

# 1 Definujte metrický prostor a sférickou metriku. Dokažte, že hemisféra není plochá.

**Definice** (Metrický prostor): Metrický prostor je dvojice  $(M, d)$  množiny  $M \neq \emptyset$  a zobrazení

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

zvaného metrika či vzdálenost, které  $\forall x, y, z \in M$  splňuje:

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z těchto podmínek plyne i  $d(x, y) \geq 0$ .

**Příklad** (Sférická metrika): Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

si označíme jednotkovou sféru v euklidovském prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Funkci  $s : S \times S \rightarrow [0, \pi]$  definujeme pro  $\bar{x}, \bar{y} \in S$  jako

$$s(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 & \dots \bar{x} = \bar{y} \\ \varphi & \dots \bar{x} \neq \bar{y} \end{cases}$$

kde  $\varphi$  je úhel sevřený dvěma polopřímkami procházejícími počátkem  $\bar{0}$  a body  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$ . Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$  na jednotkové kružnici vytknuté na  $S$  rovinou určenou počátkem a body  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$ . Funkci  $s$  nazveme sférickou metriku.

**Věta** ( $H$  není plochá): *Metrický prostor  $(H, s)$  není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru  $(X, e_n)$  s  $X \subset \mathbb{R}^n$*

**Důkaz:** Následující vlastnost vzdáleností daných čtyřmi body  $t, u, v$  a  $w$  v Euklidovském prostoru  $(\mathbb{R}^n, e_n)$  není splněna v  $(H, s)$ :

$$e_n(t, u) = e_n(t, v) = e_n(u, v) > 0 \wedge e_n(t, w) = e_n(w, u) = \frac{1}{2}e_n(t, u) \Rightarrow e_n(w, v) = \frac{\sqrt{3}}{2}e_n(t, v) (< e_n(t, v)).$$

Podle předpokladu implikace body  $t, u$  a  $v$  tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky  $x > 0$  a  $w$  má od  $t$  i  $u$  vzdálenost  $\frac{x}{2}$ . Podle předchozího tvrzení je pak  $w$  středem úsečky  $tu$ . Tyto čtyři body jsou tedy koplanární (leží v jedné rovině) a úsečka  $vw$  je výška spoštěná z vrcholu  $v$  rovnostranného trojúhelníka  $tuv$  na stranu  $tu$ . Podle Pythagorovy věty se její délka  $e_2(v, w) = e_n(v, w)$  rovná  $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ , což říká závěr implikace.

Na hemisféře  $(H, s)$  nalezneme čtyři různé body  $t, u, v$  a  $w$  splňující předpoklad předchozí implikace, ale ne její závěr. Z toho plyne, že izometrie mezi hemisférou a Euklidovským prostorem neexistuje, protože každá izometrie ze své definice implikaci zachovává. Tyto body jsou

$$t = (1, 0, 0), u = (0, 1, 0), v = (0, 0, 1) \text{ a } w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Patrně  $s(t, u) = s(t, v) = s(u, v) = \frac{\pi}{2}$  a  $s(t, w) = s(w, u) = \frac{1}{2}s(t, u) = \frac{\pi}{4}$ . Bod  $v$  je „severní pól“ ( $x_3 = 0$ ) a  $w$  je střed oblouku  $tu$ . Ale všechny body na rovníku mají od pólu vzdálenost  $\frac{\pi}{2}$ . Takže  $s(w, v) = s(t, v)$  a závěr implikace neplatí.  $\square$

## 2 Dokažte Ostrowskiho větu.

**Definice** ( $p$ -adický řád): Nechť  $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  je prvočíslo a necht'  $n \in \mathbb{Z}$  je nenulové celé číslo. Jako  $p$ -adický řád čísla  $n$  definujeme

$$\text{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\})^1$$

Dále ještě  $\forall p$  definujeme  $\text{ord}_p(0) := +\infty$ .

**Poznámka** (Rozšíření  $\text{ord}_p(\cdot)$  na zlomky): Pro nenulové  $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  definujeme

$$\text{ord}_p(\alpha) := \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$$

Jinak opět  $\text{ord}_p(0) = \text{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$ .

**Definice** ( $p$ -adická norma): Fixujeme reálnou konstantu  $c \in (0, 1)$  a definujeme funkci  $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$  jako

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p := c^{\text{ord}_p(\frac{a}{b})}$$

kde klademe  $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

**Definice** (Kanonická  $p$ -adická norma): Pro  $\alpha \in \mathbb{Q}$  a prvočíslo  $p$  je kanonická  $p$ -adická norma  $\|\cdot\|_p$  definovaná jako

$$\|\alpha\|_p := p^{-\text{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné  $p$ -adické normě  $\|\cdot\|_p$  klademe  $c := \frac{1}{p}$ .

**Tvrzení:** Necht'  $\|\cdot\|$  je netriviální norma na tělese  $\mathbb{Q}$ . Potom  $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \|n\| \neq 1$ .

**Tvrzení:** Pro každá dvě nesoudělná  $a, b \in \mathbb{Z}$  existují čísla  $c, d \in \mathbb{Z}$ , že

$$ac + bd = 1$$

**Věta** (A. Ostrowski): Necht'  $\|\cdot\|$  je norma na tělese racionálních čísel  $\mathbb{Q}$ . Pak nastává jedna ze tří následujících možností.

1. Je to triviální norma.
2. Existuje reálné  $c \in (0, 1]$  takové, že  $\|x\| = |x|^c$ .
3. Existuje reálné  $c \in (0, 1)$  a prvočíslo  $p$ , že  $\|x\| = |x|_p = c^{\text{ord}_p(x)}$  (kde  $c^\infty := 0$ ).

Modifikovaná absolutní hodnota a  $p$ -adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

**Důkaz:** Necht'  $\|\cdot\|$  je netriviální. Pak díky prvnímu z pomocných tvrzení existuje  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , že  $\|n\| \neq 1$ . Máme dva případy.

1. **Existuje**  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\|n\| > 1$ . Jako  $n_0$  označíme nejmenší takové  $n$ . Patrně  $n_0 \geq 2$  a

$$1 \leq m < n_0 \Rightarrow \|m\| \leq 1.$$

Existuje jednoznačné reálné číslo  $c > 0$ , že

$$\|n_0\| = n_0^c.$$

---

<sup>1</sup>.  $|\cdot|$  značí relaci dělitelnosti.

Každé  $n \in \mathbb{N}$  lze při základu  $n_0$  zapsat jako

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s, \text{ kde } a_i, s \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_i < n_0 \text{ a } a_s \neq 0.$$

Pro  $n_0 = 10$  jde o obvyklý zápis v desítkové soustavě. Takže

$$\begin{aligned} \|n\| &= \|a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s\| \\ &\leq \sum_{j=0}^s \|a_j\| \cdot \|n_0\|^j \\ &\leq \sum_{j=0}^s n_0^{js} \leq n_0^{sc} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i \\ &\leq n^c C, \text{ kde } C := \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i \end{aligned}$$

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \leq C n^c.$$

Tato nerovnost ve skutečnosti platí dokonce s  $C = 1$ . Pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  multiplikativita normy a předchozí nerovnost dávají

$$\|n\|^m = \|n^m\| \leq C(n^m)^c = C(n^c)^m.$$

Vezmeme-li zde  $m$ -tou odmocninu, dostaneme  $\|n\| \leq C^{\frac{1}{m}} n^c$ . Pro  $m \rightarrow \infty$  máme  $C^{\frac{1}{m}} \rightarrow 1$ . Takže skutečně

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \leq n^c.$$

Nyní podobně odvodíme opačnou nerovnost  $\|n\| \geq n^c, n \in \mathbb{N}_0$ . Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  hořejší zápis čísla  $n$  při základu  $n_0$  dává

$$n_0^{s+1} > n \geq n_0^s.$$

Podle  $\Delta$ -ové nerovnosti máme

$$\|n_0\|^{s+1} = \|n_0^{s+1}\| \leq \|n\| + \|n_0^{s+1} - n\|.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \|n\| &\geq \|n_0\|^{s+1} - \|n_0^{s+1} - n\| \geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n)^c \\ &\geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^c = n_0^{(s+1)c} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c\right) \\ &\geq n^c C', \text{ kde } C' := 1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c > 0. \end{aligned}$$

Trik s  $m$ -tou odmocninou opět dává

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| \geq n^c$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|n\| = n^c.$$

Z multiplikativy normy dostáváme  $\|x\| = |x|^c$  pro každý zlomek  $x \in \mathbb{Q}$ . Podle tvrzení výše je  $c \in (0, 1]$ . Odvodili jsme, že platí případ 2 Ostrowského věty.

2. **Zbývá případ, kdy pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $\|n\| \leq 1$  a existuje  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\|n\| < 1$ .** Nechť  $n_0$  je nejmenší takové  $n$ , opět  $n_0 \geq 2$ . Tvrdíme, že  $n_0 = p$  je prvočíslo. Kdyby totiž  $n_0$  mělo rozklad  $n_0 = n_1 n_2$  s  $n_i \in \mathbb{Z}$  a  $1 < n_1, n_2 < n_0$ , dostali bychom spor

$$1 > \|n_0\| = \|n_1 n_2\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1 \cdot 1 = 1,$$

kde jsme použili multiplikativitu normy a to, že  $\|m\| = 1$  pro každé  $m \in \mathbb{N}$  s  $1 \leq m < n_0$ . Ukážeme, že každé jiné prvočíslo  $q \neq p$  má normu  $\|q\| = 1$ . Pro spor necht'  $q \neq p$  je další prvočíslo s normou  $\|q\| < 1$ . Vezmeme tak velké  $m \in \mathbb{N}$ , že  $\|p\|^m, \|q\|^m < \frac{1}{2}$ . Podle známého výsledku v elementární teorii čísel výše existují celá čísla  $a$  a  $b$ , že  $aq^m + bp^m = 1$ . Znormování této rovnosti dává spor

$$1 = \|1\| = \|aq^m + bp^m\| \leq \|a\| \cdot \|q\|^m + \|b\| \cdot \|p\|^m < 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Zde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost, multiplikativitu normy a to, že nyní  $\|a\| \leq 1$  pro každé  $a \in \mathbb{Z}$ .

Tedy  $\|q\| = 1$  pro každé prvočíslo  $q$  různé od  $p$ . Odtud pomocí multiplikativity normy a rozkladu nenulového zlomku  $x$  na součin mocnin prvočísel dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \prod_{q=2,3,5,\dots} q^{\text{ord}_q(x)} \right\| = \prod_{q=2,3,5,\dots} \|q^{\text{ord}_q(x)}\| = \|p\|^{\text{ord}_p(x)} \\ &= c^{\text{ord}_p(x)} \text{ kde } c := \|p\| \in (0, 1). \end{aligned}$$

Těž  $\|0\| = c^{\text{ord}_p(0)} = c^\infty = 0$ . Dostali jsme případ 3 Ostrowského věty.

□

### 3 Dokažte Heine-Borelovu větu.

**Tvrzení** (Topologická spojitost): *Nechť  $f : M \rightarrow N$  je zobrazení mezi metrickými prostory  $(M, d)$  a  $(N, e)$ . prostorem*

$$f \text{ je spojitý} \iff \forall \text{ OM } A \subset N : f^{-1}[A] = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM.}^2$$

Toto tvrzení platí i pro uzavřené množiny.

**Tvrzení** (Spojitý obraz kompaktu): *Nechť  $(M, d)$  a  $(N, e)$  jsou metrické prostory,  $X \subset M$  je neprázdňá kompaktní množina a*

$$f : X \rightarrow N$$

*je spojitá funkce. Pak obraz  $f[X] \subset N$  je kompaktní množina.*

**Tvrzení** (Spojitost inverzu): *Nechť  $f : X \rightarrow N$  je spojitý zobrazení z neprázdňé kompaktní množiny  $X \subset M$  v metrickém prostoru  $(M, d)$  do  $(N, e)$ . Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1} : f[X] \rightarrow X$$

*je spojitý.*

**Definice** (Homeomorfismus): *Zobrazení  $f : M \rightarrow N$  mezi metrickými prostory  $(M, d)$  a  $(N, e)$  je jejich homeomorfismus, je-li  $f$  bijekce a jsou-li  $f$  a  $f^{-1}$  spojitá zobrazení. Pokud mezi  $(M, d)$  a  $(N, e)$  existuje homeomorfismus, jsou homeomorfní.*

<sup>2</sup>OM zkracuje sousloví „otevřená množina“.

**Definice** (Topologická kompaktnost): Podmnožina  $A \subset M$  metrického prostoru  $(M, d)$  je topologicky kompaktní, pokud každý systém otevřených množin  $\{X_i \mid i \in I\}$  v  $M$  platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

**Věta** (Heine-Borelova): Podmnožina  $A \subset M$  metrického prostoru  $(M, d)$  je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.

**Důkaz:** Bez újmy na obecnosti můžeme vzít  $A = M$ .

• **Implikace  $\Rightarrow$ :**

Nechť  $(M, d)$  je kompaktní metrický prostor a

$$M = \bigcup_{i \in I} X_i$$

je jeho otevřené pokrytí, takže každá množina  $X_i$  je otevřená. Nalezneme jeho konečné podpokrytí. Nejprve dokážeme, že

$$\forall \delta > 0 \exists \text{ konečná množina } S_\delta \subset M : \bigcup_{a \in S_\delta} B(a, \delta) = M.$$

Kdyby to tak nebylo, pak by existovalo  $\delta_0 > 0$  a posloupnost  $(a_n) \subset M$ , že  $m < n \Rightarrow d(a_m, a_n) \geq \delta_0$  — ve sporu s předpokládanou kompaktností množiny  $M$  tato posloupnost nemá konvergentní podposloupnost. Skutečně, kdyby(negujeme hořejší tvrzení o  $\delta$  a  $S_\delta$ ) existovalo  $\delta_0 > 0$ , že pro každou konečnou množinu  $S \subset M$  je

$$M \setminus \bigcup_{a \in S} B(a, \delta_0) \neq \emptyset,$$

pak — máme-li již definované body  $a_1, a_2, \dots, a_n$  s  $d(a_i, a_j) \geq \delta_0$  pro každé  $1 \leq i < j \leq n$  — vezmeme  $a_{n+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \delta_0)$  a  $a_{n+1}$  má od každého bodu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vzdálenost alespoň  $\delta_0$ . Tak definujeme celou posloupnost  $(a_n)$ .

Pro spor nyní předpokládejme, že hořejší otevřené pokrytí množiny  $M$  množinami  $X_i$  nemá konečné podpokrytí. Tvrdíme, že odtud vyplývá, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists b_n \in S_{\frac{1}{n}} \forall i \in I : B\left(b_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset X_i.$$

Kdyby to tak nebylo, pak(negujeme předchozí tvrzení) by existovalo  $n_0 \in \mathbb{N}$ , že pro každé  $b \in S_{\frac{1}{n_0}}$  existuje  $i_b \in I$ , že  $B\left(b, \frac{1}{n_0}\right) \subset X_{i_b}$ . Pak ale, protože  $M = \bigcup_{b \in S_{\frac{1}{n_0}}} B\left(b, \frac{1}{n_0}\right)$ , dávají indexy  $J = \{i_b \mid b \in S_{\frac{1}{n_0}}\} \subset I$  ve sporu s předpokladem konečné podpokrytí množiny  $M$ .

Na samostatném řádku uvedené tvrzení o  $n$  a  $b_n$  tak platí a lze vzít posloupnost  $(b_n) \subset M$ . Podle předpokladu má konvergentní podposloupnost  $b_{k_n}$  s  $b := \lim b_{k_n} \in M$ . Protože  $X_i$  pokrývají  $M$ , existuje  $j \in I$ , že  $b \in X_j$ . Díky otevřenosti  $X_i$  existuje  $r > 0$ , že  $B(b, r) \subset X_j$ . Vezmeme tak velké  $n \in \mathbb{N}$ , že  $\frac{1}{k_n} < \frac{r}{2}$  a  $d(b, b_{k_n}) < \frac{r}{2}$ . Pro každé  $x \in B\left(b_{k_n}, \frac{1}{k_n}\right)$  pak podle  $\Delta$ -ové nerovnosti máme, že  $d(x, b) \leq d(x, b_{k_n}) + d(b_{k_n}, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ . Tedy

$$B\left(b_{k_n}, \frac{1}{k_n}\right) \subset B(b, r) \subset X_j,$$

ve sporu s hořejší vlastností bodů  $b_n$ . Předpoklad, že konečné podpokrytí neexistuje, vede ke sporu. Proto pokrytí  $M$  množinami  $X_i, i \in I$ , má konečné podpokrytí.

• **Implikace  $\Leftarrow$ :**

Předpokládáme, že každé otevřené pokrytí množiny  $M$  má konečné podpokrytí a odvodíme z toho, že každá posloupnost  $(a_n) \subset M$  má konvergentní podposloupnost. Nejprve ukážeme, že předpoklad

$$\forall b \in M \exists r_b > 0 : M_b := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r_b)\} \text{ je konečná}$$

vede ke sporu. Z pokrytí  $M = \bigcup_{b \in M} B(b, r_b)$  bychom totiž vybrali konečné podpokrytí dané konečnou množinou  $N \subset M$  a nahlédli, že existuje  $n_0$ , že  $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \notin \bigcup_{b \in N} B(b, r_b)$ , protože množina indexů  $\bigcup_{b \in N} M_b$  je konečná (konečné sjednocení konečných množin). To je spor, protože  $\bigcup_{b \in N} B(b, r_b) = M$ . Předpoklad tedy neplatí a naopak je pravda, že

$$\exists b \in M \exists r > 0 : M_r := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r)\} \text{ je nekonečná.}$$

Tedy už lehce z  $(a_n)$  vybereme konvergentní podposloupnost  $(a_{k_n})$  a limitou  $b$ . Necht' už jsme definovali indexy  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$ , že  $d(b, a_{k_i}) < \frac{1}{i}$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$ . Množina indexů  $M_{\frac{1}{n+1}}$  je nekonečná, takže můžeme zvolit takové  $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ , že  $k_{n+1} > k_n$  a  $k_{n+1} \in M_{\frac{1}{n+1}}$ . Pak i  $d(b, a_{k_{n+1}}) < \frac{1}{n+1}$ . Takto je definována posloupnost  $(a_{k_n})$  konvergující k  $b$ .

□

## 4 Dokažte existenci $n$ -tých odmocnin v $\mathbb{C}$ .

**Poznámka:** Komplexní jednotková kružnice

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina.

**Tvrzení:** Pro každé nezáporné  $x \in \mathbb{R}$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje nezáporné  $y \in \mathbb{R}$  takové, že  $y^n = x$ .

**Tvrzení (Druhá odmocnina v  $\mathbb{C}$ ):**  $\forall a + bi \in \mathbb{C}$  máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech

$$c := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \quad a \quad d := \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}},$$

že  $(c + di)^2 = a + bi$ .

Z předchozích dvou tvrzení lze dokázat, že pokud pro každé  $u \in S$  a pro každé liché  $n \in \mathbb{N}$   $\exists v \in S : v^n = u$ , pak platí následující věta.

**Věta ( $n$ -té odmocniny v  $\mathbb{C}$ ):** Komplexní čísla obsahují všechny  $n$ -té odmocniny, tedy

$$\forall u \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} \exists v \in \mathbb{C} : v^n = u.$$

**Důkaz: TODO**

□

## 5 Dokažte Besselovu nerovnost.

**Tvrzení (Ortogonalita sinů a cosinů):** Pro každá dvě celá čísla  $m, n \geq 0$  je

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$$

Pro každá dvě celá čísla  $m, n \geq 0$ , kromě  $m = n = 0$ , je

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \dots \quad m = n \\ 0 & \dots \quad m \neq n. \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi.$$

**Definice** (Kosinové a sinové Fourierovy koeficienty): Pro každou funkci  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  definujeme její kosinové Fourierovy koeficienty

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, n = 0, 1, \dots$$

a sinové Fourierovy koeficienty

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, n = 1, 2, \dots$$

**Definice** (Fourierova řada funkce): Fourierova řada funkce  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde  $a_n$  a  $b_n$  jsou po řadě její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , v němž jsou „souřadnými osami“ (prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v  $\mathbb{R}^n$  se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady.

**Věta** (Besselova nerovnost): Pro Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  funkce  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  platí nerovnost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Důkaz: **TODO**

□

**6** Spočítejte, že  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Příklad (Basilejský problém): **TODO**

**7** Dokažte, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce.

**8** Dokažte případ 2 nebo případ 3 Pólyovy věty.

**9** Dokažte, že  $\rho \neq 0$ .

**10** Dokažte Caychy-Goursatovu větu pro obdélníky.

**11** Vyřešte diferenciální rovnici  $y' + ay = b$ .