $\mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je množina všech funkcí $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, které mají na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál. Pro $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg \in \mathbb{R}.^7$$

Pro tento skoro skalární součin platí následující

⁷Z teorie Riemannova integrálu plyne, že pokud $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$, pak i $fg \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$.

Tvrzení (Symetrie, nezápornost a linearita skoro skalárního součinu):

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2. $\langle f, f \rangle \geq 0$
3. $\langle af + bg, h \rangle = a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle$

ale

Tvrzení: *Ekvivalence* $\langle f, f \rangle = 0 \iff f \equiv 0$ *neplatí.*

Definice (2π -periodická funkce): Funkce je 2π -periodická, když pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Tvrzení (Ortogonalita sinů a cosinů): Pro každá dvě celá čísla $m, n \geq 0$ je

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$$

Pro každá dvě delá čísla $m, n \geq 0$, kromě $m = n = 0$, je

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \dots & m = n \\ 0 & \dots & m \neq n. \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi.$$

Definice (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty): Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, n = 1, 2, \dots$$

Definice (Fourierova řada funkce): Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde a_n a b_n jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, v němž jsou „souřadnými osami“ (prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v \mathbb{R}^n se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

Věta (Besselova nerovnost): Pro Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ platí nerovnost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Důkaz: TODO

□

Tvrzení (Riemannovo-Lebesgueovo lemma): Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je⁸

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

Definice (Po částech hladká funkce): Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, je po částech hladká, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b, k \in \mathbb{N},$$

intervalu $[a, b]$, že na každém intervalu $a_{i-1}, a_i, i = 1, 2, \dots, k$, má spojitou derivaci f' a pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i - 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i - 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^-} f'(x)$$

a pro každé $i = 0, 1, \dots, k - 1$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i + 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) \quad \text{a} \quad f'(a_i + 0) := \lim_{x \rightarrow a_i^+} f'(x)$$

Po částech hladká funkce tedy může být v několika bodech intervalu $[a, b]$ nespojitá, ale v bodech nespojitosti má vlastní jednostranné limity a má v nich definované jednostranné nesvislé tečny.**Tvrzení** (O Dirichletově jádře): Nechť $n \in \mathbb{N}$ a

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx).$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ máme

$$J_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

také

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 J_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_n(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Věta (Dirichletova): Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je taková 2π -periodická funkce, že její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Pak její Fourierova řada $F_f(x)$ má pro každé $a \in \mathbb{R}$ součet

$$F_f(a) = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)}{2}$$

V každém bodu spojitosti $a \in \mathbb{R}$ funkce $f(x)$ tedy její Fourierova řada má součet rovný funkční hodnotě, $F_f(a) = f(a)$.**Definice** (Hladká funkce): Řekneme, že funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká, když má na intervalu (a, b) spojitou derivaci f' a v krajních bodech a a b mají $f(x)$ a $f'(x)$ vlastní jednostranné limity.**Důsledek** (O hladké funkci): Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je 2π -periodická a spojitá funkce, jejíž zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je hladké. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$F_f(a) = f(a).$$

Spojitá a hladká funkce se tedy rovná součtu své Fourierovy řady.

⁸Lze dokázat pomocí Besselovy nerovnosti.

2.3 Basilejský problém

Příklad (Basilejský problém): TODO

2.4 Divergentní řady

Řadě $\sum a_n$, to jest posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, lze přiřadit její „součet“ i mnoha jinými způsoby, než jen jako limitu

$$\lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$$

posloupnosti částečných součtů. Jako ilustrace jsou uvedeny dvě sumační metody.

Fakt (Abelovský součet):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n „=“ s.$$

Fakt (Cesàrovský součet):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n „=“ s$$

2.5 Konvergence řad

2.5.1 Absolutní konvergence

Definice (Absolutní konvergence): Řekneme, že řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje (je to absolutně konvergentní řada), pokud konverguje řada $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Definice (Obecná absolutní konvergence): Nechť A je nekonečná spočetná množina.

Pak řadou $\sum_{x \in A} a_x$ (na A) budeme rozumět každou funkci $a : A \rightarrow \mathbb{R}$, kde pro $x \in A$ místo $a(x)$ stále píšeme a_x . Řekneme, že tato řada je obecná absolutně konvergentní řada, když

$$\exists c > 0 \forall \text{ konečnou množinu } B \subset A : \sum_{x \in B} |a_x| < c$$

Věta (O absolutně konvergentních řadách): Nechť $\sum_{x \in A} a_x$ je řada na A . Pak $\sum_{x \in A} a_x$ je obecná absolutně konvergentní řada, právě když pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \rightarrow A$ je klasická řada

$$B(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\pi)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b := a_{\pi(n)},$$

absolutně konvergentní řada. Všechny řady $B(\pi)$ jsou pak absolutně konvergentní a mají též součet, nezávislý na bijekci π .

Definice (Součet obecné absolutně konvergentní řady): Pro obecnou absolutně konvergentní řadu $\sum_{x \in A} a_x$ tak definujeme její součet jako součet $\sum b_n$ řady $\sum b_n$ s $b_n := a_{\pi(n)}$ pro libovolnou bijekci $\pi : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Definice (Součin řad): Buďte $\sum_{x \in A} a_x$ a $\sum_{x \in B} b_x$ dvě obecné řady. Jejich součin, či součinná řada, je řada

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} a_x b_x.$$

Věta (Součin absolutně konvergentních řad): Necht' $\sum_{x \in A} a_x$ a $\sum_{x \in B} b_x$ jsou obecné absolutně konvergentní řady se součty

$$r := \sum_{x \in A} a_x \in \mathbb{R} \quad a \quad \sum_{y \in B} b_y \in \mathbb{R}.$$

Pak i jejich součin je obecná absolutně konvergentní řada, která má součet rs .

Tvrzení (Exponenciála): Pro $x \in \mathbb{R}$ necht'

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí identita

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

Tvrzení (Prvočísel je ∞ mnoho): Množina prvočísel

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

je nekonečná.

2.5.2 Stejnomořná a bodová konvergence

Definice (Stejnomořná konvergence): Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Řekneme, že f_n konvergují (na M) stejnoměrně k f , symbolicky

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M)$$

když ($\varepsilon > 0$)

$$\forall \varepsilon \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall x \in M : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice (Bodová konvergence): Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Pokud

$$\forall \varepsilon \forall x \in M \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

řekneme, že f_n konvergují (na M) k f bodově, symbolicky

$$f_n \rightarrow f \quad (\text{na } M)$$

Jinými slovy, $\forall x \in M : \lim f_n(x) = f(x)$. Stejnomořná konvergence implikuje bodovou, ale ne naopak.

Definice (Supremová norma): Pro funkci $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme její supremovou normu $\|f\|_{\infty}$ jako

$$\|f\|_{\infty} := \sup(\{|f(x)| \mid x \in M\}) \in [0, +\infty],$$

s hodnotou $+\infty$ pro shora neomezenou množinu $\{\dots\}$.

Tvrzení (Kritérium \Rightarrow): Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0.$$

Definice (Lokálně stejnoměrná konvergence): Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Lokálně stejnoměrná konvergence f_n k f (na M), symbolicky $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$ (na M), znamená, že

$$\forall a \in M \exists \delta > 0 : f_n \rightrightarrows f \quad (\text{na } M \cap (a - \delta, a + \delta)).$$

Věta (\Rightarrow zachovává spojitost): *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$, každá funkce f_n je spojitá a*

$$f_n \xrightarrow{\text{loc}} f \text{ (na } M \text{)}.$$

Pak i f je spojitá.

Důkaz: Nechť $a \in M$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme $\delta > 0$, že f_n konvergují na $N := M \cap (a - \delta, a + \delta)$ stejnoměrně. Vezmeme n_0 , že $n \geq n_0 \wedge x \in N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vezmeme libovolné $n_1 \geq n_0$ a pak, díky spojitosti f_{n_1} , takové $\delta \in (0, \delta)$, že

$$x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0) (\subset N) \Rightarrow |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pak pro každé $x \in M \cap (a - \delta_0, a + \delta_0) (\subset N)$ máme, že

$$|f(a) - f(x)| \leq |f(a) - f_{n_1}(a)| + |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v bodě a . □

Tvrzení (Weierstrassův test): *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $\sum f_n \rightarrow f$ (na M). Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow f \text{ (na } M \text{)}, \text{ pokud } \sum_{n=1}^{\infty} F_n := \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty.$$

2.6 Mocninné řady

Definice (Mocninná řada): Mocninná řada se středem $a \in \mathbb{R}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{R}$ (a proměnnou $x \in \mathbb{R}$) je funkční řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

Definice (Poloměr konvergence): Poloměr konvergence R mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$:

$$R := \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty],$$

kde $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} := 0$. S těmito konvencemi máme i ekvivalentní vztah $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$.

Věta (O konverzacích mocninných řad): *Nechť*

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence R . Pak pro každé reálné x s $|x| < R$ řada $F(x)$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Když $R > 0$, pak na intervalu $(-R, R)$ řada $F(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně ke svému (bodovému) součtu.

Věta (Počítání s mocninnými řadami): *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{a} \quad B(x) := \sum_{n \geq 0} b_n x^n$$

jsou mocninné řady konvergující na nějakém intervalu $I := (-a, a)$, kde $a > 0$. Označme stejně i odpovídající funkce $A, B : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pro jejich (formální) součet, součin, podíl a derivaci platí následující.

1. *Mocninná řada (Formální součet)*

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) + B(x)$.

2. *Mocninná řada (Formální součin)*

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

3. *Nechť $b_0 \neq 0$ a $d_n := -\frac{b_n}{b_0}$. Pak existuje $b > 0$, že mocninná řada (Formální podíl)*

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n = \frac{A(x)}{B(x)} := \frac{1}{b_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n$$

konverguje na intervalu $J := (-b, b)$ a pro každé $x \in J$ je $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

4. *Mocninná řada (Formální derivace)*

$$C(x) := \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A'(x)$.

Ve třetí části je použita formální geometrická řada:

$$\frac{1}{1 - (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)} = \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)^n.$$

Tvrzení (Abelova nerovnost): *Pro $i = 1, 2, \dots, n$ nechť $a_i \in \mathbb{C}, b_i \in \mathbb{R}$ s $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, $A_i := a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a $A[n] := \max(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|)$. prostorem*

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq A[n] \cdot b_1.$$

Věta (Abelova): *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, +\infty)$ a označme stejně odpovídající funkci $A : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$. Když řada $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ konverguje a má součet

$$S := \sum_{n \geq 0} a_n R^n,$$

pak je limita zleva v R funkce $A(x)$ rovna S :

$$\lim_{x \rightarrow R^-} A(x) = \lim_{a \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

2.6.1 Pólyova věta o náhodných procházkách

Definice (Graf): Graf $G = (V, E)$ sestává z množiny vrcholů V a množiny hran $E \subset \binom{V}{2}$. Zde

$$\binom{V}{2} := \{A \mid A \subset V \wedge |A| = 2\}$$

je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny V .

Definice (d -regulární graf): Graf $G = (V, E)$ je d -regulární, $D \in \mathbb{N}$, má-li každý vrchol d sousedů, to jest

$$\forall v \in V : |\overbrace{\{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}}^{N(v)}| = d.$$

Definice (Lokálně konečný graf): Graf G je lokálně konečný, má-li každý vrchol $v \in V$ jen konečně mnoho sousedů, tj. množina $N(v)$ je konečná.

Definice (Procházka): Procházka w v grafu $G = (V, E)$ je taková konečná, $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ s délkou $|w| := n \in \mathbb{N}_0$, či nekonečná, $w = (v_0, v_1, \dots)$, posloupnost vrcholů $v_i \in V$, že pro každé $i \in \mathbb{N}_0 (< n)$ je $\{v_i, v_{i+1} \in E\}$. Vrchol v_0 pojmenujeme jako start procházky w .

Definice (Počet procházek): Definujeme

$$d_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je procházka se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|,$$

počet procházek v grafu G s daným startem v_0 a s délkou n .

Definice (Rekurentní procházka): Rekurentní procházka $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ opětovně prochází startem: existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, že $v_i = v_0$

Definice (Počet rekurentních procházek): Jako

$$a_n(v_0, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je rekurentní procházka se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|$$

označíme počet rekurentních procházek v grafu G s daným startem v_0 a s délkou n .

Definice (Automorfismus): Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je taková bijekce $f : V \rightarrow V$, že

$$\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E.$$

Definice ((Vrcholově) tranzitivní graf): Graf $G = (V, E)$ je (vrcholově) tranzitivní, když

$$\forall u, v \in V \exists F : F \text{ je automorfismus } G \wedge F(u) = v.$$

Tvrzení (Procházky v grafech): *Počet procházek, popř. rekurentních procházek, dané délky v tranzitivním grafu nezávisí na startu: když je $G = (V, E)$ tranzitivní a lokálně konečný, pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každé dva vrcholy $u, v \in V$ je*

$$d_n(u, G) = d_n(v, G), \quad \text{popř.} \quad a_n(u, G) = a_n(v, G).$$

V tranzitivních grafech G budeme stručně označovat počty procházek, resp. rekurentních procházek, s délkou n jako $d_n(G)$, resp. $a_n(G)$.

Příklad (Nekonečná cesta): Nekonečná cesta

$$P = (\mathbb{Z}, \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\})$$

je tranzitivní a 2-regulární.

Definice (Zobecněná nekonečná cesta): Zobecněním nekonečné cesty je pro $d \in \mathbb{N}$ graf

$$\mathbb{Z}^d := \left(\mathbb{Z}^d, \left\{ \{\bar{u}, \bar{v}\} \mid \sum_{i=1}^d |u_i - v_i| = 1 \right\} \right),$$

kde píšeme $\bar{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Tvrzení: Grafy \mathbb{Z}^d jsou tranzitivní a $2d$ -regulární.

Věta (Slabá Abelova): Když mocninná řada

$$U(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

konverguje pro každé $x \in [0, R)$, kde $R \in (0, +\infty)$ je reálné číslo, a má všechny koeficienty $u_n \geq 0$, pak následující limita a suma jsou definované a rovnají se -

$$\lim_{x \rightarrow R^-} U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n \quad (= U(R))$$

- bez ohledu na to, zda jsou konečné nebo $+\infty$.

Věta (Stirlingův vzorec):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Věta (Pólya): Pro $d = 1$ a 2 je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} = 1$$

a pro $d \geq 3$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} < 1$$

Důkaz: TODO

Důkaz: TODO



3 Komplexní analýza

Definice (Komplexní čísla): Komplexní čísla

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i = \sqrt{-1},$$

tvoří normované těleso $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, |\cdot|)$, s normou $|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Zároveň tvoří úplný metrický prostor (\mathbb{C}, d) s metrikou $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$, který je izometrický klasické euklidovské rovině \mathbb{R}^2 .

Poznámka (Značení):

$$\operatorname{re}(a + bi) := a \quad \text{a} \quad \operatorname{im}(a + bi) := b$$

Definice (Komplexní koule): Jako $B(z, r) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u - z| < r\}$ označíme kouli se středem z a poloměrem $r > 0$.

3.1 Holomorfní a analytické funkce

Definice (Derivace): Pro funkci $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ a bod $z_0 \in U$ je její derivace $f'(z_0)$ v z_0 definovaná jako pro reálné funkce:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C},$$

pokud tato limita existuje. Explicitně, $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ je derivace funkce f v bodě z_0 , právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in U \wedge 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Definice (Holomorfní funkce): Funkce $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní (na U), má-li v každém bodě $z_0 \in U$ derivaci. Celá či celistvá funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní na celé komplexní rovině \mathbb{C} . Komplexní derivace má stejné algebraické vlastnosti jako derivace reálná.

Tvrzení (Vlastnosti derivace): $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ a $h : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ buďte holomorfní funkce a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Platí následující.

1. Funkce $\alpha f + \beta g$ je holomorfní na U a $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
2. Součin fg je holomorfní na U a $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Když $g \neq 0$ na U , pak je podíl $\frac{f}{g}$ holomorfní na U a $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
4. Když $h[U_0] \subset U$, pak je složená funkce $f(h) : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfní na U_0 a $(f(h))' = f'(h)h'$.

Poznámka (K derivacím): Jako pro reálné funkce, pro $n \in \mathbb{N}$ na \mathbb{C} máme $(z^n)' = nz^{n-1}$, derivace konstantní funkce je nulová funkce a každá racionální funkce je holomorfní na svém definičním oboru a její derivace je táž jako v reálném případě (tj. je daná stejnou formulí).

Definice (Analytická funkce): Funkce $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je analytická (na U), pokud pro každý bod $z_0 \in U$ existují taková komplexní čísla a_0, a_1, \dots , že

$$z \in U \wedge B(z_0, |z - z_0|) \subset U \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Analytická funkce je v každém kruhu se středem z_0 , který je obsažený v definičním oboru, vyjádřena mocninnou řadou s komplexními koeficienty a středem z_0 . S mocninnými řadami s komplexními koeficienty počítáme úplně stejně jako s reálnými mocninnými řadami.

3.1.1 Odlišnosti reálné a komplexní analýzy

1. Odlišnost

Věta (Holomorfní \Rightarrow analytická): Je-li $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ celá funkce, pak existují komplexní koeficienty a_0, a_1, \dots , že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

2. Odlišnost

Poznámka: Funkce $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je omezená, když $\exists c > 0 \forall z \in U : |f(z)| < c$.

Věta (Liouville): Když je $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ celá a omezená funkce, pak je f konstantní.

3. Odlišnost

Důsledek (Holomorfní funkce má \forall derivace): Každá holomorfní funkce $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ má derivace $f^{(n)}(z)$ všech řádů $n \in \mathbb{N}$. Speciálně je její derivace $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce.

4. Odlišnost

Věta (Princip maxima modulu): *Nechť $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pak*

$$\forall z_0 \in U \forall \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \wedge |f(z)| \geq |f(z_0)|.$$

3.2 Úsečky a obdélníky

Definice (Úsečka): Pro dva různé body je úsečka $u = ab \subset \mathbb{C}$ obraz

$$u = ab := \varphi[[0, 1]] = \{\varphi(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{C}$$

intervalu $[0, 1]$ lineární funkcí

$$\varphi(t) := (b - a)t + a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}.$$

Poznámka (Orientace úsečky): Úsečka je orientována pořadím svých konců, takže ab a ba jsou dvě různé úsečky.

Definice (Délka úsečky):

$$|u| = |ab| := |b - a| \geq 0$$

Definice (Dělení úsečky): Dělení p úsečky $u = ab$ je $k + 1$ -tice $p = (a_0, a_1, \dots, a_k) \subset u, k \in \mathbb{N}$, jejích bodů

$$a_i := \varphi(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

které jsou obrazy bodů $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tvořících dělení intervalu $[0, 1]$. Takže $a_0 = a, a_k = b$ a body a_0, a_1, \dots, a_k běží na u od a do b .

Definice (Norma dělení): Norma $\|p\|$ dělení p je

$$\|p\| := \max_{1 \leq i \leq k} |a_{i-1}a_i| = \max_{1 \leq i \leq k} |a_i - a_{i-1}|,$$

tedy největší délka podúsečky dělení.

Definice (Cauchyova suma a její modifikace): Pro funkci $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ a dělení $p = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ úsečky u definujeme Cauchyovu sumu $C(f, p)$ a její modifikaci $C'(f, p)$ jako

$$C(f, p) := \sum_{i=1}^k f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}$$

$$C'(f, p) := \sum_{i=1}^k f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}.$$

Definice (Obdélník): Obdélník $R \subset \mathbb{C}$ je množina

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \operatorname{re}(z) \leq \beta \wedge \gamma \leq \operatorname{im}(z) \leq \delta\}$$

dána reálnými čísly $\alpha < \beta$ a $\gamma < \delta$. Jeho strany jsou rovnoběžné s reálnou a imaginární osou. Když $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, jde o čtverec.

Definice (Kanonické vrcholy obdélníka): Kanonické vrcholy obdélníka R jsou $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, kde

$$a := \alpha + \gamma i, b := \beta + \gamma i, c := \beta + \delta i \text{ a } d := \alpha + \delta i.$$

Začínají levým dolním vrcholem a jdou proti směru hodinových ručiček.

Definice (Hranice obdélníka): Hranice ∂R obdélníka R je sjednocení úseček

$$\partial R := ab \cup bc \cup cd \cup da.$$

Definice (Vnitřek obdélníka): Vnitřek $\text{int}(R)$ obdélníka R je

$$\text{int}(R) := R \setminus \partial R.$$

Definice (Obvod obdélníka): Obvod $\text{obv}(R)$ obdélníka R je součet délek jeho stran,

$$\text{obv}(R) := |ab| + |bc| + |cd| + |da|.$$

3.3 Integrály

Definice (Integrál přes úsečku a hranici obdélníka): Necht' $f : u, \partial R \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce definovaná na úsečce u nebo na hranici obdélníka R . Definujeme

$$\int_u f := \lim_{n \rightarrow \infty} C(f, p_n) \in \mathbb{C}$$

a

$$\int_{\partial R} f := \int_{ab} f + \int_{bc} f + \int_{cd} f + \int_{da} f,$$

kde (p_n) je libovolná posloupnost dělení p_n úsečky u , která splňuje $\lim \|p_n\| = 0$, a (a, b, c, d) jsou kanonické vrcholy obdélníka R . Hodnota $\int_u f$ je integrál funkce f je funkce přes úsečku u a $\int_{\partial R} f$ je integrál funkce f přes hranici obdélníka R .

Věta (O integrálech): Necht' $u = ab$ je úsečka, R je obdélník a funkce $f, g : u, \partial R \rightarrow \mathbb{C}$ jsou spojité. Limita definující $\int_u f$ vždy existuje a nezávisí na posloupnosti (p_n) . Tedy i $\int_{\partial R} f$ je vždy dobře definovaný. Oba integrály mají následující vlastnosti.

1. Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je $\int_u (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_u f + \beta \int_u g$ a totéž platí pro $\int_{\partial R}$.
2. Platí ML odhady

$$\left| \int_u f \right| \leq \max_{z \in u} |f(z)| \cdot |u| \quad a \quad \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \max_{z \in \partial R} |f(z)| \cdot \text{obv}(R)$$

3. Pro každý vnitřní bod c úsečky $u = ab$, to jest $c \in ab$ a $c \neq a, b$, je $\int_{ab} f = \int_{ac} f + \int_{cb} f$. Též $\int_{ba} f = -\int_{ab} f$.

Tvrzení (Stejněměrná spojitost): Necht' $A \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d) a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak je f stejnoměrně spojitá, takže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : a, b \in A \wedge d(a, b) < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Definice (k -ekvidělení): Pro $k \in \mathbb{N}$ a úsečku $u \subset \mathbb{C}$ jejím k -ekvidělením rozumíme dělení u na k podúseček stejné délky $\frac{|u|}{k}$, které je dané obrazy dělení $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \dots < \frac{k-1}{k} < 1$ jednotkového intervalu.

Tvrzení: Necht' $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$. Platí

$$\int_{ab} (\alpha z + \beta) = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + \beta(b - a) = g(b) - g(a),$$

kde $g(z) := \frac{\alpha z^2}{2} + \beta z$.

Tvrzení (Jednoduchá Cauchy-Goursatova věta): *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník. Pak*

$$\int_{\partial R} (\alpha z + \beta) = 0.$$

Tvrzení (\int_u a $(R) \int$): *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$, $f : ab \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce a $\varphi(t) := t(b-a) + a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ je parametrizace definující úsečku $u = ab$. Potom*

$$\begin{aligned} \int_u f &= \int_0^1 f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = (b-a) \int_0^1 f(\varphi(t)) dt \\ &= (b-a) \left(\int_0^1 \operatorname{re}(f(\varphi(t))) dt + i \cdot \int_0^1 \operatorname{im}(f(\varphi(t))) dt \right) \end{aligned}$$

(až na první integrál jsou všechny ostatní Riemannovy).

Definice (Křivkový integrál): Když

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ je funkce a } \varphi : [a, b] \rightarrow U$$

je spojitá a po částech hladká funkce, pak integrál funkce f přes křivku φ definujeme jako

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f &:= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{re}(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt + i \cdot \int_a^b \operatorname{im}(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt, \end{aligned}$$

pokud poslední dva (reálné) Riemannovy integrály existují. Náš „úsečkový integrál“ \int_u je tedy podle předchozího tvrzení speciálním případem křivkového integrálu \int_{φ} .

3.4 Konstanta $\rho = 2\pi i$

Tvrzení: *Bud' dána konvergentní posloupnost komplexních čísel (z_n) . Platí $\operatorname{im}(\lim z_n) = \lim \operatorname{im}(z_n)$.*

Věta (Konstanta ρ): *Nechť S je čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$. Pak*

$$\rho := \int_{\partial S} \frac{1}{z} \neq 0, \text{ dokonce } \operatorname{im}(\rho) \geq 4.$$

Důkaz: Kanonické vrcholy čtverce S jsou $a := -1 - i, b := 1 - i, c := 1 + i$ a $d := -1 + i$. Nechť $p_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ je n -ekvidělení úsečky ab . Protože násobení číslem i je otočení kolem počátku kladným směrem⁹ o úhel $\frac{\pi}{2}$ je $q_n = ip_n := (ia_0, ia_1, \dots, ia_n)$ n -ekvidělení úsečky bc . Podobně je $r_n = iq_n = -p_n$, resp. $s_n = ir_n = -ip_n$, n -ekvidělení úsečky cd , resp. da . Překvapivě pro $f(z) = \frac{1}{z}$ je

$$C(f, p_n) = C(f, q_n) = C(f, r_n) = C(f, s_n)$$

Skutečně, rozšíření zlomku číslem i dává

$$\begin{aligned} C(f, p_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\frac{b-a}{n}}{a + \frac{j(b-a)}{n}} \right) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\frac{ib-ia}{n}}{ia + \frac{j(ib-ia)}{n}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\frac{c-b}{n}}{b + \frac{j(c-b)}{n}} \right) = C(f, q_n) \end{aligned}$$

⁹proti směru hodinových ručiček

a podobně pro další dvě rovnosti. Dále vzhledem k $b - a = 2$ a $a = -1 - i$ rozšířením zlomku číslem $\frac{2j}{n} - 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(C(f, p_n)) &= \operatorname{im} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\frac{2}{n}}{-1 - i + \frac{2j}{n}} \right) \\ &= \operatorname{im} \left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\frac{2j}{n} - 1 + i}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\left(\frac{2j}{n} - 1\right)^2 + 1} \right) \geq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Tedy, podle tvrzení výše,

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(\rho) &= \operatorname{im} \left(\int_{\partial S} \frac{1}{z} \right) = 4 \cdot \operatorname{im} \left(\int_{ab} \frac{1}{z} \right) \\ &= 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{im} \left(C \left(\frac{1}{z}, p_n \right) \right) \\ &\geq 4 \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

a skutečně $\rho \neq 0$. □

Tvrzení: *Nechť opět $a := -1 - i$ a $b := 1 - i$. Potom $\int_{ab} \frac{1}{z} = \frac{\pi i}{2}$. Tedy, podle předchozího důkazu, $\rho = 4 \cdot \frac{\pi i}{2} = 2\pi i$.¹⁰*

3.5 Cauchy-Goursatova věta

Integrál $\int_{\varphi} f$ holomorfní funkce f přes jednoduchou uzavřenou křivku φ , která leží v definičním oboru funkce f se svým celým vnitřkem, je 0.

Definice (Diametr množiny): Pro množinu $x \subset \mathbb{C}$ je její diametr¹¹ definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) = \sup(\{|x - y| \mid x, y \in X\}).$$

Průměr množiny může být i $+\infty$.

Tvrzení: *Když A_n ,*

$$\mathbb{C} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots,$$

jsou neprázdné a uzavřené množiny s $\lim \operatorname{diam}(A_n) = 0$, pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Definice (Čtvrtka obdélníka): Buď obdélník R s kanonickými vrcholy (a, b, c, d) . Když $e := \frac{a+b}{2}$, $f := \frac{b+c}{2}$, $g := \frac{c+d}{2}$ a $h := \frac{d+a}{2}$ jsou středy stran R a $j := \frac{a+c}{2}$ je jeho celkový střed, pak jeho čtyři čtvrtky jsou obdélníky A, B, C a D , jejichž kanonické vrcholy jsou, po řadě,

$$(a, e, j, h), (e, b, f, j), (j, f, c, g) \text{ a } (h, j, g, d).$$

Obdélník se na čtvrtky rozpadne po rozříznutí podle úseček eg a hf . Pro každou z těchto čtvrtěk E patrně platí: $\operatorname{obv}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{obv}(R)$ a $\operatorname{diam}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(R)$.

¹⁰ $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t$

¹¹ průměr

Věta (Cauchy-Goursatova pro obdélníky): *Nechť*

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

je holomorfní funkce a $R \subset U$ je obdélník. Pak

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

Důkaz: Mějme f, U a R . Sestrojíme takové vnořené obdélníky

$$R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots,$$

že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je R_{n+1} čtvrtka obdélníku R_n a

$$\left| \int_{\partial R_{n+1}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|.$$

Nechť už jsou takové obdélníky R_0, R_1, \dots, R_n definované a A, B, C, D jsou čtvrtky obdélníku R_n . Tvrdíme, že

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial A} f + \int_{\partial B} f + \int_{\partial C} f + \int_{\partial D} f$$

Tato identita plyne použitím třetí části věty o integrálech. Po rozvinutí každého integrálu $\int_{\partial A} f, \dots, \int_{\partial D} f$ jako součtu čtyř integrálů přes strany dostáváme na pravé straně předchozí rovnosti 16 členů. Osm z nich odpovídá stranám čtvrtek uvnitř R_n a vzájemně se zruší, protože vytvoří čtyři dvojice opačných orientací stejné úsečky. Zbýlých osm členů odpovídá stranám čtvrtek ležících na ∂R_n , které se sečtou na integrál na levé straně předcházející rovnosti. Z této rovnosti plyne podle trojúhelníkové nerovnosti, že pro nějakou čtvrtku $E \in \{A, B, C, D\}$ je $\left| \int_{\partial E} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|$. Položíme tedy $R_{n+1} = E$.

Podle předchozího tvrzení existuje bod z_0 , že

$$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n.$$

Protože $R_0 = R \subset U$, je i $z_0 \in U$. Nyní použijeme existenci derivace $f'(z_0)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $B(z_0, \delta) \subset U$ a pro nějakou funkci $\Delta : B(z_0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$ pro každé $z \in B(z_0, \delta)$ je $|\Delta(z)| < \varepsilon$ a

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_{g(z)} + \underbrace{\Delta(z) \cdot (z - z_0)}_{h(z)}.$$

Uvážíme tyto funkce $g(z)$ a $h(z)$. Je jasné, že $g(z)$ je lineární a $h(z) = f(z) - g(z)$ je spojitá¹². Nechť $n \in \mathbb{N}_\infty$ je tak velké, že $R_n \subset B(z_0, \delta)$ ¹³. Podle linearit integrálu a jednoduché Cauchyho-Goursatovy věty (JCG) máme

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial R_n} g + \int_{\partial R_n} h \stackrel{JCG}{=} \int_{\partial R_n} h.$$

Platí odhad

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R_n} h \right| &\stackrel{\text{ML odhad}}{\leq} \max_{z \in \partial R_n} |\Delta(z) \cdot (z - z_0)| \cdot \text{obv}(R_n) \\ &< \varepsilon \cdot \text{diam}(R_n) \cdot \text{obv}(R_n) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\text{diam}(R)}{2^n} \cdot \frac{\text{obv}(R)}{2^n} \\ &< \varepsilon \cdot \frac{\text{obv}(R)}{4^n}. \end{aligned}$$

¹²na $B(z_0, \delta)$

¹³potřebujeme jenom, že $\lim \text{diam}(R_n) = 0$, pro existenci z_0 to není podstatné

Zde jsme použili výše zmíněné zmenšení průměru a obvodu na polovinu po čtvrcení a to, že průměr obdélníka je menší než jeho obvod. Podle předchozích výsledků tak máme

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \left| \int_{\partial R_n} f \right| = \left| \int_{\partial R} h \right| < \varepsilon \cdot \frac{\text{obv}(R)^2}{4^n}$$

a $\left| \int_{\partial R} f \right| < \varepsilon \cdot \text{obv}(R)^2$. Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, je $\int_{\partial R} f = 0$. \square

Věta (Cauchy-Goursatova): *Nechť $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a $\varphi : [a, b] \rightarrow U$ je spojitá a po částech hladká funkce, která je prostá, s výjimkou hodnoty $\varphi(a) = \varphi(b)$, a jejíž vnitřek¹⁴ je podmnožinou množiny U . Pak*

$$\int_{\varphi} f = 0.$$

3.6 Funkcionál \int

Definice (Funkcionál): Pro libovolnou kompaktní¹⁵ množinu $A \subset \mathbb{C}$ definujeme množiny holomorfních funkcí

$$H_A := \{f : \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ je holomorfní}\}$$

$$H := \bigcup_{A \subset \mathbb{C} \text{ je kompaktní}} H_A.$$

H tedy obsahuje všechny funkce holomorfní na doplňcích kompakťů. Funkcionál \int , tedy funkci na množině H , definujeme předpisem

$$\int : H \rightarrow \mathbb{C}, \quad \int f := \int_{\partial R} f,$$

kde $f \in H_A$ a $R \subset \mathbb{C}$ je libovolný obdélník, že $\text{int}(R) \supset A$ ¹⁶.

Tvrzení (Korektnost definice \int): *Definice funkcionálu \int je korektní, jeho hodnota $\int f$ nezávisí na volbě obdélníku R .*

Věta (Vlastnosti \int): *Důležité vlastnosti jsou tři.*

1. *Linearita: pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $f, g \in H$ je*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

2. *Rozšíření Cauchy-Goursatovy věty: když $a \in \mathbb{C}$ a funkce $f \in H_{\{a\}}$ je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a , pak*

$$\int f = 0.$$

3. *Pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*

$$\int \frac{1}{z - a} = \rho$$

kde $\rho = 2\pi i$ je dříve zavedená konstanta.

Věta (Cauchyův vzorec): *Nechť $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je celá funkce. Pak je-li $\rho = 2\pi i$ dříve definovaná konstanta, pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*

$$f(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{z - a}.$$

¹⁴ta komponenta ve dvojici komponent množiny $\mathbb{C} \setminus \varphi[[a, b]]$, která je omezená

¹⁵uzavřenou a omezenou

¹⁶ A je obsažena uvnitř obdélníku R

3.7 Meromorfní funkce a rezidua

Definice (Diskrétní množina): Množina $A \subset \mathbb{C}$ je diskrétní, pokud v každé kouli $B(z, r) \subset \mathbb{C}$ leží jen konečně mnoho jejích prvků.

Definice (Meromorfní funkce, množina pólů): Holomorfní funkci

$$f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C},$$

kde $A \subset \mathbb{C}$ je diskrétní, nazveme meromorfní funkcí a A nazveme množinou jejích pólů, když každý bod $a \in A$ má okolí $U_a \subset U$ s $U_a \cap A = \{a\}$, že pro nějakou holomorfní funkci $g_a : U_a \rightarrow \mathbb{C}$ a nějaká čísla $k_a \in \mathbb{N}_0$ a $c_{j,a} \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, k_a$ že pro každé $z \in U_a \setminus \{a\}$ je

$$f(z) = g_a(z) + \sum_{j=1}^{k_a} \frac{c_{j,a}}{(z-a)^j}.$$

Pro $k_a = 0$ se suma definuje jako 0 a $f = g_a$ pak je holomorfní na U_a .

Definice (Reziduum funkce f): Koeficient $c_{1,a}$ z předchozí definice je takzvané reziduum funkce f v bodě a , označované jako

$$\text{res}(f, a) := c_{1,a}.$$

Z Cauchyova vzorce plyne, že $\text{res}(f, a)$ je jednoznačně určené funkcí f .

Věta (Reziduová): *Nechť $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ je meromorfní funkce s množinou pólů A a $R \subset U$ je obdélník, jehož hranice neobsahuje žádný bod z A . Potom platí rovnost*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f = \sum_{a \in A \cap \text{int}(R)} \text{res}(f, a) = \sum_{a \in A \cap R} \text{res}(f, a)$$

(suma v ní je konečná). Integrál funkce f přes hranici obdélníka R , dělený $2\pi i$, se tedy rovná součtu reziduí funkce f v pólech ležících uvnitř R .

Tvrzení (O funkci $F(z)$): *Nechť*

$$F(z) := \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Funkce F je meromorfní s póly v \mathbb{Z} a v každém čísle má reziduum rovné 1.

Lemma: *Nechť $F(z)$ je jako v předešlém tvrzení a $S_N \subset \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, je čtverec s vrcholy $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Pak existuje konstanta $c > 0$, že*

$$\forall N \in \mathbb{N} \forall z \in \partial S_N : |F(z)| \leq c.$$

Věta (Sečtení řady $\sum n^{-2k}$): *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje kladný zlomek $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, že*

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots = \alpha_k \pi^{2k}.$$

4 Úvod do diferenciálních rovnic

Definice (Kontrahující zobrazení): Kontrahující zobrazení $f : M \rightarrow M$ metrického prostoru (M, d) do sebe. Je to každé zobrazení, že pro nějakou konstantu $c \in (0, 1)$ pro každé $a, b \in M$ je

$$d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a, b)$$

f zkracuje vzdálenosti nějakým faktorem menším než 100%.

Věta (Banachova o pevném bodu): Každé kontrahující zobrazení $f : M \rightarrow M$ úplného metrického prostoru do sebe má právě jeden pevný bod — takový bod $a \in M$, že

$$f(a) = a.$$

Dále platí, že každá posloupnost $(a_n) \subset M$ iterací funkce f , kde bod $a_1 \in M$ je libovolný a pro $n > 1$ je $a_n = f(a_{n-1})$, konverguje k tomuto pevnému bodu a .

Tvrzení (Úplnost spojitých funkcí): Pro každá dvě reálná čísla $a < b$ je metrický prostor

$$(C[a, b], d),$$

spojitých funkcí $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s maximovou metrikou

$$d(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

úplný.

4.1 Picardova věta

Věta (Picardova): Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pro níž existuje konstanta $M > 0$, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbb{R}$ je

$$|F(u, v) - F(u, w)| \leq M \cdot |v - w|.$$

Potom existuje $\delta > 0$ a jednoznačně určená funkce

$$f : [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R},$$

že

$$f(a) = b \wedge \forall x \in [a - \delta, a + \delta] : f'(x) = F(x, f(x)).$$

V krajních bodech intervalů se zde i nadále hodnoty derivací berou jednostranně.

Důkaz: TODO

□

4.2 Peanova věta

Věta (Peanova): Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in U \subset \mathbb{R}^2$, kde U je otevřená množina v euklidovském metrickém prostoru \mathbb{R}^2 , a $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce

$$f : [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R},$$

že

$$f(a) = b \wedge \forall x \in [a - \delta, a + \delta] : f'(x) = F(x, f(x)).$$

Věta (Arzelà-Ascoliova): Nechť $I = [a, b]$ je kompaktní reálný interval a $C(I)$ je metrický prostor spojitých funkcí $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ s maximovou metrikou. Množina $X \subset C(I)$ je kompaktní, právě když

$$\exists c > 0 \forall f \in X \forall x \in I : |f(x)| < c$$

— funkce v X jsou stejně omezené — a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in X \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

— funkce v X jsou stejně (stejněměrně) spojitě.

4.3 Příklady diferenciálních rovnic

Poznámka (Dělení diferenciálních rovnic): Diferenciální rovnice dělíme na následující.

1. Obyčejné diferenciální rovnice¹⁷, v nichž vystupují funkce jedné proměnné.
2. Parciální diferenciální rovnice¹⁸, které obsahují funkce více proměnných a jejich parciální derivace.

4.3.1 Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad (Newtonův zákon síly):

$$mx'' = F,$$

kde $x = x(t) \in \mathbb{R}$ je poloha v čase t částice o hmotnosti m vystavené působení síly F ¹⁹. Síla může být obecně funkcí času, polohy částice a její rychlosti: $F = F(t, x, x')$. Nejjednodušší situace je pro konstantní F , či obecněji pro F záviselý jen na t — pak $x(t) = \int \int F$. Nastává to třeba při působení tíhového pole Země. To se nemění v čase a nezávisí na poloze částice²⁰ a už vůbec ne na její rychlosti, což jsou ale všechno idealizace²¹. Rovnice volného pádu pak je

$$mx'' = -mg,$$

kde g je konstanta tíhového zrychlení. Všechna její řešení jsou právě a jen funkce

$$X := \left\{ x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Ty vyjadřují skutečnost, že pohyb padající částice je určen jednoznačně teprve zadáním její polohy $x(t_0)$ a rychlosti $x'(t_0)$ v nějakém časovém okamžiku t_0 .

Příklad (Rovnice radioaktivního rozpadu): Rovnice radioaktivního rozpadu

$$\frac{dR}{dt} = -kR$$

popisuje vývoj množství $R = R(t)$ rozpadajícího se radioaktivního materiálu v čase t ²². Je jasné, že každá funkce

$$R = R(t) = c \exp(-kt),$$

kde c je konstanta, je řešením této rovnice.

4.3.2 Parciální diferenciální rovnice

Příklad (Laplaceova rovnice²³):

$$u = u(x, y) : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Příklad (Rovnice difuze²⁴):

$$u = u(x, t) : \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Příklad (Vlnová rovnice):

$$u = u(x, t) : a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

V předchozích příkladech jsou α a a konstanty.

¹⁷ODR, *anglicky* ODE

¹⁸PDR, *anglicky* PDE

¹⁹zde uvažujeme jen jednoduchý jednorozměrný případ

²⁰pro malá měřítka

²¹hlavně nezávislost na x

²² k je materiálová konstanta

²³rovnice potenciálu

²⁴rovnice vedení tepla

4.4 Obecný tvar ODR, (Ne)lineární diferenciální rovnice

Definice (Obecný tvar): Obecný tvar obyčejné diferenciální rovnice pro neznámou funkci $y = y(x)$ je ($n \in \mathbb{N}$)

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde F je nějaká funkce $n + 2$ proměnných.

Definice (Řád rovnice): Nejvyššímu řádu n derivace vyskytujícímu se v rovnici říkáme řád rovnice.

Definice ((Ne)lineární diferenciální rovnice): Diferenciální rovnice tvaru ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0(x)y = b(x),$$

kde $a_i(x)$ a $b(x)$ jsou zadané funkce a $y = y(x)$ je neznámá funkce, je lineární diferenciální rovnice (řádu n a s pravou stranou $b(x)$). Pokud je $b(x)$ identicky nulová, mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici.

Diferenciální rovnice, které nejsou tohoto tvaru²⁵, jsou nelineární diferenciální rovnice.

Příklad (Rovnice kyvadla): Například rovnice kyvadla

$$\theta'' + \left(\frac{g}{l}\right) \sin \theta = 0,$$

která popisuje pohyb kyvadla délky l kývajícího se v homogenním tíhovém poli²⁶ — úhel $\theta = \theta(t)$ je odchylka kyvadla od svislice v čase t — je nelineární. Pro malé výchylky θ platí $\sin \theta = \theta$ a můžeme řešit lineární aproximaci rovnice kyvadla $\theta'' + \left(\frac{g}{l}\right) \theta = 0$, což už je lineární ODR.

Poznámka: Rovnice volného pádu i rovnice radioaktivního rozpadu jsou lineární.

4.5 Algebraické diferenciální rovnice

Definice (Algebraické diferenciální rovnice²⁷): Diferenciální rovnice (opět $n \in \mathbb{N}$)

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

v nichž F je polynom v $n + 2$ proměnných, jsou algebraické diferenciální rovnice.

4.5.1 Výsledky o ADE

1. výsledek

Příklad (Eulerova gama funkce $\Gamma(z)$): Eulerova gamma funkce $\Gamma(z)$ je pro komplexní z s $\operatorname{re}(z) > 0$ definována integrálem

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Věta (Hölder): *Funkce gama nesplňuje žádnou (netriviální) ADE, pro žádný nenulový komplexní polynom F s $n + 2$ proměnnými.*

²⁵a závisejí tedy na některých proměnných pro neznámou a její derivace nelineárně

²⁶ g je konstanta tíhového zrychlení

²⁷anglická zkratka ADE

2. výsledek

Příklad: Zavedeme si v jednotkovém komplexním kruhu $|z| < 1$ funkce

$$\vartheta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \quad \text{a} \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n}.$$

Věta (Pozitivně o ADE): *Obě funkce $\vartheta(z)$ i $P(z)$ splňují netriviální (a dosti složité) ADE.*

3. výsledek

Příklad (Stirlingova čísla (druhého druhu)): Definujeme formální mocninnou řadu

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)},$$

kde pro $k=0$ položíme sčítanec rovný 1. Dále pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n, k) x^n := \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$$

Vždy platí $S(n, k) \in \mathbb{N}_0$. Tyto čísla nazýváme Stirlingova čísla (druhého druhu).

Příklad (Bellova čísla): V předchozím příkladě jsou koeficienty B_n vyjádřeny pomocí Stirlingových čísel jako

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$$

a B_n je počet všech množinových rozkladů n -prvkové množiny. B_n jsou takzvaná Bellova čísla.

Věta (Klazar): *Formální mocninná řada*

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n,$$

to jest obyčejná generující funkce Bellových čísel, nespĺňuje žádnou netriviální ADE.

4.6 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice (Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými): DR se separovanými proměnnými je obecně nelineární diferenciální rovnice prvního řádu tvaru

$$y(a) = b \wedge y' = f(x) \cdot g(y)$$

pro neznámou funkci $y = y(x)$ s předepsanou hodnotou $y(a) = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), kde $f(x)$, resp. $g(y)$, je funkce definovaná a spojitá na nějakém otevřeném intervalu $I \ni a$, resp. $J \ni b$, a g je na J nenulová.

Poznámka: Tento typ rovnice lze lokálně jednoznačně vyřešit funkcí $y : I' \rightarrow J$, pro nějaký otevřený interval I' splňující $a \in I' \subset I$. Řešení je vyjádřené (implicitně) pomocí neurčitých integrálů funkcí $\frac{1}{g}$ a f . Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a ten přepíšeme pomocí pevně zvolené funkce $G := \int \frac{1}{g}$ (funkce primitivní na intervalu J k funkci $\frac{1}{g}$) jako

$$\forall x \in I' : G(y(x))' = f(x).$$

Máme tedy rovnici

$$\forall x \in I' : G(y(x)) = F(x) + c,$$

kde $F := \int f$ je předem pevně zvolená funkce, primitivní na intervalu I k funkci f , a c je (integrační) konstanta. Řešení $y(x)$ původní rovnice je tak dáno jako implicitní funkce vztahem

$$\forall x \in I' : \underbrace{G(y(x)) = F(x) + c}_{(*)}, \text{ kde } G = \int \frac{1}{g}, F = \int f$$

a konstanta c je určena vztahem $G(b) = F(a) + c$. Z věty o implicitní funkci²⁸ plyne, že existuje otevřený interval I' s $a \in I' \subset I$ a jednoznačně určená funkce $y : I' \rightarrow J$, že $y(a) = b$ na I' platí vztah (*). Na I' tedy máme jednoznačné řešení rovnice (v definici).

4.7 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Poznámka (Lineární diferenciální rovnice 1. řádu): Je to rovnice tvaru ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$)

$$y(x_0) = y_0 \wedge y' + a(x)y = b(x),$$

kde $y = y(x)$ je neznámá funkce a funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou dané, definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu $I \ni x_0$.

Poznámka (Řešení lineární dif. rovnice 1. řádu): Lokální jednoznačnost a existence řešení rovnice plyne z *Picardovy věty*. Rovnici tedy stačí vyřešit²⁹. Nejprve nalezneme takovou funkci $c = c(x)$, tzv. *integrační faktor*, že

$$c \cdot (y' + ay) = (cy)'.$$

Pak $cy' + acy = cy' + c'y$ a c musí splňovat rovnici $ac = c'$, čili $(\log c)' = a$. Funkce $c = e^A$, kde $A = \int a$, má tedy požadovanou vlastnost. Výchozí lineární rovnici vynásobíme integračním faktorem a dostaneme

$$(cy)' = c(y' + ay) = cb.$$

Takže $(cy)' = cb$ a $cy = D + c_0$, kde $D = \int cb$ a c_0 je integrační konstanta. Máme tedy řešení $y = c^{-1}(D + c_0)$. Shrnutí,

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} b(x) dx + c_0 \right), \text{ kde } A(x) = \int a(x) dx.$$

Všimněte si, že $y(x)$ je definovaná na celém I (definičním oboru funkcí a a b) a že každé počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ odpovídá právě jedna hodnota integrační konstanty c_0 , pro níž je splněna.

The End

²⁸viz ma2-poznamky

²⁹vyjádřit její řešení z koeficientů a a b pomocí známých funkcí a známých operací