ÉLASTICITÉ

Rappels mathématiques

Pr. Hamoudi BOUZERD

Université de Skikda

2020/2021

Programme

1. Rappels mathématiques

Rappels mathématiques

Tenseur

En mécanique des milieux continus toutes les lois sont formulées en termes de quantités *indépendantes des coordonnées* : ***Tenseurs***.

Rappels mathématiques

Tenseur

En mécanique des milieux continus toutes les lois sont formulées en termes de quantités *indépendantes des coordonnées* : ***Tenseurs***.

L'introduction des tenseurs nécessite l'utilisation de la notation indicielle.

Notation indicielle

un moyen très efficace pour simplifier l'écriture des différentes équations de la mécanique des milieux continus.

Rappels mathématiques

Tenseur

En mécanique des milieux continus toutes les lois sont formulées en termes de quantités *indépendantes des coordonnées* : ***Tenseurs***.

L'introduction des tenseurs nécessite l'utilisation de la notation indicielle.

Notation indicielle

un moyen très efficace pour simplifier l'écriture des différentes équations de la mécanique des milieux continus.

Notation classique ou notation de l'ingénieur

Considérant l'espace physique représenté par un espace Euclidien à trois dimensions et soit $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ une base orthonormée.

Un vecteur $\vec{V}$ est représenté dans le repère (x, y, z) par ses composantes V_x, V_y, V_z telles que :

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \tag{1}$$

Notation Indicielle

On remplace

- (x, y, z) par (x_1, x_2, x_3)
- $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ par $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$

Les composantes de $\vec{V}$ deviennent V_{x1}, V_{x2}, V_{x3} qu'on note : V_1, V_2, V_3.

Notation Indicielle

On remplace

- (x, y, z) par (x_1, x_2, x_3)
- $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ par $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$

Les composantes de $\vec{V}$ deviennent V_{x1}, V_{x2}, V_{x3} qu'on note : V_1, V_2, V_3.

Ecriture indicielle d'un vecteur

ce qui donne :

$$\vec{V} = V_1\vec{e_1} + V_2\vec{e_2} + V_3\vec{e_3} \tag{2}$$

avec $\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ soit : $\vec{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$

Notation indicielle encore plus concise

Une notation encore plus courte représentant le vecteur $\vec{V}$ est *la notation indicielle*.
Ainsi les quantités :

$$A_i, \; i = 1, 2, 3 \;\; et \;\; B_p, \;\; p = 1, 2, 3 \tag{3}$$

représentent les composantes des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Cette notation met l'accent sur les composantes des vecteurs seulement et utilise un indice dont la portée sur les entiers est spécifiée.

Le symbole A_i se réfère à l'ensemble des composantes du vecteur $\vec{A}$.

L'indice i peut avoir n'importe quelle valeur des valeurs entières 1, 2 ou 3.

- Pour $i = 1$, on se focalise sur la composante A_1 de $\vec{A}$.
- Pour $i = 2$, on se focalise sur la composante A_2 de $\vec{A}$.
- et d'une manière similaire, quand $i = 3$ on se focalise sur la troisième composante de $\vec{A}$.

L'indice i est un indice fictif et peut être remplacé par une autre lettre, par exemple p, tant que l'on spécifie les valeurs entières que peut prendre cet indice.

Convention de la sommation, indice muet I

$$\text{Considérant la somme : } S = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ...a_nx_n \tag{4}$$

Avec le signe Σ l'expression (4) s'écrit sous une forme compacte :

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{5}$$

Les expressions suivantes ont la même signification que l'expression (5) :

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \qquad S = \sum_{m=1}^{n} a_m x_m \tag{6}$$

L'indice i dans (5), ou j et m dans (6), est un indice muet, dans le sens où la somme est indépendante de la lettre utilisée.

Convention de la sommation, indice muet II

Convention de l'indice muet

A chaque fois qu'un indice littéral est répété deux fois dans un monôme, il est considéré comme un indice muet et il indique une sommation des n termes en donnant successivement à cet indice les valeurs entières allant de 1 à n.

Cette convention est connu comme étant la convention d'Einstein.
En l'utilisant l'expression (4) s'écrit d'une manière plus courte comme suit :

$$S = a_i x_i \tag{7}$$

On note aussi que

$$S = a_i x_i = a_j x_j = a_m x_m \tag{8}$$

Convention de la sommation, indice muet III

Il est à préciser que des expressions telles que $a_i b_i x_i$ ne sont pas définies dans le cadre de cette convention.

Autrement dit, un indice ne peut être **jamais** répété plus de deux fois quand la convention de sommation est utilisée.

Par conséquent une expression de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x_i$ doit garder le symbole de la sommation.
En prenant $n = 3$ les expressions suivantes donnent :

$$a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$$a_{ii} = a_{mm} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$a_i \vec{e_i} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$$

Convention de la sommation, indice muet IV

La convention de sommation ou convention de l'indice muet peut être utilisée pour exprimer une double sommation, une triple sommation, ... Par exemple, on peut écrire :

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j \tag{9}$$

simplement comme suit :

$$S = a_{ij} x_i x_j \tag{10}$$

En la développant entièrement l'expression (10) donnent 9 termes :

$$a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3$$

$$+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3$$

$$+ a_{31} x_3 x_3 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_{3j}$$

Convention de la sommation, indice muet V

Pour plus de facilité, il est indiqué de développer l'expression en deux étapes, la première en considérant la somme sur i et la deuxième sur j (ou vice versa) :

$$a_{ij}x_ix_j = a_{1j}x_1x_j + a_{2j}x_2x_j + a_{3j}x_3x_j$$

où

$$a_{1j}x_1x_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3$$

$$a_{2j}x_2x_j = a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3$$

$$a_{3j}x_3x_j = a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_2x_2 + a_{33}x_3x_3$$

Convention de la sommation, indice muet VI

D'une manière similaire, la triple somme

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ijk} x_i x_j x_k \tag{11}$$

s'écrit plus simplement comme suit :

$$S = a_{ijk} x_i x_j x_k \tag{12}$$

L'expression (12) représente la somme de 27 termes.

Convention de la sommation, indice muet VII

Il est à noter que les expressions comme :

$$a_{ii}x_i x_j x_j$$

ou

$$a_{ijk}x_i x_i x_j x_k$$

ne sont pas définies dans la convention de sommation, elles ne représente pas

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ii}x_i x_j x_j$$

ou

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}x_i x_i x_j x_k$$

Indices francs I

Considérant le système suivant de trois équations :

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2^{'} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3^{'} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{13}$$

En utilisant la convention de sommation, (13) s'écrit :

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= a_{1m}x_m \\ x_2^{'} &= a_{2m}x_m \\ x_3^{'} &= a_{3m}x_m \end{aligned} \tag{14}$$

et qui peut être simplifier ainsi :

$$x_i^{'} = a_{im}x_m, \quad i = 1, 2, 3 \quad m = 1, 2, 3 \tag{15}$$

Indices francs II

Indice franc

Un indice qui apparait seulement une fois dans chaque terme (monôme) de l'équation tel que l'indice i dans la relation (2.16) est nommé *indice franc*.

L'indice franc prend le nombre entier 1, 2 ou 3 un à la fois. Donc l'équation (15) est une simplification des trois équations ayant chacune une somme de trois termes dans son membre de droite.
Un autre exemple est par :

$$\vec{e_i'} = Q_{mi}\vec{e_i} \tag{16}$$

représentant :

$$\begin{aligned}\vec{e_1'} &= Q_{11}\vec{e_1} + Q_{21}\vec{e_2} + Q_{31}\vec{e_3}\\ \vec{e_2'} &= Q_{12}\vec{e_2} + Q_{22}\vec{e_2} + Q_{32}\vec{e_3}\\ \vec{e_3'} &= Q_{13}\vec{e_1} + Q_{23}\vec{e_2} + Q_{33}\vec{e_3}\end{aligned} \tag{17}$$

On note que $x_j' = a_{jm}x_m i = 1, 2, 3$ est la même que (15) et $\vec{e_j'} = Q_{mj}\vec{e_j}$ est

Indices francs III

la même que l'équation (16). Cependant

$$a_i = b_j$$

est une expression qui n'a pas de sens. L'indice franc qui apparait dans chaque terme d'une équation doit être le même. Ainsi les équations suivantes ont un sens :

$$a_i + b_i = c_i$$
$$a_i + b_i c_j d_j = 0$$

S'il y a deux indices francs qui apparaissent dans une même équation telle que :

$$T_{ij} = A_{im} A_{jm} (i = 1, 2, 3) \tag{18}$$

alors l'expression est une simplification de 9 équations, chacune ayant une somme de 3 termes dans le membre de droite.

Indices francs IV

Ainsi :

$$\begin{aligned}
T_{11} &= A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13} \\
T_{12} &= A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23} \\
T_{13} &= A_{1m}A_{3m} = A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33} \\
T_{21} &= A_{2m}A_{1m} = A_{21}A_{11} + A_{22}A_{12} + A_{23}A_{13} \\
T_{22} &= A_{2m}A_{2m} = A_{21}A_{21} + A_{22}A_{22} + A_{23}A_{23} \\
T_{23} &= A_{2m}A_{3m} = A_{21}A_{31} + A_{22}A_{32} + A_{23}A_{33} \\
T_{31} &= A_{3m}A_{1m} = A_{31}A_{11} + A_{32}A_{12} + A_{33}A_{13} \\
T_{32} &= A_{3m}A_{2m} = A_{31}A_{21} + A_{32}A_{22} + A_{33}A_{23} \\
T_{33} &= A_{3m}A_{3m} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33}
\end{aligned} \tag{19}$$

De nouveau, les équation comme : $T_{ij} = T_{ik}$ n'ont aucun sens.

Symbol de Kronecker

Le symbole de Kronecker delta, noté δ_{ij} est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \tag{20}$$

C'est-à-dire :

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

En d'autres termes, la matrice du symbole de Kronecker est la matrice identité, c'est-à-dire :

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

On note ce qui suit :

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \tag{22}$$

et

$$\delta_{1m} a_m = \delta_{11} a_1 + \delta_{12} a_2 + \delta_{13} a_3 = a_1$$

$$\delta_{2m} a_m = \delta_{21} a_1 + \delta_{22} a_2 + \delta_{23} a_3 = a_2$$

$$\delta_{3m} a_m = \delta_{31} a_1 + \delta_{32} a_2 + \delta_{33} a_3 = a_3$$

Soit d'une manière générale :

$$\delta_{im} a_m = a_i \tag{23}$$

ou encore :

$$\delta_{1m} T_{mj} = \delta_{11} T_{1j} + \delta_{12} T_{2j} + \delta_{13} T_{3j} = T_{1j}$$

$$\delta_{2m} T_{mj} = \delta_{21} T_{1j} + \delta_{22} T_{2j} + \delta_{23} T_{3j} = T_{2j}$$

$$\delta_{3m} T_{mj} = \delta_{31} T_{1j} + \delta_{32} T_{2j} + \delta_{33} T_{3j} = T_{3j}$$

Soit d'une manière générale :

$$\delta_{im} T_{mj} = T_{ij} \tag{24}$$

En particulier :

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij} \tag{25}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\delta_{im}\delta_{mn}\delta_{nj} = \delta_{ij} \ \ (realtion\ de\ Chasles)$$

Si $\vec{e_1}, \vec{e_2}\ et\ \vec{e_3}$ sont les vecteurs unitaires de la base orthonormée, alors :

$$\vec{e_i}.\vec{e_j} = \delta_{ij} \tag{26}$$

Le symbole de permutation noté ϵ_{ijk} est défini par la relation :

$$\epsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & si\ i,\ j\ et\ k \text{ forment une parmutation paire} \\ -1 & si\ i,\ j\ et\ k \text{ forment une parmutation impaire} \\ 0 & si\ i,\ j\ et\ k \text{ ne forment pas une permutation} \end{array} \right\} de 1,\ 2\ et\ 3 \tag{27}$$

c'est à dire :

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \cdots = 0$$

Il est à noter que :

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} \tag{28}$$

Si $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ *et* $\vec{e_3}$ forment une base directe, alors :

$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}, \quad \vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}, \quad \vec{e_2} \wedge \vec{e_1} = -\vec{e_3}, \quad \vec{e_1} \wedge \vec{e_1} = \vec{0} \quad \ldots$$

et qui peuvent être écrite d'une manière concise :

$$\vec{e_i} \wedge \vec{e_j} = \epsilon_{ijk} \vec{e_k}, \tag{29}$$

Maintenant, si $\vec{A} = A_i \vec{e_i}$ et $\vec{B} = B_i \vec{e_j}$, alors :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_i \vec{e_i}) \wedge (B_j \vec{e_j}) = A_i B_j (\vec{e_i} \wedge \vec{e_j}) = A_i B_j \epsilon_{ijk} \vec{e_k}$$

Soit :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A_i B_j \epsilon_{ijk} \vec{e_k} \tag{30}$$

L'identité suivante peut être démontrée :

$$\epsilon_{ijm} . \epsilon_{klm} = \delta_{ik} . \delta_{jl} - \delta_{il} . \delta_{jk} \tag{31}$$

Substitution

Si

$$a_i = U_{im} b_m \quad (a)$$

et

$$b_i = V_{im} c_m \quad (b)$$

puis pour substituer les b_i dans (b) en (a), on commence par changer d'indice franc dans (b) et au lieu de i on prend m et l'indice muet m à une autre lettre, par exemple n et ainsi on aura :

$$b_m = V_{mn} c_n \quad (c)$$

Maintenant (a) et (c) donnent :

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n \quad (d)$$

Il est à noter que l'expression (d) représente 3 équations ayant chacune la somme de 9 termes dans son membre droit (i : indice franc, m et n : indices muets)

Multiplication

Si

$$p = a_m b_m \quad (a)$$

et

$$q = c_m d_m \quad (b)$$

alors

$$pq = a_m b_m c_n d_n \quad (c)$$

Il est important de noter que $pq \neq a_m b_m c_m d_m$. En fait, le côté droit de cette expression n'est même pas définie dans la convention de sommation et en outre il est évident que :

$$pq \neq \sum_{m}^{3} a_m b_m c_m d_m$$

puisque le produit scalaire des vecteurs est distributif, par conséquent, si $\vec{A} = A_i\vec{e_i}$ et $\vec{B} = B_j\vec{e_j}$, alors :

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_i\vec{e_i}).(B_j\vec{e_j}) = A_iB_j(\vec{e_i}.\vec{e_j}) \quad (d)$$

En particulier, si $\vec{e_1}, \vec{e_2}\ et\ \vec{e_3}$ sont les vecteurs unitaires perpendiculaires les uns aux autre, alors $\vec{e_i}.\vec{e_j} = \delta_{ij}$ si bien que :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_iB_j\delta_{ij} = A_iB_i = A_jB_j = A_1B_1 + A_2AB_2 + A_3B_3 \quad (e)$$

Factorisation

Si

$$T_{ij}n_j - \lambda n_i = 0 \quad (a)$$

puis en utilisant le symbole de Kronecker, on peut écrire :

$$n_i = \delta_{ij}n_j \quad (b)$$

de sorte que (a) devient :

$$T_{ij}n_j - \lambda\delta_{ij}n_j = 0 \quad (c)$$

Donc

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0 \quad (d)$$

Contraction

L'opération qui consiste à identifier 2 indices et ainsi faire la somme sur eux est connue comme *la contraction*.
Par exemple, T_{ii} est la contraction de T_{ij},

$$Tii = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (a)$$

si

$$T_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (b)$$

Alors :

$$T_{ii} = \lambda\theta\delta_{ii} + 2\mu E_{ii} = 3\lambda\theta + 2\mu E_{ii} \quad (c)$$

Tenseur I

Définition

Soit $\underline{\underline{\vec{T}}}$ une transformation qui transforme un vecteur en un autre vecteur.
Si $\underline{\underline{\vec{T}}}$ transforme $\vec{A}$ en $\vec{C}$ et $\vec{B}$ en $\vec{D}$, on écrit : $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \vec{C}$ et $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{B} = \vec{D}$.
Si la transformation $\underline{\underline{\vec{T}}}$ a les propriétés linéaires suivantes :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}(\vec{A} + \vec{B}) = \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} + \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{B} \tag{32}$$

$$\underline{\underline{\vec{T}}}(\alpha\vec{A}) = \alpha\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} \tag{33}$$

Où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs quelconques et α un scalaire, alors $\underline{\underline{\vec{T}}}$ est une ***transformation linéaire***.
Elle est aussi appelé ***Tenseur du second ordre*** ou simplement ***Tenseur***.

Tenseur II

Définition

Une définition alternative et équivalente d'une transformation linéaire (tenseur du second ordre) est donnée par une seule propriété linéaire :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}) = \alpha\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A}+\beta\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{B} \tag{34}$$

Où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs quelconques et α et β sont des scalaires quelconques.

Tenseur - Application linéaire

Égalité de deux tenseurs

Si deux tenseurs $\underline{\underline{\vec{T}}}$ et $\underline{\underline{\vec{S}}}$ transforment n'importe quel vecteur d'une manière identique, alors ces deux tenseurs sont égaux, c'est-à-dire :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \underline{\underline{\vec{S}}}\vec{A} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{T}}} = \underline{\underline{\vec{S}}}$$

.

N. B. : Le tenseur est noté soit par une lettre surmontée par une flèche ($\vec{T}$), comme le vecteur, et dans ce cas il faut le spécifier ou par une lettre surmontée d'une flèche avec deux barres (dans le cas du tenseur du second ordre) en dessous ($\underline{\underline{\vec{T}}}$).

Dans le présent ouvrage, on adopte la deuxième notation pour éviter toute confusion ou équivoque.

Tenseur - Application linéaire I

Composantes d'un tenseur

On sait que les composantes d'un vecteur dépendent de la base utilisée pour décrire les composantes. Cela est aussi vrai pour les tenseurs.
Soient $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ les vecteurs unitaires dans les directions respectives des axes x_1, x_2 et x_3 d'un système rectangulaire de coordonnées cartésiennes.
Sous une transformation $\underline{\underline{\vec{T}}}$, ces vecteurs unitaires deviennent $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1}$, $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2}$ et $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_3}$. Chacun de ces vecteurs $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_i}$, peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1} &= T_{11}\vec{e_1} + T_{21}\vec{e_2} + T_{31}\vec{e_3} \\
\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2} &= T_{12}\vec{e_1} + T_{22}\vec{e_2} + T_{32}\vec{e_3} \\
\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_3} &= T_{13}\vec{e_1} + T_{23}\vec{e_2} + T_{33}\vec{e_3}
\end{aligned} \tag{35}$$

ou

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_i} = T_{ji}\vec{e_j} \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{36}$$

Tenseur - Application linéaire II

Composantes d'un tenseur

Il est clair qu'à partir des équations (35) on a :

$$T_{11} = \vec{e_1}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1}, \quad T_{12} = \vec{e_1}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2}, \quad T_{21} = \vec{e_2}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1} \quad \ldots$$

Soit d'une manière générale :

$$T_{ij} = \vec{e_i}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_j} \tag{37}$$

Les composantes T_{ij} dans les équations ci-dessus sont définies comme étant les composantes du tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$. Ces composantes peuvent être organisées dans une matrice comme suit :

$$\left[\underline{\underline{\vec{T}}}\right] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{38}$$

Cette matrice est appelée matrice du tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$ relativement à la base ($\vec{e_1}$,

Tenseur - Application linéaire III

Composantes d'un tenseur

$\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$) ou $(\vec{e_i}, (i = 1, 2, 3))$. Dans cette matrice, la première colonne représente les composantes du vecteur $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1}$, la deuxième colonne celles du vecteur $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2}$ et la troisième colonne celles du vecteur $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_3}$.

Tenseur - Application linéaire IV

Composantes d'un tenseur

Déterminer la matrice du tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$ qui transforme les vecteurs de bases comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1} &= 4\vec{e_1} + \vec{e_2}\\ \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2} &= 2\vec{e_1} + 3\vec{e_3}\\ \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_3} &= 1\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + \vec{e_3}\end{aligned}$$

La matrice $\left[\underline{\underline{\vec{T}}}\right]$ ou $[T]$ est telle que : $\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$

Composantes d'un vecteur transformé

Soit un vecteur $\vec{A}$ et un tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$ et on veut déterminer les composantes du vecteur $\vec{B} = \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A}$ à partir des composantes de $\vec{A}$ et celles de $\underline{\underline{\vec{T}}}$.

Soient A_1, A_2 et A_3 les composantes du vecteur $\vec{A}$ dans la base ($\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$) telles que :

$$\vec{A} = A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3} \tag{a}$$

$$\vec{B} = \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \underline{\underline{\vec{T}}}(A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}) = A_1\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1} + A_2\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2} + A_3\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_3} \tag{b}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
B_1 = \vec{e_1}.\vec{B} = A_1\left(\vec{e_1}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1}\right) + A_2\left(\vec{e_1}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2}\right) + A_3\left(\vec{e_1}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_3}\right)\\
B_2 = \vec{e_2}.\vec{B} = A_1\left(\vec{e_2}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1}\right) + A_2\left(\vec{e_2}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2}\right) + A_3\left(\vec{e_2}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_3}\right)\\
B_3 = \vec{e_3}.\vec{B} = A_1\left(\vec{e_3}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1}\right) + A_2\left(\vec{e_3}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_2}\right) + A_3\left(\vec{e_3}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_3}\right)
\end{aligned} \tag{c}$$

HB

En tenant compte de l'équation (37), on a :

$$\begin{aligned} B_1 &= T_{11}A_1 + T_{12}A_2 + T_{13}A_3 \\ B_2 &= T_{21}A_1 + T_{22}A_2 + T_{23}A_3 \\ B_3 &= T_{31}A_1 + T_{32}A_2 + T_{33}A_3 \end{aligned} \tag{39a}$$

Ces trois équations peuvent être écrites sous forme matricielle, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{39b}$$

ou

$$[B] = \left[\underline{\underline{T}}\right] [A] \tag{39c}$$

On peut aussi déduire, d'une manière concise, les équations (39a) en utilisant la notation indicielle comme suit :
A partir de $\vec{A} = A_i\vec{e_i}$, on aura : $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \underline{\underline{\vec{T}}}A_i\vec{e_i}$
et comme $\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_i} = T_{ji}\vec{e_i}$
alors :

$$\begin{aligned} B_k = \vec{B}.\vec{e_k} = \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A}.\vec{e_k} &= A_i T_{ij}\vec{e_j}.\vec{e_k} \\ &= A_i T_{ij}\delta jk \\ &= A_i T_{ki} \end{aligned}$$

Soit

$$B_k = T_{ki}A_i \tag{40}$$

Somme des tenseurs

Soient $\underline{\underline{\vec{T}}}$ et $\underline{\underline{\vec{S}}}$ deux tenseurs et $\vec{A}$ un vecteur arbitraire.
La somme de $\underline{\underline{\vec{T}}}$ et $\underline{\underline{\vec{S}}}$, notée :

$$\left(\underline{\underline{\vec{T}}} + \underline{\underline{\vec{S}}}\right)\vec{A} = \underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} + \underline{\underline{\vec{S}}}\vec{A} \tag{41}$$

A partir de cette définition, on voit bien que $\underline{\underline{\vec{T}}} + \underline{\underline{\vec{S}}}$ est, en effet, un tenseur du second ordre.
Pour trouver les composantes de $\underline{\underline{\vec{T}}} + \underline{\underline{\vec{S}}}$, on pose :

$$\underline{\underline{\vec{W}}} = \underline{\underline{\vec{T}}} + \underline{\underline{\vec{S}}}$$

En utilisant les équations (37) et (41), les composantes de $\underline{\underline{\vec{W}}}$ sont telles que :

$$W_{ij} = \vec{e_i}\left(\underline{\underline{\vec{T}}} + \underline{\underline{\vec{S}}}\right)\vec{e_j} = \vec{e_i}\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_j} + \vec{e_i}\underline{\underline{\vec{S}}}\vec{e_j}$$

c'es-à-dire :

$$W_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \tag{42}$$

En notation matricielle, on aura :

$$[W] = [T] + [S] \tag{43}$$

Produit de deux tenseurs

Soient $\underline{\underline{\vec{T}}}$ et $\underline{\underline{\vec{S}}}$ deux tenseurs et $\vec{A}$ un vecteur arbitraire, alors $\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}$ et $\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}$ sont définies comme les transformations suivantes :

$$\left(\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}\right)\vec{A} = \underline{\underline{\vec{T}}}\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\vec{A}\right) \tag{44}$$

et

$$\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}\right)\vec{A} = \underline{\underline{\vec{S}}}\left(\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A}\right) \tag{45}$$

Il est clair que $\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}$ et $\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}$ sont des tenseurs.

Ainsi les composantes de $\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}$ sont :

$$
\begin{aligned}
\left(\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}\right)_{ij} = \vec{e_i}.\left(\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}\right)\vec{e_j} &= \vec{e_i}.\underline{\underline{\vec{T}}}\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\vec{e_j}\right) \\
&= \vec{e_i}.\underline{\underline{\vec{T}}}S_{mj}\vec{e_m} \\
&= S_{mj}\vec{e_i}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_m} \\
&= S_{mj}T_{im}
\end{aligned}
$$

soit :

$$\left(\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}\right)_{ij} = T_{im}S_{mj} \tag{46}$$

D'une manière similaire, on montre que :

$$\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}\right)_{ij} = S_{im}T_{mj} \tag{47}$$

En fait, l'équation (46) est équivalente à l'expression matricielle suivante :

$$\left[\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}\right] = \left[\underline{\underline{\vec{T}}}\right]\left[\underline{\underline{\vec{S}}}\right] \qquad \text{ou} \qquad \left[\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{S}}\right] = \left[\underline{\underline{T}}\right]\left[\underline{\underline{S}}\right] \tag{48}$$

Alors que l'équation (47) est équivalente à l'expression matricielle suivante :

$$\left[\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}\right] = \left[\underline{\underline{\vec{S}}}\right]\left[\underline{\underline{\vec{T}}}\right] \qquad \text{ou} \qquad \left[\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{T}}\right] = \left[\underline{\underline{S}}\right]\left[\underline{\underline{T}}\right] \tag{49}$$

Les deux produits $\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}$ et $\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}$ sont en générale différents. Il donc clair que le produit de deux tanseurs n'est pas commutatif ($\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}} \neq \underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}$).

Si $\underline{\underline{\vec{T}}}$, $\underline{\underline{\vec{S}}}$ et $\underline{\underline{\vec{V}}}$ sont trois tenseurs, alors :

$$\left(\underline{\underline{\vec{T}}}\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{V}}}\right)\right)\vec{A} = \underline{\underline{\vec{T}}}\left(\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{V}}}\right)\vec{A}\right) = \underline{\underline{\vec{T}}}\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\left(\underline{\underline{\vec{V}}}\vec{A}\right)\right)$$

$$\text{et} \qquad \left(\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}\right)\left(\underline{\underline{\vec{V}}}\vec{A}\right) = \underline{\underline{\vec{T}}}\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\left(\underline{\underline{\vec{V}}}\vec{A}\right)\right)$$

C'est-à-dire :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{V}}}\right) = \left(\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}\right)\underline{\underline{\vec{V}}} \tag{50}$$

Le produit tensoriel est donc associatif.
Il est donc naturel de définir les puissances positives d'une transformation par ces simples produits :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}^2 = \underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}} \quad , \quad \underline{\underline{\vec{T}}}^3 = \underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}} \quad , \quad \ldots \tag{51}$$

Transposée d'un tenseur

La transposée d'un tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$, notée $\underline{\underline{\vec{T}}}^t$ est définie pour être le tenseur qui satisfait l'identité suivante pour tous les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{A}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{B} = \vec{B}.\underline{\underline{\vec{T}}}^t\vec{A} \tag{52}$$

Il est facile de constater que $\underline{\underline{\vec{T}}}^t$ est un tenseur.

A partir de la définition précédente, on a :

$$\vec{e_i}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_j} = \vec{e_j}.\underline{\underline{\vec{T}}}^t\vec{e_i}$$

Donc

$$T_{ij} = T^t_{ji} \tag{53}$$

$$\text{ou} \qquad \left[\underline{\underline{\vec{T}}}^t\right] = \left[\underline{\underline{\vec{T}}}\right]^t$$

c'est-à-dire que la matrice du tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}^t$ est la transposée de la matrice du tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$.

On note aussi que par l'équation (52), on a :

$$\vec{A}.\underline{\underline{\vec{T}}}^t\vec{B} = \vec{B}.\left(\underline{\underline{\vec{T}}}^t\right)^t\vec{A}$$

Donc :

$$\vec{B}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \vec{B}.\left(\underline{\underline{\vec{T}}}^t\right)^t \vec{A} \qquad \text{pour n'importe quels vecteurs } \vec{A} \text{ et } \vec{B}$$

ce qui donne :

$$\underline{\underline{\vec{T}}} = \left(\underline{\underline{\vec{T}}}^t\right)^t \tag{54}$$

et il peut être établi que :

$$\left(\underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{S}}}\right)^t = \underline{\underline{\vec{S}}}^t\,\underline{\underline{\vec{T}}}^t \tag{55}$$

autrement dit, la transposée d'un produit de tenseurs est égale au produit des tenseurs transposés dans l'ordre inverse. Plus généralement, on a :

$$\left(\underline{\underline{\vec{A}}}\,\underline{\underline{\vec{B}}}\,\underline{\underline{\vec{C}}}\ldots\underline{\underline{\vec{D}}}\right)^t = \underline{\underline{\vec{D}}}^t\ldots\underline{\underline{\vec{C}}}^t\,\underline{\underline{\vec{B}}}^t\,\underline{\underline{\vec{A}}}^t \tag{56}$$

Produit tensoriel de deux vecteurs

Le produit tensoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ noté $\vec{A} \otimes \vec{B}$ est défini par la transformation qui transforme un vecteur arbitraire $\vec{C}$ selon la règle suivante :

$$\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right) \vec{C} = \vec{A} \otimes \left(\vec{B}.\vec{C}\right) \tag{57}$$

Pour n'importe quels vecteurs $\vec{C}$ et $\vec{D}$ et les scalaires α et β, on a à partir de la définition ci-dessus :

$$\begin{aligned}\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right)\left(\alpha\vec{C} + \beta\vec{D}\right) &= \vec{A} \otimes \left(\vec{B}.\left(\alpha\vec{C} + \beta\vec{D}\right)\right) \\ &= \vec{A} \otimes \left(\left(\alpha\vec{B}.\vec{C}\right) + \beta\vec{B}.\vec{D}\right) \\ &= \alpha\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right)\vec{C} + \beta\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right)\vec{D}\end{aligned}$$

Donc $\vec{A} \otimes \vec{B}$ est un tenseur d'ordre deux. On pose $\underline{\underline{\vec{W}}} = \vec{A} \otimes \vec{B}$.
Alors les composantes de $\underline{\underline{\vec{W}}}$ sont :

$$
\begin{aligned}
W_{ij} = \vec{e_i}.\underline{\underline{\vec{W}}}\vec{e_j} &= \vec{e_i}.\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right)\vec{e_j} \\
&= \vec{e_i}.\vec{A} \otimes \left(\vec{B}.\vec{e_j}\right) \\
&= A_i B_j
\end{aligned}
$$

Soit :

$$W_{ij} = A_i B_j \tag{58}$$

En notation matricielle, l'équation (58) s'écrit :

$$[W] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix} \tag{59}$$

En particulier, les composantes du produit tensoriel des vecteurs de base $\vec{e_i}$ sont :

$$\vec{e_1} \otimes \vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e_1} \otimes \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e_1} \otimes \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_2} \otimes \vec{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e_2} \otimes \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e_2} \otimes \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_3} \otimes \vec{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e_3} \otimes \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e_3} \otimes \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, il est clair que n'importe quel tenseur peut être exprimé comme :

$$\underline{\underline{\vec{T}}} = T_{11}\vec{e_1} \otimes \vec{e_1} + T_{12}\vec{e_1} \otimes \vec{e_2} + \cdots + T_{33}\vec{e_3} \otimes \vec{e_3} \tag{60}$$

Soit en notation indicielle :

$$\underline{\underline{\vec{T}}} = T_{ij}\vec{e_i} \otimes \vec{e_j} \tag{61}$$

Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur $\vec{A} \otimes \vec{B}$ produit tensoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est défini comme étant un scalaire donné par le produit scalaire de $\vec{A}$ par $\vec{B}$, autrement dit :

$$tr\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right) = \vec{A}.\vec{B} \tag{62}$$

En outre, la trace est défini pour être un opérateur linéaire puisque il satisfait la relation :

$$tr\left(\alpha\vec{A} \otimes \vec{B} + \beta\vec{C} \otimes \vec{D}\right) = \alpha tr\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right) + \beta tr\left(\vec{C} \otimes \vec{D}\right) \tag{63}$$

En utilisant la relation (61), la trace de $\underline{\underline{\vec{T}}}$ peut donc être obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} tr\,\underline{\underline{\vec{T}}} = tr\left(T_{ij}\vec{e_i} \otimes \vec{e_j}\right) &= T_{ij}\,tr\left(\vec{e_i} \otimes \vec{e_j}\right) \\ &= T_{ij}\vec{e_i}.\vec{e_j} \\ &= T_{ij}\delta_{ij} = T_{ii} \end{aligned}$$

Soit

$$tr\,\underline{\underline{\vec{T}}} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{somme des termes diagonaux} \qquad (64)$$

Il set évident que :

$$tr\,\underline{\underline{\vec{T}}}^{t} = tr\,\underline{\underline{\vec{T}}} \qquad (65)$$

Tenseur identité

La transformation linéaire qui transforme chaque vecteur en lui même est appelé tenseur identité. Notant ce tenseur spécial par $\underline{\underline{\vec{I}}}$, pour n'importe quel vecteur $\vec{A}$, on a :

$$\vec{A} = \underline{\underline{\vec{I}}}\vec{A} \tag{66}$$

et en particulier : $\underline{\underline{\vec{I}}}\vec{e_i} = \vec{e_i}$
soit

$$\underline{\underline{\vec{I}}}\vec{e_1} = \vec{e_1}$$
$$\underline{\underline{\vec{I}}}\vec{e_2} = \vec{e_2}$$
$$\underline{\underline{\vec{I}}}\vec{e_2} = \vec{e_2}$$

Ainsi, les composantes du tenseur identité sont :

$$I_{ij} = \vec{e_i}.\vec{\underline{\underline{I}}}\vec{e_j} = \vec{e_i}.\vec{e_j} = \delta_{ij} \tag{67}$$

Soit sous forme matricielle :

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{68}$$

Il est évident que la matrice identité est la matrice $[I]$ pour tous les systèmes rectangulaires de coordonnées cartésiennes et que :

$$\vec{\underline{\underline{T}}}\,\vec{\underline{\underline{I}}} = \vec{\underline{\underline{I}}}\,\vec{\underline{\underline{T}}} = \vec{\underline{\underline{T}}}$$

pour n'importe quel tenseur $\vec{\underline{\underline{T}}}$. On note aussi que si $\vec{\underline{\underline{T}}}\vec{A} = \vec{A}$ pour n'importe quel vecteur $\vec{A}$, alors $\vec{\underline{\underline{T}}} = \vec{\underline{\underline{I}}}$

Tenseur inverse

Étant donné un tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$, s'il existe un tenseur $\underline{\underline{\vec{S}}}$ tel que : $\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}} = \underline{\underline{\vec{I}}}$, alors $\underline{\underline{\vec{S}}}$ est appelé inverse de $\underline{\underline{\vec{T}}}$ ou $\underline{\underline{\vec{S}}} = \underline{\underline{\vec{T}}}^{-1}$. Trouver les composantes de l'inverse du tenseur $\underline{\underline{I\vec{T}}}$ c'est trouver l'inverse de la matrice de $\underline{\underline{I\vec{T}}}$.
De l'étude des matrices, on sait que l'inverse de la matrice existe à condition que $det(\underline{\underline{\vec{T}}}) \neq 0$ (autrement dit $\underline{\underline{\vec{T}}}$ est non singulier) et dans ce cas : $[T]^{-1}[T] = [T][T]^{-1} = [I]$
Donc, l'inverse d'un tenseur satisfait aux relations réciproque suivantes :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}^{-1}\underline{\underline{\vec{T}}} = \underline{\underline{\vec{T}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}^{-1} = \underline{\underline{\vec{I}}} \tag{69}$$

On peut facilement montrer que pour le tenseur inverse les relations suivantes sont satisfaites :

$$\left(\underline{\underline{\vec{T}}}^{t}\right)^{-1} = \left(\underline{\underline{\vec{T}}}^{-1}\right)^{t} \tag{70}$$

et

$$\left(\underline{\underline{\vec{S}}}\,\underline{\underline{\vec{T}}}\right)^{-1} = \underline{\underline{\vec{T}}}^{-1}\underline{\underline{\vec{S}}}^{-1} \tag{71}$$

Il est à noter que si l'inverse existe, on a :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \vec{B} \implies \vec{A} = \underline{\underline{\vec{T}}}^{-1}\vec{B}$$

Ce qui indique que lorsque un tenseur est inversible, il y a une correspondance un à un des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
D'autre part, si le tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$ n'a pas d'inverse, alors pour un vecteur $\vec{B}$ donné, il y a, en général, plus d'un vecteur $\vec{A}$ qui se transforme en $\vec{B}$.

Tenseur orthogonal

Un tenseur orthogonal est une transformation linéaire sous laquelle les vecteurs transformés préservent leurs longueurs et leurs angles. Soit $\underline{\underline{\vec{Q}}}$ un tenseur orthogonal, alors par définition on a :

$$\left|\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{A}\right| = \left|\vec{A}\right| \qquad \text{et} \qquad cos(\vec{A}, \vec{B}) = cos(\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{A}, \underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{B})$$

Donc :

$$\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{A}.\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{B} = \vec{A}.\vec{B} \tag{72}$$

pour n'importe quels vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

En utilisant les définitions de la transposée et du produit tensoriel, on a :

$$\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{A}.\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{B} = \vec{B}.\underline{\underline{\vec{Q}}}^t\left(\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{A}\right) = \vec{B}.\left(\underline{\underline{\vec{Q}}}^t\underline{\underline{\vec{Q}}}\right)\vec{A} \tag{a}$$

Donc :

$$\vec{B}.\left(\underline{\underline{\vec{Q}}}^t\underline{\underline{\vec{Q}}}\right)\vec{A} = \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A} = \vec{B}.\underline{\underline{\vec{I}}}\vec{A} \tag{b}$$

Comme $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont quelconques, il s'en suit :

$$\underline{\underline{\vec{Q}}}^t\underline{\underline{\vec{Q}}} = \underline{\underline{\vec{I}}} \tag{c}$$

Ce qui signifie que $\underline{\underline{\vec{Q}}}^{-1} = \underline{\underline{\vec{Q}}}^t$ et à partir de l'équation (72), on aura :

$$\underline{\underline{\vec{Q}}}^t\underline{\underline{\vec{Q}}} = \underline{\underline{\vec{Q}\vec{Q}^t}} = \underline{\underline{\vec{I}}} \tag{73}$$

En notation matricielle, l'équation (73) prend la forme :

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij} \tag{74}$$

Le déterminent de la matrice d'un tenseur orthogonal $\underline{\underline{\vec{Q}}}$ est facilement montré que sa valeur est soit $+1$ ou -1.

Du fait que : $[Q]\,[Q]^t = [I]$, alors $\left|[Q]\,[Q]^t\right| = |[Q]|\left|[Q]^t\right| = |[I]|$

Matrice de transformation entre deux systèmes de coordonnées cartésiennes

On suppose que $\vec{e_i}$ et $\vec{e_i'}$ sont les vecteurs unitaires de deux systèmes rectangulaires de coordonnées cartésiennes (figure). Il est évident, si les deux bases sont directes, qu'on peut faire coïncider les deux bases $\vec{e_i}$ et $\vec{e_i'}$ par une rotation rigide.

Ainsi, $\vec{e_i}$ et $\vec{e_i'}$ peuvent être liées par un tenseur orthogonal $\underline{\underline{\vec{Q}}}$ par les équations :

$$\vec{e_i'} = \underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{e_i} = Q_{mi}\vec{e_m} \tag{75}$$

c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e_1}' = Q_{11}\vec{e_i} + Q_{21}\vec{e_i} + Q_{31}\vec{e_i} \\ \vec{e_2}' = Q_{12}\vec{e_i} + Q_{22}\vec{e_i} + Q_{32}\vec{e_i} \\ \vec{e_3}' = Q_{13}\vec{e_i} + Q_{23}\vec{e_i} + Q_{313}\vec{e_i} \end{array}\right\} \tag{76}$$

Avec $Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}$ ou $\underline{\underline{\vec{Q}}}^t\underline{\underline{\vec{Q}}} = \underline{\underline{\vec{Q}\vec{Q}}}^t = \underline{\underline{\vec{I}}}$.

On note que $Q_{11} = \vec{e_1}.\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{e_1} = \vec{e_1}\vec{e_1}' =$ cosinus de l'angle entre $\vec{e_1}$ et $\vec{e_1}'$,
$Q_{12} = \vec{e_1}.\underline{\underline{\vec{Q}}}\vec{e_2} = \vec{e_1}\vec{e_2}' =$ cosinus de l'angle entre $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}'$, ...etc.
En général $Q_{ij} =$ cosinus de l'angle entre $\vec{e_i}$ et $\vec{e_j}'$, qui peut être écrit :

$$Q_{ij} = \cos(\vec{e_i}, \vec{e_j}') = \vec{e_i}.\vec{e_j}' \tag{77}$$

La matrice de ces cosinus directeur est telle que : $[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$

Elle est appelée la matrice de transformation entre les bases $\vec{e_i}$ et $\vec{e_j}'$.

En utilisant cette matrice on obtient les relations entre deux jeux de composantes relativement à ces deux bases , aussi bien pour un vecteur que pour un tenseur.
On considère un vecteur $\vec{A}$, alors ses composantes relativement à la base $\vec{e_i}$ sont :

$$A_i = \vec{A}\vec{e_i}$$

et ses composantes relativement à la base $\vec{e_i}'$ sont :

$$A_i' = \vec{A}\vec{e_i}'$$

comme $\vec{e}_i' = Q_{mi}\vec{e_m}$, alors $A_i' = \vec{A}Q_{mi}\vec{e_m} = Q_{mi}\left(\vec{A}\vec{e_m}\right)$, soit :

$$A_i' = Q_{mi}A_m \tag{78}$$

En notation matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{79}$$

soit sous forme condensée :

$$[A]' = [Q]^t \, [A] \tag{80}$$

L'équation (79) est la loi de transformation reliant les composantes du même vecteur relativement aux différentes bases unitaires cartésiennes et rectangulaires.

Remarque

Dans l'équation (79), on a :

$$[A]' : \text{matrice du vecteur } \vec{A} \text{ relativement à la base } (\vec{e_1}')$$
$$[A] : \text{matrice du vecteur } \vec{A} \text{ relativement à la base } (\vec{e_1})$$

L'équation (79) n'est pas la même que $\vec{A}' = \underline{\underline{\vec{Q}}}^t \vec{A}$. La distinction est que $[A]$ et $[A]'$ sont des matrices du même vecteur, alors que $\vec{A}$ et $\vec{A}'$ sont des vecteurs différents ; $\vec{A}'$ étant le vecteur transformé de $\vec{A}$ par la transformation $\underline{\underline{\vec{Q}}}^t$.

Si on pré-multiplie l'équation (80) par $[Q]$, on a :

$$[A] = [Q][A]' \tag{81}$$

Soit en notation indicielle :

$$A_i = Q_{im} A'_m \tag{82}$$

Loi de transformation des composantes cartésiennes d'un tenseur

Considérant un tenseur quelconque $\underline{\underline{\vec{T}}}$. Ses composantes relativement à la base $\vec{e_i}$ sont :

$$T_{ij} = \vec{e_i}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_j}$$

ses composantes relativement à la base $\vec{e_i}'$ sont :

$$T'_{ij} = \vec{e_i}'.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_j}'$$

Avec $\vec{e_i}' = Q_{mi}\vec{e_m}$,

$$T'_{ij} = Q_{mi}\vec{e_m}\underline{\underline{\vec{T}}}(Q_{nj}\vec{e_n}) = Q_{mi}Q_{nj}\left(\vec{e_m}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_n}\right)$$

Soit

$$T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn} \tag{83}$$

HB

En notation matricielle, l'équation (83) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \tag{84}$$

ou

$$[T]' = [Q]^t \, [T] \, [Q] \tag{85}$$

Les équations (82) et (85) sont les lois de transformation reliant les composantes du même tenseur relativement à des bases unitaires cartésiennes différentes. Il est important à noter que dans ces équations, $[T]$ et $[T]'$ sont des matrices différentes du même tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$.

Tenseurs symétrique et antisymétrique

Un tenseur est dit symétrique si : $\underline{\underline{\vec{T}}}^t = \underline{\underline{\vec{T}}}$.
Les composantes d'un tenseur symétrique ont donc les propriétés suivantes :

$$T_{ij} = T_{ij}^t = T_{ji} \tag{86}$$

c'est-à-dire : $T_{12} = T_{21}$, $T_{13} = T_{31}$ et $T_{23} = T_{32}$.
Un tenseur est dit antisymétrique si : $\underline{\underline{\vec{T}}}^t = -\underline{\underline{\vec{T}}}$.
Les composantes d'un tenseur symétrique ont donc les propriétés suivantes :

$$T_{ij} = -T_{ij}^t = -T_{ji} \tag{87}$$

c'est-à-dire : $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$, $T_{12} = -T_{21}$, $T_{13} = -T_{31}$ et $T_{23} = -T_{32}$.

Tout tenseur peut toujours être décomposé en une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. En fait :

$$\underline{\underline{\vec{T}}} = \underline{\underline{\vec{T}}}^S + \underline{\underline{\vec{T}}}^A \tag{88}$$

où $\quad \underline{\underline{\vec{T}}}^S = \dfrac{\underline{\underline{\vec{T}}} + \underline{\underline{\vec{T}}}^t}{2} \quad$ symétrique

et $\quad \underline{\underline{\vec{T}}}^A = \dfrac{\underline{\underline{\vec{T}}} - \underline{\underline{\vec{T}}}^t}{2} \quad$ antisymétrique

La décomposition d'un tenseur en la somme d'un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique est ***unique***.

Valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur

On considère un tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$. Si $\vec{A}$ est un vecteur qui se transforme sous $\underline{\underline{\vec{T}}}$ en un vecteur parallèle à lui même, c'est-à-dire :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \lambda\vec{A} \tag{89}$$

alors $\vec{A}$ est un vecteur propre et λ est la valeur propre correspondante.

Si $\vec{A}$ est un vecteur propre avec sa valeur propre correspondante λ de la transformation linéaire $\underline{\underline{\vec{T}}}$, alors n'importe quel vecteur parallèle à $\vec{A}$ est aussi un vecteur propre avec la même valeur propre λ. En fait, pour n'importe quel scalaire α :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\left(\alpha\vec{A}\right) = \alpha\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{A} = \alpha\left(\lambda\vec{A}\right) = \lambda\left(\alpha\vec{A}\right) \qquad \text{(i)}$$

Ainsi, un vecteur propre, tel que défini par l'équation (89), a une longueur arbitraire. Par souci de clarté, il est convenu que tous les vecteurs propres recherchés seront de longueur unitaire.
Le tenseur identité admet une infinité de vecteurs propres du fait que pour n'importe quel vecteur $\vec{A}$ en $\underline{\underline{\vec{I}}}\vec{A} = \vec{A}$.

Les valeurs propres correspondantes sont toutes égales à l'unité. Soit $\vec{n}$ un vecteur propre unité , alors :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{n} = \lambda\vec{n} = \lambda\underline{\underline{\vec{I}}}\vec{n} \tag{90}$$

donc

$$\left(\underline{\underline{\vec{T}}} - \lambda\underline{\underline{\vec{I}}}\right)\vec{n} = \vec{0} \tag{91}$$

Soit $\vec{n} = \alpha_i\vec{e_i}$, ce qui donne en terme de composantes :

$$\left(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)\alpha_j \tag{92}$$

Sous forme développée, on a :

$$\left.\begin{array}{r}\left(T_{11} - \lambda\right)\alpha_1 + T_{12}\alpha_2 + T_{13}\alpha_3 = 0\\ T_{21}\alpha_1 + \left(T_{22} - \lambda\right)\alpha_2 + T_{23}\alpha_3 = 0\\ T_{31}\alpha_1 + T_{32}\alpha_2 + \left(T_{33} - \lambda\right)\alpha_3 = 0\end{array}\right\} \tag{93}$$

Les équations (93) représentent un système d'équations linéaires homogènes en α_1, α_2 et α_3.
Il est évident que, quelle que soit la valeur de λ, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ est une solution du système. Cette solution est la solution trivial, elle indique simplement le fait évident que $\vec{A} = \vec{0}$ satisfait l'équation (90), indépendamment de la valeur de λ.

Pour trouver les vecteurs propres non triviaux de $\underline{\underline{\vec{T}}}$, on note qu'un système homogène d'équations admet une solution non triviale que si le déterminant de ses coefficients est nul. A savoir :

$$\left|\underline{\underline{\vec{T}}} - \lambda \underline{\underline{\vec{I}}}\right| = 0 \tag{94}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{95}$$

Pour un tenseur donné, l'équation précédente est une équation cubique en λ. Elle est appelée polynôme caractéristique de $\underline{\underline{\vec{T}}}$.

Les racines de ce polynôme sont les valeurs propres de $\underline{\underline{\vec{T}}}$.
Les équations (95) ainsi que l'équation :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \tag{96}$$

permettent d'obtenir les vecteurs propres de longueur unité.

Valeurs principales et directions principales des tenseurs réels symétriques

Les tenseurs rencontrés en mécanique sont le plus souvent symétriques (tenseur des contraintes, tenseur des déformations, tenseur des taux de déformations).

Theorem

Un tenseur réel symétrique admet des valeurs propres réelles et des vecteurs propres mutuellement perpendiculaires.

Dans le cas des tenseurs réels symétriques, les valeurs propres sont appelées ***valeurs principales*** et les vecteurs propres les ***directions principales***.
On va montrer que pour un tenseur réel symétrique, il existe toujours 3 directions principales perpendiculaires entre elles.

Soit $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ deux vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement. Alors :

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{n_1} = \lambda_1 \vec{n_1} \qquad \text{(a)}$$

$$\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{n_2} = \lambda_2 \vec{n_2} \qquad \text{(b)}$$

donc :

$$\vec{n_2}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{n_1} = \vec{n_2}.\lambda_1 \vec{n_1} = \lambda_1 \vec{n_1}.\vec{n_2} \qquad \text{(c)}$$

$$\vec{n_1}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{n_2} = \vec{n_1}.\lambda_2 \vec{n_2} = \lambda_2 \vec{n_1}.\vec{n_2} \qquad \text{(d)}$$

A partir de la définition de la transposée de $\underline{\underline{\vec{T}}}$, on a : $\vec{n_1}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{n_2} = \vec{n_2}.\underline{\underline{\vec{T}}}^t\vec{n_1}$ donc pour un tenseur symétrique $\underline{\underline{\vec{T}}}$, $\underline{\underline{\vec{T}}} = \underline{\underline{\vec{T}}}^t$ ce qui donne :
$\vec{n_1}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{n_2} = \vec{n_2}.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{n_1}$
En tenant compte des équation (c) et (d), on a :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$$

Il s'en suit que si λ_1 est différent de λ_2, alors $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$, c'est-à-dire que $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont perpendiculaires.
En conclusion, si les valeurs principales sont distinctes, alors ***les trois directions principales sont mutuellement perpendiculaires***.

Matrice d'un tenseur relativement aux directions principales

On a montré que pour un tenseur réel symétrique, il existe toujours trois directions principales mutuellement perpendiculaires. Soient $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ les vecteurs unitaires de ces directions principales. En utilisant ces vecteurs comme base, les composantes du tenseur seront :

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= \vec{n_1}.\underline{\underline{\vec{\vec{T}}}}\vec{n_1} = \vec{n_1}\lambda_1\vec{n_1} = \lambda_1 \\
T_{22} &= \vec{n_2}.\underline{\underline{\vec{\vec{T}}}}\vec{n_2} = \vec{n_2}\lambda_2\vec{n_2} = \lambda_2 \\
T_{33} &= \vec{n_3}.\underline{\underline{\vec{\vec{T}}}}\vec{n_3} = \vec{n_3}\lambda_3\vec{n_3} = \lambda_3 \\
T_{12} &= \vec{n_1}.\underline{\underline{\vec{\vec{T}}}}\vec{n_2} = \vec{n_1}\lambda_2\vec{n_2} = \lambda_2\left(\vec{n_1}.\vec{n_2}\right) = 0 = T_{21} \\
T_{13} &= \vec{n_1}.\underline{\underline{\vec{\vec{T}}}}\vec{n_3} = \vec{n_1}\lambda_3\vec{n_3} = \lambda_3\left(\vec{n_1}.\vec{n_3}\right) = 0 = T_{31} \\
T_{23} &= \vec{n_2}.\underline{\underline{\vec{\vec{T}}}}\vec{n_3} = \vec{n_3}\lambda_3\vec{n_3} = \lambda_3\left(\vec{n_2}.\vec{n_3}\right) = 0 = T_{23}
\end{aligned}
$$

Soit :

$$[T]_{(\vec{n_i})} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{97}$$

Donc la matrice est diagonale et les éléments de la diagonale sont les valeurs principales de $\underline{\underline{\vec{T}}}$.

Les valeurs principales d'un tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$ incluent les valeurs maximum et minimum que les éléments diagonaux de n'importe quelle matrice de $\underline{\underline{\vec{T}}}$ peut avoir.

Dans un premier temps, pour n'importe quel vecteur $\vec{e_i}' = \alpha\vec{n_1} + \beta\vec{n_2} + \gamma\vec{n_3}$

$$T'_{11} = \vec{e_1}'.\underline{\underline{\vec{T}}}\vec{e_1}' = \begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\; T'_{11} = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2$$

on suppose que : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ et sachant que : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, on a :

$$\lambda_1 = \lambda_1\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) \geq \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2$$

c'es-à-dire : $\lambda_1 \geq T'_{11}$

et on a aussi :

$$\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2 \geq \lambda_3\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) = \lambda_3$$

c'es-à-dire : $T'_{11} \geq \lambda_3$
Donc la valeur maximum (ou minimum) des valeurs principales de $\underline{\underline{\vec{T}}}$ est la valeur maximum (ou minimum) des éléments diagonaux de toutes les matrices $[T]$ du tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$.

Principaux invariants scalaires d'un tenseur

L'équation caractéristique d'un tenseur $\underline{\underline{\vec{T}}}$, $|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$ est une équation cubique en λ. Elle peut être écrite comme suit :

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{98}$$

où

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} = tr(\underline{\underline{\vec{T}}})$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix}$$

Ou

$$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \frac{1}{2}\left[\left(tr\underline{\underline{\vec{T}}}\right)^2 - tr\left(\underline{\underline{\vec{T}}}^2\right)\right]$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = det\left(\underline{\underline{\vec{T}}}\right)$$

Puisque, par définition, les valeurs propres de $\underline{\underline{\vec{T}}}$ ne dépendent pas du choix des vecteurs de base (du repère), par conséquent, les coefficients de m'équation (98) ne dépendent pas du choix de la base (repère). Ils sont appelées les principaux invariants scalaires de $\underline{\underline{\vec{T}}}$.
On note que, en termes de valeurs propres de $\underline{\underline{\vec{T}}}$ qui sont les racines de l'équation (98), les invariants I_i prennent la forme :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_1 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \tag{99}$$