Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Verze 0.1
6. července 2021

Obsah

1 Metrické prostory

1.1 Definice

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor)**:** Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d'), tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d). Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d).

Definice (Izometrie)**:** Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \to N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f, prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

1.2 Euklidovský prostor, Sférická metrika

Příklad (Euklidovský prostor)**:** Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, e_n), n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\overline{x}, \overline{y}$[1] $\in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n), když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \ldots \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \ldots \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřimkami procházejícími počátkem $\overline{0}$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: *(S, s) je metrický prostor.*

Definice ((Horní) hemisféra)**:** (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

[1] $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

Věta (H není plochá)**:** *Metrický prostor* (H, s) *není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru* (X, e_n) *s* $X \subset \mathbb{R}^n$

Důkaz: TODO $\square$

Definice (Ultrametrika)**:** Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika(nearchimédovká metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru)**:** *V ultrametrickém prostoru* (M, d) *je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule)**:** (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M, d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

1.3 p-adické metriky

Definice (p-adický řád)**:** Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p-adický řád čísla n definujeme

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

Poznámka (Rozšíření $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ na zlomky)**:** Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (aditivita $\mathrm{ord}_p(\cdot)$)**:** *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : ord_p(\alpha\beta) = ord_p(\alpha) + ord_p(\beta)$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (\infty) := +\infty$*, pro každé* $n \in \mathbb{Z}$.

Definice (p-adická norma)**:** Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Tvrzení (multiplikativita $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé* p *a každé dva zlomky* α, β *(a každé* $c \in (0, 1)$*) je*

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p |\beta|_p$$

[2]. $|$ · značí relaci dělitelnosti.

Definice (Normované těleso)**:** Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso vybavené normou $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

Tvrzení: *Pro každé normované těleso $(F, |\cdot|_F)$ je funkce $d(x, y) := |x - y|_F$ metrika na F. Pokud $|\cdot|_F$ splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je d ultrametrika.*

Tvrzení (o $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé prvočíslo p a každé $c \in (0, 1)$ je $\mathbb{Q}, |\cdot|_p$ normované těleso. Příslušný metrický prostor $(\mathbb{Q}, d)$(s $d(x, y) := |x - y|_F$) je ultrametrický prostor.*

Definice (Triviální norma)**:** Triviální norma na libovolném tělese F je funkce $||\cdot||$ s $||0_F|| = 0$ a $||x|| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Tvrzení (Mocnění obvyklé absolutní hodnoty)**:** *Pro $c > 0$ je $|\cdot|^c$ norma(na $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$), právě když $c \leq 1$.*

Definice (Kanonická p-adická norma)**:** Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p-adická norma $||\cdot||_p$ definovaná jako

$$||\alpha||_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p-adické normě $||\cdot||_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Věta (A. Ostrowski)**:** *Nechť $||\cdot||$ je norma na tělese racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Pak nastává jedna ze tří následujících možností.*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné $c \in (0, 1]$ takové, že $||x|| = |x|^c$.*
3. *Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p, že $||x|| = |x|_p = c^{ord_p(x)}$(kde $c^\infty := 0$).*

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: TODO $\square$

1.4 Kompaktnost množin v metrických prostorech

Poznámka (Konvence)**:** $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ jsou reálná čísla a $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Limitu píšeme jako $\lim a_n = a$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definice (Limita)**:** Nechť je (M, d) metrický prostor, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. (a_n) má limitu v (M, d), pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

.

Definice (Konvergence, Divergence)**:** Pokud má (a_n) limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

Definice (Kompaktní metrický prostor)**:** Buď (M, d) metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že X je kompaktní, pokud
$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n\to\infty} a_{m_n} = a.$$
Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X. Metrický prostor (M, d) je kompaktní, pokud M je kompaktní.

Definice (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory)**:** Buďte (M, d) a (N, e) metrické prostory a buď $f : M \to N$ zobrazení mezi nimi. f je spojité v $a \in M$, pokud
$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$
Zobrazení f je spojité, pokud je spojité v každém bodě $a \in M$.

Věta (Princip maxima)**:** *Nechť (M, d) je metrický prostor,*
$$f : M \to \mathbb{R}$$
je funkce z M do reálné osy a $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina. Pak
$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \le f(x) \le f(b)$$
Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší hodnotu $f(a)$ a největší hodnotu $f(b)$.

Definice (Součin metrických prostorů)**:** Pro metrické prostory (M, d) a (N, e) definujeme jejich součin $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ je na něm dána jako
$$(d \times e)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + e(a_2, b_2)^2}$$

Definice (Otevřená množina)**:** Množina $X \in M$ v metrickém prostoru (M, d) je otevřená, pokud
$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a, r) \subset X.$$

Definice (Uzavřená množina)**:** Množina X je uzavřená, pokud $M \backslash X$ je otevřená.

Definice (Omezená množina)**:** Množina X je omezená, pokud
$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a, r)$$

Definice (Diametr)**:** Diametr(průměr) množiny X je s $V := \{d(a, b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako
$$\operatorname{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \dots \text{ množina} V \text{je shora omezená} \\ +\infty & \dots \text{ množina} V \text{není shora omezená} \end{cases}$$

Věta (Kompaktní $\Rightarrow$ uzavřená a omezená, součin)**:** *Platí následující:*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d), pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*
2. *Jsou-li (M, d) a (N, e) dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní metrický prostor.*

Věta (Kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$)**:** *V každém Euklidovském metrickém prostoru $(\mathbb{R}^n, e_n)$ je množina $X \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

1.5 Topologická spojitost

Tvrzení (Topologická spojitost)**:** *Nechť $f : M \to N$ je zobrazení mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e). prostorem*

$$f \textit{ je spojité} \iff \forall \textit{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \textit{ je OM.}^3$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

Tvrzení (Topologická spojitost pro podprostory)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná množina a $f : X \to N$. prostorem*

$$f \textit{ je spojité zobrazení definované na } (X, d) \iff \forall \textit{ OM } A \subset N : \exists \textit{ OM } B \subset M : f^{-1}[A] = X \cap B.$$

Topologickou definici spojitosti jsme rozšířili na podprostory.

Tvrzení (Spojitý obraz kompaktu)**:** *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory, $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina a*

$$f : X \to N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ je kompaktní množina.

Tvrzení (Spojitost inverzu)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení z neprázdné kompaktní množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do (N, e). Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \to X$$

je spojité.

Definice (Homeomorfismus)**:** Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich homeomorfismus, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi (M, d) a (N, e) existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.

1.6 Heine-Borelova věta

Definice (Topologická kompaktnost)**:** Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta (Heine-Borelova)**:** *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz: TODO $\square$

1.7 Souvislé množiny a metrické prostory

Definice (Obojetná množina)**:** Podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je obojetná[4], je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny $\emptyset$ a M.

Definice (Souvislý prostor)**:** Prostor (M, d) je souvislý, pokud v něm neexistuje netriviální[5] obojetná podmnožina. Jinak, má-li M obojetnou podmnožinu $X \subset M$ s $X \neq \emptyset$, je nesouvislý.

[3] OM zkracuje sousloví „otevřená množina".

[4] anglicky *clopen*

[5] Různou od M a $\emptyset$.

Definice (Souvislá podmnožina)**:** Podmnožina $X \subset M$ je souvislá, je-li podprostor (X, d) souvislý. Pokud podprostor (X, d) souvislý není, je nesouvislá.

Definice (Trhání množiny)**:** Nechť (M, d) je metrický prostor a $X, A, B \subset M$. Řekneme, že množiny A a B trhají množinu X, pokud A a B jsou otevřené a platí všechna následující

- $X \subset A \cup B$
- $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$
- $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \emptyset$

Tvrzení: *Podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá množina v metrickém prostoru (M, d), právě když existují $A, B \subset M$, které ji trhají.*

1.8 Základní věta algebry

Věta (Základní věta algebry)**:** *Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy*

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j = 0$$

Věta (Souvislost intervalů)**:** *Každý interval $[a, b] \subset \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$, je souvislá množina.*

Věta (souvislost a spojitost)**:** *Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení ze souvislé množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) do metrického prostoru (N, e). Potom*

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in N\} \subset N$$

je souvislá množina.

Poznámka: Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

Tvrzení: *Pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y^n = x$.*

Tvrzení (Druhá odmocnina v $\mathbb{C}$)**:** $\forall a + bi \in \mathbb{C}$ *máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech*

$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že $(c + di)^2 = a + bi$.

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé $u \in S$ a pro každé liché $n \in \mathbb{N}$ $\exists v \in S : v^n = u$, pak platí následující věta.

Věta (n-té odmocniny v $\mathbb{C}$)**:** *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*

$$\forall u \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

Důkaz: TODO □

Tvrzení (Redukce na n-té odmocniny)**:** *Když $\mathbb{C}$ obsahuje všechny n-té odmocniny, pak platí Základní věta algebry a každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.*

1.9 Úplné množiny a metrické prostory

2 Řady

2.1 Mocninné řady

2.2 Funkční řady

2.3 Konvergence a operace s řadami

2.4 Fourierovy řady

3 Komplexní analýza

3.1 Holomorfní funkce

3.2 Póly funkcí

3.3 Aplikace

4 Úvod do diferenciálních rovnic

4.1 Rovnice se separovanými proměnými

4.2 Lineární rovnice

4.3 Věta o existenci

The End