Matematická analýza III

Stručné výpisky
z materiálů p. doc. Klazara

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Verze 0.1
6. července 2021

Obsah

1 Metrické prostory

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i $d(x, y) \geq 0$.

Definice (Podprostor)**:** Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d'), tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d). Pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d).

Definice (Izometrie)**:** Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \to N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Existuje-li f, prostory M a N jsou izometrické. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

Příklad (Euklidovský prostor)**:** Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, e_n), n \in \mathbb{N}$, s metrikou e_n danou pro $\overline{x}, \overline{y}$[1] $\in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n), když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \ldots \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \ldots \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřimkami procházejícími počátkem $\overline{0}$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení: *(S, s) je metrický prostor.*

Definice ((Horní) hemisféra)**:** (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S$$

Věta (H není plochá)**:** *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

[1] $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

Definice (Ultrametrika)**:** Metrika d v metrickém prostoru (M,d) je ultrametrika(nearchimédovká metrika), pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x,y,z \in M : d(x,y) \leq \max(d(x,z),d(z,y))$$

Protože $\max(d(x,z),d(z,y)) \leq d(x,z)+d(z,y)$, je každá ultrametrika metrika. V ultrametrických prostorech nefunguje intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (Trojúhelníky v ultrametrickém prostoru)**:** *V ultrametrickém prostoru (M,d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Definice (Otevřená koule)**:** (Otevřená) koule v metrickém prostoru (M,d) se středem v $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ je podmnožina

$$B(a,r) := \{x \in M \mid d(x,a) < r\} \subset M$$

Vždy $B(a,r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a,r)$.

1.1 p-adické metriky

Definice (p-adický řád)**:** Nechť $p \in \{2,3,5,7,11,\dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Jako p-adický řád čísla n definujeme

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^2$$

Dále ještě $\forall p$ definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

Poznámka (Rozšíření $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ na zlomky)**:** Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$$

Jinak opět $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (aditivita $\mathrm{ord}_p(\cdot)$)**:** *Platí, že*

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{Q} : ord_p(\alpha\beta) = ord_p(\alpha) + ord_p(\beta)$$

kde $(+\infty)+(+\infty) = (+\infty)+n = n+(\infty) := +\infty$, pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Definice (p-adická norma)**:** Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0,1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0,+\infty)$ jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Tvrzení (multiplikativita $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé p a každé dva zlomky α,β(a každé $c \in (0,1)$) je*

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p|\beta|_p$$

Definice (Normované těleso)**:** Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso vybavené normou $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0,+\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \iff x = 0_F$
2. $\forall x,y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$

[2]. $|\cdot$ značí relaci dělitelnosti.

3. $\forall x, y \in F : |x +_F y| \leq |x|_F + |y|_F$

Tvrzení: *Pro každé normované těleso* $(F, |\cdot|_F)$ *je funkce* $d(x, y) := |x - y|_F$ *metrika na* F*. Pokud* $|\cdot|_F$ *splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost, pak je* d *ultrametrika.*

Tvrzení (o $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé prvočíslo* p *a každé* $c \in (0, 1)$ *je* $\mathbb{Q}, |\cdot|_p$ *normované těleso. Příslušný metrický prostor* $(\mathbb{Q}, d)$*(s* $d(x, y) := |x - y|_F$*) je ultrametrický prostor.*

2 Řady

2.1 Mocninné řady

2.2 Funkční řady

2.3 Konvergence a operace s řadami

2.4 Fourierovy řady

3 Komplexní analýza

3.1 Holomorfní funkce

3.2 Póly funkcí

3.3 Aplikace

4 Úvod do diferenciálních rovnic

4.1 Rovnice se separovanými proměnými

4.2 Lineární rovnice

4.3 Věta o existenci

The End