1 题目：双线性插值

双线性插值，又称为双线性内插。在数学上，双线性插值是有两个变数的插值函数的线性插值扩展，其核心思想是在两个方向分别进行一次线性插值。

2 主要数学公式

假如我们想得到未知函数 f 在点 $P=(x,y)$ 的值，假设我们已知函数 f 在 $Q_{11}=(x_1,y_1)$、$Q_{12}=(x_1,y_2)$、$Q_{21}=(x_2,y_1)$ 以及 $Q_{22}=(x_2,y_2)$ 四个点的值。

首先在 X 方向进行线性插值，得到

$$f(R_1)\approx\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{11})+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{21}) \qquad \text{式中：}\quad R_1=(x,y_1)$$

$$f(R_2)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{12})+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{22}) \qquad \text{式中：}\quad R_2=(x,y_2)$$

然后在 Y 方向进行线性插值，得到

$$f(P)\approx\frac{y_2-y}{y_2-y_1}f(R_1)+\frac{y-y_1}{y_2-y_1}f(R_2)\text{。}$$

这样就得到所要的结果 $f(x,y)$，

$$f(x,y)\approx\frac{f(Q_{11})}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(x_2-x)(y_2-y)+\frac{f(Q_{21})}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(x-x_1)(y_2-y)$$

$$+\frac{f(Q_{12})}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(x_2-x)(y-y_1)+\frac{f(Q_{22})}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(x-x_1)(y-y_1)$$

如果选择一个坐标系统使得 f 的四个已知点的坐标为(0，0)、(0，1)、(1，0)和(1，1)，那么插值公式就可以简化为

$$f(x,y)\approx f(0,0)(1-x)(1-y)+f(1,0)x(1-y)+f(0,1)(1-x)y+f(1,1)xy$$

或者用矩阵运算表示为：

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}1-x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0,0) & f(0,1)\\ f(1,0) & f(1,1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-y\\ y\end{bmatrix}$$

另外插值也可以表示为：

$b_1+b_2x+b_3y+b_4xy$　　常数 b 的数目都对应于给定的 f 的数据点的数目。

线性插值的结果与插值的顺序无关。首先进行 y 方向的插值，然后进行 x 方向的插值，

所得到的结果是一样的。

3 基本要求

现给定 10 个已知点数据 $P(x_i, y_i, m_i)(i = 1,2,3\cdots\cdots10)$，$x_i, y_i$ 分别表示第 i 点的 x, y 值。m_i 表示第 i 点得亮度值；待估点 Q 的 x, y 值为 (x_n, y_n)。首先通过待估点找出最近的四个已知点，然后通过双线性插值法对待估点 Q 的亮度值进行估计。

（1）以测试数据作为已知点数据，对待估点的亮度值进行估计；

（2）要求搜索待估点最近的 4 个已知点估计待估点的亮度值。

（3）求出待估点（6,6）及（4,4）两点的亮度值。

已知的数据点已保存在 TestData.txt 文件中，文件中的每一行表示一个已知点，如 TestData.txt 中的第一行“2,1,9”表示，点（2,1）的亮度值为 9（如下面截图所示）。

要求编写程序从 TestData.txt 文本文件中读取已知点数据，并将运算结果保存到 Result.txt 的文本文件中（该文件不存在，建立在与可执行文件的同一目录下即可）。输出格式为“f(x,y)=m”，分别输出待估点（6,6）及（4,4）两点的亮度值，每一个点占一行，即对于待估点（6,6）输出一行为：

f(6,6)=亮度值

4 上交成果

（1）程序（包括源程序和可执行程序）；

（2）程序设计和开发。