同学们好，欢迎跟我学数值分析！

课程学习导引

数值分析

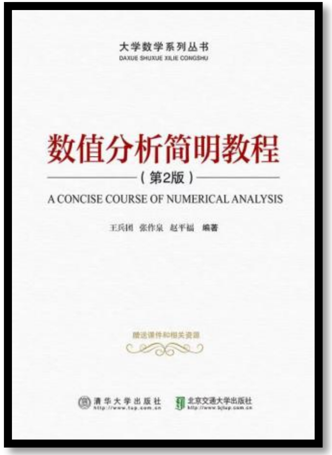
Numerical Analysis

科学计算的桥梁！

数值分析属计算数学的范畴，又称计算方法、数值计算、**计算数学**等，它是一个数学分支。

1、教材

数值分析简明教程（第2版），王兵团等，
清华大学出版社， 2020



2、参考资料

1) *Numerical Analysis,(7th ed),Burden R.L, Faires J.D*
影印版，机械工业出版社， 2001；

2) 数值分析（第5版），李庆扬等，清华大学出版社，2008；

3) 数值计算方法（第2版），丁丽娟等，北京理工大学出版社，2010

课程描述

数值分析内容：用计算机求解数学问题！

重点

数值分析核心：算法构造和误差分析！！

数值分析中有大量实用科学研究方法！！

数值分析中是科研和工程中使用最多的数学！！

与一般数学课程的区别：

一般数学： 立足<u>准确</u>、追求<u>准确结果</u>；

数值分析： 立足<u>近似</u>、追求<u>可用结果</u>!!

2、3是重点！！

数值分析学习方法

1、注意掌握各种方法的基本原理

2、注意各种方法的构造手法

3、重视各种方法的误差分析

4、做一定量的习题

5、注意与实际问题相联系

6、了解各种方法的算法与程序实现

课程讲授内容有

下面进入数值分析课程学习，预祝同学们学习顺利！！

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面开始讲授数值分析的第一章 绪论。本章内容分8集讲授。

第1集：

1.1 第一章内容介绍及学习数值计算的重要性

第一章 绪论

介绍科学计算的特点、基本知识等。

本章讲授内容

§1.1 学习数值分析的重要性

数值分析知识在科研和生产实践中有什么作用？

1、可以更好地了解科学计算

提问：

用一种计算机语言正确编程，计算机就一定能给出正确的计算结果吗？

例 1 将数列 $$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}dx$$

写成递推公式形式，并计算数列: $I_1, I_2, \cdots$

解： $$\because I_n=\int_0^1\frac{x^n+5x^{n-1}-5x^{n-1}}{x+5}dx$$

$$=\int_0^1 x^{n-1}dx-5\int_0^1\frac{x^{n-1}}{x+5}dx=\frac{1}{n}-5I_{n-1}$$

$$\therefore I_n=\frac{1}{n}-5I_{n-1}\quad n=1,2,\cdots\quad(1.1)$$

由 $I_0=\int_0^1\frac{1}{x+5}dx=\ln\frac{6}{5}$ 和式(1.1)可以依次算出 $I_1, I_2, \cdots$

但科学计算中要具体数值！

若取 $I_0 = \ln\frac{6}{5}$ 为准确到小数点后8位的近似值并在字长为8的计算机上编程计算，可出现

$$I_{12} = -0.32902110 \times 10^2$$

这显然是错误的！？ $\left(\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \right)$

2、是当前解决实际问题的最重要一环

因为用计算机解决实际问题的四个步骤

1）建立数学模型；

2）选择数值方法；　　　　第2步很重要！

3）编写程序；

4)上机计算。

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面继续讲授数值分析的第一章绪论。

第2集：

1.2 计算机中的数系与运算

§1.2 计算机中的数系与运算

什么是机器数系？

计算机怎样做计算的？

知识点

1、机器数系

2、计算机接收、处理数据的方法

机器数系

计算机中使用的数系称为机器数系。

数学中的实数：

1、10进制浮点数

$$x = \pm 10^c \times 0.a_1 a_2 \cdots, \quad a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$$

c 为整数

2、β 进制的浮点数

$$x = \pm \beta^c \times 0.a_1 a_2 \cdots a_t \cdots, a_i \in \{0, 1, \cdots, \beta - 1\}$$

规格化浮点数$a_1 \neq 0$

计算机中的实数（浮点数）

$$\boxed{x = \pm\beta^{c} \times 0.a_1 a_2 \cdots a_t \quad , a_i \in \{0,1,\cdots,\beta-1\}}$$

比较

$$x = \pm\beta^{c} \times 0.\underline{a_1 a_2 \cdots a_t} a_{t+1} \cdots,$$

机器数系

F 有$2\times\beta^t\times(U-L+1)$个数！

$$\boxed{F(\beta,t,L,U) = \{\pm\beta^{c} \times 0.a_1 a_2 \cdots a_t \,|\, a_k \in \{0,1,\cdots,\beta-1\}, L \le c \le U\}}$$

t：字长，正整数；β：进制，一般取为2, 8, 10和16；

c ：阶码，整数，$L \leqslant c \leqslant U$，$L$和$U$ 为固定整数

例1、研究如下机器数系

$$F(10,2,-1,1)=\left\{\pm 10^{c}\times 0.a_1a_2 \,\middle|\, a_1,a_2\in\{0,1,\cdots,9\},-1\le c\le 1\right\}$$

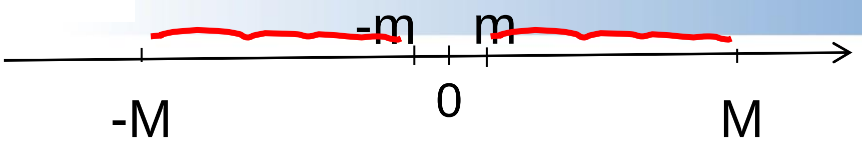
解：该机器数系共有： $2\times 10^2\times\left(1-(-1)+1\right)=600$个

最小的正数为 $0.01\times 10^{-1}=0.001$

最大的正数为 $0.99\times 10^{1}=9.9$

$F(10,2,-1,-1)$的数在$[-9.9,-0.01]\cup[0.01,9.9]\cup 0$之间

$F(10,2,-1,-1)$相邻两数的最小间隔为0.001



机器数系的特点

1、是有限的离散集 ；

2、有绝对值最大非零数(M)和最小非零数(m)；

3、数绝对值大于M ，产生上溢错误，小于m，则产生下溢错误；

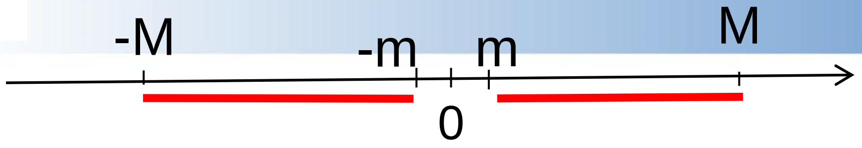
4、上溢时，中断程序;下溢时，用零表示该数继续程序；

无论是上溢，还是下溢，都称为溢出错误。

5、计算机把尾数为0且阶数最小的数表示数零.

$$F(\beta,t,L,U)=\left\{\pm\beta^{c}\times 0.a_1a_2\cdots a_t \,\middle|\, a_k\in\{0,1,\cdots,\beta-1\},L\le c\le U\right\}$$

计算机接收、处理数据的方法



1. 计算机对数的接收

1) $x \in F(\beta,t,L,U)$ ，原样接收 x ；

2) $x \notin F(\beta,t,L,U), m \le |x| \le M,$ 则用 $F(\beta,t,L,U)$ 中最属于靠近 x 的数 $fl(x)$ 表示并记录 x 。

$fl(x)$是机器数

2. 计算机对数的运算处理

1) 加减法:先对阶，后运算，再舍入；

2) 乘除法:先运算，再舍入。

例2、某计算机数系$F(10, 4, -99, 99)$的两个数

$$x_1 = 0.2337 \times 10^{-1}, \quad x_2 = 0.3364 \times 10^{2}$$

求这两个数相加、相乘的运算结果。

解：相加运算过程：

$$fl(\underline{x_1 + x_2}) = fl(\underline{0.2337 \times 10^{-1} + 0.3364 \times 10^{2}})$$

$$\overset{\text{对阶}}{=} fl(\underline{0.0002337 \times 10^{2} + 0.3364 \times 10^{2}})$$

$$\overset{\text{运算}}{=} fl(\underline{0.3366337 \times 10^{2}}) \overset{\text{舍入}}{=} 0.3366 \times 10^{2}$$

$$x_1 = 0.2337 \times 10^{-1}\ ,\ x_2 = 0.3364 \times 10^{2}$$

相乘运算过程：

$$fl(\underline{x_1 \times x_2}) = fl(\underline{0.2337 \times 10^{-1} \times 0.3364 \times 10^{2}})$$

$$\overset{\text{运算}}{=} fl(\underline{0.7861668 \times 10^{0}})$$

$$\overset{\text{舍入}}{=} 0.7862$$

#

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面继续讲授数值分析的第一章绪论。

第3集：

1.3 误差

§1.3 误差

误差？

绝对误差？

相对误差？

准确值与近似值的差异就是误差！

误差的来源：

1） 模型误差（也称描述误差）

2） 观测误差（也称数据误差）

3） 截断误差（也称方法误差）

4） 舍入误差（也称计算误差）

知识点

1、误差

2、四则运算及函数的误差

误差

定义1 设 x 是准确值，x^* 是 x 的一个近似值，称

$$e(x^*) = x^* - x \quad 或 \quad e^* = x^* - x$$

为近似数 x^* 的绝对误差，简称 误差 。

x^*	x	e^*
11	10	1
101	100	1

误差不能反映近似值的程度！

定义2 设 x 是准确值，x^*是 x 的近似值，称

$$e_r\left(x^*\right)=\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}$$

为近似值 x^* 的相对误差。

x^*	x	e^*	e_r
11	10	1	1/10
101	100	1	1/100

重要结论：相对误差绝对值越小，近似程度越高。

误差不容易计算出结果，引入误差限概念。

定义3 称满足

$$|e^*| = |x^* - x| \le \varepsilon^*$$

的正数ε^* 为近似值 x^*的误差限。

$$x^* - \varepsilon^* \le x \le x^* + \varepsilon^* \quad \text{简记} x = x^* \pm \varepsilon^*$$

定义4　满足

$$\left|e_r^*\right| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \le \varepsilon_r^*$$

的正数 ε_r^* 称为 x^* 的相对误差限。

实用中，$\varepsilon_r^* = \dfrac{\varepsilon^*}{\left|x^*\right|}$

$$\left|\frac{x^* - x}{x^*}\right| \le \frac{\varepsilon^*}{\left|x^*\right|} = \varepsilon_r^*$$

例1、若2. 15的近似值为2. 14，求2. 14 的绝对误差和相对误差。

解：由已知得 x =2. 15 ，x^* = 2. 14，根据定义有

绝对误差： $e(x^*) = x^* - x = -0.01$

相对误差： $$e_r\left(x^*\right)=\frac{x^*-x}{x}=\frac{-0.01}{2.15}=-\frac{1}{215}$$

注意：绝对误差： $e(x^*) \neq | x^* - x | = 0.01$

微分与误差的对应

$$e\left(x^*\right) = x^* - x = dx \qquad e_r\left(x^*\right) = \frac{x^* - x}{x} = \frac{dx}{x} = d\ln x$$

绝对误差和相对误差与微分的关系

$$dx = e\left(x^*\right) \qquad d\ln x = e_r\left(x^*\right)$$

例2、确定函数 $y=x^n$ 与自变量x的相对误差关系；若已知自变量 x 近似值的相对误差为10^{-4} ，求 x^{500} 的相对误差。

解：两边取对数：$\ln y = n \ln x$

两边取微分：$d\ln y = nd\ln x$

$$\therefore \quad e_r\left(\left(x^n\right)^*\right) = ne_r\left(x^*\right)$$

$\because e_r\left(x^*\right) = 10^{-4}$

$$e_r\left(\left(x^{500}\right)^*\right) = 500e_r\left(x^*\right) = 500\times10^{-4} = 5\times10^{-2}$$

四则运算及函数的误差

1、四则运算的误差

定理1 假设 x^* 和 y^*分别是准确值 x 和 y的一个近似值，则有四则运算的绝对误差估计：

$$(1)\ e(x^* \pm y^*) = e\left(x^*\right) \pm e\left(y^*\right)$$

$$(2)\ e(x^* \cdot y^*) \approx y^* e\left(x^*\right) + x^* e\left(y^*\right)$$

$$(3)\ e\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \approx \frac{y^* e\left(x^*\right) - x^* e\left(y^*\right)}{\left(y^*\right)^2}$$

证明（2）

$$e(x^*y^*) = x^*y^* - xy$$

$$= x^*y^* \underline{-xy^*} + \underline{xy^*} - xy$$

$$= y^*\left(x^* - x\right) + x\left(y^* - y\right)$$

$$= y^*e\left(x^*\right) + xe\left(y^*\right)$$

$$\approx y^*e\left(x^*\right) + x^*e\left(y^*\right) \qquad (\because x \approx x^*)$$

3. 函数的误差

证明见书

定理2 设多元函数 $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 则有多元函数的误差估计

$$(1)\ e\left(f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)\right) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)}{\partial x_i} e\left(x_i^*\right)$$

$$(2)\ \varepsilon\left(f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)\right) \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)}{\partial x_i}\right| \varepsilon\left(x_i^*\right)$$

$$(3)\ \varepsilon_r\left(f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)\right) \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)}{\partial x_i}\right| \frac{\varepsilon\left(x_i^*\right)}{\left|f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)\right|}$$

$$e\left(f\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)\right)\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)}{\partial x_i}e\left(x_i^*\right)$$

特别对一元函数 $y = f(x)$，有 $e\left(f\left(x^*\right)\right)\approx\frac{df\left(x^*\right)}{dx}e\left(x^*\right)=f'\left(x^*\right)e\left(x^*\right)$

$$\left|e\left(f\left(x^*\right)\right)\right|\approx\left|f'\left(x^*\right)\right|\cdot\left|e\left(x^*\right)\right|$$

表示 x^*的误差经 f 作用后被放大（缩小）$|f'(x^*)|$倍，称$|f'(x^*)|$为绝对误差增长因子。

例3、计算 $f=\left(\sqrt{2}-1\right)^{6}$ ，取 $\sqrt{2}\approx 1.4$ ，求 f 绝对误差限。

解：令 $x=\sqrt{2}, x^{*}=1.4 \Rightarrow \left|e\left(x^{*}\right)\right|=\left|\sqrt{2}-1.4\right|=0.014\cdots \leq 0.2\times 10^{-1}$

$$f=\left(\sqrt{2}-1\right)^{6}=f\left(x\right)=\left(x-1\right)^{6}\Rightarrow f'\left(x\right)=6\left(x-1\right)^{5}$$

$$\Rightarrow f'\left(x^{*}\right)=6\left(1.4-1\right)^{5}=6\times 0.4^{5}$$

$$\therefore \left|e\left(f\left(x^{*}\right)\right)\right|\approx\left|f'\left(x^{*}\right)\right|\cdot\left|e\left(x^{*}\right)\right|\leq 6\times 0.4^{5}\times 0.2\times 10^{-1}=0.12288\times 10^{-2}$$

故 f 的绝对误差限为 0.12288×10^{-2}

#

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面继续讲授数值分析的第一章绪论。

第4集：

1.4 有效数字(1)

§1.4 有效数字

什么是有效数字？

它与误差有关系吗？

知识点

1、有效数字

2、有效数字与误差的关系

科学计算中常用有效数字来估计和处理误差，这是因为有效数字容易计算且与误差有密切关系。更为重要的是**有效数字可以将误差量化！**

有效数字

1、有效数字的定义

定义：若近似数 x^* 的误差限是其某一位上数字的半个单位，就说近似数 x^* 准确到该位；由该位自右向左数到 x^* 的第一个非零数字若有n位，就称近似数x^*有n位有效数字。

$$x^* = 216.534 = 2\times 10^2 + 1\times 10^1 + 6\times 10^0 + 5\times 10^{-1} + 3\times 10^{-2} + 4\times 10^{-3}$$

2	1	6	□	5	3	4
10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

$$\left|e\left(x^*\right)\right| \le \varepsilon = \frac{1}{2}\times 10^{-2} \Rightarrow n = 5$$

$$\left|e\left(x^*\right)\right| \le \varepsilon = \frac{1}{2}\times 10^{1} \Rightarrow n = 2?$$

2、有效数字的数学描述

$0.5\times10^{m-n}$可以看作是x^*的误差限！

设 $x^*=\pm0.a_1a_2\cdots a_k\times10^m, a_1\neq0, a_l\in\{0,1,\cdots,9\}, k\geq n, m\in Z$

如果成立 $\left|e\left(x^*\right)\right|=\left|x^*-x\right|\leq0.5\times10^{m-n}$

则称 x*有n位有效数字。通常写 $x^*=\pm0.a_1a_2\cdots a_n\times10^m$

结论：有效数字越多，绝对误差和相对误差就越小，因此近似数就越准确！

通常准确数x和近似数x*都写为规格化浮点数时，它们的阶码m相同。

工程书籍中若出现：$x = 0.005800 \pm \frac{1}{2} \times 10^{-6}$

表示近似值 x^*=0.005800，它准确到小数点第6位，有4位有效数字。

注 ：12300有5位有效数字，但12300若写成0.123×10^5，后者就只有3位有效数字了。

数字末尾的0不可随意省去！

例1、求圆周率π的两个近似值 x_1=3.14, x_2=3.141的有效数字。

解：$\because \pi = 3.1415926\cdots, x_1 = 0.314\times 10^1, m=1$

$$\left|\pi - x_1\right| = 0.0015926\cdots = 10^{-2}\times 0.15926\cdots < 0.5\times 10^{-2}$$

有 ***m-n*** = -2，得***n*** =3 ， x_1有3位有效数字；$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_k\times 10^m, a_1\neq 0$

$$\left|\pi - x_2\right| = 0.0005926\cdots = 10^{-3}\times 0.5926\cdots < 0.5\times 10^{-2}$$

$$x_2 = 0.3141\times 10^1, m=1$$

$$\left|x^* - x\right| \le 0.5\times 10^{m-n}$$

有***m-n*** = -2，得***n*** =3 ， x_2有3位有效数字.

可以证明：

$$x = \pm\beta^{c} \times 0.a_1 a_2 \cdots a_t,\ \ a_1 \neq 0$$

如果十进制 x 经过四舍五入得到近似数 x^*，则x^*的有效数字位为将 x^*写为规格化浮点数后的尾数的位数。

例 0.00345四舍五入得 0.0035=0.35×10^{-2}可知近似数有2位有效数字。

π的近似数3.14（四舍五入数）有3位有效数字；3.142（四舍五入数）有4位有效数字。

而近似数3.141（不是四舍五入数）有3位有效数字，虽然它有4位数。

例2、已知近似数 x^*有5位有效数字，试求其相对误差限。

解： 因为 x^*有5位有效数字，可以设

$$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_5 \times 10^m, a_1 \geq 1$$

由题意，有 n=5和 $|x^* - x| \leq 0.5 \times 10^{m-5}$

$$\because \quad \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{0.5 \times 10^{m-5}}{0.a_1a_2\cdots a_5 \times 10^m} \leq \frac{0.5 \times 10^{-5}}{0.a_1} \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-4} < \frac{1}{2} \times 10^{-4} \quad \Rightarrow \underline{\varepsilon_r^* = \frac{1}{2} \times 10^{-4}}$$

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面继续讲授数值分析的第一章绪论。

第5集：

1.4 有效数字(2)

有效数字与误差关系

定理3 设10进制近似数 $x^* = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_k \times 10^m, a_1 \neq 0, k \geq n$

a_1是x^*的首位非零数。

1、若 x^*有 n 位有效数字，则有

$$\left|e_r\left(x^*\right)\right| = \frac{\left|x^* - x\right|}{\left|x^*\right|} \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

要求 x^* 已知!

2、若 x^*的相对误差

$$\left|e_r\left(x^*\right)\right| = \frac{\left|x^* - x\right|}{\left|x^*\right|} \leq \frac{1}{2\left(a_1 + 1\right)} \times 10^{1-n}$$

则 x^*有 n 位有效数字。 （证明见书）

例3、为保证某算式的计算精度，要求其中 $\sqrt[3]{23}$ 的近似值 x^* 的相对误差小于0.1%，请确定x^*至少要取几位有效数字才能达到要求。

解: $\because \quad 2<\sqrt[3]{23}<3 \quad \Rightarrow \sqrt[3]{23}=2.a_2a_3\cdots=0.2a_2a_3\cdots\times 10^1 \Rightarrow a_1=2$

假设 x^*至少要取 n 位有效数字才能保证相对误差小于0.1%，由定理3

$$\left|e_r\left(x^*\right)\right|=\frac{\left|x^*-x\right|}{\left|x^*\right|}\le\frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}$$

$$\frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}=\frac{1}{2\times 2}\times 10^{1-n}<0.1\% \Rightarrow \underline{n\ge 4}$$

至少取4位有效数字

例4、若算式中数据都准确到两位小数，试求

$$x^* = 1.21 \times 3.65 - 9.81$$

的绝对误差限、相对误差限和有效数字。

$$e(x^* \pm y^*) = e(x^*) \pm e(y^*)$$

$$e(x^* \cdot y^*) \approx y^* e(x^*) + x^* e(y^*)$$

解 因为运算中数据都准确到两位小数, 故有

$$|e(1.21)| \le 0.5 \times 10^{-2}, |e(3.65)| \le 0.5 \times 10^{-2}, |e(9.82)| \le 0.5 \times 10^{-2}$$

$$\because e(x^*) = e(1.21 \times 3.65) - e(9.81) \approx 3.65 \times e(1.21) + 1.21 \times e(3.65) - e(9.81)$$

$$\therefore |e(x^*)| \approx |3.65 \times e(1.21) + 1.21 \times e(3.65) - e(9.81)|$$

x*的绝对误差限

$$\le \left|3.65 \times |e(1.21)| + 1.21 \times |e(3.65)| + |e(9.81)|\right| \le (3.65 + 1.21 + 1) \times 0.5 \times 10^{-2} = \underline{0.0293}$$

$$\because \left|e\left(x^*\right)\right| \le 0.0293;\ x^* = -5.3935 = -0.53935\times 10^1 \Rightarrow a_1 = 5$$

x*的相对误差限

$$\therefore \left|e_r\left(x^*\right)\right| = \frac{\left|e\left(x^*\right)\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{0.0293}{5.3935} = 0.00543247$$

$$\because \left|e_r\left(x^*\right)\right| = \frac{\left|x^* - x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{1}{2\left(a_1+1\right)}\times 10^{1-n} = \frac{1}{12}\times 10^{1-n}$$

误差限要取最小的上界

$$\frac{1}{12}\times 10^{1-1} = 0.0833\cdots;\ \frac{1}{12}\times 10^{1-2} = 0.00833\cdots;\ \frac{1}{12}\times 10^{1-3} = 0.000833\cdots$$

$\left|e_r\left(x^*\right)\right| \le 0.00543247 \le \frac{1}{12}\times 10^{1-n}$ 最小的n=2

由定理3，x*有2位有效数字.

例5、设 $y_0 = 28$，按递推公式

$$\left| x^* - x \right| \le 0.5 \times 10^{m-n}$$

$$y_n = y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

计算到 y_{100}，若$\sqrt{783}$ 取5位有效数字参与计算，试问计算到 y_{100} 将有多大误差?

解：设b是$\sqrt{783}$ 取5位有效数字的近似数 $\Rightarrow \left|\sqrt{783} - b\right| \le 0.5 \times 10^{m-5}$

$$\because 27^2 < 783 < 28^2 \Rightarrow 27 < \sqrt{783} < 28 \quad \therefore \sqrt{783} = 27.\cdots = 0.27\cdots \times 10^2 \Rightarrow m = 2$$

$$\therefore \left|\sqrt{783} - b\right| \le 0.5 \times 10^{2-5} = 0.5 \times 10^{-3}$$

$$y_n = y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783} \Rightarrow y_n^* = y_{n-1}^* - \frac{1}{100}b$$

$$\Rightarrow y_n^* - y_n = y_{n-1}^* - y_{n-1} - \frac{1}{100}\left(b - \sqrt{783}\right)$$

$$e_n = y_n^* - y_n, \varepsilon = b - \sqrt{783} \Rightarrow e_n = e_{n-1} - \frac{\varepsilon}{100} = e_{n-2} - \frac{2\varepsilon}{100} = \ldots = e_0 - \frac{n\varepsilon}{100}$$

$$\because y_0 = 28, y_0^* = 28 \Rightarrow e_0 = 0 \Rightarrow e_n = -\frac{n\varepsilon}{100} \Rightarrow e_{100} = y_{100} - y_{100}^* = -\varepsilon$$

$$\therefore \left|y_{100} - y_{100}^*\right| = |\varepsilon| = \left|b - \sqrt{783}\right| \le 0.5 \times 10^{-3}$$

#

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面讲授数值分析研究对象、内容及发展

§1.5 数值分析研究对象、内容及发展

数值分析是研究什么的？

一、数值分析研究对象

各种数学问题的数值方法设计、分析、有关的数学理论和软件实现。

二、数值分析研究内容

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \quad \forall f(x) \in C[a,b]$$

1、连续系统的离散化；

2、离散型方程的数值求解

三、数值分析的发展

1、数值分析是当今科学技术中最有用的数学研究领域;

2、以数值分析为基础的学科有很多，如计算几何、最优化、计算力学、计算物理、计算生物学及计算经济学等;

三、数值分析的发展

3、传统的科学计算方法是根据计算机串行处理指令的特点来构造的（串行算法），现代科学计算方法是面向并行计算机处理指令的特点来构造算法的（并行算法）。

并行算法具有计算速度快和效率高的优点。目前改造已有串行算法使之适用于并行计算机的并行算法，是当今计算数学中最活跃的新领域。

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面继续讲授数值分析的第一章绪论。

第6集：

1.6 数值分析常用概念(1)

§1.6 数值分析常用概念

数值解？算法？计算量？

知识点

1、数值问题

2、数值解

3、算法

4、计算量

5、病态问题

6、数值稳定算法

1. 数值问题

由一组已知数据（输入数据）求出一组结果数据（输出数据），使得这两组数据之间满足预先指定的某种关系问题，称为数值问题。

2. 数值解

由近似公式计算出的解称为数值解。数值解是近似解。

3. 算法

由给定的已知量，经过有限次四则运算及规定的运算顺序，求出所关心未知量的数值解，这样所构成的整个计算步骤，称为算法。

数值分析本质上是研究和构造算法的！

4. 计算量

一个算法所需要的乘法和除法总次数称为计算量，常用N表示。

计算量的单位为flop，表示完成一次浮点数乘法或除法所需要的时间。

算法的计算量可以衡量算法的优劣，因为它体现着算法的计算效率。

结论：算法的计算量越小，则算法的计算效率越高，因而该算法也就越好。

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面继续讲授数值分析的第一章绪论。

第7集：

1.5 数值分析研究内容及常用概念(2)

例1、假设A，B，C 分别为10×20，20×50，50×1的矩阵，试给出计算D＝ABC的两者算法及对应的计算量。

算法1　　D＝(AB)C

N＝ 10×20×50+10×50×1 = 10500 flop

算法2　　D＝A(BC)

算法2比算法1好！

N＝10×20×1+20×50×1 =1200 flop

$A_{m\times s}=(a_{ij}),B_{s\times n}=(b_{ij})\Rightarrow A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}=(c_{ij});c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$　***AB*的计算量是** m×s×n

5. 病态问题

初始数据的微小变化，导致计算结果的剧烈变化的问题称为病态问题。

例如

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{3}x_3=\dfrac{11}{6} \\ \dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{3}x_2+\dfrac{1}{4}x_3=\dfrac{13}{12} \\ \dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{1}{4}x_2+\dfrac{1}{5}x_3=\dfrac{47}{60} \end{cases} \xrightarrow{\text{扰动}} \begin{cases} x_1+0.50x_2+0.33x_3=1.8 \\ 0.50x_1+0.33x_2+0.25x_3=1.1 \\ 0.33x_1+0.25x_2+0.20x_3=0.78 \end{cases}$$

$$x_1=x_2=x_3=1 \Rightarrow x_1=-6.2,\ x_2=38,\ x_3=-34$$

初始数据的微小变化只引起计算结果的微小变化的计算问题称为良态问题。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{扰动}} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = -2.005 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 1.999, x_2 = -2.002$$

病态问题的计算或求解应使用专门的方法或将其转化为非病态问题来解决。

数值分析主要研究良态问题数值解法!

6. 数值稳定算法

如果一个算法的初始数据有误差，而在计算过程中产生的误差不增长，则称该算法为数值稳定算法，否则称为数值不稳定算法。

例2 选用数值稳定方法计算数列 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}dx, n=1,2,\cdots,100$

解：直接推导有递推公式

不稳定算法！

$$I_n=\frac{1}{n}-5I_{n-1}\rightarrow \underline{I_n^*=\frac{1}{n}-5I_{n-1}^*}\Rightarrow\left|I_n^*-I_n\right|=5\left|I_{n-1}^*-I_{n-1}\right| \qquad I_k^*-I_k=e_k\Rightarrow\left|e_n\right|=5\left|e_{n-1}\right|$$

对应的近似算式

误差增大5倍！

下面采用逆序计算方式给出一个数值稳定的计算公式

$$I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}, n\uparrow \Rightarrow I_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{I_n}{5}, n\downarrow$$

$$\boxed{I^*_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{I^*_n}{5}}$$

同理

$$\left|I_{n-1} - I^*_{n-1}\right| = \frac{1}{5}\left|I_n - I^*_n\right| \qquad \left|e_{n-1}\right| = \frac{1}{5}\left|e_n\right| < \left|e_n\right|, n\downarrow$$

$$I_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{I_n}{5}, n = 100, 99, \cdots, 1$$

稳定算法！

广义积分中值定理

1. $f(x), g(x) \in C[a,b]$;　　2. $g(x)$在$[a,b]$上不变号

则有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad \xi \in [a,b]$$

特别，当 ***g(x)***=1时，得通常的积分中值定理！

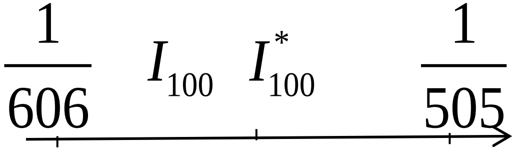
借助广义积分中值定理，可以给出如前的稳定算法计算初值。

$$I_{n-1}=\frac{1}{5n}-\frac{I_n}{5},\ n=100,99,\cdots,1$$

稳定算法的初值 I_{100}^* 的选取

$$\frac{1}{6\times101}\le I_{100}=\int_0^1\frac{x^{100}}{x+5}dx=\frac{1}{\xi+5}\int_0^1 x^{100}dx=\frac{1}{101(\xi+5)}\le\frac{1}{5\times101}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{6\times101}\le I_{100}\le\frac{1}{5\times101}$$



取均值

$$I_{100}^*=\frac{1}{2}\times\frac{1}{101}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{11}{6060}\approx0.001815$$

最大误差

$$\left|I_{100}^*-I_{100}\right|\le\frac{1}{2}\times\frac{1}{101}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6060}<0.166\times10^{-3}$$

#

本集内容讲授完毕，再见！

同学们好！下面继续讲授数值分析的第一章绪论。

第8集：

1.7 科学计算需要注意的地方

§1.7 科学计算要注意的地方

做科学计算需要注意什么？

1. 避免相近二数相减

$$\because e_r(x-y)=\frac{e(x)-e(y)}{x-y}$$

例如：

$a_1=0.12345$，$a_2=0.12346$，各有5位有效数字.

而 $a_2-a_1=0.00001$，只剩下1位有效数字了.

例1 试求方程 $x^2-26x+1=0$ 的两个根.

解 由求根公式，两个根为

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(26\pm\sqrt{672}\right)=13\pm\sqrt{168}$$

四舍五入

若根号数 $\sqrt{168}$ 取5位有效数字 $\sqrt{168}^*=12.961$ 则有

$$\left|e\left(\sqrt{168}^*\right)\right|=\left|\sqrt{168}-12.961\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

最多2位有效数字

$$x_1\approx13+\sqrt{168}^*=25.961=x_1^* \qquad x_2\approx13-\sqrt{168}^*=0.039=x_2^*$$

$$\because x_2 = 13 - \sqrt{168} = \frac{1}{13+\sqrt{168}} \approx \frac{1}{13+\sqrt{168}^*} = 0.038519 = x_2^*$$

这个结果好！

$$令 x = \sqrt{168} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{13+x}$$

$$f'(x^*) = -\frac{1}{\left(13+\sqrt{168}^*\right)^2}$$

$$\because \left|e\left(f\left(x^*\right)\right)\right| \approx \left|f'\left(x^*\right)\right| \cdot \left|e\left(x^*\right)\right|$$

x_2^* 准确到小数点后第5位！

$$\therefore \left|e(x_2^*)\right| = \left|\frac{e(\sqrt{168}^*)}{\left(13+\sqrt{168}^*\right)^2}\right| \le 0.038519^2 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.0014\cdots \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} < \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$\therefore x_2^* = 0.038519$ 具有4位有效数字.

2. 避免用接近零的数做除数

$$\because e\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}\left[e_r(x)-e_r(y)\right]$$

3. 控制误差的积累和传播

方法：避免大数吃小数，用数值稳定的算法

4. 简化计算过程

方法：化简公式或想办法减少运算次数

例 2、怎样计算下列算式更好？

1、$y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}},x>>1$

2、$y=\dfrac{1+x-e^{x}}{x^{2}},x<<1$

解:1、$x>>1$表示 x 很大。本题分母接近于零，且有相近数相减情况，要避免！

方法：用公式变形 $\because y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$\therefore$选用 $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

解:2、$x<<1$表示 x 接近于零，分母出现接近于零的数，因此不能直接计算，要避免。

方法： 因无对应的变形公式，用Taylor公式做之。

$$\because y=\frac{1+x-e^x}{x^2}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{3!}-\frac{x^2}{4!}-\frac{e^\xi}{5!}x^3\approx-\frac{1}{2}-\frac{x}{6}-\frac{x^2}{24}$$

$$y\approx-\frac{1}{2}-\frac{x}{6}-\frac{x^2}{24},\quad e(y)=\frac{e^\xi}{5!}x^3$$

例3：设 n 次多项式 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

试构造一个计算$\boldsymbol{P_n(x)}$的算法，使计算量尽可能小。

解： $$P_n(x)=\left(\left(\cdots\left(\left(a_nx+a_{n-1}\right)x+a_{n-2}\right)x+\cdots+a_1\right)x+a_0\right)$$

每个括号中有同样的 **ax+b** 结构，共有n个括号！

每个括号的**ax+b**有一个计算量，故计算 $P_n(x)$只需要n个计算量！

算法：

1、$p=a_n;$

2、$for\ k=1,2,\cdots,n,do$

$p=px+a_{n-k}$

p中存放 $P_n(x)$

总结：科学计算要注意的地方有

- 避免两个相近的数相减；
- 避免用接近零的数做除数；
- 控制舍入误差的积累和传播；
- 简化计算过程。

本集内容讲授完毕，再见！

本章结束

再 见