

به نام خدا

نام استاد : دکتر شکفته

نام و نام خانوادگی : عرفان رفیعی اسکویی

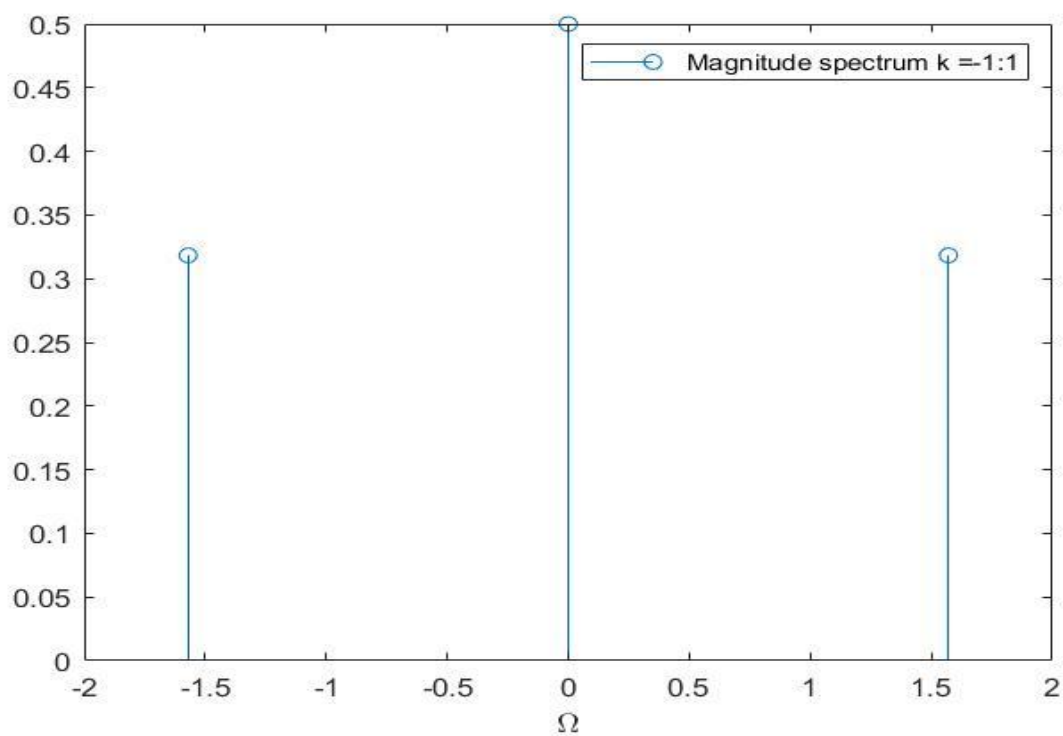
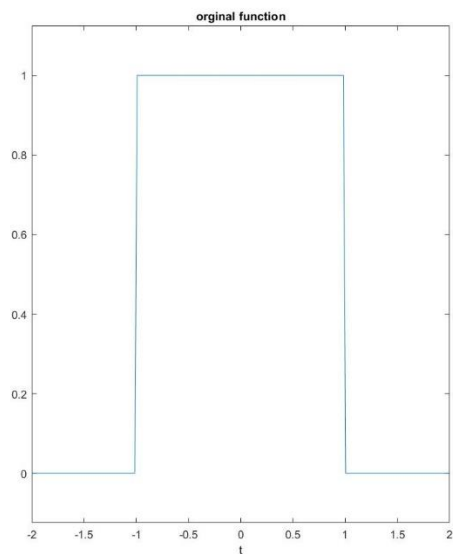
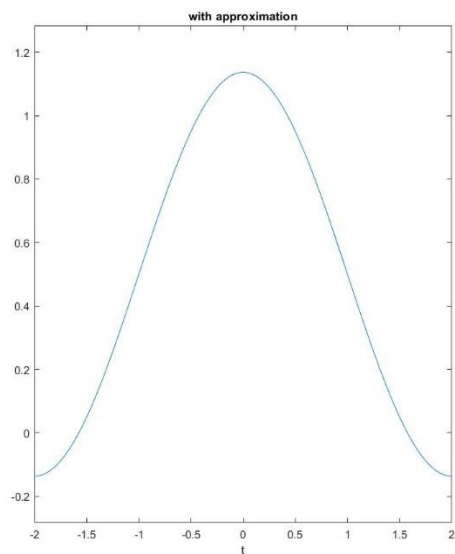
شماره دانشجویی: 98243027

---

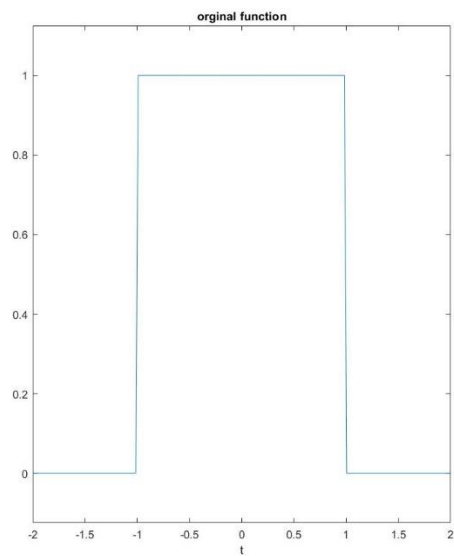
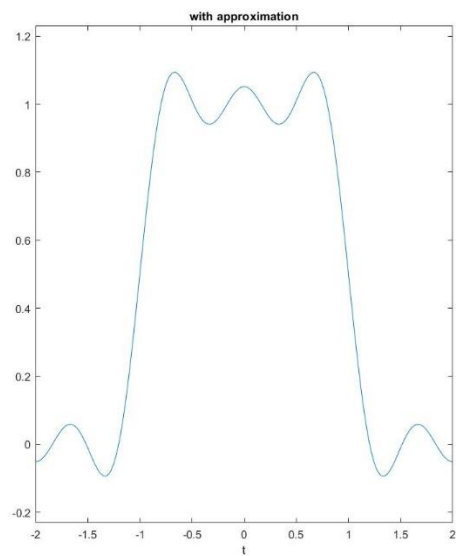
**سوال 1)** می‌دانیم که توابع متناوب را می‌توان به صورت جمع هارمونیک‌ها بنویسیم.

به کمک تعریف سری فوریه , این کار را انجام می‌دهیم.  
تعداد جملات سری را هم متفاوت می‌گیریم تا اثر آن را ببینیم.

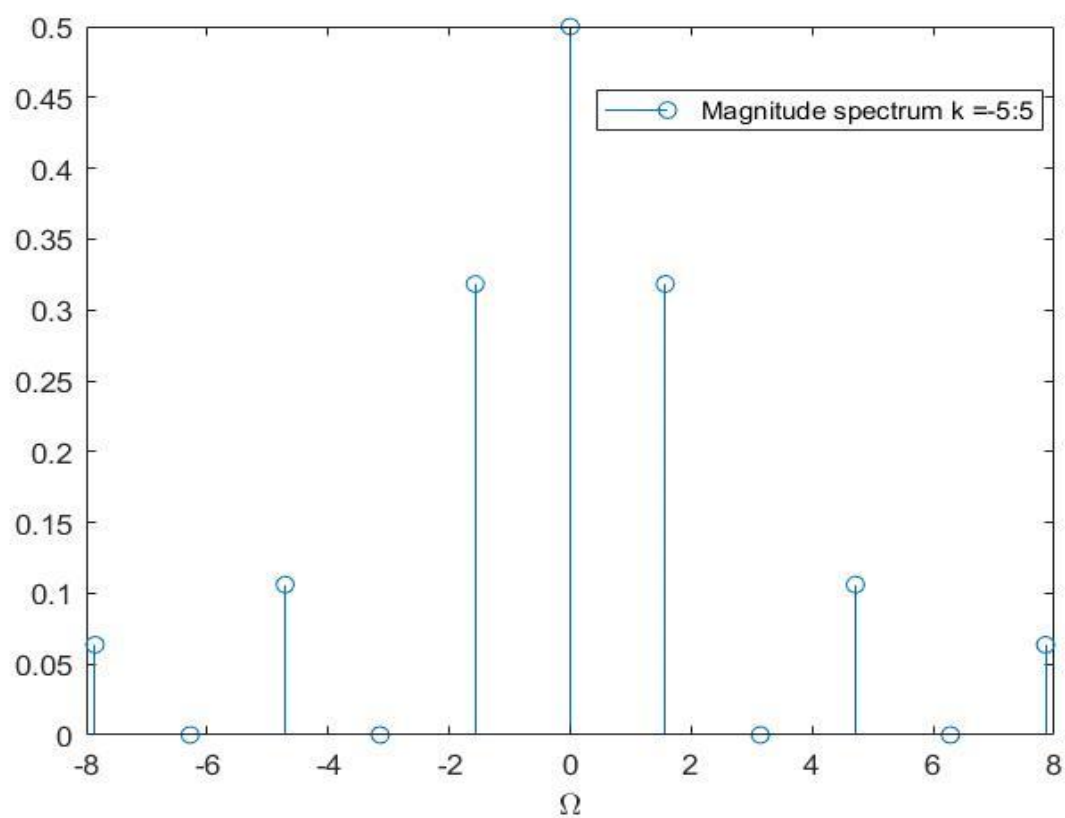
برای 1 جمله سری , نمودار تابع را در زیر کشیدیم.



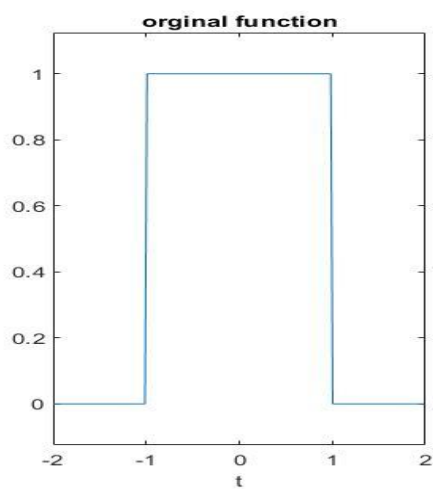
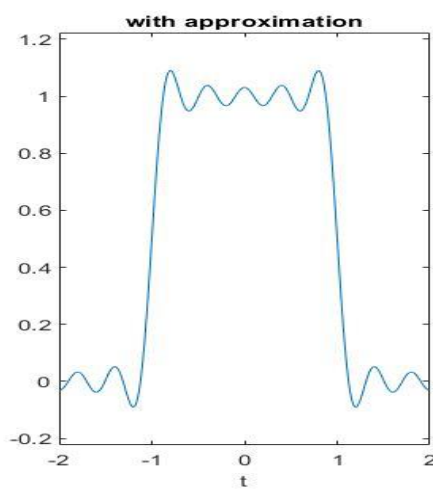
برای 5 جمله

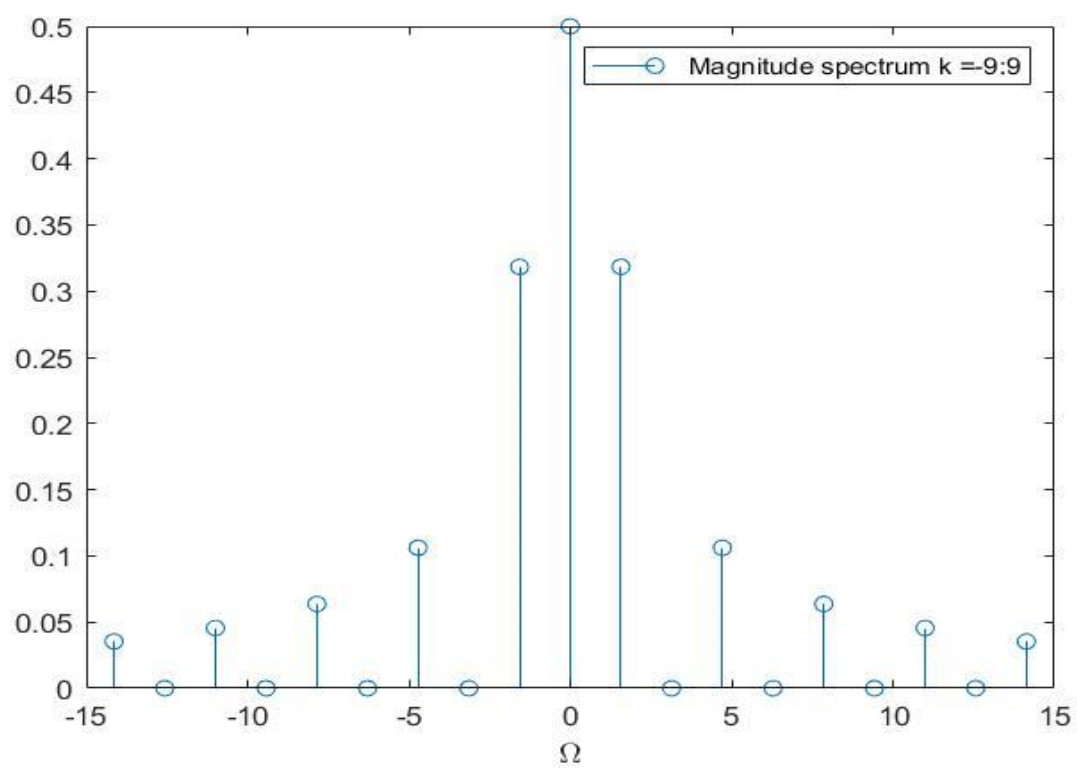


در زیر نیز هارمونیک‌های آن رسم شده است.

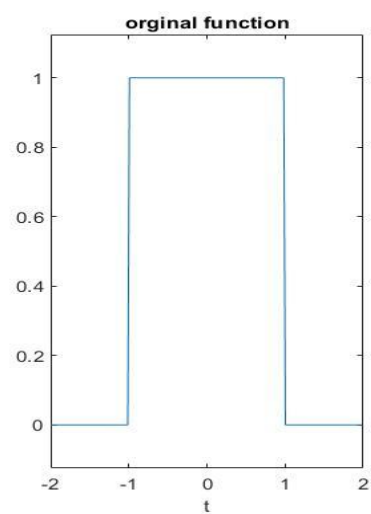
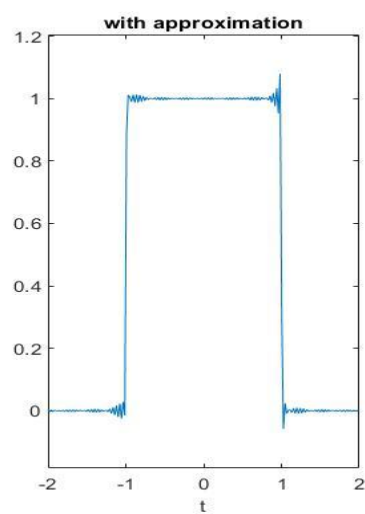


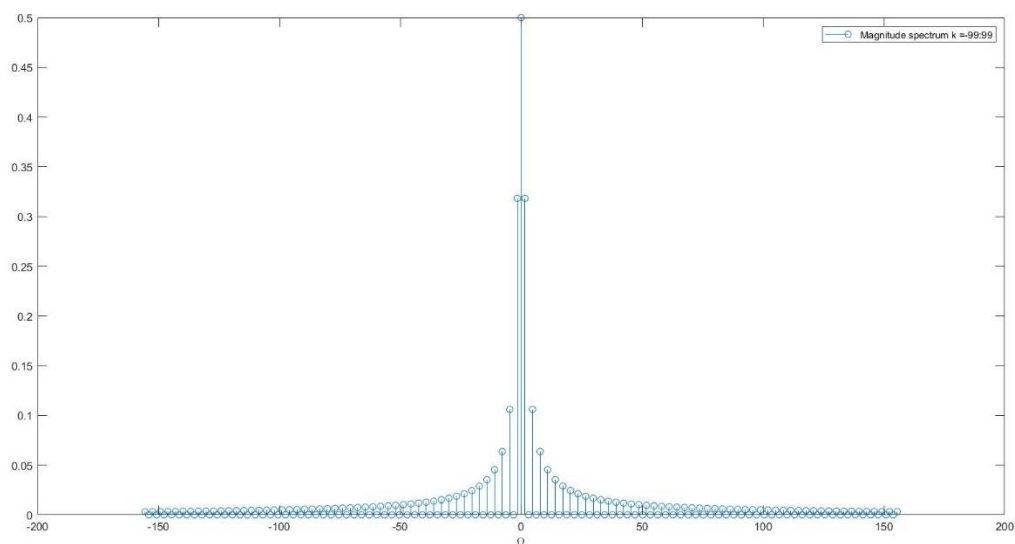
برای 9 جمله





برای 99 جمله





مشاهده می‌کنیم که با افزایش جملات , تقریب بهتری از تابع به دست می‌آید.  
برای هر مورد , ما مولفه‌های فرکانسی را نیز رسم کردیم.

## پدیده گیبس :

پدیده گیبس به وجود نوسان در مقدار مجموع سری فوریه توابع در نزدیکی مقادیر ناپیوستگی گفته می‌شود. هر سیگنال متناوب را می‌توان به صورت جمعی از چند سیگنال نوسانی ساده (سینوسی، کسینوسی یا نمایی) با فرکانس‌های متفاوت نوشت. هرچقدر فرکانس یک سیگنال سازنده نسبت به سایر سیگنال‌ها بیشتر باشد آن سیگنال جزئیات بیشتری را نشان می‌دهد و از کلیات چشم می‌پوشد. برای همین هرچقدر تعداد هارمونیک‌های به کار رفته در شبیه‌سازی سیگنال اولیه بیشتر باشد، شکل ساخته شده جزئیات بیشتری را پوشش می‌دهد و در همه نقاط (به خصوص نقاط مشتق ناپذیری که لبه ایجاد کرده‌اند) سیگنال حاصل به سیگنال اصلی نزدیک تر خواهد بود، اگرچه هیچ گاه با مقدار اصلی تابع در آن محدوده دقیقاً برابر نخواهد شد و یک بازه عدم انطباق خواهیم داشت (هرچند به آن بسیار نزدیک می‌شود). در واقع در سری فوریه مربوط به شکل موج در نقاط ناپیوستگی مقدار سری فوریه برابر میانگین حد چپ و راست تابع در آن نقطه است (در حالی که ممکن است مقدار تابع در آن نقطه چیزی متفاوت با آن باشد) و به همین جهت در شکل سری فوریه تابع به سرعت به سمت این مقدار حرکت می‌کند که این امر موجب فراجاهش یا بالازدگی می‌شود که به پدیده گیبس مشهور است.

\*\*\*\*\*

سوال 2 )

در اینجا ما می‌خواهیم کمینه خطای مربعی را حساب کنیم.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

رابطه بالا فرمول سری فوریه تابع است. ما برای ساختن تابع نیاز به جملات سری داریم. به صورتی که با افزایش تعداد جملات تقریب دقیق تری خواهیم داشت.

مثلا اگر تعداد جملات 1000 تا باشد. با دقت بیشتری نسبت به 10 جمله تابع را ساختیم. با توجه به شکل‌های بالا این صحبت مشخص است.

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx$$

رابطه‌ی بالا مربع خطا را محاسبه می‌کند. که:

$$f(x) = \frac{a_0}{c} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos x + b_n \sin x)$$

$$F(x) = \frac{A_0}{c} + \sum_{n=1}^N (A_n \cos x + B_n \sin x)$$

با انجام محاسبات در نهایت داریم:

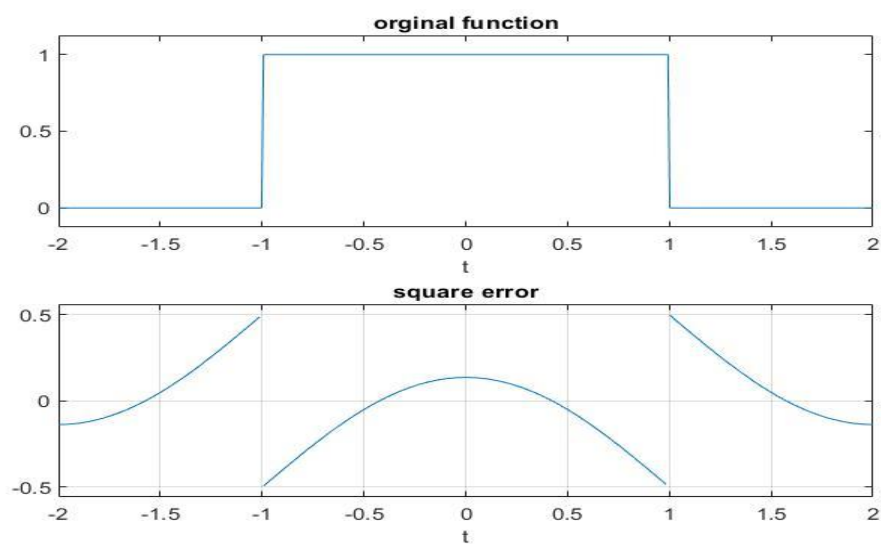
$$E = \{A_0 - a_0\}^2 + \sum_{n=1}^N [(A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2]$$

---

در زیر نمودارهای خطا را نشان می‌دهیم.

---

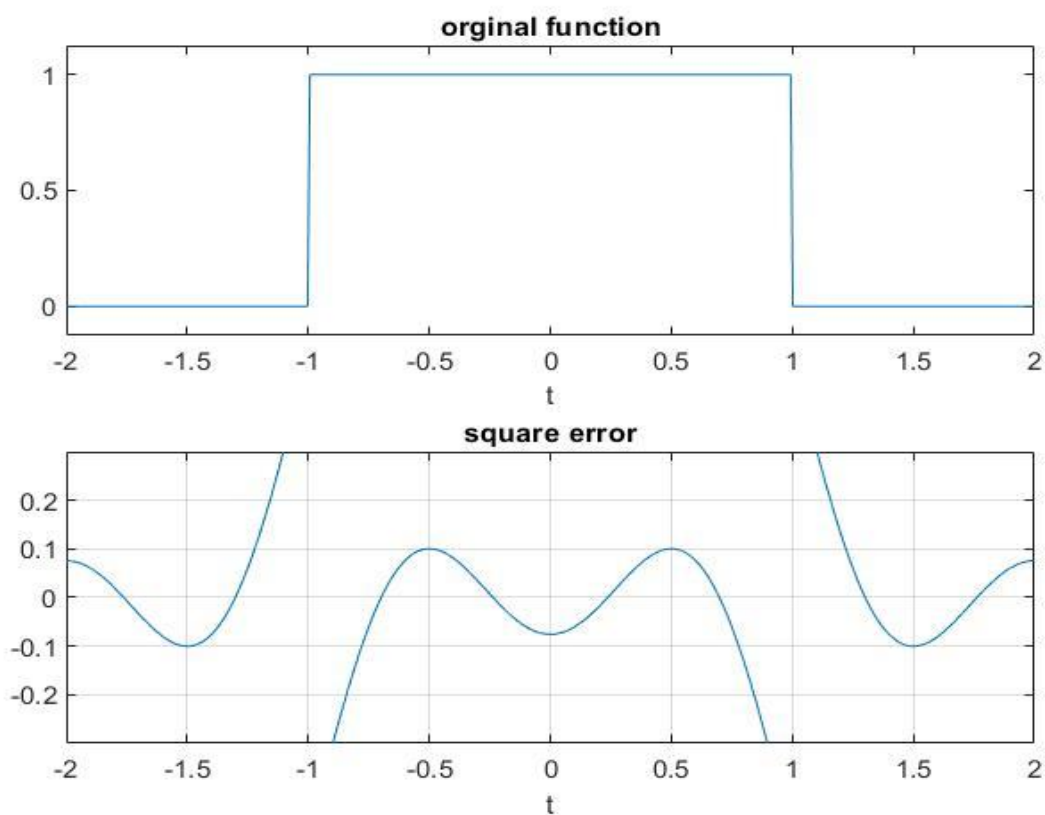
نمودار زیر برای  $N=1$  است.



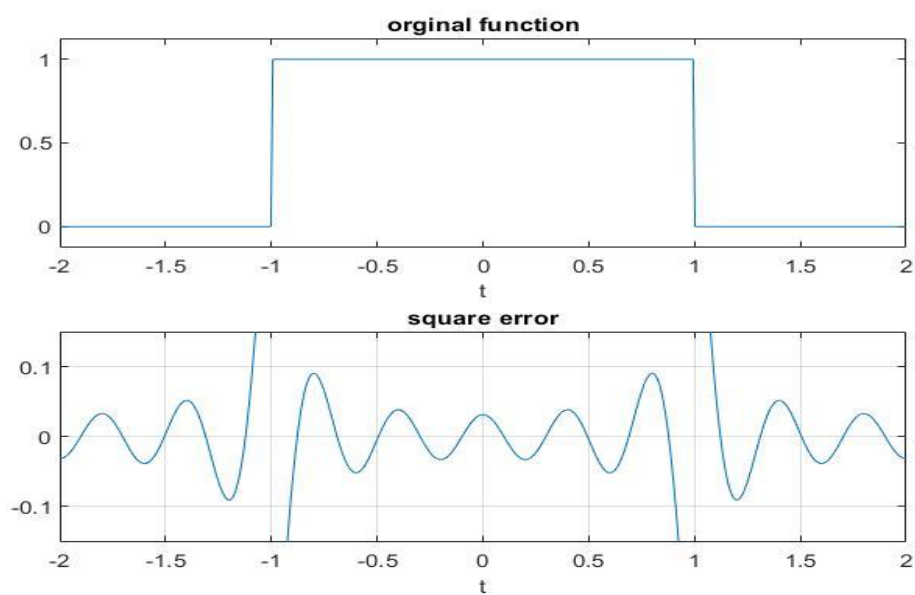
---

برای  $N=3$





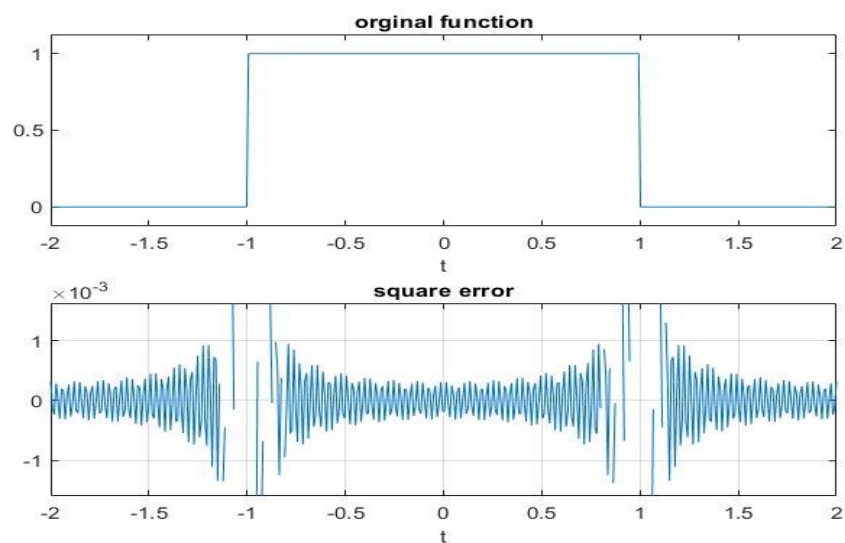
برای  $N=10$



---

---

برای  $N=1000$



همچنین کدی را نیز نوشتیم که میزان شباهت تابع های مورد نظر را برحسب درصد بیان می کند.

---

---