1 Metrické prostory

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor)**:** Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d'), tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d). Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d).

Definice (Izometrie)**:** Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \to N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f, prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

Příklad (Euklidovský prostor)**:** Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, e_n), n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\overline{x}, \overline{y}$[1] $\in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n), když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \ldots \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \ldots \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma přimkami procházejícími počátkem $\overline{0}$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: *(S, s) je metrický prostor.*

Definice ((Horní) hemisféra)**:** (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

Věta (H není plochá)**:** *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

[1] $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

Definice (Ultrametrika)**:** Metrika d v metrickém prostoru (M,d) je ultrametrika(nearchimédovká metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x,y,z \in M : d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$$

Protože $\max(d(x,z), d(z,y)) \leq d(x,z) + d(z,y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru)**:** *V ultrametrickém prostoru (M,d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule)**:** (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M,d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a,r) := \{x \in M \mid d(x,a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a,r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a,r)$.

p-adické metriky jsem prozatím vynechal.