Dynamique des Structures

Pr. H. BOUZERD

Université 20 Août 1955 - Skikda
Département de Génie Civil

2020/2021

Informations sur la matière

Dynamique des Structures

Enseignant :***H. BOUZERD***

Spécialité : Structures　　Niveau : Master 1　　Semestre : 1

Unité d'Enseignement : UEF 1.1.1
Crédits : 4
Coefficient : 2

Mode d'évaluation :
- Examen final : 60%
- Contrôle continu : 40%

Année universitaire 2020/2021

Programme

- Chapitre 1 : Introduction et généralités
- Chapitre 2 : Systèmes à un seul degrés de liberté
  - Formulation de l'équation de mouvement
  - Vibrations libres
  - Vibrations forcées
  - Réponse au mouvement d'un support
  - Spectre de réponse
- Chapitre 3 : Systèmes à plusieurs degrés de liberté
  - Formulation de l'équation de mouvement
  - Évaluation des matrices [M], [K], [C] et {P}

Notions de mathématiques nécessaires

- Calcul différentiel
- Calcul intégral
- Calcul matriciel
- Transformée de Laplace
- Transformée de Fourier
- Nombres complexes
- Analyse fonctionnelle
  - Fonctions trigonométriques
  - Fonctions exponentielle et logarithmique

Introduction et Généralités 1

Le thème de la dynamique des structures est essentiel dans la **conception** et la **rénovation** des structures pour résister aux fortes sollicitations dynamique dues aux :

- tremblements de terre,
- aux vents forts

ou pour limiter l'occurrence et l'emplacement des **dommages** dans une structures existante.

Introduction et Généralités 2

La variation des quantités de la réponse telles que le déplacement, la vitesse, l'accélération ou les forces de tout système *(par exemple, des structures, des composants mécaniques, des systèmes de tuyauterie, des machines à rotation, machines outils soumises à des charges variables dans le temps.)* en fonction du temps est appelé ***vibration*** ou ***comportement dynamique***.

Causes ou types de vibrations

Vibrations naturelles

- Tremblement de terre
- Vent
- Tsunami

etc

Vibrations artificielles

- Machines
- Instruments de musique
- Automobiles

etc

Introduction et Généralités 3

Le mot dynamique signifie simplement « ***variation dans le temps*** ».
Donc les ***charges dynamiques***, contrairement aux charges statiques ***varient dans le temps***.

$$\textbf{Charge dynamique} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textbf{Grandeur} \\ \textbf{Direction} \\ \textbf{Point d'application} \end{array} \right\} \textbf{varient dans le temps}$$

Les charges dynamiques engendrent des **déplacements**, des **forces internes**, des **réactions** et des **contraintes** qui ***dépendent du temps***.

$$\Downarrow$$

Il n'existe pas une seule solution comme pour le problème de statique, mais des solutions successives dans le temps appelées ***réponse dynamique***.

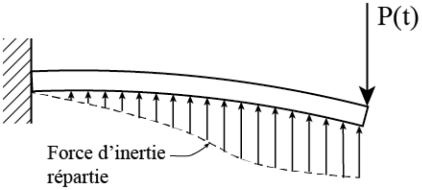
Introduction et Généralités 4

La différence primordiale entre un problème statique et un problème dynamique n'est pas essentiellement dans la variation temporelle de la charge et de la réponse,

mais

surtout dans l'importance des ***forces d'inertie*** qui résistent au mouvement engendré par le chargement dynamique appliqué.

(a) Charge statique



(b) Charge dynamique

Introduction et Généralités 5

Avant d'entamer l'analyse dynamique des structures, il faut ancrer certains concepts, dont :

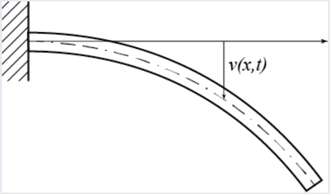
- ***Modèle analytique*** :
  c'est un modèle représentatif qui ressemble à la structure réelle mais son analyse mathématique est ***plus simple***. Il est constitué :
    - D'un ensemble d'hypothèses pour simplifier la structure réelle.
    - D'un ensemble de figures (dessins) pour le rendre plus clair .
    - D'une liste de constantes de conception (dimensions, matériaux, ...).
- ***Nombre de degrés de liberté*** :
  C'est le nombre de déplacements qu'il faut prendre en compte pour représenter l'effet des principales ***forces d'inertie***.

Introduction et Généralités 6

Les modèles analytiques sont classés en deux catégories :

Modèles continus

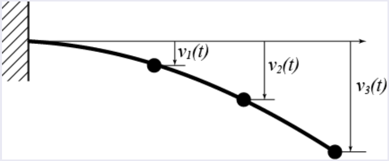
Nombre infini de ddl.



Modèles discrets

Nombre fini de ddl.

Modèles à masses concentrées.



Le choix du modèle analytique repose essentiellement sur le mode comportemental de la structure à représenter.

Introduction et Généralités 7

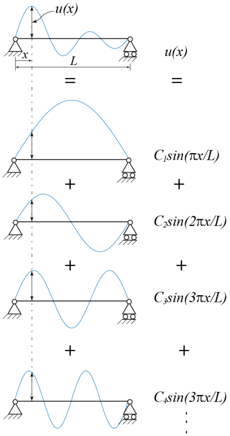
- ***Modèle mathématique*** :
  L'ensemble des équations différentielles qui décrivent le comportement du modèle analytique est appelé : ***modèle mathématique***.

  Ces équations sont obtenus en appliquant les ***lois de la physique*** (loi de Newton, lois des contraintes et des déformations, ...) sur le modèle analytique choisi tout en s'assurant qu'il correspond au mieux à l'objectif attendu par l'analyse dynamique.

Introduction et Généralités 8

- ***Modèle mathématique de Rayleigh-Ritz*** :
  Pour des systèmes continus, on peut simplifier l'analyse en supposant l'allure de la déformée.
  Généralement, on suppose que la déformée de la structure est la somme d'une série de schémas de déformation appelés ***fonctions de déplacement*** ou ***fonctions d'interpolation***.
  Ces fonctions deviennent les degrés de liberté généralisés du système.
  Exemple : représentation la déformée d'une poutre en une somme de fonctions sinusoïdales :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i sin(\frac{i\pi x}{L})$$



Introduction et Généralités 8

D'une manière générale, on peut choisir n'importe quelle famille de fonctions de déplacement généralisé $\phi_i(x)$, compatible avec les conditions géométriques imposées par les appuis.

Une expression générale pour tout système ayant une dimension peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(t)\phi_i(x)$$

Où $Z_i(t)$ = coordonnée généralisée,
$\phi_i(x)$= fonction de déplacement généralisé,
n = nombre de degrés de liberté du système

Pour $n = 1$, on a la méthode classique de Rayleigh
Pour $n > 1$, on a la méthode de Rayleigh-Ritz

Introduction et Généralités 9

La méthode de Rayleigh utilise **une interpolation** pour exprimer les déplaceme en chaque point en fonction **d'un seul ddl**.
La méthode de Rayleigh-Ritz utilise **plusieurs fonctions d'interpolation** des déplacements en fonction d'un **nombre fini de ddl**.

La précision des résultats obtenus avec la méthode Rayleigh dépend de la fonction d'interpolation choisie.
Pour la méthode de Rayleigh-Ritz la précision augmente avec le nombre de ddl choisis.

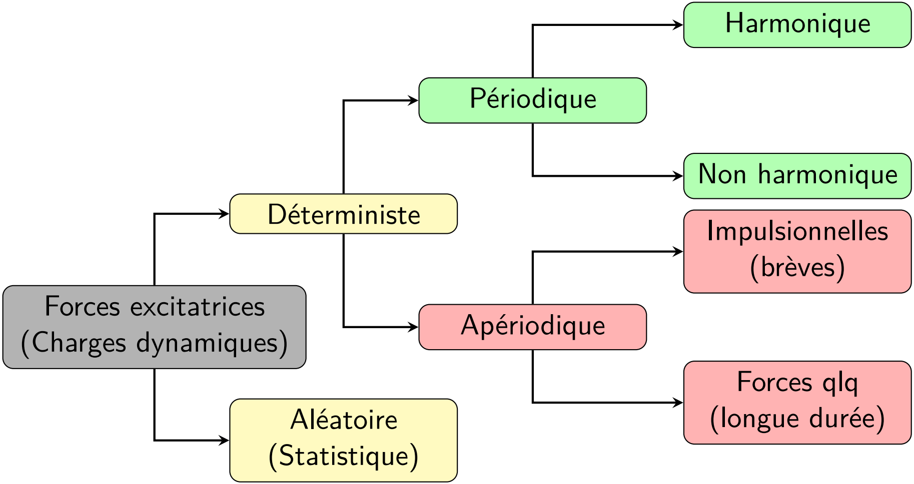
Les fonctions d'interpolation adoptées doivent être ***simples***. Le plus souvent on utilise des ***polynômes*** et plus rarement des sinus et des cosinus.

Introduction et Généralités 10

Presque toutes les structures peuvent être soumises au cours de leur durée de vie à une forme ou une autre de ***charges dynamiques***.

Les problèmes de dynamique peuvent être classés en fonction du type de chargement. Les charges dynamiques peuvent être **périodiques** ou **non périodiques (apériodiques)**.

Introduction et Généralités 11



Introduction et Généralités 12

Charges périodiques :

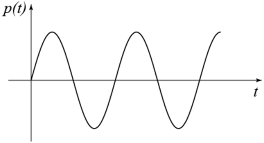
Une charge périodique est une charge dont les variations dans le temps se répètent après un intervalle de temps régulier T, appelé ***période***.

Les charges périodiques se divisent en deux types : ***charges harmoniques simples*** et ***charges périodiques quelconques***.

Introduction et Généralités 13

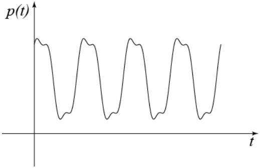
Charges harmoniques simples :

La charge harmonique la plus simple suit une variation sinusoïdale. Elle est appelée charge harmonique simple. Ce type de charge est créée par les machines à mouvement rotatif.



Charges périodiques quelconques :

Les charges périodiques quelconques sont des charges dont la variation se répète à intervalle de temps régulier (T).



Toute fonction périodique peut être décomposée en une somme d'une série de fonctions harmoniques simples par la ***transformation de Fourier***.

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n sin(\frac{2\pi nt}{T})$$

Introduction et Généralités 14

Charges apériodiques (non périodiques) :

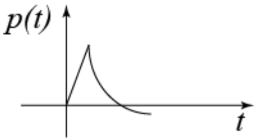
Les charges apériodiques sont des charges variant de façon **arbitraire** dans le temps sans périodicité.

Les charges apériodiques se divisent en charges de ***courte durée*** de type ***impulsionnel*** et en charges transitoires ou charges arbitraires de ***longue durée***.

Charges impulsionnelles :

Les charges impulsionnelles sont des charges de très courte durée par rapport à la période de vibrationdes structures.

Elles sont causées par une explosion, un choc, la rupture d'une pièce ou par la perte d'un appui de la structure, etc.



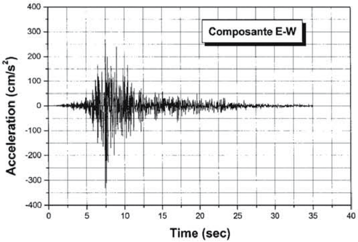
Introduction et Généralités 15

Charges arbitraires de longues durée :

Les charges arbitraires de longues durée sont causées par les tremblement de terre, le vent, les vagues, etc.

La figure montre l'accélération du sol à la base d'une structure lors du tremblement de terre survenu à Boumerdès en 2003.

CHOC PRINCIPAL : Mw=6.8 – 21/05/2003, 19:44:40 (GMT+1)



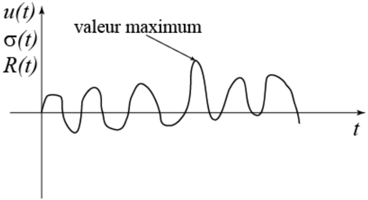
Les charges arbitraires de longues durée (quelconques) peuvent être considérée comme une somme de charges impulsionnelles.

La réponse à une charge dynamique quelconque sera donc la sommation des réponses à ses charges impulsionnelles.

Introduction et Généralités 16

Le calcul de la réponse dynamique d'une structure à un chargement dynamique donné conduit à la détermination des déplacements de la structure dans le temps appelé aussi ***l'historique du déplacement***.

Les déformations, contraintes, forces internes et réactions sont déterminées à partir de l'historique du déplacement.

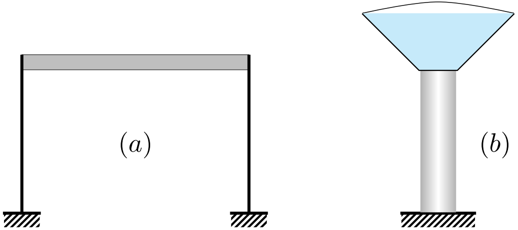


La réponse dynamique varie donc avec le temps.
En général, pour un dimensionnement ou une vérification d'un système linéaire, on calcule la réponse dynamique maximum.

Un système à un seul degré de liberté est défini comme celui dans lequel ***un seul type de mouvement est possible***,

ou

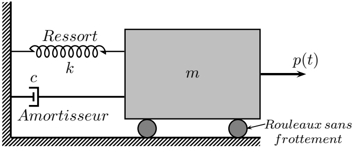
un système dont la position à tout instant peut être défini par ***une seule coordonnée***.



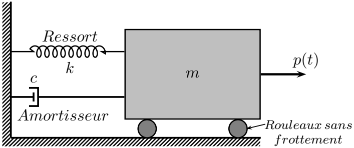
Génie Civil : une structure à un étage ou un château d'eau.

Ces systèmes à un seul degré de liberté (SDOF) peuvent être convenablement décrits par le modèle analytique montré sur la figure ci-dessous.
Un SDOF comprend les éléments suivants :

1. Un élément de masse représentant la masse et la caractéristique d'inertie de la structure.
2. Un élément ressort k représentant la force élastique de rappel et le stockage de l'énergie potentielle de la structure.
3. Un élément amortisseur c représentant les caractéristiques de frottement et de dissipation d'énergie de la structure.
4. Une force d'excitation $p(t)$ représentant les forces externes.

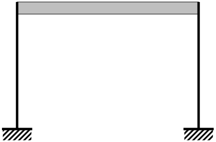


Ce modèle appelé aussi oscillateur simple



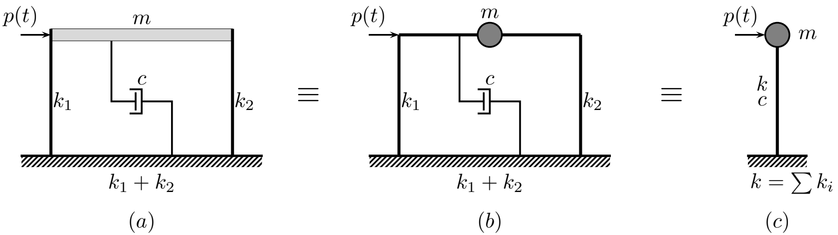
peut être représenté autrement en considérant

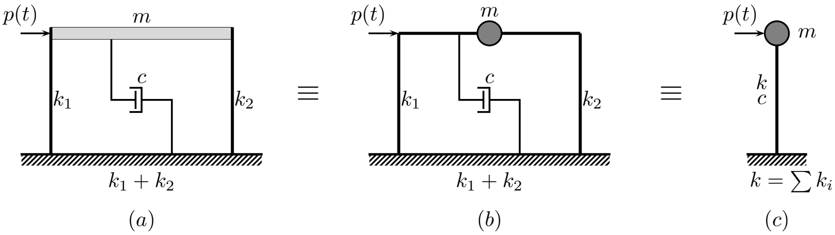
une structure à un étage.



Ce système idéalisé est obtenu en considérant les hypothèses suivantes :

1. La masse est supposée concentrée au niveau du plancher.
2. Le plancher est supposé infiniment rigide (indéformable).
3. Les déplacements axiaux des poteaux sont considérés négligeables.





En vertu de ces hypothèses, le système à un étage, représenté dans la figure ci-dessus, consiste ainsi en :

- une masse m concentrée à la hauteur du plancher,
- deux poteaux, sans masse, fournissant la rigidité k,
- un amortissement visqueux c dissipant l'énergie de vibration
- et une charge $p(t)$, dépendant du temps, appliquée au plancher.

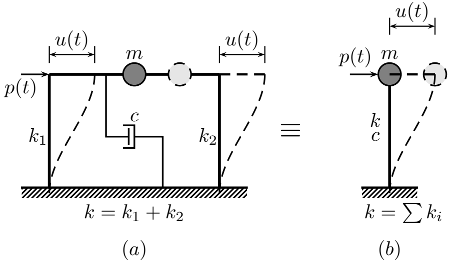
De tels systèmes sont **rares** en pratiques.
Ils sont des **idéalisations** résultant d'**hypothèses simplificatrices** sur la distribution des propriétés essentielles d'un système mécanique ou structural : ***la masse***, ***la rigidité*** et ***l'amortissement***.

L'intérêt de l'étude de tels systèmes réside dans ce qui suit :

- Les résultats de l'analyse dynamique de ces systèmes simplifiés sont très poches des résultats ***exacts***.
- ***Plus important***, dans le domaine linéaire, les systèmes complexes à **plusieurs degrés de liberté** peuvent se calculer par la **superposition** des réponses de systèmes à un seul degrés de liberté associés.

Paramètres de réponse :

Le mouvement d'un système à un seul degré de liberté tel que défini dans la figure ne peut se faire qu'horizontalement dans le plan de la figure.



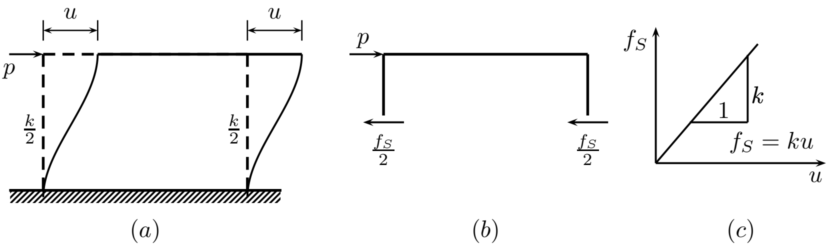
$\Longrightarrow$ le déplacement $u(t)$ est la **seule coordonnée** qui décrit ce mouvement.

Deux autres paramètres sont utilisés pour décrire le mouvement :

la vitesse $\dot{u}(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$.   l'accélération $\ddot{u}(t) = \dfrac{d^2u(t)}{dt^2}$

Charge statique :

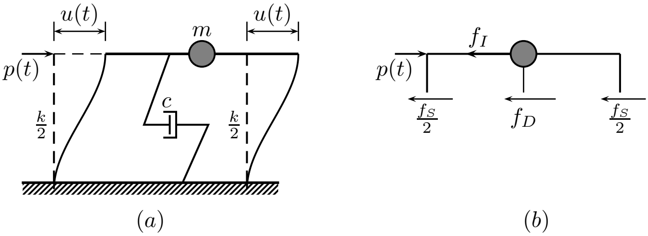
Quand SDOF de liberté est soumis à une charge extérieure statique p, seule la force de rappel f_S s'oppose au mouvement : $p = f_S$



Dans le cas élastique linéaire, elle est donnée par la relation : $f_S = ku$
où k est la rigidité de la structure (*unité* : F/L).
L'équation de l'équilibre statique est donc : $p = ku$

Charge dynamique :

Quand une force extérieure dynamique $p(t)$ est appliquée au système à un seul degré de liberté, la masse m de ce dernier subit un déplacement $u(t)$.



Les forces appliquées au système à l'instant t sont :

- La force dynamique extérieure $p(t)$
- La force élastique $f_S(t)$
- La force d'amortissement $f_D(t)$
- La force d'inertie $f_I(t)$.

Charge dynamique :

Les forces $f_S(t)$, $f_D(t)$ et $f_I(t)$ s'opposent au mouvement de la masse m.
$\Longrightarrow$ elles sont donc opposées à à la force dynamique externe $p(t)$

- $f_S(t)$ s'oppose au déplacement $u(t)$. Elle s'écrit : $f_S = ku(t)$
  k est la rigidité du SDOF.

- $f_D(t)$ s'oppose à la vitesse $\dot{u}(t)$. Elle s'écrit : $f_D = c\dot{u}(t)$
  c est le coefficient d'amortissement visqueux du SDOF (déterminé expérimentalement).

- $f_D(t)$ s'oppose à l'accélération $\ddot{u}(t)$. Elle s'écrit : $f_I = m\dot{u}(t)$

Charge dynamique :

Deuxième loi de Newton

La somme algébrique des forces appliquées au système est équilibrée par la force d'inertie. Soit :$\sum F = m\ddot{u} = f_I$

Alors on a : $p(t) - f_S(t) - f_D(t) = m\ddot{u}(t) = f_I(t)$

Soit en réorganisant l'équation : $f_S(t) + f_D(t) + f_I(t) = p(t)$

Or $f_S = ku(t)$, $f_D = c\dot{u}(t)$ et $f_I = m\dot{u}(t)$
En substituant on obtient l'équation de l'équilibre dynamique :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

ou ***l'équation du mouvement du système à un seul degré de liberté***.

Charge dynamique :
L'équation du mouvement est donc une équation **différentielle ordinaire du second ordre** à **coefficients constants** où la variable inconnue est le déplacement $u(t)$.
Sa solution dépend de la charge dynamique $p(t)$ et des **conditions initiales** et donne le **déplacement en fonction du temps**.
On distingue deux types de réponse d'un système à un seul degré de liberté :

- ***La réponse forcée***, solution de l'équation différentielle avec second membre $\implies$ $p(t)$ ***non nul***.
- ***La réponse libre***, solution de l'équation différentielle ***homogène*** (sans second membre).
  Elle décrit le comportement de l'oscillateur élémentaire sous l'action des **conditions initiales** (déplacement et/ou vitesse) non nulles alors le second membre est nul $(p(t) = 0)$.

Un système à un seul degré de liberté est en ***vibrations libres*** si sa réponse ne dépend que de l'excitation due à un déplacement initial et/ou une vitesse initiale et que la charge extérieure est nulle ($p(t) = 0$).

Seules les conditions initiales gouvernent le mouvement.

Dans ce cas l'équation du mouvement s'écrit : $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$

On distingue deux cas de vibrations libres :

- ***vibrations libres non amorties*** pour $c = 0$
  $\Longrightarrow \quad m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$
- ***vibrations libres amorties*** pour $c \neq 0$
  $\Longrightarrow \quad m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$.

Vibrations libres non-amorties :

Bien que les systèmes sans amortissement n'existent pas dans la réalité, la réponse sans amortissement est étudiée car elle donne un aperçu de la réponse aux vibrations libres des systèmes amortis.

En l'absence d'amortissement, $c = 0$, l'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

La solution d'une telle équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

où λ est une constante arbitraire à déterminer

Vibrations libres non-amorties :

La substitution de la relation $u(t) = e^{\lambda t}$ dans l'équation du mouvement donne :

$$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0$$

Comme pour $t \geq 0$, $e^{\lambda t} \neq 0$, l'équation précédente conduit à :

$$m\lambda^2 + k = 0$$

Cette expression est l'***équation caractéristique*** de l'équation différentielle du mouvement.
Ses solutions sont :

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}},\ \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1}$$

Vibrations libres non-amorties :

En posant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, les racines s'écrivent : $\lambda_1 = i\omega,\ \lambda_2 = -i\omega$
La solution générale de l'équation du mouvement libre non-amorti est :

$$u(t) = A'e^{i\omega t} + B'e^{-i\omega t}$$

où A' et B' sont deux constantes arbitraires.

En utilisant la formule d'Euler : $e^{\pm i\omega t} = cos(\omega t) \pm isin(\omega t)$
l'équation donnant $u(t)$ devient :

$$u(t) = (A' + B')cos(\omega t) + i(A' - B')sin(\omega t)$$

En posant $A = A' + B'$ et $B = i(A' - B')$, on peut écrire :

$$u(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$$

Vibrations libres non-amorties :

La vitesse $\dot{u}(t)$ est obtenue par la différentiation de l'équation de $u(t)$:

$$\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} = -\omega A sin(\omega t) + \omega B cos(\omega t)$$

Les constantes arbitraires A et B peuvent être déterminées si le déplacement $u(t)$ et la vitesse $\dot{u}(t)$ du système en mouvement sont connus à un certain instant t_0.

Habituellement, on prend $t_0 = 0$ et les quantités $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ sont appelées ***conditions initiales*** du mouvement.

Pour $t = 0$, les équations de $u(t)$ et $\dot{u}(t)$ donnent :

$$u(0) = u_0 = A \underbrace{cos(0)}_{=1} + B \underbrace{sin(0)}_{=0} \implies \boxed{A = u_0}$$

$$\text{et} \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 = -\omega A \underbrace{sin(0)}_{=0} + \omega B \underbrace{cos(0)}_{=1} \implies \boxed{B = \frac{\dot{u}_0}{\omega}}$$

Vibrations libres non-amorties :

L'équation du mouvement du système à un seul degré de liberté en vibrations libres non amorties s'écrit :

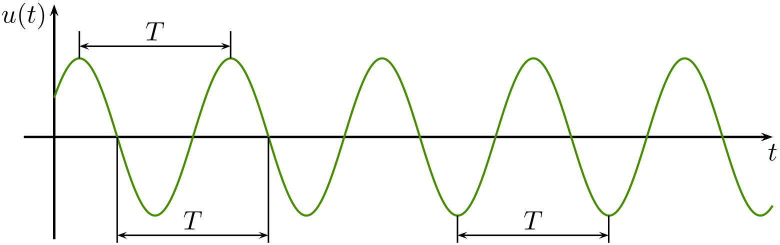
$$u(t) = u_0 cos(\omega t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} sin(\omega t)$$

Il est évident que si $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ que $u(t) = 0$. Par conséquent, le système n'est mis en mouvement que ***s'il reçoit un déplacement initial et/ou une vitesse initiale***.

Le mouvement d'un système à un seul degré de liberté (oscillateur simple ou oscillateur élémentaire) en vibrations libres est défini par ***la somme de deux fonctions harmoniques simples***.

Vibrations libres non-amorties :

La solution représente un mouvement harmonique simple tel que rapporté sur la figure ci-dessous.



Le mouvement du SDOF en vibrations libres non amorties se poursuit ***indéfiniment*** avec une ***amplitude constante***.

Vibrations libres non-amorties :

En utilisant les équations d'Euler, on a :

$$e^{\pm i\omega t} = cos(\omega t) \pm isin(\omega t)$$

ce qui permet d'écrire le *sinus* et le *cosinus* sous les formes suivantes :

$$cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = -i\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2}$$

En les remplaçant dans l'expression de $u(t)$, on aboutit à :

$$u(t) = u_0\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) - i\frac{\dot{u}_0}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2}\right)$$

soit en réorganisant :

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{i\omega t}\left(u_0 - i\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right) + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\left(u_0 + i\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)$$

Vibrations libres non-amorties :

En posant $G = u_0 + i\frac{\dot{u}_0}{\omega}$, l'équation du mouvement devient :

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(Ge^{-i\omega t} + \overline{G}e^{i\omega t}\right)$$

où $\overline{G}$ est le conjugué de G.

Comme le complexe G peut s'écrire sous la forme : $G = \rho_0 e^{i\theta}$ alors :

$$G = \rho_0 cos(\theta) + i\rho_0 sin(\theta) = u_0 + i\frac{\dot{u}_0}{\omega}$$

$$\Longrightarrow \; cos(\theta) = \frac{u_0}{\rho_0} \quad \text{et} \quad sin(\theta) = \frac{\dot{u}_0}{\rho_0\omega}$$

Vibrations libres non-amorties :

Sachant que : $cos^2\theta + sin^2\theta = 1 \quad \Longrightarrow \left(\frac{u_0}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\rho_0\omega}\right)^2 = 1,$

$\Longrightarrow \rho_0^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2$ soit : $\boxed{\rho_0 = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}}$

et $tg\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{\dot{u}_0}{\rho_0\omega}}{\frac{u_0}{\rho_0}} \quad \Longrightarrow \quad tg\theta = \frac{\dot{u}_0}{\omega u_0}$

ce qui donne : $\boxed{\theta = Arctg\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega u_0}\right)}$

Vibrations libres non-amorties :

En remplaçant G et $\overline{G}$ par leurs expressions exponentielles, on obtient :

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\rho_0 e^{i\theta} e^{-i\omega t} + \rho_0 e^{-i\theta} e^{i\omega t}\right) = \rho_0 \left(\frac{e^{i(\omega t-\theta)} + e^{-i(\omega t-\theta)}}{2}\right)$$

comme : $\dfrac{e^{i(\omega t-\theta)} + e^{-i(\omega t-\theta)}}{2} = cos(\omega t - \theta)$, alors :

$$u(t) = \rho_0 cos(\omega t - \theta)$$

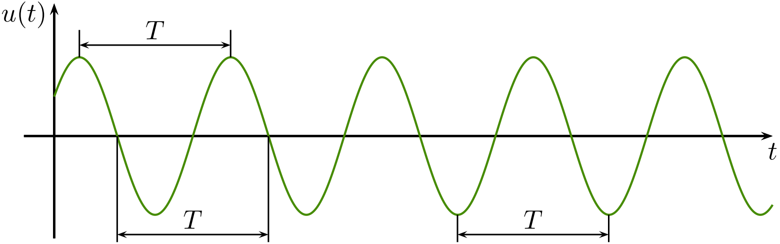
Cette équation indique que le mouvement du système élémentaire est une vibration ***harmonique*** d'***amplitude*** $\rho_0 = max|u(t)|$et d'***angle de phase*** θ en fonction de la grandeur ω.

Vibrations libres non-amorties :

La représentation graphique est identique à celle de l'équation :

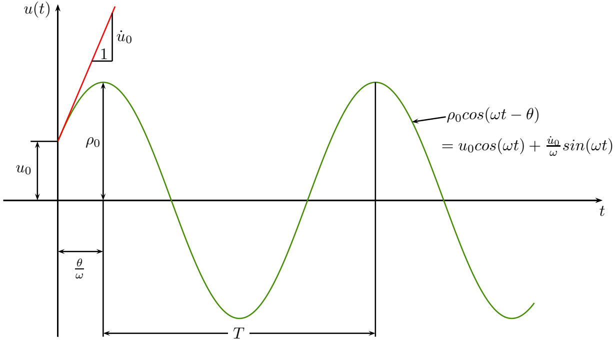
$$u(t) = u_0 cos(\omega t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} sin(\omega t)$$

.



Vibrations libres non-amorties :

La figure ci-dessous représente aussi la réponse harmonique d'un système à un seul degré de liberté en vibrations libres avec une représentation des caractéristiques du mouvement : les conditions initiales (u_0 et $\dot{u}_0$), l'amplitude (ρ_0), l'angle de phase (θ) et la période (T).

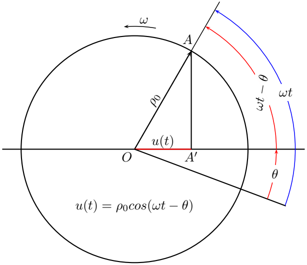


Return

Vibrations libres non-amorties :

Interprétation de la grandeur ω :

La signification géométrique de l'équation $u(t) = \rho_0 cos(\omega t - \theta)$ est montré sur la figure ci-dessous. Le déplacement $u(t)$ du système peut être représenté comme la projection OA' du rayon $\rho_0 = OA$ sur le diamètre horizontal.



Return

Quand le temps t varie, le vecteur $\vec{\rho_0} = \vec{OA}$ tourne en accomplissant une infinité de cycle.

Vibrations libres non-amorties :
Interprétation de la grandeur ω :

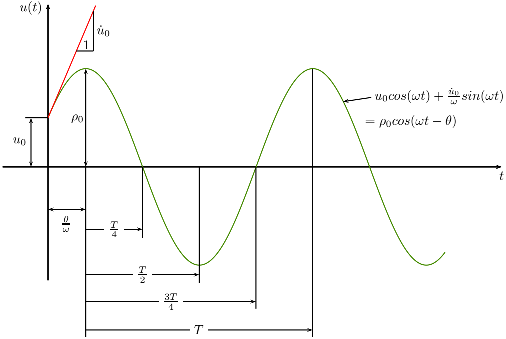
La variation de l'angle $\omega t - \theta$ est proportionnelle à la constante $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ qui apparait ainsi comme la ***vitesse angulaire*** de la rotation du vecteur $\vec{\rho_0} = \vec{OA}$.

La quantité ω est appelée ***pulsation propre*** ou ***pulsation naturelle*** (parfois improprement fréquence propre ou fréquence naturelle) du système à un seul degré de liberté ou oscillateur harmonique ou encore système conservatif. Sa dimension physique est s^{-1} et elle est mesurée en radians par seconde.

Vibrations libres non-amorties :

Période T :

Le temps nécessaire au système à un seul degré de liberté non amorti pour terminer un cycle de vibration libre est appelé ***période naturelle*** ou ***période propre*** de vibration du système, qui est désignée par T et mesurée en secondes(figure ci-dessous).



Vibrations libres non-amorties :

Relation entre la période T et la pulsation ω :

Il a été montré précédemment que le déplacement $u(t)$ revient à sa valeur initiale après un cycle qui dure le temps d'une période T, soit :

$$u(t) = u(t+T) = \rho_0 cos(\omega(t+T) - \theta)$$

D'autre part, les fonctions sinus et cosinus se répètent se répètent si leurs arguments sont augmentés de 2π, soit :

$$u(t) = \rho_0 cos(\omega t - \theta) = \rho_0 cos(\omega t - \theta + 2\pi)$$

Par identification des équations (50) et (50), on peut écrire :

$$\rho_0 cos(\omega(t+T)-\theta) = \rho_0 cos(\omega t-\theta+2\pi) \quad \Longrightarrow \quad \omega t+\omega T-\theta = \omega t-\theta+2\pi$$

$$\Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Vibrations libres non-amorties :

Relation entre la période T et la pulsation ω :

La relation entre la période propre T et la pulsation propre ω peut être obtenue en considérant la figure Voir la figure.

En effet, pour accomplir un tour complet (un cycle) le vecteur $\vec{OA}$ nécessite un temps égal à la période T et en considérant la vitesse angulaire ω alors l'angle parcouru en un cycle est ωT.

Comme l'angle associé à un cycle (tour) est de 2π, alors on a :

$$\omega T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega}$$

.

Vibrations libres non-amorties :

Fréquence f :

L'inverse de la période $f = \dfrac{1}{T}$ exprime le nombre de cycles que le système accomplit en 1 s.

Cette grandeur est appelée ***fréquence cyclique naturelle*** ou ***fréquence naturelle*** ou encore ***fréquence propre***. L'unité de f est le hertz (Hz) (cycles par seconde, cps).

La fréquence naturelle f est liée à la pulsation naturelle par la relation :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Ainsi les grandeurs T, f et ω sont liées par les relations suivantes :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Vibrations libres non-amorties :

Fréquence f :

Au final et sachant que : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

et par conséquent : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ et $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Ces équations montrent que les grandeurs ω, T et f dépendent uniquement de la masse m et de la rigidité k de l'oscillateur élémentaire.

Ces propriétés (m et k) sont invariables, propres à l'oscillateur et indépendantes des conditions initiales, d'où la dénomination de ***propre*** à ω, T et f.

Vibrations libres non-amorties :

Conclusion :

Le système à un seul degré de liberté (SDOF) ou oscillateur harmonique **non amorti** en vibtation libre est décrit par le mouvement harmonique qui se répète indéfiniment avec une amplitude constante ρ_0 et une période T. Seules les conditions initiales gouvernent ce mouvement.

La figure ▸ Voir la figure donne une représentation graphique de ce mouvement harmonique avec ses caractéristiques : conditions initiales (u_0 et $\dot{u}_0$), amplitude (ρ_0), angle de phase (θ) et la période (T).

Un système à un seul degré de liberté en vibrations libres non amorties est caractérisé par :

- sa pulsation propre ou sa période propre ou encore sa fréquence propre qui dépendent des propriétés de masse et de rigidité du système.
- son amplitude qui dépend des conditions initiales.

Vibrations libres amorties :

Vibrations libres non-amorties = une ***idéalisation*** qui ne peut exister dans la réalité.

Mais
d'une grande importance dans l'étude des systèmes réelles (amorties)

Les forces de ***frottement*** ou d'***amortissement*** sont toujours présentes dans tout système physique en mouvement.
Ces forces dissipent l'énergie en la transformant.

Energie mécanique (énergie potentielle ou cinétique) → ***Energie thermique*** (Chaleur)

Vibrations libres amorties :

Dans les structures en vibration, cette énergie dissipée ou ***énergie d'amortisse*** est due à différents phénomènes, tels que :

- le frottement au niveau des assemblages (appuis, nœuds),
- l'ouverture et la fermeture des microfissures,
- les frottements entre la structure et les éléments non structuraux ...

Le mécanisme de cette dissipation d'énergie est un phénomène ***complexe*** qui reste ***mal cerné***.

Expériences $\Longrightarrow$ Hypothèses prendre en compte ces forces dissipatives dans l'analyse des systèmes dynamiques.

Un amortissement ***visqueux équivalent*** est considéré pour ***modéliser*** les ***forces dissipatives*** ($f_D = c\dot{u}(t)$).

Vibrations libres amorties : / *Équation du mouvement et réponse* :

L'équation du système amorti en vibration libre s'écrit :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre homogène (second membre nul) et à coefficients constants.

Sa solution est sous la forme : $u(t) = e^{\lambda t}$
où λ est une constante arbitraire à déterminer.

En remplaçant dans l'équation du mouvement on obtient :

$$m\frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) + c\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) + ke^{\lambda t} = \left(m\lambda^2 + c\lambda + k\right) e^{\lambda t} = 0$$

Comme $e^{\lambda t} \neq 0$, alors la résolution de l'équation différentielle se réduit à :

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (\text{équation caractéristique})$$

Vibrations libres amorties : / *Équation du mouvement et réponse* :

En divisant par m, on obtient : $\lambda^2 + \dfrac{c}{m}\lambda + \dfrac{k}{m} = 0$

Or $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, donc $\dfrac{k}{m} = \omega^2$ et l'équation devient : $\boxed{\lambda^2 + \dfrac{c}{m}\lambda + \omega^2 = 0}$

C'est une équation de degré 2 dont le discriminant est : $\Delta = \left(\dfrac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2$

et les racines :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{m} + \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2}\right) = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{m} - \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2}\right) = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

Vibrations libres amorties : / ***Équation du mouvement et réponse*** :
La nature des racines λ_1 et λ_2 dépend du signe du discriminant Δ :

si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes,

si $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine double,

si $\Delta < 0$, le trinôme admet deux racines complexes conjuguées.

Le type de racine de l'équation caractéristique détermine la forme de la solution de l'équation différentielle, et par conséquent la réponse physique du système.

On distingue donc trois types de mouvement avec amortissement, selon que le discriminant est positif, négatif ou nul.

Il est opportun d'aborder le cas où $\Delta = 0$, correspondant à la condition d'***amortissement critique***.

Vibrations libres amorties : / ***Système à amortissement critique*** :
La valeur de c pour laquelle $\Delta = 0$ est appelée amortissement critique notée c_{cr}. Le système est appelé ***système amorti critique***.

$$\Delta = 0 \iff \left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = c_{cr} = 2m\omega$$

Comme $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \Longrightarrow c_{cr} = 2m\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 2\sqrt{km}$, soit : $\boxed{c_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{km}}$

Pour c_{cr} les racines sont : $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\omega$

Dans ce cas, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$u(t) = (A + Bt)\, e^{-\omega t}$$

Les constantes A et B sont évaluées à partir des conditions initiales.

Vibrations libres amorties : / ***Système à amortissement critique*** :

Les conditions initiales s'écrivent : $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$.

Ainsi, on a : $u(0) = A \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A = u_0}$

L'expression de la vitesse s'écrit :

$$\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(A + Bt)\, e^{-\omega t}\right]$$
$$= Be^{-\omega t} - \omega\,(A + Bt)\, e^{-\omega t}$$

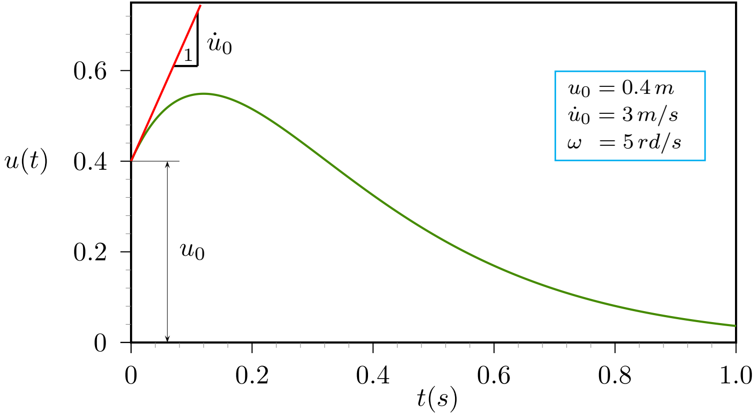
Soit : $\dot{u}(t) = \left[B\,(1 - \omega t) - \omega A\right] e^{-\omega t}$

Alors, pour $t = 0$, l'équation de la vitesse donne : $\dot{u}(0) = B - \omega A$

En tenant compte du fait que $A = u_0$, on obtient : $\boxed{B = \omega u_0 + \dot{u}_0}$

Vibrations libres amorties : / *Système à amortissement critique* :

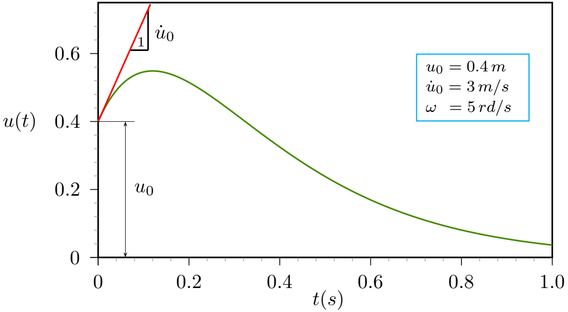
En tenant compte de A et B on a : $u(t) = [u_0 + (\omega u_0 + \dot{u}_0)\, t]\, e^{-\omega t}$



Vibrations libres amorties : / ***Système à amortissement critique*** :

D'après la figure représentant le mouvement d'un système critique, on constate que :

- Le mouvement du système critique s'amorti d'une manière non oscillatoire et non périodique,
- le déplacement s'évanouit de façon exponentielle et en temps infini.



Vibrations libres amorties : / ***Taux d'amortissement critique*** :

Le taux d'amortissement critique, noté ξ, est défini par la relation :

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}$$

Ainsi, l'amortissement d'un système est défini en termes de ξ, soit :

$$c = 2\xi m\omega$$

Le taux d'amortissement critique ξ est une grandeur adimensionnelle utile pour la mesure de l'amortissement. Il est souvent exprimé en %.

L'équation du mouvement devient : $m\ddot{u}(t) + 2\xi m\omega\dot{u}(t) + ku(t) = 0$ soit

en divisant par m : $\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$

Vibrations libres amorties : / ***Taux d'amortissement critique*** :
L'équation caractéristique devient : $\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$

et le discriminant du trinôme caractéristique :

$$\Delta = \left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\omega^2 = \left(\frac{c}{m}\frac{2\omega}{2\omega}\right)^2 - 4\omega^2 = 4\omega^2\left(\frac{c}{2m\omega}\right) - 4\omega^2$$

soit : $$\Delta = 4\omega^2\xi^2 - 4\omega^2 = 4\omega^2\left(\xi^2 - 1\right) = 4\omega^2\left(\xi + 1\right)\left(\xi - 1\right)$$

Comme $\xi \geq 0 \implies$ signe de $\Delta \equiv$ singe de $(\xi - 1)$.

En particulier, pour $\xi = 1 \implies \Delta = 0 \longrightarrow$ système ***critique***.
Pour les autres valeurs de ξ on a :

- Si $\xi > 1$, $\Delta > 0$ et le système est qualifié de système ***sur-critique***.
- Si $\xi < 1$, $\Delta < 0$ et le système est qualifié de système ***sous-critique***.

Vibrations libres amorties : / ***Système sur-critique*** :
Quand $\xi > 1$ $(c > c_{cr}) \rightarrow$ ***système à amortissement sur-critique***.

Dans ce cas la résolution de l'équation caractéristique donne deux racines réelles, λ_1 et λ_2, telles que :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} = -\frac{c}{2m}\frac{\omega}{\omega} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\frac{\omega}{\omega}\right)^2 - \omega^2}$$

Or $\dfrac{c}{2m\omega} = \xi$, ce qui conduit à : $\lambda_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$

En posant : $\omega_d = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$\text{Alors : } \lambda_1 = -\xi\omega + \omega_d < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega - \omega_d < 0$$

où ω_d est la ***pulsation propre amortie***.

Vibrations libres amorties : / ***Système sur-critique*** :
Dans ce cas, la solution générale est de la forme : $u(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
A et B constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

soit : $$u(t) = Ae^{(-\xi\omega+\omega_d)t} + Be^{(-\xi\omega-\omega_d)t} = Ae^{-\xi\omega t}e^{\omega_d t} + Be^{-\xi\omega t}e^{-\omega_d t}$$

ce qui donne : $u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(Ae^{\omega_d t} + Be^{-\omega_d t}\right)$

L'expression de la vitesse $\dot{u}(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$ est :

$$\dot{u}(t) = \left[-\xi\omega\left(Ae^{\omega_d t} + Be^{-\omega_d t}\right) + A\omega_d e^{\omega_d t} - B\omega_d e^{-\omega_d t}\right]e^{-\xi\omega t}$$

$$\dot{u}(t) = \left[A\left(-\xi\omega + \omega_d\right)e^{\omega_d t} + B\left(-\xi\omega - \omega_d\right)e^{-\omega_d t}\right]e^{-\xi\omega t}$$

ou encore :

$$\dot{u}(t) = \left[A\lambda_1 e^{\omega_d t} + B\lambda_2 e^{-\omega_d t}\right]e^{-\xi\omega t}$$

Vibrations libres amorties : / ***Système sur-critique*** :

En considérant les conditions initiales, on a :

$$u(0) = u_0 = A + B$$

$$\dot{u}(0 = \dot{u}_0 = \lambda_1 A + \lambda_2 B$$

La résolution du système constitué par les deux équations fournit :

$$A = \frac{\dot{u}_0 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\dot{u}_0 - (-\xi\omega - \omega_d)u_0}{2\omega_d}$$

et

$$B = \frac{\lambda_1 u_0 - \dot{u}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(-\xi\omega + \omega_d)u_0 - \dot{u}_0}{2\omega_d}$$

Vibrations libres amorties : / *Système sur-critique* :

En introduisant A et B dans l'équation de $u(t)$, on obtient :

$$u(t) = \frac{1}{2\omega_d}\left[\left(\dot{u}_0 - (-\xi\omega - \omega_d)u_0\right)e^{\omega_d t} + \left((-\xi\omega + \omega_d)u_0 - \dot{u}_0\right)e^{-\omega_d t}\right]e^{-\xi\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\omega_d}\left[\dot{u}_0\left(e^{\omega_D t} - e^{-\omega_d t}\right) + \xi\omega u_0\left(e^{\omega_d t} - e^{-\omega_D t}\right) + \omega_d u_0\left(e^{\omega_d t} + e^{-\omega_d t}\right)\right.$$

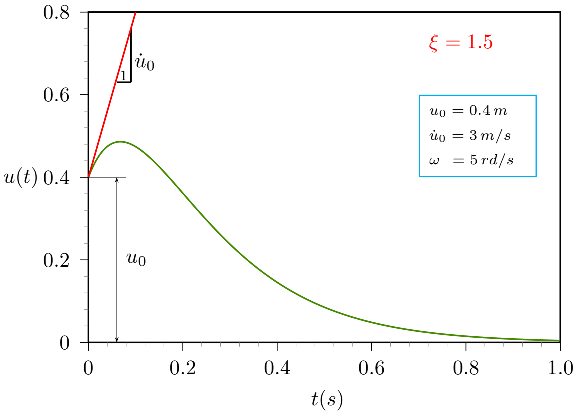
$$= \left[\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_d}\left(\frac{e^{\omega_D t} - e^{-\omega_d t}}{2}\right) + u_0\left(\frac{e^{\omega_D t} + e^{-\omega_d t}}{2}\right)\right]e^{-\xi\omega t}$$

Sachant que : $\dfrac{e^{\omega_d t} - e^{-\omega_d t}}{2} = sinh(\omega_d t)$ et $\dfrac{e^{\omega_d t} + e^{-\omega_d t}}{2} = cosh(\omega_d t)$

$$\Longrightarrow \boxed{u(t) = \left[u_0 cosh(\omega_d t) + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_d} sinh(\omega_d t)\right]e^{-\xi\omega t}}$$

Vibrations libres amorties : / ***Système sur-critique*** :

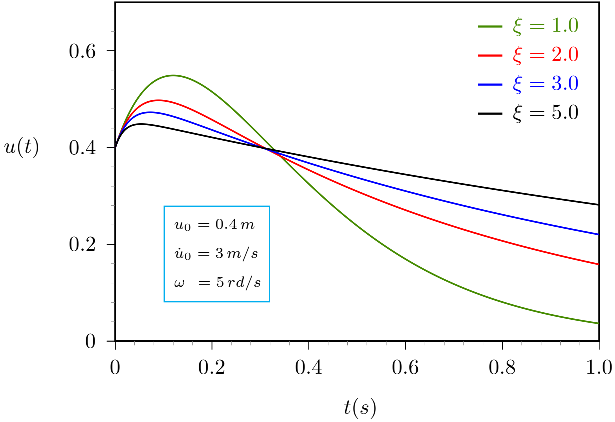
La figure représente le mouvement sur-critique.



Le mouvement d'un système sur-critique est non oscillatoire.

Vibrations libres amorties : / ***Système sur-critique*** :

La figure représente le mouvement d'un système sur-critique pour différentes valeurs du taux d'amortissement critique ξ.



Vibrations libres amorties : / ***Système sous-critique*** :
Dans ce cas $\xi < 1$ et $\xi^2 - 1 < 0$ et la résolution de l'équation caractéristique donne deux racines complexes conjuguées, λ_1 et λ_2.

En écrivant : $\xi^2 - 1 = -(1 - \xi^2) = i^2(1 - \xi^2)$, alors $1 - \xi^2 > 0$ et on a :

$$\lambda_1 = -\xi\omega + i\omega\sqrt{1 - \xi^2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = -\xi\omega - i\omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

En posant : $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}$, les racines deviennent :

$$\lambda_1 = -\xi\omega + i\omega_d \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega - i\omega_d$$

où ω_d est la ***pulsation propre amortie***.

Vibrations libres amorties : / *Système sous-critique* :

La solution générale de l'équation du mouvement s'écrit :

$$u(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad \Longrightarrow \quad u(t) = Ae^{(-\xi\omega + i\omega_d)t} + Be^{(-\xi\omega - i\omega_d)t}$$

$$\text{soit : } u(t) = \left(Ae^{i\omega_d t} + Be^{-i\omega_d t}\right) e^{-\xi\omega t}$$

où A et B sont des constantes complexes.

Comme : $e^{\pm i\omega_d t} = cos(\omega_d t) \pm isin(\omega_d t)$ alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= \left[A\left(cos(\omega_d t) + isin(\omega_d t)\right) + B\left(cos(\omega_d t) - isin(\omega_d t)\right)\right] e^{-\xi\omega t} \\ &= \left[(A + B)\, cos(\omega_d t) + i\,(A - B)\, sin(\omega_d t)\right] e^{-\xi\omega t} \end{aligned}$$

ou en posant $A_1 = A + B$ et $B_1 = i(A - B)$:

$$u(t) = \Big[A_1 cos(\omega_d t) + B_1 sin(\omega_d t)\Big] e^{-\xi\omega t}$$

A_1 et B_1 constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

Vibrations libres amorties : / ***Système sous-critique*** :

L'équation de la vitesse $\dot{u}(t)$ est telle que :

$$\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} = -\xi\omega e^{-\xi\omega t}\Big(A_1 cos(\omega_d t) + B_1 sin(\omega_d t)\Big) + e^{-\xi\omega t}\Big(A_1 cos(\omega_d t) + B_1 sin(\omega_d t)\Big)$$

ce qui conduit à :

$$\dot{u}(t) = -\Big[\Big(\xi\omega A_1 - \omega_d B_1\Big) cos(\omega_d t) + \Big(\xi\omega B_1 + \omega_d A_1\Big) sin(\omega_d t)\Big] e^{-\xi\omega t}$$

Les conditions initiales s'écrivent : $u(0) = u_0 = A_1$

et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = -(\xi\omega A_1 - \omega_d B_1) = \omega_d B_1 - \xi\omega u_0 \implies B_1 = \dfrac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\omega_D}$

Vibrations libres amorties : / ***Système sous-critique*** :

En substituant A_1 et B_1 on obtient :

$$u(t) = \left(u_0 cos(\omega_d t) + \frac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d} sin(\omega_d t) \right) e^{-\xi\omega t}$$

Si $\xi = 0$, $\omega_d = \omega$ l'expression de $u(t)$ est identique à celle de l'oscillateur élémentaire en vibrations libres non amorties.

$$\text{Comme :} u_0 cos(\omega_d t) + \frac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d} sin(\omega_d t) = \rho_0 cos(\omega_d t - \theta) \text{ , avec}$$

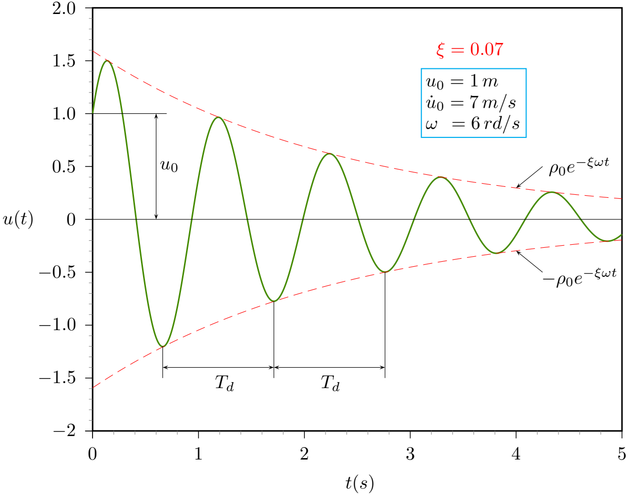
$$\rho_0 = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d} \right)^2} \quad \text{et} \quad \theta = Arctg\left(\frac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d u_0} \right)$$

et par conséquent, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\boxed{u(t) = \rho_0 e^{-\xi\omega t} cos(\omega_d t - \theta)}$$

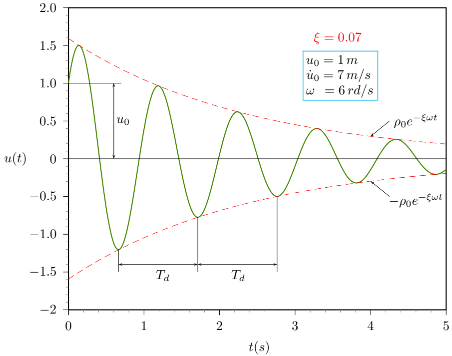
Vibrations libres amorties : / *Système sous-critique* :

La figure représente le mouvement sous-critique.



Vibrations libres amorties : / *Système sous-critique* :

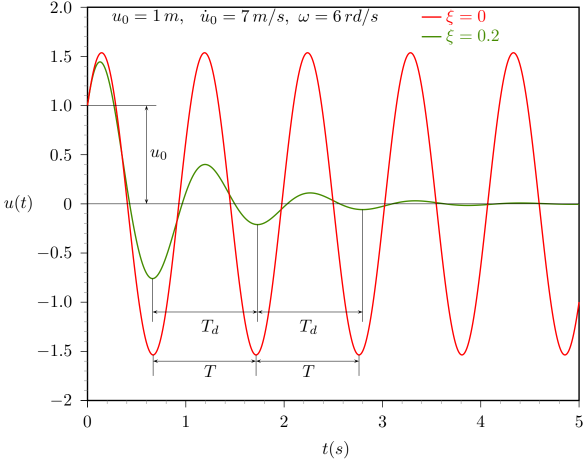
La réponse d'un système sous-amorti est oscillatoire et décroissante.



C'est une vibration harmonique dont l'amplitude décroit exponentiellement avec le temps et bornée par deux courbes enveloppes d'équations $\pm\rho_0 e^{-\xi\omega t}$.

Vibrations libres amorties : / ***Système sous-critique*** :

La figure montre le mouvement d'un oscillateur simple sous-amorti et l'oscillateur simple correspondant non amorti.



Vibrations libres amorties : / ***Système sous-critique*** :

La réponse $u(t)$ est donc ***apériodique*** (à cause du terme $\rho_0 e^{-\xi\omega t}$ qui rend $u(t)$ décroissante).

On définit la pseudo période ou ***période amortie*** T_d telle que :

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} > T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La fréquence de l'oscillateur sous-amorti notée f_d et appelée ***fréquence amortie***, s'écrit :

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\omega_d}{2\pi} < f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Vibrations libres amorties : / *Système sous-critique* :

Remarque sur la relation de ω_d et ω

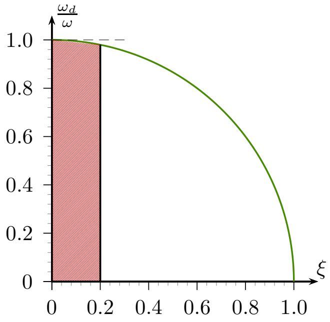
Considérant le rapport : $\dfrac{\omega_d}{\omega} = \sqrt{1-\xi^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\dfrac{\omega_d}{\omega}\right)^2 + \xi^2 = 1$

C'est l'équation d'un cercle de rayon unitaire en fonction de ξ et $\dfrac{\omega_d}{\omega}$.

Dans l'ingénierie : $0 < \xi < 0.2$.

Pour cette plage de ξ $\dfrac{\omega_d}{\omega}$ est pratiquement contant et est égal à 1.

En effet, pour des valeurs de ξ jugées petites la pulsation amortie ω_d peut être confondue avec la pulsation naturelle ω ($\omega_d \approx \omega$)sans commettre une erreur significative.



Vibrations libres amorties : / *Système sous-critique* : *Remarque sur la relation de ω_d et ω*

En effet si, par exemple, on considère

- $\xi = 0.20$, on a : $\omega_d = 0.9798\omega \implies$ une erreur de 2%.
- $\xi = 0.10$, on a : $\omega_d = 0.9950\omega \implies$ une erreur de 0.5%.
- $\xi = 0.07$, on a : $\omega_d = 0.9975\omega \implies$ une erreur de 0.25%.
- $\xi = 0.05$, on a : $\omega_d = 0.9987\omega \implies$ une erreur de 0.13%.

Vibrations libres amorties : / *Conclusion* :

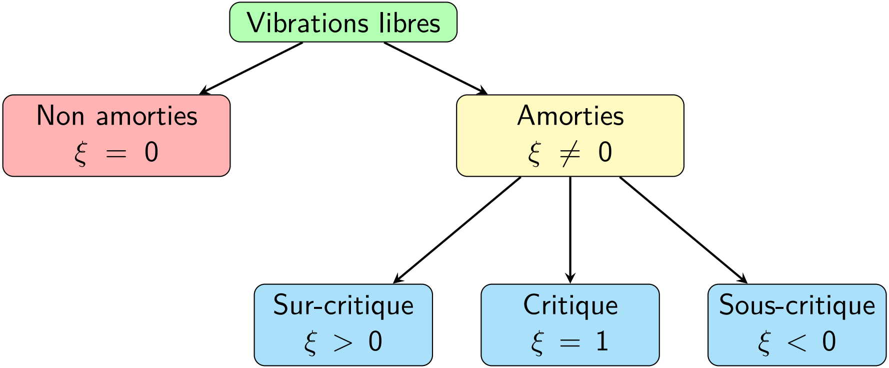
Le système à un seul degré de liberté amorti est caractérisé en terme d'amortissement par le taux d'amortissement critique ξ.

Cette grandeur est très importante dans l'étude des systèmes dynamiques et elle est très utile pour la mesure de l'amortissement d'un système.

Selon sa valeur (ξ), le système à un seul degré de liberté en vibrations libres présente deux types de mouvements :

- le premier non oscillatoire et survient pour $\xi \geq 1$,
- le deuxième oscillatoire pour $\xi < 1$.

Vibrations libres amorties : / *Conclusion* :



Vibrations libres amorties : / *Conclusion* :

Le mouvement non oscillatoire est appelé mouvement à amortissement ***sur-critique*** quand $\xi > 1$ et mouvement à amortissement ***crique*** si $\xi = 1$.

Ce dernier représente le seuil entre le mouvement oscillatoire et le mouvement non oscillatoire.
Dans ce cas le système reprend sa position d'équilibre statique sans oscillation.

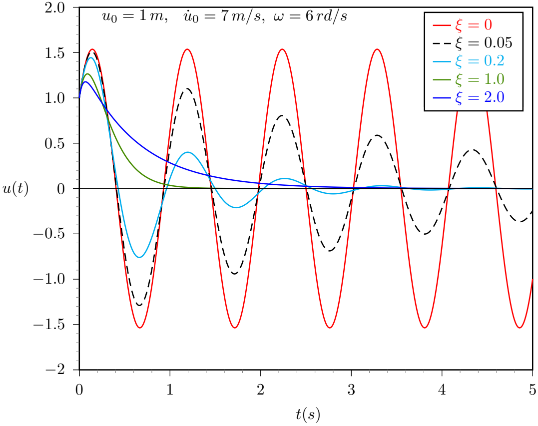
Dans le cas oscillatoire, $\xi < 1$, le mouvement est dit ***sous-cririque***.

Pour ce mouvement la réponse est représentée par une sinusoïde dont l'amplitude décroit exponentiellement en fonction du temps.

Plus le taux d'amortissement critique est proche de l'unité, plus vite le mouvement s'évanouit.

Vibrations libres amorties : / *Conclusion* :

Figure représentant la réponse dynamique d'un système simple amorti pour différentes valeurs de ξ.



Vibrations libres amorties : / ***Décrément logarithmique*** :

A l'instant t : $u(t) = \rho_0 e^{-\xi\omega t} cos(\omega_d t - \theta)$

A l'instant $t + T_d$: $u(t + T_d) = \rho_0 e^{-\xi\omega(t+T_d)} cos(\omega_d(t + T_d) - \theta)$

Comme $T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d}$, alors : $u(t + T_d) = \rho_0 e^{-\xi\omega(t+T_d)} cos(\omega_d(t + \dfrac{2\pi}{\omega_d}) - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{soit :} u(t + T_d) &= \rho_0 e^{-\xi\omega t} e^{-\xi\omega T_d} cos(\omega_d t + 2\pi - \theta) \\ &= \rho_0 e^{-\xi\omega t} cos(\omega_d t - \theta) e^{-\xi\omega T_d} \\ &= u(t) e^{-\xi\omega T_d} \end{aligned}$$

Le rapport entre les déplacements $u(t)$ et $u(t + T_d)$ mesurés à un cycle d'intervalle est :

$$\boxed{\frac{u(t)}{u(t + T_d)} = e^{\xi\omega T_d}}$$

Vibrations libres amorties : / ***Décrément logarithmique*** :

En passant au logarithme, on obtient :

$$ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T_d)}\right) = ln\left(e^{\xi\omega T_d}\right) = \xi\omega T_d$$

La grandeur $ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T_d)}\right)$ est notée δ et est appelée ***décrément logarithmi***

On a donc : $\boxed{\delta = \xi\omega T_d = \xi\omega\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ d'où : $\boxed{\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}}}$

L'expression donnant ξ en fonction de δ montre qu'on peut obtenir le taux d'amortissement critique, donc le coefficient d'amortissement c du système, expérimentalement en mesurant les déplacements à un cycle d'intervalle.

Vibrations libres amorties : / ***Décrément logarithmique*** :

Pour des valeurs faibles d'amortissement ($\xi << 1$), comme pour le cas des systèmes en génie civil, $\omega_d \approx \omega$ (car $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$), le décrément logarithmique δ s'écrit :

$$\boxed{\delta = 2\pi\xi} \quad \text{et ainsi} \quad \boxed{\xi = \frac{\delta}{2\pi}}$$

On observe que le décrément logarithmique δ des déplacements pour deux cycles consécutifs quelconque est ***constant***.

Il est aussi à noter que pour les valeurs faibles d'amortissement, les déplacemen $u(t)$ et $u(t+T_d)$ sont très proches, rendant ainsi l'estimation de ξ entachée d'imprécision.

Vibrations libres amorties : / ***Décrément logarithmique*** :
Pour remédier à cette imprécision, on utilise, dans l'évaluation de ξ, les déplacements mesurés à j cycles d'intervalle.

On posant $u_n = u(t)$ le déplacement après n cycles et $u_{n+j} = u(t + jT_d)$ le déplacement après $n + j$ cycles, c'est-à-dire à j cycles d'intervalle.

$$\begin{aligned} u(t + jT_d) &= \rho_0 e^{-\xi\omega(t+jT_d)} cos(\omega_d(t + jT_d) - \theta) \\ &= \rho_0 e^{-\xi\omega t} e^{-\xi j\omega T_d} cos(\omega_d t + j\omega_d \frac{2\pi}{\omega_d} - \theta) \\ &= \rho_0 e^{-\xi\omega t} e^{-j\xi\omega T_d} cos(\omega_d t + 2j\pi - \theta) \\ &= \rho_0 e^{-\xi\omega t} e^{-j\xi\omega T_d} cos(\omega_d t - \theta) \end{aligned}$$

Soit :

$$u(t + jT_d) = u(t) e^{-j\xi\omega T_d}$$

Vibrations libres amorties : / *Décrément logarithmique* :

Le rapport de u_n et u_{n+j} s'écrit : $\dfrac{u_n}{u_{n+j}} = e^{j\xi\omega T_d} = e^{j\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{j\delta}$

En passant au logarithme, on obtient :

$$\delta = \frac{1}{j}\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+j}}\right) = \frac{1}{j}\ln\left(\frac{u(t)}{u(t+jT_d)}\right)$$

Return

Comme $\delta = 2\pi\xi$, le taux d'amortissement critique ξ est tel que :

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2j\pi}\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+j}}\right)$$

Return

Vibrations libres amorties : / *Essai de vibration libre* :

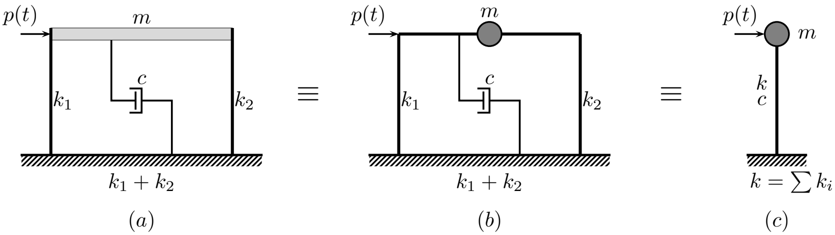
L'essai de vibration libre est réalisé afin de déterminer les propriétés dynamiques d'un oscillateur élémentaire (système à un seul degré de liberté).

Le mode opératoire de cet essai se déroule selon les étapes suivantes :

- Décaler l'oscillateur d'un déplacement $u(0) = u_0$ et le relâcher,
- enregistrer le déplacement de l'oscillateur en fonction du temps,
- mesurer le temps T_d nécessaire pour accomplir un cycle de vibration,
- mesurer u_n et u_{n+j} et calculer le décrément logarithmique δ Voir,
- calculer le taux d'amortissement critique ξ en utilisant l'équation.

Les vibrations forcées d'un système à un seul degré de liberté sont gouvernées par l'équation différentielle :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$



Excitation harmonique :

La vibration forcée harmonique est le comportement d'un système à un seul degré de liberté sur lequel agit une excitation harmonique pure de la forme $p(t) = p_0 \sin \Omega t$. L'équation du mouvement devient dans ce cas :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin \Omega t$$

La solution peut être exprimée comme : $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$
où $u_h(t)$: solution complémentaire qui satisfait l'équation homogène $(p(t) = 0)$: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$

et $u_p(t)$: solution particulière qui satisfait l'équation différentielle non homogène : $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin \Omega t$.

La résolution de l'équation différentielle de mouvement peut être aussi obtenue en utilisant la transformée de Laplace.

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

Dans ce cas $c = 0$ et l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_0 sin\Omega t$$

C'est une équation différentielle ordinaire du second non homogène à coefficients constants et sa solution est bien établie mathématiquement.

Elle s'écrit sous la forme : $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$

La solution de l'équation homogène $u_h(t)$ est identique à celle de l'équation de mouvement du système à un seul degré de liberté en vibrations libres (**??**) et s'écrit sous la forme :

$$u_h(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

Pour la solution particulière, il existe des méthodes générales pour l'obtenir. Dans ce cas, on utilise une méthode simple, dite la méthode des coefficients indéterminés où la solution particulière s'écrit sous la forme :

$$u_p(t) = Csin(\Omega t)$$

où C est une constante à déterminer.

La substitution de l'équation du mouvement conduit à :

$$-Cm\Omega^2 sin(\Omega t) + Cksin(\Omega t) = p_0 sin(\Omega t)$$

$$\Longrightarrow \left(-Cm\Omega^2 + Ck - p_0\right) sin(\Omega t) = 0$$

soit : $C\left(-m\Omega^2 + k\right) - p_0 = 0 \Longrightarrow \boxed{C = \dfrac{p_0}{k - m\Omega^2}}$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

Comme $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \implies \dfrac{m}{k} = \dfrac{1}{\omega^2}$, alors : $C = \dfrac{p_0}{k} \dfrac{1}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}}$

En posant : $\beta = \dfrac{\Omega}{\omega}$ on obtient : $C = \dfrac{p_0}{k} \dfrac{1}{1 - \beta^2}$

Ainsi, la solution particulière s'écrit : $u_p(t) = \dfrac{p_0}{k} \dfrac{1}{1 - \beta^2} sin(\Omega t)$

et la solution générale devient :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} sin(\Omega t)$$

Les constantes arbitraires A et B sont évaluées à partir des conditions initiales $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$.

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

L'expression de la vitesse est obtenue en dérivant $u(t)$:

$$\dot{u}(t) = -A\omega sin(\omega t) + B\omega cos(\omega t) + \frac{p_0}{k}\frac{\Omega}{1-\beta^2}cos(\Omega t)$$

En considérant les conditions initiales, on a : $u(0) = u_0 = A$

$$\text{et} \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 = B\omega + \frac{p_0}{k}\frac{\Omega}{1-\beta^2} \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{p_0}{k}\frac{\beta}{1-\beta^2}$$

L'équation de la réponse dynamique devient :

$$u(t) = \underbrace{u_0 cos(\omega t) + \left[\frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{p_0}{k}\frac{\beta}{1-\beta^2}\right] sin(\omega t)}_{\text{Régime transitoire}} + \underbrace{\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2} sin(\Omega t)}_{\text{Régime permanent}}$$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

L'équation de la réponse $u(t)$ contient deux parties distinctes :

- Le terme en $sin(\Omega t)$, donnant une oscillation forcée à la fréquence Ω de l'excitation.
- Les termes en $sin(\omega t)$ et $cos(\omega t)$, donnant une oscillation à la fréquence naturelle ω du système.

La première partie représente **la vibration forcée** ou **régime permanent** due à la force appliquée sans aucune relation avec les conditions initiales.

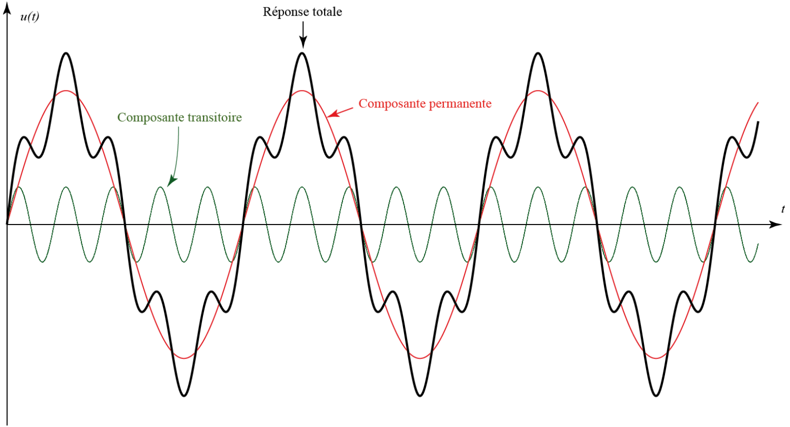
La deuxième partie représente **la vibration transitoire** ou **régime transitoire**, qui dépend des conditions initiales. Elle existe même si $u_0 = 0$ et $\dot{u}_0 = 0$.

Dans ce cas $(u_0 = \dot{u}_0 = 0)$ l'équation de la réponse dynamique devient :

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\Big(sin(\Omega t) - \beta sin(\omega t)\Big)$$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

La figure suivante montre la représentation graphique de l'équation de la réponse dynamique où $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ avec sa partie transitoire, sa partie permanente et la réponse totale.



Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

La réponse est donnée par la superposition de deux termes harmoniques de fréquences différentes. Le mouvement résultant est non harmonique.

La composante transitoire apparait comme une oscillation qui continu à l'infini.

En réalité, l'amortissement est présent dans les systémes et fait en sorte que la vibration libre décroit jusqu'à extinction. C'est la raison pour laquelle cette composante est appelé **vibration transitoire** ou **régime transitoire**.

Le terme qui se rapporte au régime permanent s'écrit :

$$u(t) = u_{st0}\frac{1}{1-\beta^2} sin(\Omega t) \quad \text{où} \qquad u_{st0} = \frac{p_0}{k}$$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

L'équation du régime permanent de la réponse peut être reformulée sous la forme : $u(t) = \rho_0 sin(\Omega t - \theta)$
où $\rho_0 > 0$ est l'amplitude de l'oscillation sinusoïdale permanente et θ une phase à $t = 0$.

$$\rho_0 = u_{st0} R_d \qquad \text{avec} \qquad \boxed{R_d = \frac{1}{|1 - \beta^2|}}$$

R_d est **le facteur d'amplification dynamique** du déplacement statique.

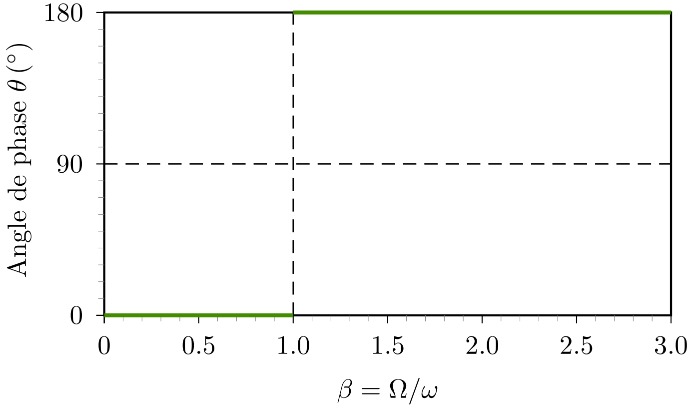
$$\text{Donc :} \quad R_d = \frac{\rho_0}{u_{st0}}$$

$$\text{L'équation de la réponse devient :} \quad u(t) = u_{st0} R_d sin(\Omega t - \theta)$$

$$\text{avec} \qquad \theta = \begin{cases} 0^\circ & si \quad \Omega < \omega \\ 180^\circ & si \quad \Omega > \omega \end{cases}$$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

La figure montre la variation de l'angle de phase θ en fonction du rapport des pulsations $\beta = \dfrac{\Omega}{\omega}$.



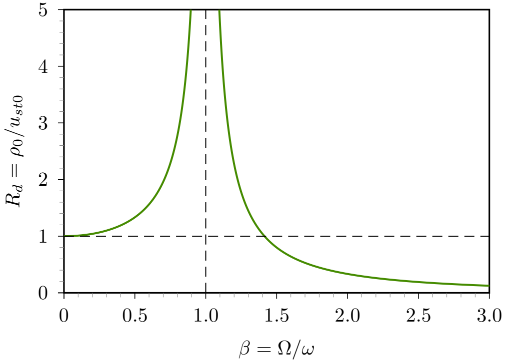
Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

Il s'en suit que :

- pour $\Omega < \omega$, $\theta = 0°$ $\Longrightarrow$ $u(t) = u_{st0} R_d sin(\Omega t - 0) = u_{st0} R_d sin(\Omega t)$
  le déplacement varie comme $sin(\Omega t)$, ***en phase*** avec la force appliquée.
- pour $\Omega > \omega$,
  $\theta = 180°$ $\Longrightarrow$ $u(t) = u_{st0} R_d sin(\Omega t - 180) = -u_{st0} R_d sin(\Omega t)$
  le déplacement varie comme $-sin(\Omega t)$, e***n opposition de phase*** avec la force appliquée.

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

Le facteur d'amplification dynamique $R_d = \dfrac{\rho_0}{u_{st0}} = \dfrac{1}{|1-\beta^2|}$ est représenté par la figure suivante :



Vibration forcée harmonique d'un système non amorti :

La figure représentant les variations de R_d en fonction de β, permet d'émettre plusieurs observations :

- si $\beta = \Omega/\omega$ est petit (la force varie lentement), R_d est légèrement plus grand que 1 $\implies \rho_0 \backsimeq u_{st0}$.
- si $\beta = \Omega/\omega > \sqrt{2}$ $(\Omega > \omega\sqrt{2})$, $R_d < 1 \implies \rho_0 < u_{st0}$
  Lorsque $\beta \longrightarrow \infty$, $R_d \longrightarrow 0 \implies$ le déplacement vibratoire dû à une force "variant rapidement" est très petit.
- si β est proche de 1 (i.e. Ω est proche de ω), R_d plusieurs fois plus grand due 1, ce qui implique que l'amplitude du déplacement est beaucoup grande que le déplacement statique.
- quand $\beta = 1$ $(\Omega = \omega)$, il y a ***résonance d'amplitude***, c'est-à-dire R_d tend vers l'infini et le déplacement $u(t)$ tend vers l'infini en un temps infiniment grand.

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti / Résonance :

Quand la fréquence $\Omega = \omega$, $\beta \longrightarrow 1$

Le facteur d'amplification dynamique $R_d = \dfrac{1}{|1-\beta^2|} \longrightarrow \infty$

et ainsi le déplacement dynamique $u(t) = u_{st0} R_d sin(\Omega t)$ croit indéfiniment avec le temps bien que l'amplitude du chargement harmonique soit finie. Ce phénomène est appelé ***résonance***.

Dans le cas où Ω=ω, l'équation du mouvement $u(t) = u_{st0} R_d sin(\Omega t)$ n'a plus de sens, car elle tend à l'infini à tout instant.

Dans ce cas, la solution particulière de l'équation différentielle de mouvement est de la forme :

$$u_p(t) = Ctcos(\omega t) \qquad (\text{pour } \Omega = \omega)$$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti / Résonance :

En substituant cette expression dans l'équation de mouvement, on obtient :

$$m\left(-2C\omega sin(\omega t) - Ct\omega^2 cos(\omega t)\right) + k\left(Ctcos(\omega t)\right) = p_0 sin(\omega t)$$

$$\text{soit :}\quad \left(-2mC\omega - p_0\right) sin(\omega t) + \left(k - m\omega^2\right) Ctcos(\omega t) = 0$$

or $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \implies k = m\omega^2$, ce qui conduit à : $\left(-2mC\omega - p_0\right) sin(\omega t) = 0$
Donc $-2mC\omega - p_0 = 0$, ce qui donne : $C = -\dfrac{p_0}{2k}\omega$.
En considérant la solution de l'équation homogène, la réponse dynamique est donnée par : $u(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t) - \dfrac{p_0}{2k}\omega tcos(\omega t)$
où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales : $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$.

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti / Résonance :

Ce qui donne pour la constante A : $u(0) = u_0 = A \implies A = u_0$

Pour la constante B, on considère la vitesse qui s'écrit :

$$\dot{u}(t) = -A\omega sin(\omega t) + B\omega cos(\omega t) - \frac{p_0}{2k}\omega(cos(\omega t) - t\omega sin(\omega t))$$

et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = B\omega - \frac{p_0}{2k}\omega \implies B = \frac{\dot{u}_0}{\omega} + \frac{p_0}{2k}$

Ainsi, la réponse dynamique devient :

$$u(t) = u_0 cos(\omega t) + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega} + \frac{p_0}{2k}\right) sin(\omega t) - \frac{p_0}{2k}\omega t cos(\omega t)$$

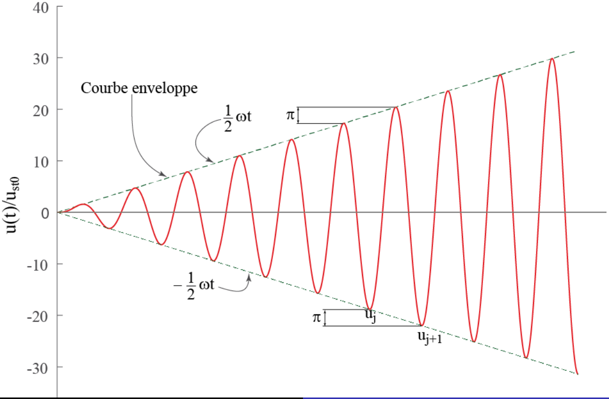
Dans le cas où $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ et $= 0$, la réponse s'écrit :

$u(t) = \frac{p_0}{2k}\Big(sin(\omega t) - \omega t cos(\omega t)\Big) = \frac{u_{st0}}{2}\Big(sin(\omega t) - \omega t cos(\omega t)\Big)$ Soit

$$\frac{u(t)}{u_{st0}} = \frac{1}{2}\Big(sin(\omega t) - \omega t cos(\omega t)\Big)$$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti / Résonance :

La figure ci-dessous représente l'équation précédente qui montre que la réponse dynamique croit linéairement et elle tend vers l'infini pour un temps infiniment long.



Vibration forcée harmonique d'un système non amorti / Résonance :

Sachant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ce qui donne : $\frac{u(t)}{u_{st0}} = \frac{1}{2}\left(sin(\frac{2\pi}{T}t) - \frac{2\pi}{T}tcos(\frac{2\pi}{T}t)\right)$
Il apparait que clairement que le temps pour accomplir un cycle est T (période naturelle).
En considérant deux cycles consécutifs j et $j+1$, on a :

- Pour le cycle j, $t = jT$

$$\frac{u(jT)}{u_{st0}} = \frac{u_j}{u_{st0}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{sin(2j\pi)}_{0} - 2j\pi \underbrace{cos(2j\pi)}_{1}\right) = -j\pi$$

- Pour le cycle $j+1$, $t = (j+1)T$

$$\frac{u_{j+1}}{u_{st0}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{sin(2(j+1)\pi)}_{0} - 2(j+1)\pi \underbrace{cos(2(j+1)\pi)}_{1}\right) = -(j+1)\pi$$

Vibration forcée harmonique d'un système non amorti / Résonance :

La différence d'amplitude entre deux cycles consécutifs est donc :

$$\left|\frac{u_{j+1}}{u_{st0}}\right| - \left|\frac{u_j}{u_{st0}}\right| = (j+1)\pi - j\pi = \pi \quad \Longrightarrow \quad |u_{j+1}| - |u_j| = \pi u_{st0} = \frac{\pi p_0}{k}$$

Donc, dans chaque cycle l'amplitude croit de $\frac{\pi p_0}{k}$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti :

Pour un système amorti, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_0 sin\Omega t$$

La division des deux membres de l'équation (112) par m donne :

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = \frac{p_0}{m} sin\Omega t$$

Comme $k/m = \omega^2$ et $c/m = 2\xi\omega$, alors l'équation (112) devient :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{p_0}{m} sin\Omega t$$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti :

L'utilisation de différentes techniques mathématiques à l'instar de la transformé de Laplace fournit la solution de l'équation différentielle qui s'écrit :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}(A cos\omega_d t + B sin\omega_d t) + \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left((1-\beta^2)sin\Omega t - 2\xi\beta cos\Omega t\right)$$

$$\text{avec :} \quad A = \frac{p_0}{k}\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} + u(0)$$

$$\text{et} \quad B = \frac{p_0}{k}\frac{\omega}{\omega_d}\left(\frac{2\xi^2\beta - \beta(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\right) + \frac{\dot{u}(0) + u(0)\omega\xi}{\omega_d}$$

Le premier terme de l'équation $u(t)$ correspond au *régime transitoire* qui disparait rapidement à cause du terme exponentiel $e^{-\xi\omega t}$.
Le deuxième terme représente le *régime permanent*.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti :
Les figures montrent une représentation graphique de la réponse transitoire, permanente et totale de deux systèmes élémentaires soumis à une charge harmonique avec des conditions initiales nulles et des taux d'amortissement différents.

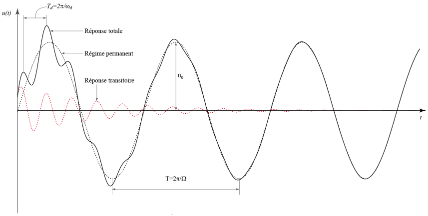


FIGURE – $\beta = 0.2$ et $\xi = 0.05$

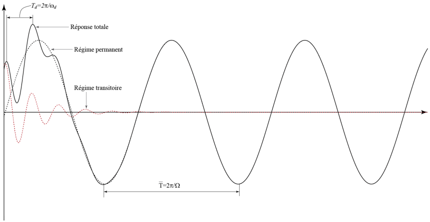


FIGURE – $\beta = 0.2$ et $\xi = 0.05$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti :

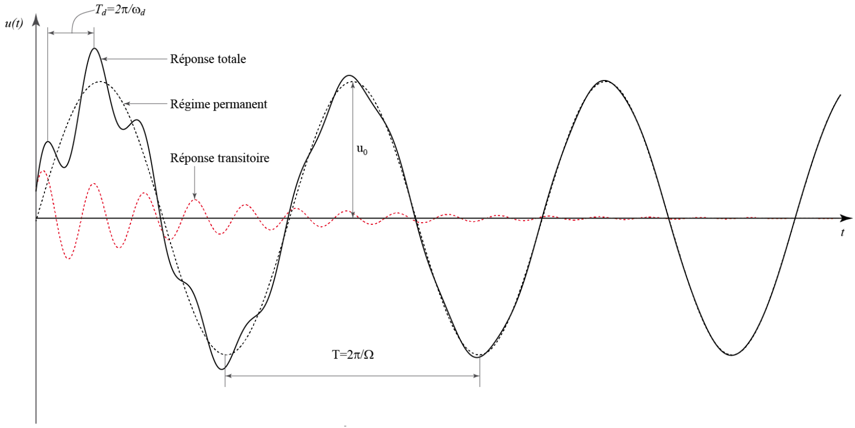


FIGURE – $\beta = 0.2$ et $\xi = 0.05$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti :

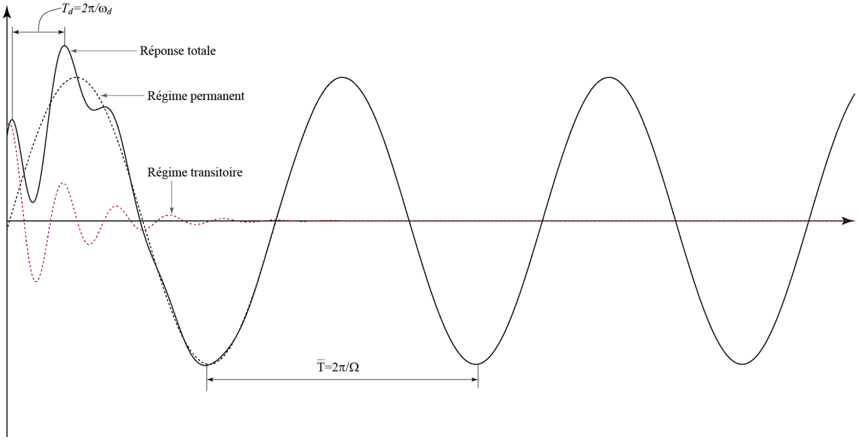


FIGURE – $\beta = 0.2$ et $\xi = 0.05$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti :

Il est à noter que la partie transitoire de la réponse totale s'amenuise rapidement suivant un rythme qui dépend de ω et ξ.

Après un temps suffisant pour l'évanouissement du régime transitoire, il ne persiste que le régime permanent (ou régime établit) représenté par le deuxième terme de l'équation de la réponse dynamique :

$$\frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left((1-\beta^2)sin\Omega t-2\xi\beta cos\Omega t\right)$$

Ce terme représente une oscillation à la même fréquence Ω que la force appliquée mais avec un certain déphasage.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

La réponse permanente $u_p(t)$ s'écrit :

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\Big((1-\beta^2)sin\Omega t - 2\xi\beta cos\Omega t\Big)$$

$u_p(t)$ peut s'écrire sous la forme : $u_p(t) = u_0 sint(\Omega i - \theta)$.

En effet, on considère l'expression :

$$h(t) = (1-\beta^2)sin\Omega t - 2\xi\beta cos\Omega t$$

elle s'écrit sous la forme : $h(t) = asin\Omega t - bcos\Omega t$

$$\text{avec} \quad a = 1-\beta^2 \text{ et } b = 2\xi\beta$$

.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

En considérant le complexe $z = a + ib$, on sait que : $z = r(cos\theta + isin\theta)$
avec : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ et $a = rcos\theta$, $b = rsin\theta$

Ce qui conduit à :
$h(t) = rcos\theta sin\Omega t - rsin\theta cos\Omega t = r\left(cos\theta sin\Omega t - sin\theta cos\Omega t\right)$

or $cos\theta sin\Omega t - sin\theta cos\Omega t = sin(\Omega t - \theta) \implies h(t) = rsin(\Omega t - \theta)$
et par conséquent, la réponse permanente s'écrit :

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}(rsin(\Omega t - \theta))$$

$$\text{où} \quad r = \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad et \quad \theta = arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

La réponse permanente prend alors la forme suivante :

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} (sin(\Omega t - \theta))$$

$$\text{soit :} \quad u_p(t) = \rho_0 (sin(\Omega t - \theta))$$

$$\text{Avec :} \quad \rho_0 = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad \text{et} \quad \theta = arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

où

ρ_0 : l'amplitude de la réponse forcée.

θ : l'angle de déphasage entre la réponse et l'excitation.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

On définit *le facteur d'amplification dynamique* du déplacement comme étant le rapport de l'amplitude du mouvement ρ_0 au déplacement statique $u_{st0} = p_0/k$.

Le facteur d'amplification dynamique est donc une grandeur sans dimension qui s'écrit comme suit :

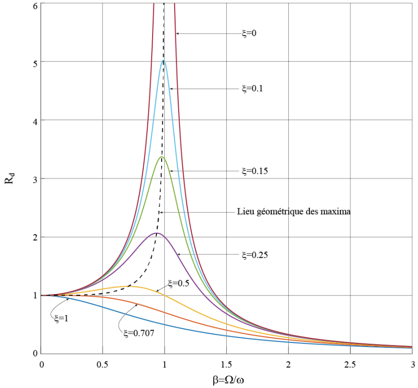
$$R_d = \frac{\rho_0}{u_{st0}} = \frac{\rho_0}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Le déphasage θ et le facteur d'amplification dynamique R_d sont fonction

du rapport des pulsations ou pulsation relative $\beta = \Omega/\omega$ et du taux d'amortissement critique ξ.

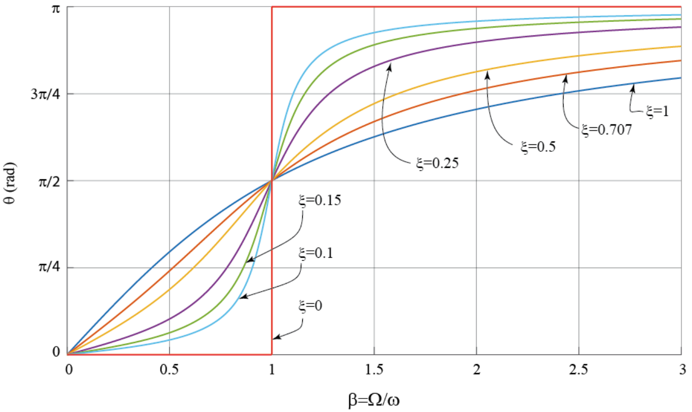
Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

La figure représente les variations de R_d en fonction de β pour différentes valeurs du taux d'amortissement critique ξ.



Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

La figure représente les variations de θ en fonction de β pour différentes valeurs du taux d'amortissement critique ξ.



Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

En introduisant l'expression de R_d, la réponse permanente aura pour expression

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} R_d(sin(\Omega t - \theta))$$

La valeur β_m rendant R_d maximum est celle minimisant le dénominateur

de sont expression. Soit :

$$\frac{d}{d\beta}\left((1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{(-4\beta(1-\beta^2) + 4\beta(2\xi^2)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2)}}\right) = 0$$

ce qui conduit à l'équation suivante : $\beta(-1 + \beta^2 + 2\xi^2) = 0$
qui admet deux solutions.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

La première solution, $\beta = 0$, donne $R_d = 1$ ce qui correspond au déplacement statique maximum $u_{st0} = p_0/k$ et un maximum de R_d pour $\xi \geq \sqrt{2}/2$.

La deuxième solution non nulle est :$\beta_m = \sqrt{1 - 2\xi^2}$
et la pulsation correspondante est : $\omega_{rd} = \omega\sqrt{1 - 2\xi^2}$
où ω_{rd} est la *pulsation à la résonance du déplacement*.

En remplaçant, dans l'expression de R_d, β par l'expression de β_m on obtient *Le facteur d'amplification dynamique maximum* qui s'écrit :

$$R_{dmax} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}} = \frac{1}{2\xi}\frac{\omega}{\omega_{rd}}$$

La résonance d'amplitude est obtenue quand la valeur absolue de l'amplitude du déplacement ρ_0 est maximum, donc quand $R_d = R_{dmax}$.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

Les points suivants sont notés à propos de $u_p(t)$ et R_d :

1. $R_d = 1$ quand $\beta = 0$. Dans ce cas la force excitatrice est constante. La force élastique maximale =la force excitatrice.
2. $lim_{\beta \to \infty} R_d(\beta, \xi) = 1/\beta^2$. L'amplitude de la réponse forcée est très petite pour les excitations à haute fréquence.
3. Pour une valeur donnée de β, R_d décroit avec l'augmentation de ξ.
4. R_d augmente sans limite seulement pour $\xi = 0$. Pour $0 < \xi \leq 1/\sqrt{2}$, R_d a une valeur maximale finie.
5. Pour $0 < \xi \leq 1/\sqrt{2}$,max(R_d) est atteint pour $\beta_m = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ et $R_{dmax} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}$.
6. Pour $\xi = 1/\sqrt{2}$, $dR_d/d\beta = 0$ pour $\beta = 0$. Pour $\xi \geq 1/\sqrt{2}$, il n'y a pas de valeurs réelles β_m. $R_d(\beta, \xi)$ n'a pas de maximum. Il décroit avec l'augmentation de β et avoisine zéro comme $1/\beta^2$ pour les grandes valeurs de β.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Régime permanent

De même, les points suivants sont notés à propos de l'angle de déphasage θ et la figure le représentant :

1. Si $\xi > 0$ et $0 < \beta < 1$, alors $0 < \theta < \pi/2$. La réponse est en retard par rapport à l'excitation.
2. Si $\xi > 0$ et $\beta = 1$, alors $\theta = \pi/2$. l'excitation est en phase avec la vitesse.
3. Si $\xi > 1$ et $\beta > 1$, alors $\pi/2 < \theta < \pi$. La réponse est en avance par rapport à l'excitation.
4. Si $\xi > 1$ et $\beta >> 1$, alors $\theta \approx \pi$. La réponse et l'excitation sont en opposition de phase, elles sont de signes opposées.
5. Pour $\xi = 0$, la réponse est en phase avec l'excitation pour $\beta < 1$ et en opposition de phase de π radians (180°) pour $\beta > 1$.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

La **résonance** est atteinte quand la pulsation de la force excitatrice est égale à la pulsation propre du système. c'est-à-dire $\Omega = \omega$ soit $\beta = 1$.

Pour $\beta = 1$ et $u(0) = u_0 = 0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = 0$,l'équation de la réponse totale du système soumis à une excitation harmonique s'écrit :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) - \frac{p_0}{k}\frac{cos\omega t}{2\xi}$$

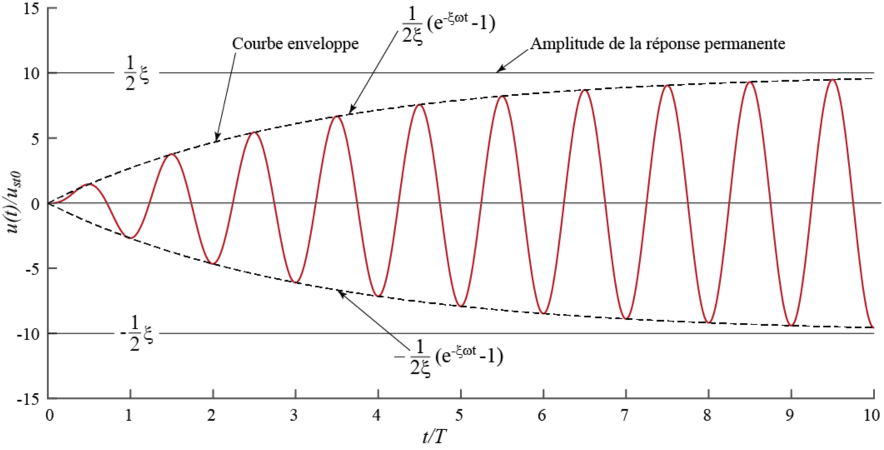
Avec : $A = \frac{p_0}{k}\frac{\omega}{2\omega_d} = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}$, $\quad B = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}$ $\quad$ et $\quad p_0/k = u_{st0}$

$$\text{alors : } u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}\left[e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}sin\omega_d t + cos\omega_d t\right) - cos\omega t\right]$$

$$\text{donc : } u(t) = \frac{u_{st0}}{2\xi}\left[e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}sin\omega_d t + cos\omega_d t\right) - cos\omega t\right]$$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

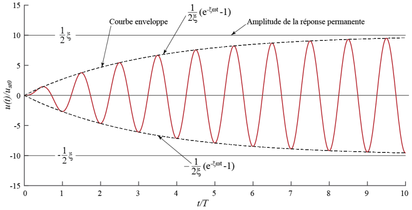
La figure suivante est une représentation graphique de l'équation de la résonance pour un système amorti avec $\xi = 0.05$.

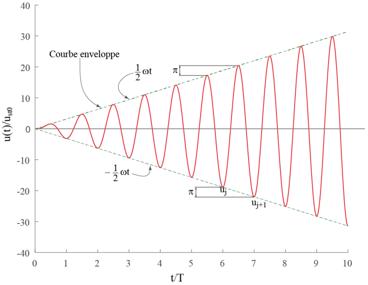


Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

Une comparaison entre un système forcé amorti et un système forcé non-amorti montre que l'amortissement réduit chaque pic et limite la réponse à la valeur :

$$\rho_0 = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi} = \frac{u_{st0}}{2\xi}$$





Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

En effet, quand le temps t devient grand, $e^{-\xi\omega t} = 1/e^{\xi\omega t} \longrightarrow 0$

et $e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} sin\omega_d t + cos\omega_d t\right) \longrightarrow 0$

$$\text{Ainsi la réponse s'écrit :} \quad u(t) = \frac{u_{st0}}{2\xi}\left[-cos\omega t\right]$$

$$\text{or } -1 \leq cos\omega t \leq 1 \implies |u(t)| \leqslant u_{st0}/2\xi = \rho_0$$

qui est la valeur maximale de la réponse en régime permanent (ou régime établi) à la résonance ($\Omega = \omega$).

Pour le cas des systèmes légèrement amortis, telles que les structures de génie civil, $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$ et donc $\omega_d \approx \omega$, alors la réponse devient :

$$u(t) = \frac{u_{st0}}{2\xi}\left[e^{-\xi\omega t}\left(\xi sin\omega t + cos\omega t\right) - cos\omega t\right]$$

$$\text{soit :} \quad u(t) = \frac{u_{st0}}{2\xi}\left[\xi e^{-\xi\omega t} sin\omega t + (e^{-\xi\omega t} - 1)cos\omega t\right]$$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

La réponse est dans ce cas constituée de deux termes. Le premier en sinus, noté $u_s(t)$, et le second en cosinus, noté $u_c(t)$, tels que :

$$u_s(t) = \frac{u_{st0}}{2} e^{-\xi\omega t} sin\omega t, \quad et \quad u_c(t) = \frac{u_{st0}}{2\xi}(e^{-\xi\omega t} - 1)cos\omega t$$

De plus, pour les faibles valeurs de ξ, le terme en sinus contribue faiblement dans la réponse totale et il est **négligé** devant le terme en cosinus. l'équation (131) devient :

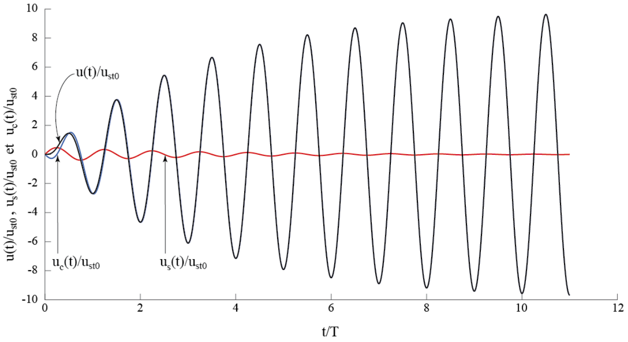
$$u(t) = \frac{u_{st0}}{2\xi}(e^{-\xi\omega t} - 1)cos\omega t$$

La réponse totale varie donc en fonction du temps comme une fonction cosinus.

L'amplitude croit selon la fonction enveloppe : $(u_{st0}/2\xi)(e^{-\xi\omega t} - 1)$.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

La figure montre la réponse totale $u(t)$ et les contributions du terme en sinus $u_s(t)$ et du terme en cosinus $u_c(t)$.



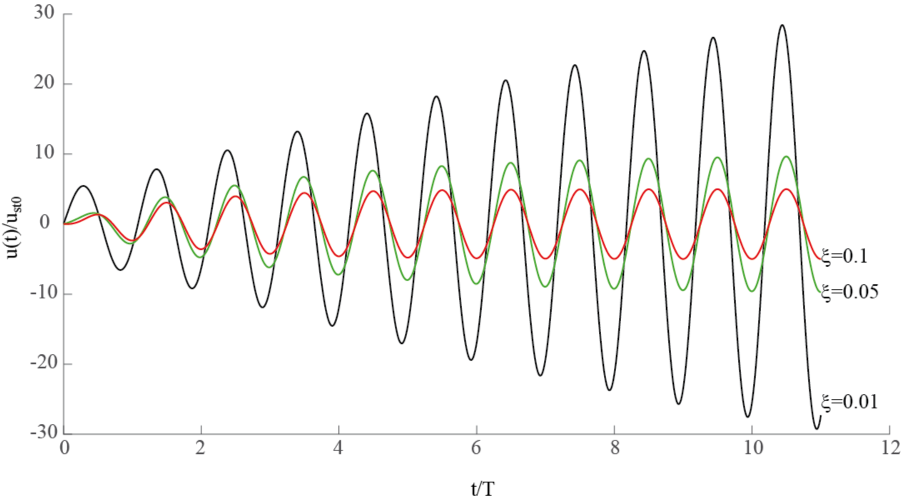
Il apparait clairement que la contribution du terme en sinus est insignifiante dés les premiers cycles de vibration.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

A la résonance ($\Omega = \omega$), pour un système amorti soumis à une force harmonique, le rythme avec lequel le régime permanent (le régime établi) est atteint ainsi que l'amplitude de ce régime sont fortement influencés par l'amortissement du système.

L'influence importante du taux d'amortissement critique ξ est montrée sur la figure représentant graphiquement la réponse pour trois taux d'amortissemen
$\xi = 0.01, \xi = 0.05$ et $\xi = 0.1$.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance



Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

Pour étudier comment la réponse s'accumule jusqu'à atteindre le régime permanent, on examine le pic u_j après j cycles de vibration.

Une relation entre le pic u_j et le nombre de cycles j nécessaires pour l'atteindre peut être obtenue en remplaçant t par jT dans l'équation de la réponse qui s'écrit :

$$u_j = \frac{u_{st0}}{2\xi}(e^{-\xi\omega jT} - 1)cos(\omega jT)$$

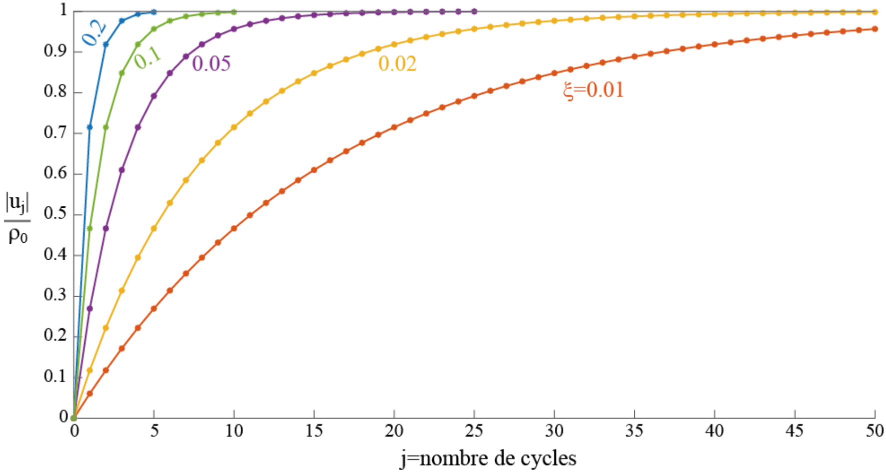
or $\omega = 2\pi/T$, donc : $cos(\omega jT) = cos(\frac{2\pi}{T}jT) = cos(2\pi) = 1$

et par conséquent : $u_j = \frac{u_{st0}}{2\xi}(e^{-\xi\omega jT} - 1) = \rho_0(e^{-\xi\omega jT} - 1)$

Finalement, on obtient : $\frac{|u_j|}{\rho_0} = 1 - e^{-\xi\omega t}$

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

La figure donne une représentation pour $\xi = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$ et 0.2.



Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

La figure montre bien que plus l'amortissement est faible, plus le nombre de cycles nécessaires pour atteindre un certain pourcentage de l'amplitude ρ_0 du régime permanent est grand.

Par exemple, pour atteindre 95% de ρ_0, il faut :

- 48 cycles pour $\xi = 0.01$,
- 24 pour $\xi = 0.02$,
- 10 pour $\xi = 0.05$,
- 5 pour $\xi = 0.01$,
- et 2 pour $\xi = 0.2$.

Vibration forcée harmonique d'un système amorti : Résonance

La théorie développée pour le cas du système élémentaire amorti excité par une force harmonique peut s'appliquer pour le cas non amorti en annulant l'amortissement ($\xi = 0$).

En effet, pour $\xi = 0$, les équations donnant le facteur d'amplification dynamique R_d et l'angle de déphasage θ deviennent pour $\xi = 0$:

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 - (0)^2}} = \frac{1}{|1-\beta^2|} \qquad (1)$$

et

$$\theta = arctg\left(\frac{0}{1-\beta^2}\right) = \begin{cases} 0^\circ & si \quad \beta < 1 \\ 180^\circ & si \quad \beta > 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Ce qui correspond aux équations précédemment développées pour un système élémentaire non amorti soumis à une force harmonique.

Embedded Animation