

# ÉLASTICITÉ

---

Pr. H. BOUZERD

Université de Skikda

2020/2021

## Élasticité

Enseignant : *H. BOUZERD*

Spécialité : Matériaux en Génie Civil

Niveau : Master 1

Semestre : 1

Unité d'Enseignement : UEF 1.1.1

Crédits : 4

Coefficient : 2

**Mode d'évaluation :**

- Examen final : 60%
- Contrôle continu : 40%

*Année universitaire 2020/2021*



# Programme

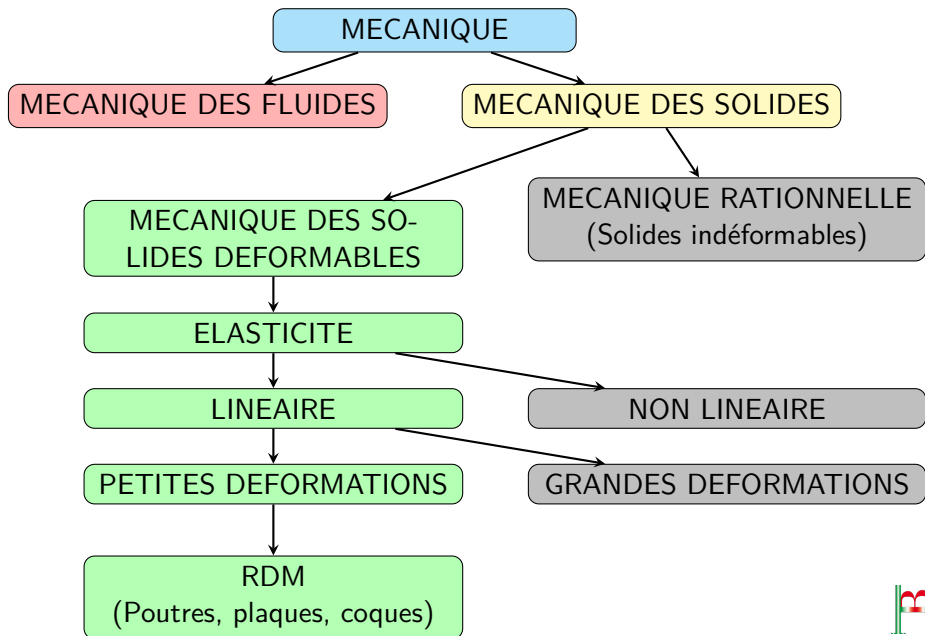
Chapitre 1 : Généralités sur la théorie d'élasticité.

Chapitre 2 : Théorie de l'état de contraintes.

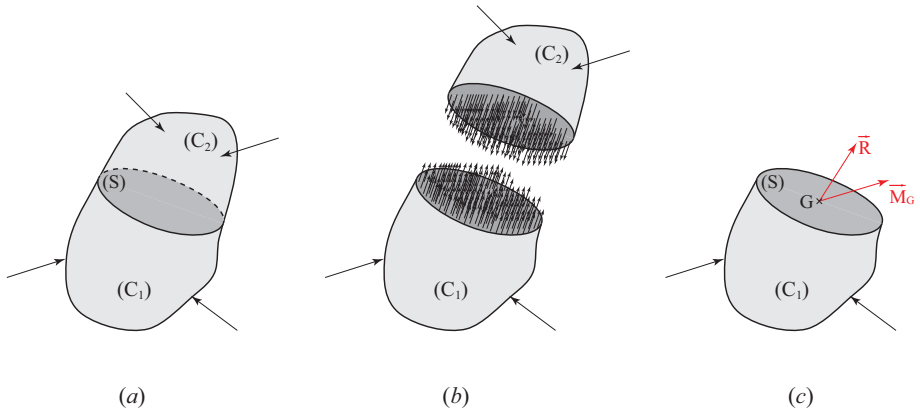
Chapitre 3 : Théorie de l'état de déformation.

Chapitre 4 : Relations entre les contraintes et les déformation.

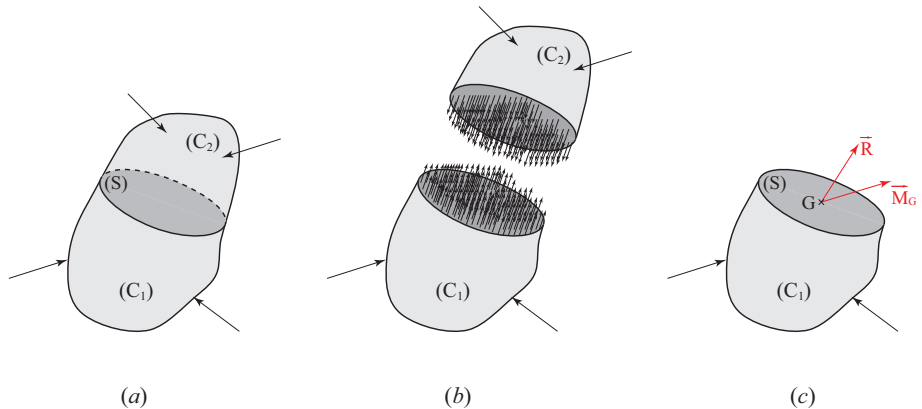




Les efforts internes ou forces de **cohésion** sont des actions mécaniques qu'exerce la partie ( $C_2$ ) sur la partie ( $C_1$ ) du corps ( $C$ ) à travers la section droite **fictive** ( $S$ ).



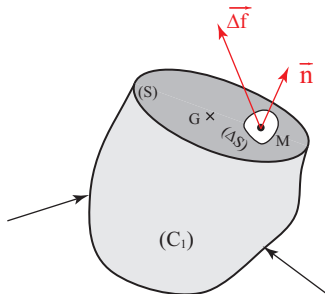
En RDM, les efforts internes sont représentées au centre de gravité  $G$  d'une section  $(S)$  par les éléments de réduction  $\vec{R}$  et  $\vec{M}_G$ .



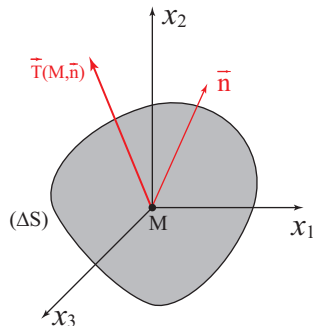
$\vec{R}$  Résultante de toutes les forces internes s'exerçant sur la section  $(S)$ .  
 $\vec{M}_G$  Résultante des les moments des forces internes s'appliquant sur  $(S)$ .



Considérant un point  $M$  de la section  $(S)$  entouré d'une surface élémentaire (**facette**)  $\Delta S$  orientée par sa normale extérieure  $\vec{n}$ .



(a)

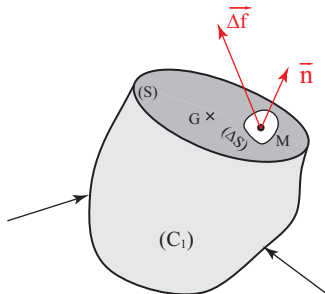


(b)

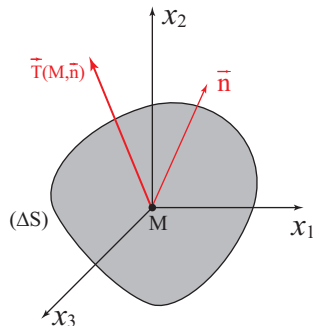
Au point  $M$  s'applique une **action mécanique élémentaire**  $\Delta \vec{f}$  qui représente les efforts internes en ce point relativement à la facette  $\Delta S$ .



Considérant un point  $M$  de la section  $(S)$  entouré d'une surface élémentaire (**facette**)  $\Delta S$  orientée par sa normale extérieure  $\vec{n}$ .



(a)



(b)

Au point  $M$  s'applique une **action mécanique élémentaire**  $\vec{\Delta f}$  qui représente les efforts internes en ce point relativement à la facette  $\Delta S$ .

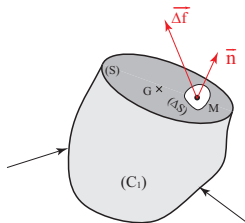




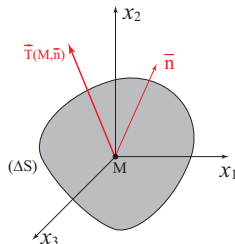
**Définition** : On appelle vecteur contrainte au point  $M$ , relativement à la surface élémentaire  $\Delta S$  (facette), orientée par la normale  $\vec{n}$ , le vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n})$ ,

tel que : 
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

◀ Return



(a)



(b)

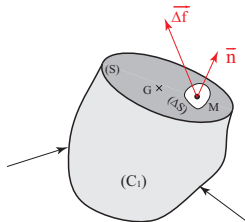
La figure montre une force élémentaire  $\Delta \vec{f}$  et le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  agissant en un point  $M$  sur une facette  $\Delta S$  de normale  $\vec{n}$ .



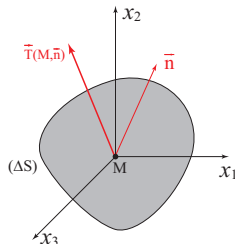
**Définition** : On appelle vecteur contrainte au point  $M$ , relativement à la surface élémentaire  $\Delta S$  (facette), orientée par la normale  $\vec{n}$ , le vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n})$ ,

tel que : 
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

◀ Return



(a)



(b)

La figure montre une force élémentaire  $\Delta \vec{f}$  et le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  agissant en un point  $M$  sur une facette  $\Delta S$  de normale  $\vec{n}$ .



Soit le point M l'origine du système  $x_1, x_2$  et  $x_3$  avec  $x_1$  normal à  $\Delta S$  ( $\vec{n} = \vec{e}_1$ ) et  $x_2, x_3$  tangents à  $\Delta S$ , alors :  $\Delta \vec{f} = \Delta f_1 \vec{e}_1 + \Delta f_2 \vec{e}_2 + \Delta f_3 \vec{e}_3$ , et

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta S} \right) \vec{e}_1 + \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta S} \right) \vec{e}_2 + \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_3}{\Delta S} \right) \vec{e}_3$$

On définit :

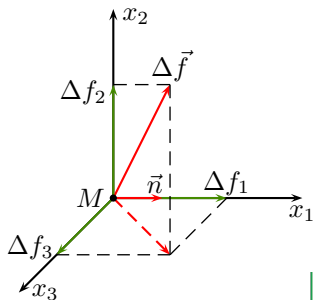
- la contrainte normale :

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta S} = \frac{df_1}{dS}$$

- les contraintes tangentielles :

$$\sigma_{12} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta S} = \frac{df_2}{dS}$$

et  $\sigma_{13} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_3}{\Delta S} = \frac{df_3}{dS}$



Soit le point M l'origine du système  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  avec  $x_1$  normal à  $\Delta S$  ( $\vec{n} = \vec{e}_1$ ) et  $x_2$ ,  $x_3$  tangents à  $\Delta S$ , alors :  $\Delta \vec{f} = \Delta f_1 \vec{e}_1 + \Delta f_2 \vec{e}_2 + \Delta f_3 \vec{e}_3$ , et

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta S} \right) \vec{e}_1 + \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta S} \right) \vec{e}_2 + \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_3}{\Delta S} \right) \vec{e}_3$$

On définit :

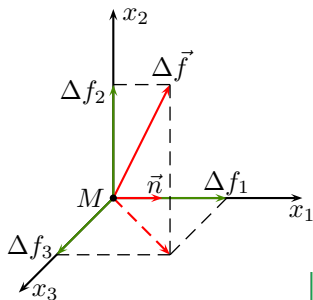
- la contrainte normale :

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta S} = \frac{df_1}{dS}$$

- les contraintes tangentielles :

$$\sigma_{12} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta S} = \frac{df_2}{dS}$$

et 
$$\sigma_{13} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_3}{\Delta S} = \frac{df_3}{dS}$$



Soit le point M l'origine du système  $x_1, x_2$  et  $x_3$  avec  $x_1$  normal à  $\Delta S$  ( $\vec{n} = \vec{e}_1$ ) et  $x_2, x_3$  tangents à  $\Delta S$ , alors :  $\Delta \vec{f} = \Delta f_1 \vec{e}_1 + \Delta f_2 \vec{e}_2 + \Delta f_3 \vec{e}_3$ , et

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta S} \right) \vec{e}_1 + \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta S} \right) \vec{e}_2 + \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_3}{\Delta S} \right) \vec{e}_3$$

On définit :

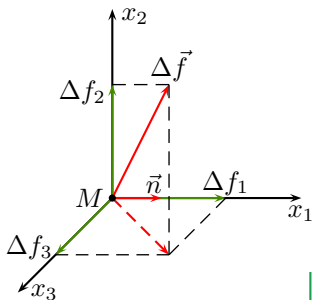
- la contrainte normale :

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta S} = \frac{df_1}{dS}$$

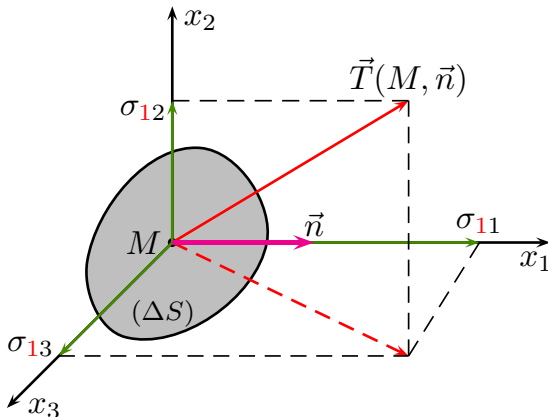
- les contraintes tangentielles :

$$\sigma_{12} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta S} = \frac{df_2}{dS}$$

et  $\sigma_{13} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_3}{\Delta S} = \frac{df_3}{dS}$



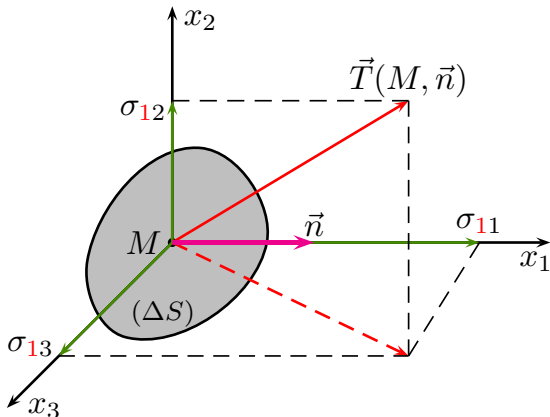
Soit :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$



$\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$  sont les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur l'élément de surface  $\Delta S$  (facette) de normale  $\vec{n} = \vec{e}_1(\vec{x}_1)$  au point  $M$ .



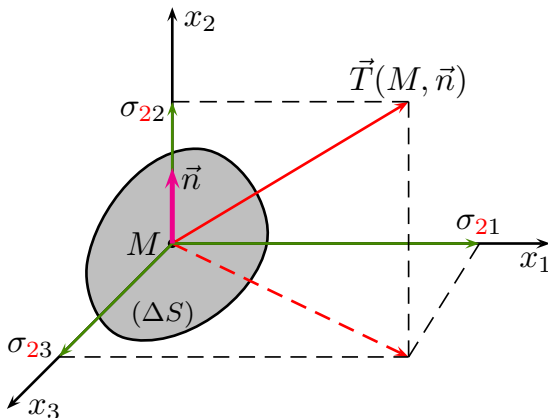
Soit :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$



$\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$  sont les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur l'élément de surface  $\Delta S$  (facette) de normale  $\vec{n} = \vec{e}_1(\vec{x}_1)$  au point  $M$ .



Si  $\vec{n} = \vec{e}_2$  :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{e}_2) = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$

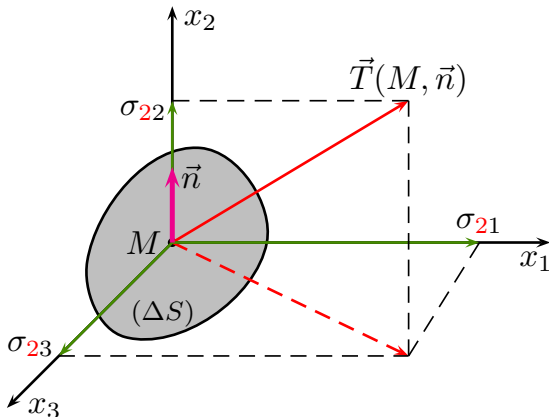


$\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{23}$  sont les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur l'élément de surface  $\Delta S$  (facette) de normale  $\vec{n} = \vec{e}_2(\vec{x}_2)$  au point  $M$ .





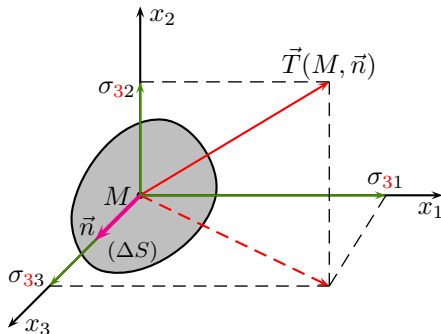
Si  $\vec{n} = \vec{e}_2$  :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{e}_2) = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$



$\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{23}$  sont les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur l'élément de surface  $\Delta S$  (facette) de normale  $\vec{n} = \vec{e}_2(\vec{x}_2)$  au point  $M$ .



De même si :  $\vec{n} = \vec{e}_3$  :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{e}_2) = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$

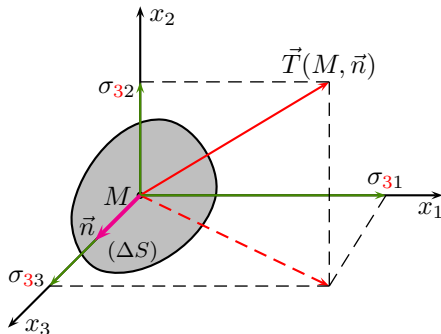


$\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  et  $\sigma_{33}$  sont les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur l'élément de surface  $\Delta S$  (facette) de normale  $\vec{n} = \vec{e}_3(\vec{x}_3)$  au point  $M$ .

Le vecteur contrainte est donc défini *en un point* ( $\Delta S \rightarrow 0$ ) *et sur une facette (surface élémentaire)  $\Delta S$*  qu'on caractérise par sa normale  $\vec{n}$ .



De même si :  $\vec{n} = \vec{e}_3$  :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{e}_2) = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$

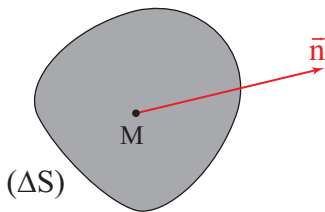


$\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  et  $\sigma_{33}$  sont les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur l'élément de surface  $\Delta S$  (facette) de normale  $\vec{n} = \vec{e}_3(\vec{x}_3)$  au point  $M$ .

Le vecteur contrainte est donc défini **en un point** ( $\Delta S \rightarrow 0$ ) **et sur une facette (surface élémentaire)**  $\Delta S$  qu'on caractérise par sa normale  $\vec{n}$ .



- une facette (ou un plan ou une surface élémentaire) de surface  $\Delta S$  autour du point  $M$  est identifiée par sa normale extérieure issue du point  $M$  (??).

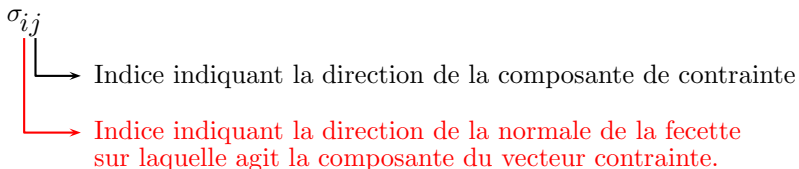


- les composantes sur les axes ( $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ ) du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{x}_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) qui agit sur une facette de normale  $\vec{x}_i$  sont  $\sigma_{i1}$ ,  $\sigma_{i2}$  et  $\sigma_{i3}$ . **Elles nécessitent deux indices pour les identifier.**



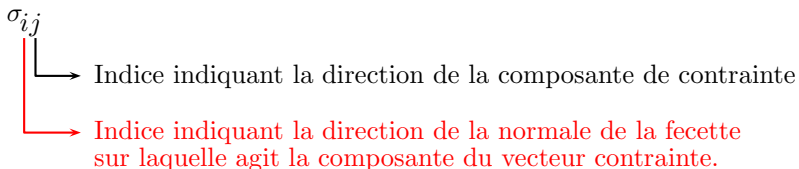
Cette notation à double indice est interprétée comme suit :

- Le premier indice indique la **direction de la normale** à la facette sur laquelle agit la composante de contrainte.
- Le second indice se rapporte à la **direction de la composante** de contrainte elle-même.



Cette notation à double indice est interprétée comme suit :

- Le premier indice indique la **direction de la normale** à la facette sur laquelle agit la composante de contrainte.
- Le second indice se rapporte à la **direction de la composante** de contrainte elle-même.



Le signe d'une composante de contrainte est déterminée en se référant au sens (signe) de la facette sur laquelle elle agit et son propre sens par rapport aux axes de coordonnées.

En effet :

- Quand sur une facette le sens de la normale extérieure et le sens de la composante du vecteur contrainte relativement aux axes de coordonnées sont de même signe (positifs tous les deux ou négatifs tous les deux), *alors la composante de contrainte est positive.*
- Quand sur une facette le sens de la normale extérieure et le sens de la composante du vecteur contrainte relativement aux axes de coordonnées sont de signes contraires , *alors la composante de contrainte est négative.*



Le signe d'une composante de contrainte est déterminée en se référant au sens (signe) de la facette sur laquelle elle agit et son propre sens par rapport aux axes de coordonnées.

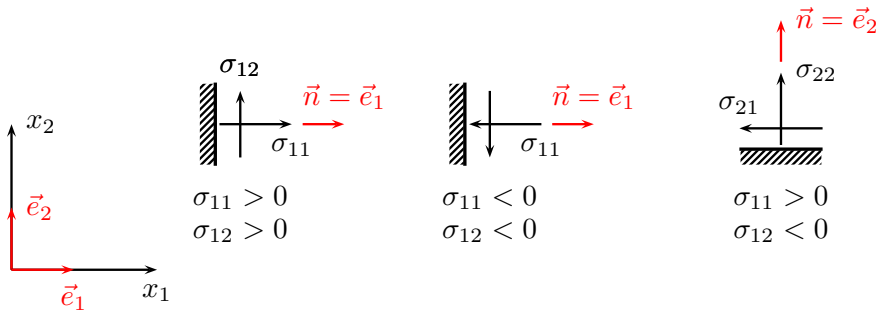
En effet :

- Quand sur une facette le sens de la normale extérieure et le sens de la composante du vecteur contrainte relativement aux axes de coordonnées sont de même signe (positifs tous les deux ou négatifs tous les deux), **alors la composante de contrainte est positive.**
- Quand sur une facette le sens de la normale extérieure et le sens de la composante du vecteur contrainte relativement aux axes de coordonnées sont de signes contraires , **alors la composante de contrainte est négative.**





## Exemples



A partir de sa définition donnée par l'équation, la dimension du vecteur contrainte est le quotient de l'unité de force par l'unité de surface :

$$[T] = [F].[L]^{-2}.$$

Dans le système *S.I.*, cette unité est la Pascal (*Pa*) avec  $1Pa = 1N/m^2$  (même unité que la pression).

Le mégapascal et le gigapascal sont souvent utilisés. Ils sont notés *MPa* et *GPa* et sont tels que :

$$1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2 \quad (1MPa \simeq 10bars) \quad \text{et} \quad 1GPa = 10^9 Pa$$



A partir de sa définition donnée par [l'équation](#), la dimension du vecteur contrainte est le quotient de l'unité de force par l'unité de surface :

$$[T] = [F].[L]^{-2}.$$

Dans le système *S.I.*, cette unité est la Pascal (*Pa*) avec  $1Pa = 1N/m^2$  (même unité que la pression).

Le mégapascal et le gigapascal sont souvent utilisés. Ils sont notés *MPa* et *GPa* et sont tels que :

$$1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2 \quad (1MPa \simeq 10bars) \quad \text{et} \quad 1GPa = 10^9 Pa$$



A partir de sa définition donnée par ▶ l'équation, la dimension du vecteur contrainte est le quotient de l'unité de force par l'unité de surface :

$$[T] = [F].[L]^{-2}.$$

Dans le système *S.I.*, cette unité est la Pascal (*Pa*) avec  $1Pa = 1N/m^2$  (même unité que la pression).

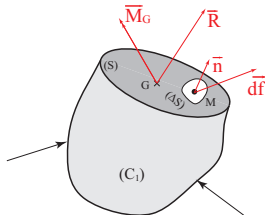
Le mégapascal et le gigapascal sont souvent utilisés. Ils notés *MPa* et *GPa* et sont tels que :

$$1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2 \quad (1MPa \simeq 10bars) \quad \text{et} \quad 1GPa = 10^9 Pa$$



Les éléments de réduction  $\vec{R}$  et  $\vec{M}_G$  sont définis au centre de gravité  $G$  d'une section  $(S)$  par les relations suivantes :

$$\vec{R} = \int_S d\vec{f} \quad \text{et} \quad \vec{M}_G = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge d\vec{f}$$



D'après la définition du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  :  $d\vec{f} = \vec{T}(M, \vec{n}).dS$ .

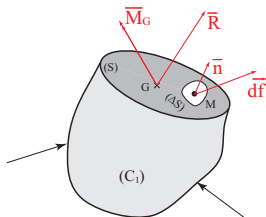
Donc, les éléments de réduction peuvent s'exprimer dans la section  $(S)$  en  $G$  comme suit :

$$\vec{R} = \int_S \vec{T}(M, \vec{n}).dS \quad \text{et} \quad \vec{M}_G = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}).dS$$



Les éléments de réduction  $\vec{R}$  et  $\vec{M}_G$  sont définis au centre de gravité  $G$  d'une section  $(S)$  par les relations suivantes :

$$\vec{R} = \int_S d\vec{f} \quad \text{et} \quad \vec{M}_G = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge d\vec{f}$$



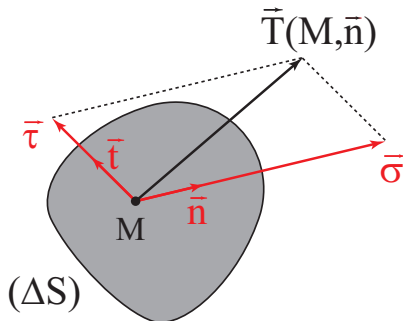
D'après la définition du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  :  $d\vec{f} = \vec{T}(M, \vec{n}).dS$ .

Donc, les éléments de réduction peuvent s'exprimer dans la section  $(S)$  en  $G$  comme suit :

$$\vec{R} = \int_S \vec{T}(M, \vec{n}).dS \quad \text{et} \quad \vec{M}_G = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}).dS$$



Le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  dont la direction est généralement différente de celle de la normale  $\vec{n}$  de la facette sur laquelle il agit, peut être décomposé comme indiqué sur la figure :

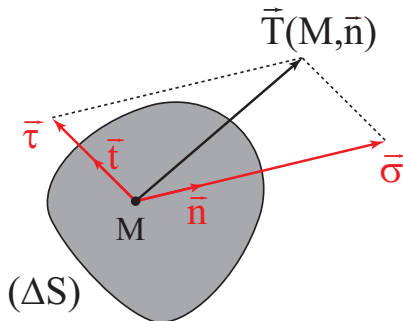


$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

où  $\sigma$  est la composante normale et  $\tau$  est la composante tangentielle.



Le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  dont la direction est généralement différente de celle de la normale  $\vec{n}$  de la facette sur laquelle il agit, peut être décomposé comme indiqué sur la figure :



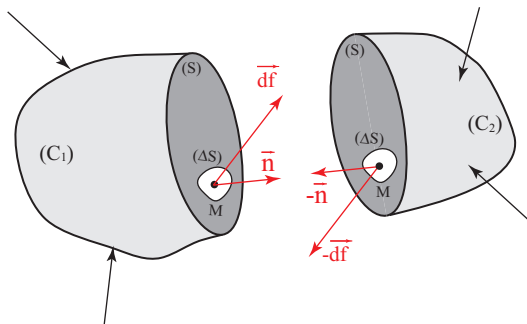
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

où  $\sigma$  est la composante normale et  $\tau$  est la composante tangentielle.





Considérant le corps coupé par (S) en deux parties ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) :



Sur la partie ( $C_1$ ) au point  $M$  :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

Sur la partie ( $C_2$ ) au point  $M$  :

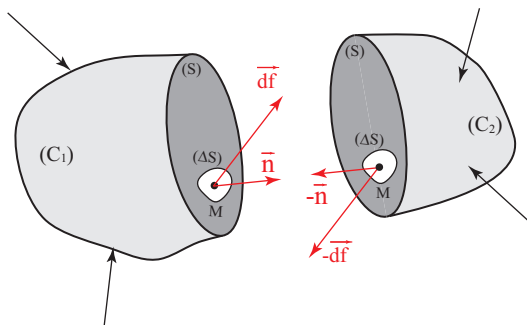
$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = \frac{-d\vec{f}}{dS}$$

Ce qui conduit à :

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$



Considérant le corps coupé par (S) en deux parties ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) :



Sur la partie ( $C_1$ ) au point  $M$  :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

Sur la partie ( $C_2$ ) au point  $M$  :

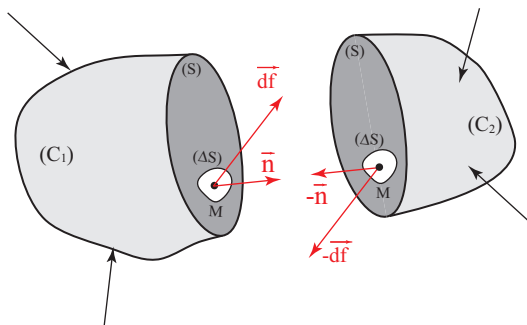
$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = \frac{-d\vec{f}}{dS}$$

Ce qui conduit à :

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$



Considérant le corps coupé par (S) en deux parties ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) :



Sur la partie ( $C_1$ ) au point  $M$  :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

Sur la partie ( $C_2$ ) au point  $M$  :

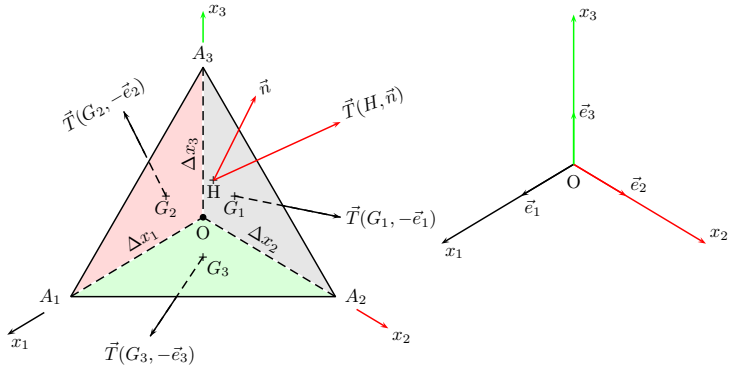
$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = \frac{-d\vec{f}}{dS}$$

Ce qui conduit à :

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$



Pour la mise en évidence du tenseur des contraintes, on étudie l'équilibre d'un tétraèdre élémentaire extrait de la matière d'un corps en équilibre.



C'est un tétraèdre droit. Il est constitué de trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$ ,  $OA_1A_2$  et une face hypoténuse  $A_1A_2A_3$ .





Les faces du tétraèdre sont caractérisées comme suit :

- La surface  $OA_2A_3$  a pour centre  $G_1$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_1$
- La surface  $OA_1A_3$  a pour centre  $G_2$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_2$
- La surface  $OA_1A_2$  a pour centre  $G_3$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_3$
- la face  $A_1A_2A_3$  a pour centre  $H$ , tel que  $H$  est l'intersection de la hauteur issue de  $O$  avec la face  $A_1A_2A_3$ , et de normale  $\vec{n}$  dont le sens est orienté de  $O$  vers  $H$ .

Dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , le vecteur  $\vec{n}$  s'écrit :

$$\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \alpha_i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les composantes de  $\vec{n}$  appelées cosinus directeurs.

En effet, on a :

$$\alpha_1 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1), \alpha_2 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) \text{ et } \alpha_3 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_3)$$



Les faces du tétraèdre sont caractérisées comme suit :

- La surface  $OA_2A_3$  a pour centre  $G_1$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_1$
- La surface  $OA_1A_3$  a pour centre  $G_2$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_2$
- La surface  $OA_1A_2$  a pour centre  $G_3$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_3$
- la face  $A_1A_2A_3$  a pour centre  $H$ , tel que  $H$  est l'intersection de la hauteur issue de  $O$  avec la face  $A_1A_2A_3$ , et de normale  $\vec{n}$  dont le sens est orienté de  $O$  vers  $H$ .

Dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , le vecteur  $\vec{n}$  s'écrit :

$$\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \alpha_i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les composantes de  $\vec{n}$  appelées cosinus directeurs.

En effet, on a :

$$\alpha_1 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1), \alpha_2 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) \text{ et } \alpha_3 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_3)$$



Les faces du tétraèdre sont caractérisées comme suit :

- La surface  $OA_2A_3$  a pour centre  $G_1$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_1$
- La surface  $OA_1A_3$  a pour centre  $G_2$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_2$
- La surface  $OA_1A_2$  a pour centre  $G_3$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_3$
- la face  $A_1A_2A_3$  a pour centre  $H$ , tel que  $H$  est l'intersection de la hauteur issue de  $O$  avec la face  $A_1A_2A_3$ , et de normale  $\vec{n}$  dont le sens est orienté de  $O$  vers  $H$ .

Dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , le vecteur  $\vec{n}$  s'écrit :

$$\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \alpha_i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les composantes de  $\vec{n}$  appelées cosinus directeurs.

En effet, on a :

$$\alpha_1 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1), \alpha_2 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) \text{ et } \alpha_3 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_3)$$





Les faces du tétraèdre sont caractérisées comme suit :

- La surface  $OA_2A_3$  a pour centre  $G_1$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_1$
- La surface  $OA_1A_3$  a pour centre  $G_2$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_2$
- La surface  $OA_1A_2$  a pour centre  $G_3$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_3$
- la face  $A_1A_2A_3$  a pour centre  $H$ , tel que  $H$  est l'intersection de la hauteur issue de  $O$  avec la face  $A_1A_2A_3$ , et de normale  $\vec{n}$  dont le sens est orienté de  $O$  vers  $H$ .

Dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , le vecteur  $\vec{n}$  s'écrit :

$$\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \alpha_i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les composantes de  $\vec{n}$  appelées cosinus directeurs.

En effet, on a :

$$\alpha_1 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1), \alpha_2 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) \text{ et } \alpha_3 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_3)$$



Les faces du tétraèdre sont caractérisées comme suit :

- La surface  $OA_2A_3$  a pour centre  $G_1$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_1$
- La surface  $OA_1A_3$  a pour centre  $G_2$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_2$
- La surface  $OA_1A_2$  a pour centre  $G_3$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_3$
- la face  $A_1A_2A_3$  a pour centre  $H$ , tel que  $H$  est l'intersection de la hauteur issue de  $O$  avec la face  $A_1A_2A_3$ , et de normale  $\vec{n}$  dont le sens est orienté de  $O$  vers  $H$ .

Dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , le vecteur  $\vec{n}$  s'écrit :

$$\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \alpha_i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les composantes de  $\vec{n}$  appelées cosinus directeurs.

En effet, on a :

$$\alpha_1 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1), \alpha_2 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) \text{ et } \alpha_3 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_3)$$



Les faces du tétraèdre sont caractérisées comme suit :

- La surface  $OA_2A_3$  a pour centre  $G_1$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_1$
- La surface  $OA_1A_3$  a pour centre  $G_2$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_2$
- La surface  $OA_1A_2$  a pour centre  $G_3$  et de normale extérieure  $-\vec{e}_3$
- la face  $A_1A_2A_3$  a pour centre  $H$ , tel que  $H$  est l'intersection de la hauteur issue de  $O$  avec la face  $A_1A_2A_3$ , et de normale  $\vec{n}$  dont le sens est orienté de  $O$  vers  $H$ .

Dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , le vecteur  $\vec{n}$  s'écrit :

$$\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \alpha_i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les composantes de  $\vec{n}$  appelées cosinus directeurs.

En effet, on a :

$$\alpha_1 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1), \alpha_2 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) \text{ et } \alpha_3 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_3)$$



Après la caractérisation géométrique des faces du tétraèdre, on définit les vecteurs contraintes agissant sur ses faces et la densité des forces volumiques qui lui est appliquée.

Soient :

- $\vec{T}(H, \vec{n})$  : le vecteur contrainte sur la face  $A_1A_2A_3$  de normale  $\vec{n}$
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_2A_3$  de normale  $-\vec{e}_1$
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_3$  de normale  $-\vec{e}_2$
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_2$  de normale  $-\vec{e}_3$
- $\vec{f}$  : la densité des forces volumiques appliquées au centre du tétraèdre.

Soit  $dS$  l'aire de la face  $A_1A_2A_3$ , alors les faces  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  ont pour aires  $\alpha_1 dS$ ,  $\alpha_2 dS$  et  $\alpha_3 dS$  respectivement.



Après la caractérisation géométrique des faces du tétraèdre, on définit les vecteurs contraintes agissant sur ses faces et la densité des forces volumiques qui lui est appliquée.

Soient :

- $\vec{T}(H, \vec{n})$  : le vecteur contrainte sur la face  $A_1A_2A_3$  de normale  $\vec{n}$
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_2A_3$  de normale  $-\vec{e}_1$
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_3$  de normale  $-\vec{e}_2$
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_2$  de normale  $-\vec{e}_3$
- $\vec{f}$  : la densité des forces volumiques appliquées au centre du tétraèdre.

Soit  $dS$  l'aire de la face  $A_1A_2A_3$ , alors les faces  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  ont pour aires  $\alpha_1 dS$ ,  $\alpha_2 dS$  et  $\alpha_3 dS$  respectivement.



Après la caractérisation géométrique des faces du tétraèdre, on définit les vecteurs contraintes agissant sur ses faces et la densité des forces volumiques qui lui est appliquée.

Soient :

- $\vec{T}(H, \vec{n})$  : le vecteur contrainte sur la face  $A_1A_2A_3$  de normale  $\vec{n}$
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_2A_3$  de normale  $-\vec{e}_1$
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_3$  de normale  $-\vec{e}_2$
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_2$  de normale  $-\vec{e}_3$
- $\vec{f}$  : la densité des forces volumiques appliquées au centre du tétraèdre.

Soit  $dS$  l'aire de la face  $A_1A_2A_3$ , alors les faces  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  ont pour aires  $\alpha_1 dS$ ,  $\alpha_2 dS$  et  $\alpha_3 dS$  respectivement.



Après la caractérisation géométrique des faces du tétraèdre, on définit les vecteurs contraintes agissant sur ses faces et la densité des forces volumiques qui lui est appliquée.

Soient :

- $\vec{T}(H, \vec{n})$  : le vecteur contrainte sur la face  $A_1A_2A_3$  de normale  $\vec{n}$
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_2A_3$  de normale  $-\vec{e}_1$
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_3$  de normale  $-\vec{e}_2$
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_2$  de normale  $-\vec{e}_3$
- $\vec{f}$  : la densité des forces volumiques appliquées au centre du tétraèdre.

Soit  $dS$  l'aire de la face  $A_1A_2A_3$ , alors les faces  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  ont pour aires  $\alpha_1 dS$ ,  $\alpha_2 dS$  et  $\alpha_3 dS$  respectivement.



Après la caractérisation géométrique des faces du tétraèdre, on définit les vecteurs contraintes agissant sur ses faces et la densité des forces volumiques qui lui est appliquée.

Soient :

- $\vec{T}(H, \vec{n})$  : le vecteur contrainte sur la face  $A_1A_2A_3$  de normale  $\vec{n}$
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_2A_3$  de normale  $-\vec{e}_1$
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_3$  de normale  $-\vec{e}_2$
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_2$  de normale  $-\vec{e}_3$
- $\vec{f}$  : la densité des forces volumiques appliquées au centre du tétraèdre.

Soit  $dS$  l'aire de la face  $A_1A_2A_3$ , alors les faces  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  ont pour aires  $\alpha_1 dS$ ,  $\alpha_2 dS$  et  $\alpha_3 dS$  respectivement.





Après la caractérisation géométrique des faces du tétraèdre, on définit les vecteurs contraintes agissant sur ses faces et la densité des forces volumiques qui lui est appliquée.

Soient :

- $\vec{T}(H, \vec{n})$  : le vecteur contrainte sur la face  $A_1A_2A_3$  de normale  $\vec{n}$
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_2A_3$  de normale  $-\vec{e}_1$
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_3$  de normale  $-\vec{e}_2$
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_2$  de normale  $-\vec{e}_3$
- $\vec{f}$  : la densité des forces volumiques appliquées au centre du tétraèdre.

Soit  $dS$  l'aire de la face  $A_1A_2A_3$ , alors les faces  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  ont pour aires  $\alpha_1 dS$ ,  $\alpha_2 dS$  et  $\alpha_3 dS$  respectivement.



Après la caractérisation géométrique des faces du tétraèdre, on définit les vecteurs contraintes agissant sur ses faces et la densité des forces volumiques qui lui est appliquée.

Soient :

- $\vec{T}(H, \vec{n})$  : le vecteur contrainte sur la face  $A_1A_2A_3$  de normale  $\vec{n}$
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_2A_3$  de normale  $-\vec{e}_1$
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_3$  de normale  $-\vec{e}_2$
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  : le vecteur contrainte sur la face  $OA_1A_2$  de normale  $-\vec{e}_3$
- $\vec{f}$  : la densité des forces volumiques appliquées au centre du tétraèdre.

Soit  $dS$  l'aire de la face  $A_1A_2A_3$ , alors les faces  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  ont pour aires  $\alpha_1 dS$ ,  $\alpha_2 dS$  et  $\alpha_3 dS$  respectivement.



Supposant **connus** les vecteurs contraintes  $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  qui s'exercent sur les trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  et **déterminant** le vecteurs contrainte  $\vec{T}(H, \vec{n})$  qui s'applique sur la face hypoténuse d'orientation quelconque  $\vec{n}$ .

A cet effet, on étudie l'équilibre du tétraèdre élémentaire en faisant tendre les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$  de telle sorte que le volume  $dV$  tends vers zéro ( $dV \rightarrow 0$ ).

Pour étudier l'équilibre on commence par inventorier les forces agissant sur le tétraèdre et qui sont les suivantes :

- $\vec{T}(H, \vec{n}).dS$  sur la face  $A_1A_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1).\alpha_1.dS$  sur la face  $OA_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2).\alpha_2.dS$  sur la face  $OA_1A_3$ .
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3).\alpha_3.dS$  sur la face  $OA_1A_2$ .
- $\vec{f}.dV$  sur l'élément de volume.



Supposant **connus** les vecteurs contraintes  $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  qui s'exercent sur les trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  et **déterminant** le vecteurs contrainte  $\vec{T}(H, \vec{n})$  qui s'applique sur la face hypoténuse d'orientation quelconque  $\vec{n}$ .

A cet effet, on étudie l'équilibre du tétraèdre élémentaire en faisant tendre les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$  de telle sorte que le volume  $dV$  tends vers zéro ( $dV \rightarrow 0$ ).

Pour étudier l'équilibre on commence par inventorier les forces agissant sur le tétraèdre et qui sont les suivantes :

- $\vec{T}(H, \vec{n}).dS$  sur la face  $A_1A_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1).\alpha_1.dS$  sur la face  $OA_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2).\alpha_2.dS$  sur la face  $OA_1A_3$ .
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3).\alpha_3.dS$  sur la face  $OA_1A_2$ .
- $\vec{f}.dV$  sur l'élément de volume.



Supposant **connus** les vecteurs contraintes  $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  qui s'exercent sur les trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  et **déterminant** le vecteurs contrainte  $\vec{T}(H, \vec{n})$  qui s'applique sur la face hypoténuse d'orientation quelconque  $\vec{n}$ .

A cet effet, on étudie l'équilibre du tétraèdre élémentaire en faisant tendre les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$  de telle sorte que le volume  $dV$  tends vers zéro ( $dV \rightarrow 0$ ).

Pour étudier l'équilibre on commence par inventorier les forces agissant sur le tétraèdre et qui sont les suivantes :

- $\vec{T}(H, \vec{n}).dS$  sur la face  $A_1A_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1).\alpha_1.dS$  sur la face  $OA_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2).\alpha_2.dS$  sur la face  $OA_1A_3$ .
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3).\alpha_3.dS$  sur la face  $OA_1A_2$ .
- $\vec{f}.dV$  sur l'élément de volume.



Supposant **connus** les vecteurs contraintes  $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  qui s'exercent sur les trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  et **déterminant** le vecteurs contrainte  $\vec{T}(H, \vec{n})$  qui s'applique sur la face hypoténuse d'orientation quelconque  $\vec{n}$ .

A cet effet, on étudie l'équilibre du tétraèdre élémentaire en faisant tendre les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$  de telle sorte que le volume  $dV$  tends vers zéro ( $dV \rightarrow 0$ ).

Pour étudier l'équilibre on commence par inventorier les forces agissant sur le tétraèdre et qui sont les suivantes :

- $\vec{T}(H, \vec{n}).dS$  sur la face  $A_1A_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1).\alpha_1.dS$  sur la face  $OA_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2).\alpha_2.dS$  sur la face  $OA_1A_3$ .
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3).\alpha_3.dS$  sur la face  $OA_1A_2$ .
- $\vec{f}.dV$  sur l'élément de volume.



Supposant **connus** les vecteurs contraintes  $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  qui s'exercent sur les trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  et **déterminant** le vecteurs contrainte  $\vec{T}(H, \vec{n})$  qui s'applique sur la face hypoténuse d'orientation quelconque  $\vec{n}$ .

A cet effet, on étudie l'équilibre du tétraèdre élémentaire en faisant tendre les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$  de telle sorte que le volume  $dV$  tends vers zéro ( $dV \rightarrow 0$ ).

Pour étudier l'équilibre on commence par inventorier les forces agissant sur le tétraèdre et qui sont les suivantes :

- $\vec{T}(H, \vec{n}).dS$  sur la face  $A_1A_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1).\alpha_1.dS$  sur la face  $OA_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2).\alpha_2.dS$  sur la face  $OA_1A_3$ .
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3).\alpha_3.dS$  sur la face  $OA_1A_2$ .
- $\vec{f}.dV$  sur l'élément de volume.



Supposant **connus** les vecteurs contraintes  $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  qui s'exercent sur les trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  et **déterminant** le vecteurs contrainte  $\vec{T}(H, \vec{n})$  qui s'applique sur la face hypoténuse d'orientation quelconque  $\vec{n}$ .

A cet effet, on étudie l'équilibre du tétraèdre élémentaire en faisant tendre les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$  de telle sorte que le volume  $dV$  tends vers zéro ( $dV \rightarrow 0$ ).

Pour étudier l'équilibre on commence par inventorier les forces agissant sur le tétraèdre et qui sont les suivantes :

- $\vec{T}(H, \vec{n}).dS$  sur la face  $A_1A_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1).\alpha_1.dS$  sur la face  $OA_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2).\alpha_2.dS$  sur la face  $OA_1A_3$ .
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3).\alpha_3.dS$  sur la face  $OA_1A_2$ .
- $\vec{f}.dV$  sur l'élément de volume.





Supposant **connus** les vecteurs contraintes  $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  qui s'exercent sur les trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  et **déterminant** le vecteurs contrainte  $\vec{T}(H, \vec{n})$  qui s'applique sur la face hypoténuse d'orientation quelconque  $\vec{n}$ .

A cet effet, on étudie l'équilibre du tétraèdre élémentaire en faisant tendre les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$  de telle sorte que le volume  $dV$  tends vers zéro ( $dV \rightarrow 0$ ).

Pour étudier l'équilibre on commence par inventorier les forces agissant sur le tétraèdre et qui sont les suivantes :

- $\vec{T}(H, \vec{n}).dS$  sur la face  $A_1A_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1).\alpha_1.dS$  sur la face  $OA_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2).\alpha_2.dS$  sur la face  $OA_1A_3$ .
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3).\alpha_3.dS$  sur la face  $OA_1A_2$ .
- $\vec{f}.dV$  sur l'élément de volume.



Supposant **connus** les vecteurs contraintes  $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3)$  qui s'exercent sur les trois faces perpendiculaires  $OA_2A_3$ ,  $OA_1A_3$  et  $OA_1A_2$  et **déterminant** le vecteurs contrainte  $\vec{T}(H, \vec{n})$  qui s'applique sur la face hypoténuse d'orientation quelconque  $\vec{n}$ .

A cet effet, on étudie l'équilibre du tétraèdre élémentaire en faisant tendre les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$  de telle sorte que le volume  $dV$  tends vers zéro ( $dV \rightarrow 0$ ).

Pour étudier l'équilibre on commence par inventorier les forces agissant sur le tétraèdre et qui sont les suivantes :

- $\vec{T}(H, \vec{n}).dS$  sur la face  $A_1A_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_1, -\vec{e}_1).\alpha_1.dS$  sur la face  $OA_2A_3$ .
- $\vec{T}(G_2, -\vec{e}_2).\alpha_2.dS$  sur la face  $OA_1A_3$ .
- $\vec{T}(G_3, -\vec{e}_3).\alpha_3.dS$  sur la face  $OA_1A_2$ .
- $\vec{f}.dV$  sur l'élément de volume.



L'équilibre du tétraèdre est réalisée si la somme de tous les vecteurs forces agissant sur lui soit égale au vecteur nul, soit :

$$\left[ \vec{T}(H, \vec{n}) + \alpha_1 \vec{T}(G_1, -\vec{e}_1) + \alpha_2 \vec{T}(G_2, -\vec{e}_2) + \alpha_3 \vec{T}(G_3, -\vec{e}_3) \right] dS + \vec{f} dV = \vec{0}$$

En divisant par  $dS$  et sachant que  $\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$ , on obtient :

$$\vec{T}(H, \vec{n}) - \alpha_1 \cdot \vec{T}(G_1, \vec{e}_1) - \alpha_2 \cdot \vec{T}(G_2, \vec{e}_2) - \alpha_3 \cdot \vec{T}(G_3, \vec{e}_3) + \vec{f} \cdot \frac{dV}{dS} = \vec{0}$$

En faisant tendre  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$ , alors :

$$H, G_1, G_2, \text{ et } G_3 \rightarrow O \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dS} = 0$$

Ce qui aboutit à :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = \alpha_1 \vec{T}(O, \vec{e}_1) + \alpha_2 \vec{T}(O, \vec{e}_2) + \alpha_3 \vec{T}(O, \vec{e}_3)$$



L'équilibre du tétraèdre est réalisée si la somme de tous les vecteurs forces agissant sur lui soit égale au vecteur nul, soit :

$$\left[ \vec{T}(H, \vec{n}) + \alpha_1 \vec{T}(G_1, -\vec{e}_1) + \alpha_2 \vec{T}(G_2, -\vec{e}_2) + \alpha_3 \vec{T}(G_3, -\vec{e}_3) \right] dS + \vec{f} dV = \vec{0}$$

En divisant par  $dS$  et sachant que  $\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$ , on obtient :

$$\vec{T}(H, \vec{n}) - \alpha_1 \cdot \vec{T}(G_1, \vec{e}_1) - \alpha_2 \cdot \vec{T}(G_2, \vec{e}_2) - \alpha_3 \cdot \vec{T}(G_3, \vec{e}_3) + \vec{f} \cdot \frac{dV}{dS} = \vec{0}$$

En faisant tendre  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$ , alors :

$$H, G_1, G_2, \text{ et } G_3 \rightarrow O \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dS} = 0$$

Ce qui aboutit à :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = \alpha_1 \vec{T}(O, \vec{e}_1) + \alpha_2 \vec{T}(O, \vec{e}_2) + \alpha_3 \vec{T}(O, \vec{e}_3)$$



L'équilibre du tétraèdre est réalisée si la somme de tous les vecteurs forces agissant sur lui soit égale au vecteur nul, soit :

$$\left[ \vec{T}(H, \vec{n}) + \alpha_1 \vec{T}(G_1, -\vec{e}_1) + \alpha_2 \vec{T}(G_2, -\vec{e}_2) + \alpha_3 \vec{T}(G_3, -\vec{e}_3) \right] dS + \vec{f} dV = \vec{0}$$

En divisant par  $dS$  et sachant que  $\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$ , on obtient :

$$\vec{T}(H, \vec{n}) - \alpha_1 \cdot \vec{T}(G_1, \vec{e}_1) - \alpha_2 \cdot \vec{T}(G_2, \vec{e}_2) - \alpha_3 \cdot \vec{T}(G_3, \vec{e}_3) + \vec{f} \cdot \frac{dV}{dS} = \vec{0}$$

En faisant tendre  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$ , alors :

$$H, G_1, G_2, \text{ et } G_3 \rightarrow O \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dS} = 0$$

Ce qui aboutit à :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = \alpha_1 \vec{T}(O, \vec{e}_1) + \alpha_2 \vec{T}(O, \vec{e}_2) + \alpha_3 \vec{T}(O, \vec{e}_3)$$



L'équilibre du tétraèdre est réalisée si la somme de tous les vecteurs forces agissant sur lui soit égale au vecteur nul, soit :

$$\left[ \vec{T}(H, \vec{n}) + \alpha_1 \vec{T}(G_1, -\vec{e}_1) + \alpha_2 \vec{T}(G_2, -\vec{e}_2) + \alpha_3 \vec{T}(G_3, -\vec{e}_3) \right] dS + \vec{f} dV = \vec{0}$$

En divisant par  $dS$  et sachant que  $\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$ , on obtient :

$$\vec{T}(H, \vec{n}) - \alpha_1 \cdot \vec{T}(G_1, \vec{e}_1) - \alpha_2 \cdot \vec{T}(G_2, \vec{e}_2) - \alpha_3 \cdot \vec{T}(G_3, \vec{e}_3) + \vec{f} \cdot \frac{dV}{dS} = \vec{0}$$

En faisant tendre  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  vers  $O$ , alors :

$$H, G_1, G_2, \text{ et } G_3 \rightarrow O \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dS} = 0$$

Ce qui aboutit à :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = \alpha_1 \vec{T}(O, \vec{e}_1) + \alpha_2 \vec{T}(O, \vec{e}_2) + \alpha_3 \vec{T}(O, \vec{e}_3)$$



L'expression montre bien que si en un point  $O$  on connaît les trois vecteurs contrainte  $\vec{T}(O, \vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(O, \vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(O, \vec{e}_3)$ , alors on peut connaître n'importe quel vecteur  $\vec{T}(O, \vec{n})$  en ce point pour peu qu'on se donne la normale  $\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$  de la facette sur laquelle il agit.

L'état de contrainte est parfaitement défini en un point, si on connaît trois vecteurs contrainte agissant sur trois facettes orthogonales.



L'expression montre bien que si en un point  $O$  on connaît les trois vecteurs contrainte  $\vec{T}(O, \vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(O, \vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(O, \vec{e}_3)$ , alors on peut connaître n'importe quel vecteur  $\vec{T}(O, \vec{n})$  en ce point pour peu qu'on se donne la normale  $\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$  de la facette sur laquelle il agit.

L'état de contrainte est parfaitement défini en un point, si on connaît **trois vecteurs contrainte** agissant sur **trois facettes orthogonales**.





Dans la base orthonormée  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , les vecteurs contrainte  $\vec{T}(O, \vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(O, \vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(O, \vec{e}_3)$  s'écrivent :

$$\vec{T}(O, \vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}(O, \vec{e}_2) = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}(O, \vec{e}_3) = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$$

ou avec la notation indicielle :  $\vec{T}(O, \vec{e}_i) = \sigma_{ij}\vec{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$ .

D'autre part,  $\vec{T}(O, \vec{n})$  s'écrit en terme de composantes dans la base  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2 + T_3\vec{e}_3 = T_i\vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$



Dans la base orthonormée  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , les vecteurs contrainte  $\vec{T}(O, \vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(O, \vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(O, \vec{e}_3)$  s'écrivent :

$$\vec{T}(O, \vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}(O, \vec{e}_2) = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}(O, \vec{e}_3) = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$$

ou avec la notation indicielle :  $\vec{T}(O, \vec{e}_i) = \sigma_{ij}\vec{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$ .

D'autre part,  $\vec{T}(O, \vec{n})$  s'écrit en terme de composantes dans la base  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2 + T_3\vec{e}_3 = T_i\vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$



En substituant les expressions des  $\vec{T}(O, \vec{e}_i)$  ( $i=1,2,3$ ) dans celle de  $\vec{T}(O, \vec{n})$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{T}(O, \vec{n}) &= \alpha_1 (\sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3) \\ &\quad + \alpha_2 (\sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3) \\ &\quad + \alpha_3 (\sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3)\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\vec{T}(O, \vec{n}) &= (\alpha_1\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{21} + \alpha_3\sigma_{31})\vec{e}_1 \\ &\quad + (\alpha_1\sigma_{12} + \alpha_2\sigma_{22} + \alpha_3\sigma_{32})\vec{e}_2 \\ &\quad + (\alpha_1\sigma_{13} + \alpha_2\sigma_{23} + \alpha_3\sigma_{33})\vec{e}_3\end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir les composantes du vecteur  $\vec{T}(O, \vec{n})$  :

$$T_1 = \alpha_1\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{21} + \alpha_3\sigma_{31}$$

$$T_2 = \alpha_1\sigma_{12} + \alpha_2\sigma_{22} + \alpha_3\sigma_{32}$$

$$T_3 = \alpha_1\sigma_{13} + \alpha_2\sigma_{23} + \alpha_3\sigma_{33}$$



En substituant les expressions des  $\vec{T}(O, \vec{e}_i)$  ( $i=1,2,3$ ) dans celle de  $\vec{T}(O, \vec{n})$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{T}(O, \vec{n}) &= \alpha_1 (\sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3) \\ &\quad + \alpha_2 (\sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3) \\ &\quad + \alpha_3 (\sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3)\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\vec{T}(O, \vec{n}) &= (\alpha_1\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{21} + \alpha_3\sigma_{31})\vec{e}_1 \\ &\quad + (\alpha_1\sigma_{12} + \alpha_2\sigma_{22} + \alpha_3\sigma_{32})\vec{e}_2 \\ &\quad + (\alpha_1\sigma_{13} + \alpha_2\sigma_{23} + \alpha_3\sigma_{33})\vec{e}_3\end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir les composantes du vecteur  $\vec{T}(O, \vec{n})$  :

$$T_1 = \alpha_1\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{21} + \alpha_3\sigma_{31}$$

$$T_2 = \alpha_1\sigma_{12} + \alpha_2\sigma_{22} + \alpha_3\sigma_{32}$$

$$T_3 = \alpha_1\sigma_{13} + \alpha_2\sigma_{23} + \alpha_3\sigma_{33}$$



En substituant les expressions des  $\vec{T}(O, \vec{e}_i)$  ( $i=1,2,3$ ) dans celle de  $\vec{T}(O, \vec{n})$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{T}(O, \vec{n}) &= \alpha_1 (\sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3) \\ &\quad + \alpha_2 (\sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3) \\ &\quad + \alpha_3 (\sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Soit : } \vec{T}(O, \vec{n}) &= (\alpha_1\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{21} + \alpha_3\sigma_{31})\vec{e}_1 \\ &\quad + (\alpha_1\sigma_{12} + \alpha_2\sigma_{22} + \alpha_3\sigma_{32})\vec{e}_2 \\ &\quad + (\alpha_1\sigma_{13} + \alpha_2\sigma_{23} + \alpha_3\sigma_{33})\vec{e}_3\end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir les composantes du vecteur  $\vec{T}(O, \vec{n})$  :

$$T_1 = \alpha_1\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{21} + \alpha_3\sigma_{31}$$

$$T_2 = \alpha_1\sigma_{12} + \alpha_2\sigma_{22} + \alpha_3\sigma_{32}$$

$$T_3 = \alpha_1\sigma_{13} + \alpha_2\sigma_{23} + \alpha_3\sigma_{33}$$



Soit sous forme matricielle :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

ou encore sous forme condensée :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$$

La matrice :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$  dont les colonnes sont respective-

ment les composantes des vecteurs contrainte  $\vec{T}(O, \vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(O, \vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(O, \vec{e}_3)$ , est la matrice représentant l'état de contrainte au point O dans le système de coordonnées  $(O, x_1, x_2, x_3)$  muni de la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ et } \vec{e}_3)$ .

Dans le cas plan, si on considère la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , la matrice  $[\sigma]$  s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



Soit sous forme matricielle :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

ou encore sous forme condensée :  $\vec{T}(O, \vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$

La matrice :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$  dont les colonnes sont respective-

ment les composantes des vecteurs contrainte  $\vec{T}(O, \vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(O, \vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(O, \vec{e}_3)$ , est la matrice représentant l'état de contrainte au point O dans le système de coordonnées  $(O, x_1, x_2, x_3)$  muni de la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ et } \vec{e}_3)$ .

Dans le cas plan, si on considère la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , la matrice  $[\sigma]$  s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



Soit sous forme matricielle :

$$\vec{T}(O, \vec{n}) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

ou encore sous forme condensée :  $\vec{T}(O, \vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$

La matrice :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$  dont les colonnes sont respective-

ment les composantes des vecteurs contrainte  $\vec{T}(O, \vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(O, \vec{e}_2)$  et  $\vec{T}(O, \vec{e}_3)$ , est la matrice représentant l'état de contrainte au point O dans le système de coordonnées  $(O, x_1, x_2, x_3)$  muni de la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ et } \vec{e}_3)$ .

Dans le cas plan, si on considère la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , la matrice  $[\sigma]$  s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$





En utilisant la notation tensorielle, on a :  $\vec{T}(O, \vec{n}) = \underline{\underline{[\sigma]}} \cdot \vec{n}$ .

où  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un tenseur du second ordre appelé **tenseur des contraintes** au point  $O$ . C'est un opérateur linéaire liant  $\vec{n}$  à  $\vec{T}(O, \vec{n})$ .

*L'état de contrainte en un point est donc parfaitement défini par le tenseur des contraintes.*

Le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un être mathématique indépendant du système de coordonnées (invariable par changement de base).

Dans le système d'axes  $(O, x_1, x_2, x_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par la matrice  $[\sigma]$ . Dans un autre système de coordonnées  $(\bar{O}, x'_1, x'_2, x'_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par une matrice **différente**  $[\sigma]'$ .

*La matrice représentant le tenseur des contraintes en un point change avec le changement de base.*



En utilisant la notation tensorielle, on a :  $\vec{T}(O, \vec{n}) = \underline{\underline{[\sigma]}} \cdot \vec{n}$ .

où  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un tenseur du second ordre appelé **tenseur des contraintes** au point  $O$ . C'est un opérateur linéaire liant  $\vec{n}$  à  $\vec{T}(O, \vec{n})$ .

***L'état de contrainte en un point est donc parfaitement défini par le tenseur des contraintes.***

Le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un être mathématique indépendant du système de coordonnées (invariable par changement de base).

Dans le système d'axes  $(O, x_1, x_2, x_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par la matrice  $[\sigma]$ . Dans un autre système de coordonnées  $(\bar{O}, x'_1, x'_2, x'_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par une matrice **différente**  $[\sigma]'$ .

***La matrice représentant le tenseur des contraintes en un point change avec le changement de base.***



En utilisant la notation tensorielle, on a :  $\vec{T}(O, \vec{n}) = \underline{\underline{[\sigma]}} \cdot \vec{n}$ .

où  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un tenseur du second ordre appelé **tenseur des contraintes** au point  $O$ . C'est un opérateur linéaire liant  $\vec{n}$  à  $\vec{T}(O, \vec{n})$ .

***L'état de contrainte en un point est donc parfaitement défini par le tenseur des contraintes.***

Le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un être mathématique indépendant du système de coordonnées (invariable par changement de base).

Dans le système d'axes  $(O, x_1, x_2, x_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par la matrice  $[\sigma]$ . Dans un autre système de coordonnées  $(\bar{O}, x'_1, x'_2, x'_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par une matrice **différente**  $[\sigma]'$ .

***La matrice représentant le tenseur des contraintes en un point change avec le changement de base.***



En utilisant la notation tensorielle, on a :  $\vec{T}(O, \vec{n}) = \underline{\underline{[\sigma]}} \cdot \vec{n}$ .

où  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un tenseur du second ordre appelé **tenseur des contraintes** au point  $O$ . C'est un opérateur linéaire liant  $\vec{n}$  à  $\vec{T}(O, \vec{n})$ .

***L'état de contrainte en un point est donc parfaitement défini par le tenseur des contraintes.***

Le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un être mathématique indépendant du système de coordonnées (invariable par changement de base).

Dans le système d'axes  $(O, x_1, x_2, x_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par la matrice  $[\sigma]$ . Dans un autre système de coordonnées  $(\bar{O}, x'_1, x'_2, x'_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par une matrice **différente**  $[\sigma]'$ .

*La matrice représentant le tenseur des contraintes en un point change avec le changement de base.*



En utilisant la notation tensorielle, on a :  $\vec{T}(O, \vec{n}) = \underline{\underline{[\sigma]}} \cdot \vec{n}$ .

où  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un tenseur du second ordre appelé **tenseur des contraintes** au point  $O$ . C'est un opérateur linéaire liant  $\vec{n}$  à  $\vec{T}(O, \vec{n})$ .

***L'état de contrainte en un point est donc parfaitement défini par le tenseur des contraintes.***

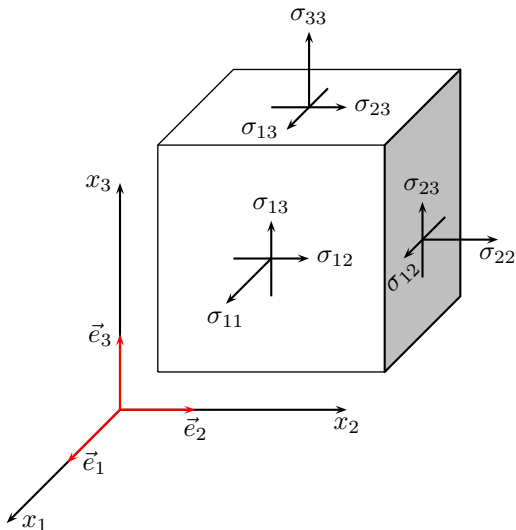
Le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est un être mathématique indépendant du système de coordonnées (invariable par changement de base).

Dans le système d'axes  $(O, x_1, x_2, x_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par la matrice  $[\sigma]$ . Dans un autre système de coordonnées  $(\bar{O}, x'_1, x'_2, x'_3)$ , le tenseur  $\underline{\underline{[\sigma]}}$  est représenté par une matrice **différente**  $[\sigma]'$ .

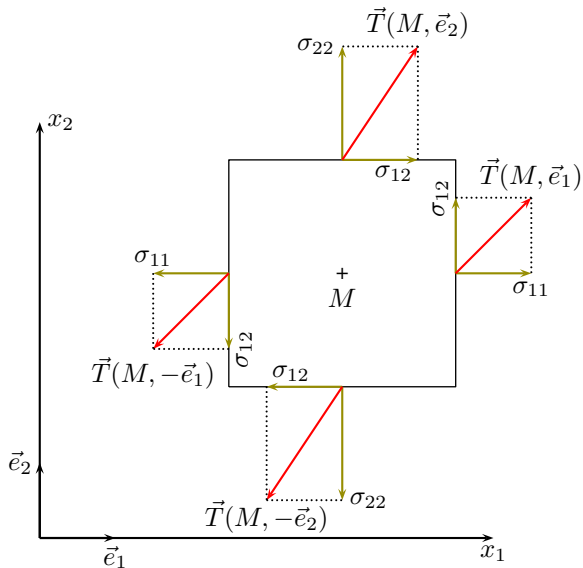
***La matrice représentant le tenseur des contraintes en un point change avec le changement de base.***



## Cas Tridimensionnel



## Cas bidimensionnel (plan)



Dans un corps chargé, le vecteur contrainte varie d'un point à autre et il en est de même pour les composantes de contraintes.

Ces variations sont gouvernées par les conditions d'équilibre.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum \vec{M} = \vec{0}$$

La satisfaction des conditions d'équilibre conduit à établir des relations entre les composantes de la matrice représentant le tenseur des contraintes en un point.

En d'autres termes, tout matrice carrée réelle  $3 \times 3$  ne peut représenter l'état de contrainte en un point. Ses éléments doivent vérifier certaines conditions qui les lient.





Dans un corps chargé, le vecteur contrainte varie d'un point à autre et il en est de même pour les composantes de contraintes.

Ces variations sont gouvernées par les **conditions d'équilibre**.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum \vec{M} = \vec{0}$$

La satisfaction des conditions d'équilibre conduit à établir **des relations entre les composantes de la matrice représentant le tenseur des contraintes** en un point.

En d'autres termes, tout matrice carrée réelle  $3 \times 3$  ne peut représenter l'état de contrainte en un point. Ses éléments doivent vérifier certaines conditions qui les lient.



Dans un corps chargé, le vecteur contrainte varie d'un point à autre et il en est de même pour les composantes de contraintes.

Ces variations sont gouvernées par les **conditions d'équilibre**.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum \vec{M} = \vec{0}$$

La satisfaction des conditions d'équilibre conduit à établir **des relations entre les composantes de la matrice représentant le tenseur des contraintes en un point**.

En d'autres termes, tout matrice carrée réelle  $3 \times 3$  ne peut représenter l'état de contrainte en un point. Ses éléments doivent vérifier certaines conditions qui les lient.



Dans un corps chargé, le vecteur contrainte varie d'un point à autre et il en est de même pour les composantes de contraintes.

Ces variations sont gouvernées par les **conditions d'équilibre**.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum \vec{M} = \vec{0}$$

La satisfaction des conditions d'équilibre conduit à établir **des relations entre les composantes de la matrice représentant le tenseur des contraintes** en un point.

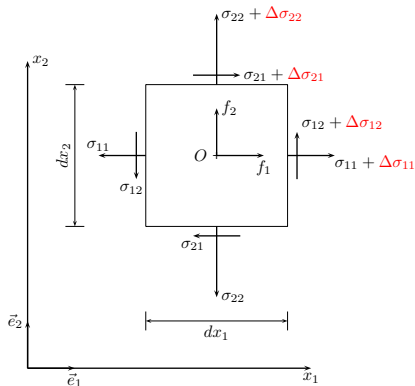
En d'autres termes, toute matrice carrée réelle  $3 \times 3$  ne peut représenter l'état de contrainte en un point. Ses éléments doivent vérifier certaines conditions qui les lient.



On considère le cas plan pour sa simplicité et qui aisément généralisable au cas tridimensionnel.

Soit un rectangle infinitésimal, isolé d'un corps, de côtés  $dx_1$  et  $dx_2$  et d'épaisseur  $e$ .

Soient  $f_1$  et  $f_2$  les composantes des densités des forces volumiques (exprimées en unité de force par unité de volume) agissant sur l'élément.



Quand on se déplace d'un point à autre, par exemple, d'un point de la face de normale  $-\vec{e}_1$  à un point de la face de normale  $+\vec{e}_1$  qui sont distant de  $dx_1$  dans l'élément infinitésimale, les composantes changent de valeurs.

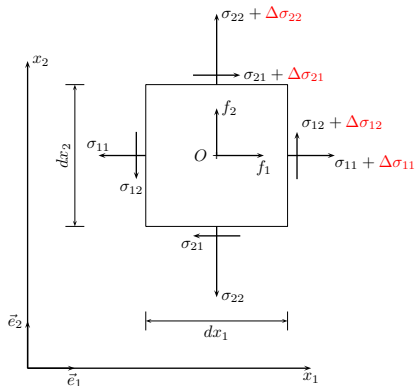


On considère le cas plan pour sa simplicité et qui aisément généralisable au cas tridimensionnel.

Soit un rectangle infinitésimal, isolé d'un corps, de côtés  $dx_1$  et  $dx_2$  et d'épaisseur  $e$ .

Soient  $f_1$  et  $f_2$  les composantes des densités des forces volumiques (exprimées en unité de force par unité de volume) agissant sur l'élément.

← Return



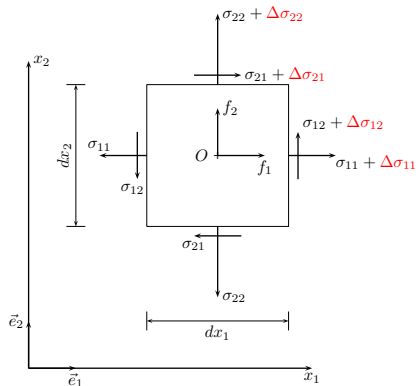
Quand on se déplace d'un point à autre, par exemple, d'un point de la face de normale  $-\vec{e}_1$  à un point de la face de normale  $+\vec{e}_1$  qui sont distant de  $dx_1$  dans l'élément infinitésimale, les composantes changent de valeurs.



On considère le cas plan pour sa simplicité et qui aisément généralisable au cas tridimensionnel.

Soit un rectangle infinitésimal, isolé d'un corps, de côtés  $dx_1$  et  $dx_2$  et d'épaisseur  $e$ .

Soient  $f_1$  et  $f_2$  les composantes des densités des forces volumiques (exprimées en unité de force par unité de volume) agissant sur l'élément.



Quand on se déplace d'un point à autre, par exemple, d'un point de la face de normale  $-\vec{e}_1$  à un point de la face de normale  $+\vec{e}_1$  qui sont distant de  $dx_1$  dans l'élément infinitésimale, les composantes changent de valeurs.



Ainsi, par exemple, en passant de la facette de normale  $-\vec{e}_1$  à la facette de normale  $\vec{e}_1$  distants de  $dx_1$  la composante  $\sigma_{11}$  subit un accroissement  $\Delta\sigma_{11}$  et passe de  $\sigma_{11}$  à  $\sigma_{11} + \Delta\sigma_{11}$ .

Et il en est de même pour les autres composantes [voir figure](#).

Par des *considérations géométriques* ou en utilisant *le développement tronqué en séries de Taylor*, la variation des composantes entre deux facettes opposées infiniment proches peut être exprimée.

Par exemple, pour la composante  $\sigma_{11}$  :

$$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$$

En traitant toutes les composantes de la sorte, on obtient l'état représenté sur [la figure](#).



Ainsi, par exemple, en passant de la facette de normale  $-\vec{e}_1$  à la facette de normale  $\vec{e}_1$  distants de  $dx_1$  la composante  $\sigma_{11}$  subit un accroissement  $\Delta\sigma_{11}$  et passe de  $\sigma_{11}$  à  $\sigma_{11} + \Delta\sigma_{11}$ .

Et il en est de même pour les autres composantes [voir figure](#).

Par des *considérations géométriques* ou en utilisant *le développement tronqué en séries de Taylor*, la variation des composantes entre deux facettes opposées infiniment proches peut être exprimée.

Par exemple, pour la composante  $\sigma_{11}$  :

$$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$$

En traitant toutes les composantes de la sorte, on obtient l'état représenté sur [la figure](#).





Ainsi, par exemple, en passant de la facette de normale  $-\vec{e}_1$  à la facette de normale  $\vec{e}_1$  distants de  $dx_1$  la composante  $\sigma_{11}$  subit un accroissement  $\Delta\sigma_{11}$  et passe de  $\sigma_{11}$  à  $\sigma_{11} + \Delta\sigma_{11}$ .

Et il en est de même pour les autres composantes [voir figure](#).

Par des **considérations géométriques** ou en utilisant **le développement tronqué en séries de Taylor**, la variation des composantes entre deux facettes opposées infiniment proches peut être exprimée.

Par exemple, pour la composante  $\sigma_{11}$  :

$$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$$

En traitant toutes les composantes de la sorte, on obtient l'état représenté sur [la figure](#).



Ainsi, par exemple, en passant de la facette de normale  $-\vec{e}_1$  à la facette de normale  $\vec{e}_1$  distants de  $dx_1$  la composante  $\sigma_{11}$  subit un accroissement  $\Delta\sigma_{11}$  et passe de  $\sigma_{11}$  à  $\sigma_{11} + \Delta\sigma_{11}$ .

Et il en est de même pour les autres composantes [voir figure](#).

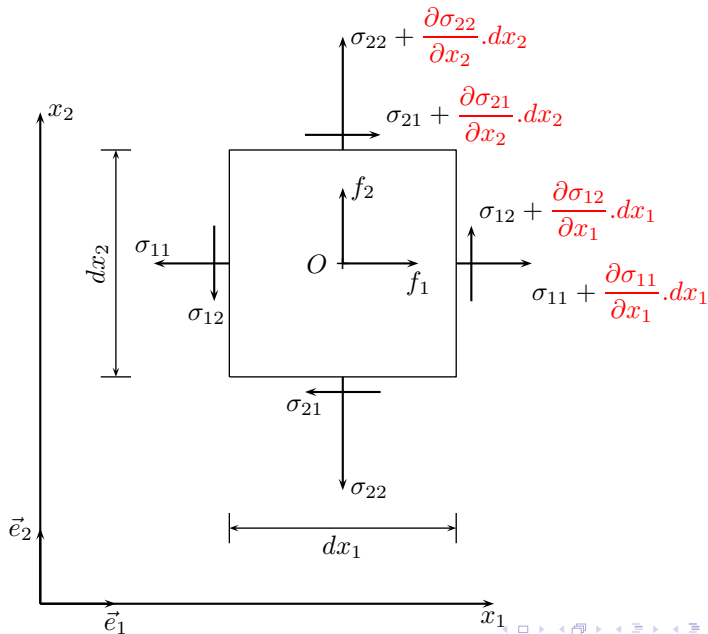
Par des **considérations géométriques** ou en utilisant **le développement tronqué en séries de Taylor**, la variation des composantes entre deux facettes opposées infiniment proches peut être exprimée.

Par exemple, pour la composante  $\sigma_{11}$  :

$$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$$

En traitant toutes les composantes de la sorte, on obtient l'état représenté sur [la figure](#).





## Équilibre des forces

Considérant les forces agissant dans la direction  $x_1$ , on a :

$$f_1 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot e - \sigma_{11} \cdot dx_2 \cdot e - \sigma_{21} \cdot dx_1 \cdot e \\ + \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) \cdot dx_2 \cdot e + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \cdot e = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 \right) dx_1 \cdot dx_2 \cdot e = 0$$

La quantité  $dx_1 \cdot dx_2 \cdot e$  est le volume de l'élément, donc non nulle, alors :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 = 0$$

De la même manière, en considérant la direction  $x_2$ , on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0$$



## Équilibre des forces

Considérant les forces agissant dans la direction  $x_1$ , on a :

$$\begin{aligned}
 & f_1 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot e - \sigma_{11} \cdot dx_2 \cdot e - \sigma_{21} \cdot dx_1 \cdot e \\
 & + \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) \cdot dx_2 \cdot e + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \cdot e = 0 \\
 & \iff \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 \right) dx_1 \cdot dx_2 \cdot e = 0
 \end{aligned}$$

La quantité  $dx_1 \cdot dx_2 \cdot e$  est le volume de l'élément, donc non nulle, alors :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 = 0$$

De la même manière, en considérant la direction  $x_2$ , on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0$$



## Équilibre des forces

Considérant les forces agissant dans la direction  $x_1$ , on a :

$$\begin{aligned}
 & f_1 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot e - \sigma_{11} \cdot dx_2 \cdot e - \sigma_{21} \cdot dx_1 \cdot e \\
 & + \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) \cdot dx_2 \cdot e + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \cdot e = 0 \\
 & \iff \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 \right) dx_1 \cdot dx_2 \cdot e = 0
 \end{aligned}$$

La quantité  $dx_1 \cdot dx_2 \cdot e$  est le volume de l'élément , donc non nulle, alors :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 = 0$$

De la même manière, en considérant la direction  $x_2$ , on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0$$



## Équilibre des forces

Considérant les forces agissant dans la direction  $x_1$ , on a :

$$\begin{aligned}
 & f_1 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot e - \sigma_{11} \cdot dx_2 \cdot e - \sigma_{21} \cdot dx_1 \cdot e \\
 & + \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) \cdot dx_2 \cdot e + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \cdot e = 0 \\
 & \iff \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 \right) dx_1 \cdot dx_2 \cdot e = 0
 \end{aligned}$$

La quantité  $dx_1 \cdot dx_2 \cdot e$  est le volume de l'élément, donc non nulle, alors :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 = 0$$

De la même manière, en considérant la direction  $x_2$ , on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0$$



## Équilibre des moments

L'équilibre des moments des forces agissant par rapport à son centre  $O$  est tel que :  $\sum M/O = 0$ , ce qui conduit à :

$$(\sigma_{12}.dx_2.e).\frac{dx_1}{2} + \left[ (\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1})dx_2.e \right] \cdot \frac{dx_1}{2} - (\sigma_{21}.dx_1.e).\frac{dx_2}{2} - \left[ (\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}).dx_1.e \right] \cdot \frac{dx_2}{2} = 0$$

$$\iff (\sigma_{12} - \sigma_{21}).dx_1.dx_2.e + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \cdot (dx_1)^2 \cdot dx_2 \cdot \frac{e}{2} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \cdot dx_1 \cdot (dx_2)^2 \cdot \frac{e}{2} = 0$$

En négligeant les termes du troisième ordre  $dx_2(dx_1)^2$  et  $dx_1(dx_2)^2$ , on obtient :

$$(\sigma_{12} - \sigma_{21}).dx_1.dx_2.e = 0$$

Comme la quantité  $dx_1.dx_2.e = dV$  représente le volume de l'élément, donc non nulle, alors on a :

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \implies \sigma_{12} = \sigma_{21}$$





En utilisant la notation indicielle, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} + f_{\beta} = 0 \quad \text{avec } (\alpha, \beta = 1, 2)$$

pour l'équilibre des forces , et

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha} \quad \text{avec } (\alpha, \beta = 1, 2)$$

pour l'équilibre des moments.

L'équation découlant de l'équilibre des moments montre bien que la matrice représentant l'état de contrainte en un point est *symétrique* et s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



En utilisant la notation indicielle, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} + f_{\beta} = 0 \quad \text{avec } (\alpha, \beta = 1, 2)$$

pour l'équilibre des forces , et

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha} \quad \text{avec } (\alpha, \beta = 1, 2)$$

pour l'équilibre des moments.

L'équation découlant de l'équilibre des moments montre bien que la matrice représentant l'état de contrainte en un point est *symétrique* et s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



En utilisant la notation indicielle, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} + f_{\beta} = 0 \quad \text{avec } (\alpha, \beta = 1, 2)$$

pour l'équilibre des forces , et

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha} \quad \text{avec } (\alpha, \beta = 1, 2)$$

pour l'équilibre des moments.

L'équation découlant de l'équilibre des moments montre bien que la matrice représentant l'état de contrainte en un point est **symétrique** et s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



## Généralisation au cas tridimensionnel

Une démarche similaire à celle du cas plan peut être utilisée en considérant un parallélépipède de cotés  $dx_1$ ,  $dx_2$  et  $dx_3$  et de centre  $O$ .

On obtient :

*Équilibre des forces*

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_i} + f_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 = \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_i} + f_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_i} + f_3 = 0$$

soit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$



## Généralisation au cas tridimensionnel

Une démarche similaire à celle du cas plan peut être utilisée en considérant un parallélépipède de cotés  $dx_1$ ,  $dx_2$  et  $dx_3$  et de centre  $O$ .

On obtient :

### *Équilibre des forces*

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_i} + f_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 = \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_i} + f_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_i} + f_3 = 0$$

soit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$



## Équilibre des moments

L'équation du cas plan ( $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ) se généralise et conduit à :

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} ; \sigma_{31} = \sigma_{13} ; \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

ou sous forme indicielle :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3)$

Cette relation montre que la matrice représentant le tenseur des contraintes

en un point est *symétrique* et s'écrit :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

## Conclusion

Une matrice représentant le tenseur des contraintes en un point est *symétrique* et ses termes vérifient les *équations différentielles d'équilibre*.



## Équilibre des moments

L'équation du cas plan ( $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ) se généralise et conduit à :

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} ; \sigma_{31} = \sigma_{13} ; \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

ou sous forme indicielle :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3)$

Cette relation montre que la matrice représentant le tenseur des contraintes

en un point est **symétrique** et s'écrit :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

## Conclusion

Une matrice représentant le tenseur des contraintes en un point est **symétrique** et ses termes vérifient les *équations différentielles d'équilibre*.



## Équilibre des moments

L'équation du cas plan ( $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ) se généralise et conduit à :

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} ; \sigma_{31} = \sigma_{13} ; \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

ou sous forme indicielle :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3)$

Cette relation montre que la matrice représentant le tenseur des contraintes

en un point est **symétrique** et s'écrit :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

## Conclusion

Une matrice représentant le tenseur des contraintes en un point est **symétrique** et ses termes vérifient les **équations différentielles d'équilibre**.





Il a été montré que l'état de contrainte en un point est défini par un tenseur des contraintes (du second ordre) représenté dans le système d'axes ortho-normés  $(x_1, x_2, x_3)$  muni d'une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  par la matrice  $[\sigma]$  donnée

par la relation :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$

Il est maintenant question de voir comment se transforme la matrice représentant l'état de contrainte au même point lors d'un changement de repère.

Il s'agit de déterminer la matrice  $[\sigma]'$  au même point relativement au système de coordonnées  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  muni d'une base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  obtenu par rotation du système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  en fonction des composantes de  $[\sigma]$  et des paramètres de rotation.

La matrice transformée s'écrit :  $[\sigma]' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix}.$



Il a été montré que l'état de contrainte en un point est défini par un tenseur des contraintes (du second ordre) représenté dans le système d'axes ortho-normés  $(x_1, x_2, x_3)$  muni d'une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  par la matrice  $[\sigma]$  donnée

par la relation :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$

Il est maintenant question de voir comment se transforme la matrice représentant l'état de contrainte au même point lors d'un changement de repère.

Il s'agit de déterminer la matrice  $[\sigma]'$  au même point relativement au système de coordonnées  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  muni d'une base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  obtenu par rotation du système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  en fonction des composantes de  $[\sigma]$  et des paramètres de rotation.

La matrice transformée s'écrit :  $[\sigma]' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix}.$



Il a été montré que l'état de contrainte en un point est défini par un tenseur des contraintes (du second ordre) représenté dans le système d'axes ortho-normés  $(x_1, x_2, x_3)$  muni d'une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  par la matrice  $[\sigma]$  donnée

par la relation : 
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Il est maintenant question de voir comment se transforme la matrice représentant l'état de contrainte au même point lors d'un changement de repère.

Il s'agit de déterminer la matrice  $[\sigma]'$  au même point relativement au système de coordonnées  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  muni d'une base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  obtenu par rotation du système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  en fonction des composantes de  $[\sigma]$  et des paramètres de rotation.

La matrice transformée s'écrit : 
$$[\sigma]' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix}.$$



Il a été montré que l'état de contrainte en un point est défini par un tenseur des contraintes (du second ordre) représenté dans le système d'axes ortho-normés  $(x_1, x_2, x_3)$  muni d'une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  par la matrice  $[\sigma]$  donnée

par la relation : 
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Il est maintenant question de voir comment se transforme la matrice représentant l'état de contrainte au même point lors d'un changement de repère.

Il s'agit de déterminer la matrice  $[\sigma]'$  au même point relativement au système de coordonnées  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  muni d'une base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  obtenu par rotation du système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  en fonction des composantes de  $[\sigma]$  et des paramètres de rotation.

La matrice transformée s'écrit : 
$$[\sigma]' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix}.$$



Pour des raisons pratiques et par souci de simplification on commence par établir la loi de transformation pour l'état plan.

La généralisation au cas général (3D) est aisée en passant par la notation indicielle.

A cet effet, on considère un état où les contraintes et les forces de volume sont indépendantes de l'une des coordonnées qui est dans le présent cas la coordonnée  $x_3$ .

Un tel état de contrainte est défini dans le plan  $(x_1, x_2)$  par les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  et les forces de volume  $f_1$  et  $f_2$ .

La matrice représentant le tenseur de contrainte s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



Pour des raisons pratiques et par souci de simplification on commence par établir la loi de transformation pour l'état plan.

La généralisation au cas général (3D) est aisé en passant par la notation indicielle.

A cet effet, on considère un état où les contraintes et les forces de volume sont indépendantes de l'une des coordonnées qui est dans le présent cas la coordonnée  $x_3$ .

Un tel état de contrainte est défini dans le plan  $(x_1, x_2)$  par les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  et les forces de volume  $f_1$  et  $f_2$ .

La matrice représentant le tenseur de contrainte s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



Pour des raisons pratiques et par souci de simplification on commence par établir la loi de transformation pour l'état plan.

La généralisation au cas général (3D) est aisée en passant par la notation indicielle.

A cet effet, on considère un état où les contraintes et les forces de volume sont indépendantes de l'une des coordonnées qui est dans le présent cas la coordonnée  $x_3$ .

Un tel état de contrainte est défini dans le plan  $(x_1, x_2)$  par les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  et les forces de volume  $f_1$  et  $f_2$ .

La matrice représentant le tenseur de contrainte s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



Pour des raisons pratiques et par souci de simplification on commence par établir la loi de transformation pour l'état plan.

La généralisation au cas général (3D) est aisée en passant par la notation indicielle.

A cet effet, on considère un état où les contraintes et les forces de volume sont indépendantes de l'une des coordonnées qui est dans le présent cas la coordonnée  $x_3$ .

Un tel état de contrainte est défini dans le plan  $(x_1, x_2)$  par les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  et les forces de volume  $f_1$  et  $f_2$ .

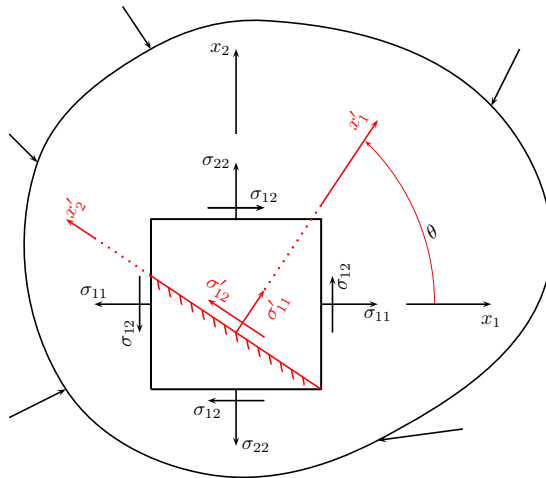
La matrice représentant le tenseur de contrainte s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

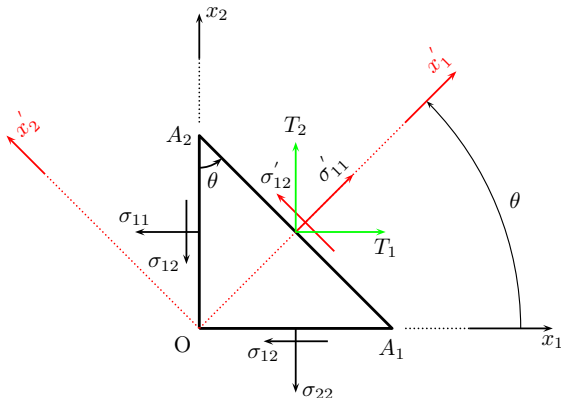




On considère un élément plan infinitésimal découpé d'un corps chargé comme indiqué dans la figure ci-dessous.



Il est demandé de déterminer les composantes de contraintes  $\sigma'_{11}$ ,  $\sigma'_{22}$  et  $\sigma'_{12}$  qui représente l'état de contrainte au même point mais en se référant aux axes  $(x'_1, x'_2)$  faisant un angle  $\theta$  avec les axes  $(x_1, x_2)$  comme indiqué sur la figure.



Considérant la face  $A_1A_2$  normale (perpendiculaire) à l'axe  $x_1'$ .

Si l'aire de  $A_1A_2$  est prise égale à  $dS$ , donc les faces  $OA_1$  et  $OA_2$  ont pour aires  $dS.\sin\theta$  et  $dS.\cos\theta$  respectivement.

L'équilibre des des forces selon les axes  $x_1$  et  $x_2$  nécessite que :

$$T_1.dS = \sigma_{11}.dS.\cos\theta + \sigma_{12}.dS.\sin\theta$$

$$T_2.dS = \sigma_{12}.dS.\cos\theta + \sigma_{22}.dS.\sin\theta$$

en divisant par  $dS$ , on obtient :

$$T_1 = \sigma_{11}.\cos\theta + \sigma_{12}.\sin\theta$$

$$T_2 = \sigma_{12}.\cos\theta + \sigma_{22}.\sin\theta$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les composantes du vecteur contrainte agissant sur la face  $A_1A_2$  dans les directions  $x_1$  et  $x_2$  respectivement.



Considérant la face  $A_1A_2$  normale (perpendiculaire) à l'axe  $x_1'$ .

Si l'aire de  $A_1A_2$  est prise égale à  $dS$ , donc les faces  $OA_1$  et  $OA_2$  ont pour aires  $dS.\sin\theta$  et  $dS.\cos\theta$  respectivement.

L'équilibre des des forces selon les axes  $x_1$  et  $x_2$  nécessite que :

$$T_1.dS = \sigma_{11}.dS.\cos\theta + \sigma_{12}.dS.\sin\theta$$

$$T_2.dS = \sigma_{12}.dS.\cos\theta + \sigma_{22}.dS.\sin\theta$$

en divisant par  $dS$ , on obtient :

$$T_1 = \sigma_{11}.\cos\theta + \sigma_{12}.\sin\theta$$

$$T_2 = \sigma_{12}.\cos\theta + \sigma_{22}.\sin\theta$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les composantes du vecteur contrainte agissant sur la face  $A_1A_2$  dans les directions  $x_1$  et  $x_2$  respectivement.



Considérant la face  $A_1A_2$  normale (perpendiculaire) à l'axe  $x_1'$ .

Si l'aire de  $A_1A_2$  est prise égale à  $dS$ , donc les faces  $OA_1$  et  $OA_2$  ont pour aires  $dS.\sin\theta$  et  $dS.\cos\theta$  respectivement.

L'équilibre des des forces selon les axes  $x_1$  et  $x_2$  nécessite que :

$$T_1.dS = \sigma_{11}.dS.\cos\theta + \sigma_{12}.dS.\sin\theta$$

$$T_2.dS = \sigma_{12}.dS.\cos\theta + \sigma_{22}.dS.\sin\theta$$

en divisant par  $dS$ , on obtient :

$$T_1 = \sigma_{11}.\cos\theta + \sigma_{12}.\sin\theta$$

$$T_2 = \sigma_{12}.\cos\theta + \sigma_{22}.\sin\theta$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les composantes du vecteur contrainte agissant sur la face  $A_1A_2$  dans les directions  $x_1$  et  $x_2$  respectivement.



Considérant la face  $A_1A_2$  normale (perpendiculaire) à l'axe  $x_1'$ .

Si l'aire de  $A_1A_2$  est prise égale à  $dS$ , donc les faces  $OA_1$  et  $OA_2$  ont pour aires  $dS.\sin\theta$  et  $dS.\cos\theta$  respectivement.

L'équilibre des des forces selon les axes  $x_1$  et  $x_2$  nécessite que :

$$T_1.dS = \sigma_{11}.dS.\cos\theta + \sigma_{12}.dS.\sin\theta$$

$$T_2.dS = \sigma_{12}.dS.\cos\theta + \sigma_{22}.dS.\sin\theta$$

en divisant par  $dS$ , on obtient :

$$T_1 = \sigma_{11}.\cos\theta + \sigma_{12}.\sin\theta$$

$$T_2 = \sigma_{12}.\cos\theta + \sigma_{22}.\sin\theta$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les composantes du vecteur contrainte agissant sur la face  $A_1A_2$  dans les directions  $x_1$  et  $x_2$  respectivement.



Les composantes normale et tangentielle des contraintes sur la face  $A_1A_2$  suivant les axes  $x'_1$  et  $x'_2$  sont obtenues en projetant  $T_1$  et  $T_2$  dans les directions  $x'_1$  et  $x'_2$ , ce qui donne :

$$\sigma'_{11} = T_1.\cos\theta + T_2.\sin\theta$$

$$\sigma'_{12} = -T_1.\sin\theta + T_2.\cos\theta$$

par substitution des expressions de  $T_1$  et  $T_2$  les relations précédentes deviennent :

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11}.\cos^2\theta + \sigma_{22}.\sin^2\theta + 2\sigma_{12}.\sin\theta.\cos\theta$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\theta.\cos\theta$$



Les composantes normale et tangentielle des contraintes sur la face  $A_1A_2$  suivant les axes  $x'_1$  et  $x'_2$  sont obtenues en projetant  $T_1$  et  $T_2$  dans les directions  $x'_1$  et  $x'_2$ , ce qui donne :

$$\sigma'_{11} = T_1.\cos\theta + T_2.\sin\theta$$

$$\sigma'_{12} = -T_1.\sin\theta + T_2.\cos\theta$$

par substitution des expressions de  $T_1$  et  $T_2$  les relations précédentes deviennent :

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11}.\cos^2\theta + \sigma_{22}.\sin^2\theta + 2\sigma_{12}.\sin\theta.\cos\theta$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\theta.\cos\theta$$





La composante de contrainte  $\sigma'_{22}$  est obtenue en utilisant le même raisonnement sur une face de normale  $x'_2$ , ou en substituant  $\theta + \frac{\pi}{2}$  à  $\theta$  dans l'expression de  $\sigma'_{11}$ , ce qui donne :  $\sigma'_{22}(\theta) = \sigma'_{11}(\theta + \frac{\pi}{2})$ , soit :

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} \cdot \cos^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + \sigma_{22} \cdot \sin^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + 2\sigma_{12} \cdot \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$$

Sachant que :  $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$  et  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ , l'expression précédente s'écrit comme suit :

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} \cdot \sin^2\theta + \sigma_{22} \cdot \cos^2\theta - 2\sigma_{12} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

Ainsi, les équations de transformation s'écrivent :

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} \cdot \cos^2\theta + \sigma_{22} \cdot \sin^2\theta + 2\sigma_{12} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} \cdot \sin^2\theta + \sigma_{22} \cdot \cos^2\theta - 2\sigma_{12} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\theta \cdot \cos\theta$$



La composante de contrainte  $\sigma'_{22}$  est obtenue en utilisant le même raisonnement sur une face de normale  $x'_2$ , ou en substituant  $\theta + \frac{\pi}{2}$  à  $\theta$  dans l'expression de  $\sigma'_{11}$ , ce qui donne :  $\sigma'_{22}(\theta) = \sigma'_{11}(\theta + \frac{\pi}{2})$ , soit :

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} \cdot \cos^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + \sigma_{22} \cdot \sin^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + 2\sigma_{12} \cdot \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$$

Sachant que :  $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$  et  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ , l'expression précédente s'écrit comme suit :

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} \cdot \sin^2\theta + \sigma_{22} \cdot \cos^2\theta - 2\sigma_{12} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

Ainsi, les équations de transformation s'écrivent :

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} \cdot \cos^2\theta + \sigma_{22} \cdot \sin^2\theta + 2\sigma_{12} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} \cdot \sin^2\theta + \sigma_{22} \cdot \cos^2\theta - 2\sigma_{12} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\theta \cdot \cos\theta$$



La composante de contrainte  $\sigma'_{22}$  est obtenue en utilisant le même raisonnement sur une face de normale  $x'_2$ , ou en substituant  $\theta + \frac{\pi}{2}$  à  $\theta$  dans l'expression de  $\sigma'_{11}$ , ce qui donne :  $\sigma'_{22}(\theta) = \sigma'_{11}(\theta + \frac{\pi}{2})$ , soit :

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11}.\cos^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + \sigma_{22}.\sin^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + 2\sigma_{12}.\sin(\theta + \frac{\pi}{2}).\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$$

Sachant que :  $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$  et  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ , l'expression précédente s'écrit comme suit :

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11}.\sin^2\theta + \sigma_{22}.\cos^2\theta - 2\sigma_{12}.\sin\theta.\cos\theta$$

Ainsi, les équations de transformation s'écrivent :

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11}.\cos^2\theta + \sigma_{22}.\sin^2\theta + 2\sigma_{12}.\sin\theta.\cos\theta$$

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11}.\sin^2\theta + \sigma_{22}.\cos^2\theta - 2\sigma_{12}.\sin\theta.\cos\theta$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\theta.\cos\theta$$



Les équations de transformation peuvent être converties sous une autre écriture (linéaire) en introduisant les transformations trigonométriques suivantes :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta), \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta), \quad \text{et} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta,$$

Alors les équations de transformation des contraintes deviennent :

$$\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta - \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{12} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta$$

Ces expressions permettent de déterminer les termes de la matrice  $[\sigma']$  dans le repère  $(x'_1, x'_2)$ , obtenu à partir du repère  $(x_1, x_2)$  par une rotation  $\theta$ , en fonction des termes connus de la matrice  $[\sigma]$ .



Les équations de transformation peuvent être converties sous une autre écriture (linéaire) en introduisant les transformations trigonométriques suivantes :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta), \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta), \quad \text{et} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta,$$

Alors les équations de transformation des contraintes deviennent :

$$\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta - \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{12} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta$$

Ces expressions permettent de déterminer les termes de la matrice  $[\sigma']$  dans le repère  $(x'_1, x'_2)$ , obtenu à partir du repère  $(x_1, x_2)$  par une rotation  $\theta$ , en fonction des termes connus de la matrice  $[\sigma]$ .



Les équations de transformation peuvent être converties sous une autre écriture (linéaire) en introduisant les transformations trigonométriques suivantes :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta), \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta), \quad \text{et} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta,$$

Alors les équations de transformation des contraintes deviennent :

$$\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta - \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{12} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta$$

Ces expressions permettent de déterminer les termes de la matrice  $[\sigma']$  dans le repère  $(x'_1, x'_2)$ , obtenu à partir du repère  $(x_1, x_2)$  par une rotation  $\theta$ , en fonction des termes connus de la matrice  $[\sigma]$ .



Les équations de transformation peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

soit :

$$[\sigma'] = [R][\sigma][R]^t$$

Avec  $[R]$  matrice de rotation ou matrice de changement de base (ou de repère) et l'exposant  $t$  indique la transposition.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Les équations de transformation peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

soit :

$$[\sigma'] = [R][\sigma][R]^t$$

Avec  $[R]$  matrice de rotation ou matrice de changement de base (ou de repère) et l'exposant  $t$  indique la transposition.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$





Les équations de transformation peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

soit :

$$[\sigma'] = [R][\sigma][R]^t$$

Avec  $[R]$  matrice de rotation ou matrice de changement de base (ou de repère) et l'exposant  $t$  indique la transposition.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



On considère deux systèmes de coordonnées  $(x_1, x_2)$  et  $(x'_1, x'_2)$  tels que indiqués sur la figure où  $(x'_1, x'_2)$  est déduit de  $(x_1, x_2)$  par une rotation d'un angle  $\theta$ .

On a :

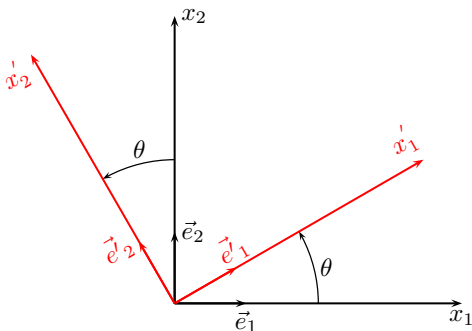
$$\vec{e}'_1 = r_{11}\vec{e}_1 + r_{12}\vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_2 = r_{21}\vec{e}_1 + r_{22}\vec{e}_2$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{bmatrix}$$

avec  $r_{11}$  et  $r_{12}$  les composantes de  $\vec{e}'_1$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $r_{21}$  et  $r_{22}$  sont celles de  $\vec{e}'_2$ .



On considère deux systèmes de coordonnées  $(x_1, x_2)$  et  $(x'_1, x'_2)$  tels que indiqués sur la figure où  $(x'_1, x'_2)$  est déduit de  $(x_1, x_2)$  par une rotation d'un angle  $\theta$ .

On a :

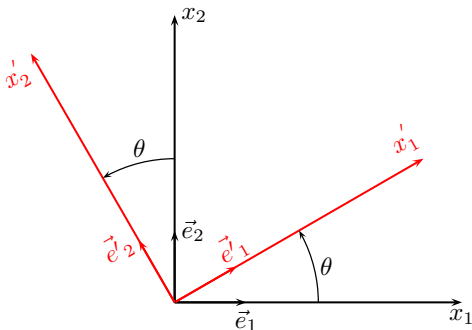
$$\vec{e}'_1 = r_{11}\vec{e}_1 + r_{12}\vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_2 = r_{21}\vec{e}_1 + r_{22}\vec{e}_2$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{bmatrix}$$

avec  $r_{11}$  et  $r_{12}$  les composantes de  $\vec{e}'_1$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $r_{21}$  et  $r_{22}$  sont celles de  $\vec{e}'_2$ .



Les composantes de ces vecteurs sont aussi données par les expressions :

$$r_{11} = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1 = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_1) = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_1)$$

$$r_{12} = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_2 = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_2) = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_2)$$

$$r_{21} = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_1 = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_1) = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_1)$$

$$r_{22} = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_2 = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_2) = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_2)$$

soit

$$r_{\alpha\beta} = \cos(\vec{e}'_\alpha, \vec{e}_\beta) \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

où  $\cos(\vec{e}'_\alpha, \vec{e}_\beta)$  sont les cosinus directeurs associés aux angles définissant l'orientation des nouveaux axes  $(x'_1, x'_2)$  par rapport aux anciens  $(x_1, x_2)$ .



Les composantes de ces vecteurs sont aussi données par les expressions :

$$r_{11} = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1 = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_1) = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_1)$$

$$r_{12} = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_2 = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_2) = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_2)$$

$$r_{21} = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_1 = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_1) = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_1)$$

$$r_{22} = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_2 = |1| \cdot |1| \cdot \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_2) = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_2)$$

soit

$$r_{\alpha\beta} = \cos(\vec{e}'_\alpha, \vec{e}_\beta) \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

où  $\cos(\vec{e}'_\alpha, \vec{e}_\beta)$  sont les cosinus directeurs associés aux angles définissant l'orientation des nouveaux axes  $(x'_1, x'_2)$  par rapport aux anciens  $(x_1, x_2)$ .



D'après la figure on a :

$$r_{11} = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_1) = \cos\theta$$

$$r_{12} = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$r_{21} = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$r_{22} = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_2) = \cos\theta$$

et donc

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$



D'après la figure on a :

$$r_{11} = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_1) = \cos\theta$$

$$r_{12} = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$r_{21} = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$r_{22} = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_2) = \cos\theta$$

et donc

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$



Ainsi

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

En développant, on obtient :

$$\sigma'_{11} = r_{11}^2 \sigma_{11} + 2r_{11}r_{12}\sigma_{12} + r_{12}^2 \sigma_{22}$$

$$\sigma'_{22} = r_{21}^2 \sigma_{11} + 2r_{21}r_{22}\sigma_{12} + r_{22}^2 \sigma_{22}$$

$$\sigma'_{12} = r_{11}r_{21}\sigma_{11} + r_{12}r_{21}\sigma_{12} + r_{11}r_{22}\sigma_{12} + r_{12}r_{22}\sigma_{22}$$

En utilisant la notation indicielle, les relations précédentes s'écrivent :

$$\sigma'_{\alpha\beta} = r_{\alpha\delta}r_{\beta\gamma}\sigma_{\delta\gamma} \quad (\alpha, \beta, \delta, \gamma = 1, 2)$$

Cette expression indicielle permet de généraliser les équations de transformation au cas tridimensionnel.





Ainsi

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

En développant, on obtient :

$$\sigma'_{11} = r_{11}^2 \sigma_{11} + 2r_{11}r_{12}\sigma_{12} + r_{12}^2 \sigma_{22}$$

$$\sigma'_{22} = r_{21}^2 \sigma_{11} + 2r_{21}r_{22}\sigma_{12} + r_{22}^2 \sigma_{22}$$

$$\sigma'_{12} = r_{11}r_{21}\sigma_{11} + r_{12}r_{21}\sigma_{12} + r_{11}r_{22}\sigma_{12} + r_{12}r_{22}\sigma_{22}$$

En utilisant la notation indicielle, les relations précédentes s'écrivent :

$$\sigma'_{\alpha\beta} = r_{\alpha\delta}r_{\beta\gamma}\sigma_{\delta\gamma} \quad (\alpha, \beta, \delta, \gamma = 1, 2)$$

Cette expression indicielle permet de généraliser les équations de transformation au cas tridimensionnel.



Ainsi

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

En développant, on obtient :

$$\sigma'_{11} = r_{11}^2 \sigma_{11} + 2r_{11}r_{12}\sigma_{12} + r_{12}^2 \sigma_{22}$$

$$\sigma'_{22} = r_{21}^2 \sigma_{11} + 2r_{21}r_{22}\sigma_{12} + r_{22}^2 \sigma_{22}$$

$$\sigma'_{12} = r_{11}r_{21}\sigma_{11} + r_{12}r_{21}\sigma_{12} + r_{11}r_{22}\sigma_{12} + r_{12}r_{22}\sigma_{22}$$

En utilisant la notation indicielle, les relations précédentes s'écrivent :

$$\sigma'_{\alpha\beta} = r_{\alpha\delta}r_{\beta\gamma}\sigma_{\delta\gamma} \quad (\alpha, \beta, \delta, \gamma = 1, 2)$$

Cette expression indicielle permet de généraliser les équations de transformation au cas tridimensionnel.



Les équations de transformation du cas plan indiquent que les contraintes normales ( $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$ ) et la composante tangentielle  $\sigma'_{12}$  **varient continûment en fonction de l'angle de rotation  $\theta$**  entre les deux systèmes d'axes  $(x_1, x_2)$  et  $(x'_1, x'_2)$ , les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  étant connues.

Pour établir les orientations de  $X_1$ ,  $X_2$  correspondant au maximum (ou au minimum) de  $\sigma'_{11}$  ( $\sigma'_{22}$ ), la condition nécessaire  $\frac{d\sigma'_{11}}{d\theta} = 0$  (ou  $\frac{d\sigma'_{22}}{d\theta} = 0$ ) est appliquée. Ce faisant, on obtient :

$$-(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + 2\sigma_{12} \cos 2\theta = 0$$

Ce qui conduit à :

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$



Les équations de transformation du cas plan indiquent que les contraintes normales ( $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$ ) et la composante tangentielle  $\sigma'_{12}$  **varient continûment en fonction de l'angle de rotation  $\theta$**  entre les deux systèmes d'axes  $(x_1, x_2)$  et  $(x'_1, x'_2)$ , les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  étant connues.

Pour établir les orientations de  $X_1$ ,  $X_2$  correspondant au maximum (ou au minimum) de  $\sigma'_{11}$  ( $\sigma'_{22}$ ), la condition nécessaire  $\frac{d\sigma'_{11}}{d\theta} = 0$  (ou  $\frac{d\sigma'_{22}}{d\theta} = 0$ ) est appliquée. Ce faisant, on obtient :

$$-(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + 2\sigma_{12} \cos 2\theta = 0$$

Ce qui conduit à :

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$



Les équations de transformation du cas plan indiquent que les contraintes normales ( $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$ ) et la composante tangentielle  $\sigma'_{12}$  **varient continûment en fonction de l'angle de rotation**  $\theta$  entre les deux systèmes d'axes  $(x_1, x_2)$  et  $(x'_1, x'_2)$ , les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  étant connues.

Pour établir les orientations de  $X_1$ ,  $X_2$  correspondant au maximum (ou au minimum) de  $\sigma'_{11}$  ( $\sigma'_{22}$ ), la condition nécessaire  $\frac{d\sigma'_{11}}{d\theta} = 0$  (ou  $\frac{d\sigma'_{22}}{d\theta} = 0$ ) est appliquée. Ce faisant, on obtient :

$$-(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + 2\sigma_{12} \cos 2\theta = 0$$

Ce qui conduit à :

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$



Si on pose  $tg\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$ , alors l'équation devient :

$$tg2\theta_p = tg\alpha$$

Comme  $tg\alpha = tg(\alpha + \pi)$ , alors on a deux solutions telles que :

$$tg2\theta_p = tg\alpha \implies \theta'_p = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{et } tg2\theta_p = tg(\alpha + \pi) \implies \theta''_p = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta'_p + \frac{\pi}{2}$$

où  $\theta'_p$  et  $\theta''_p$  correspondent aux deux valeurs de  $\theta_p$  solution de l'équation qui annule la dérivée et qui indiquent les plans sur lesquels agissent les contraintes maximales (ou minimales) appelées **contraintes principales**.

Les directions données par  $\theta'_p$  et  $\theta''_p$  sont les **directions principales** et comme

$$\theta''_p = \frac{\theta'_p}{2} + \frac{\pi}{2}, \text{ alors elles sont } \textit{orthogonales}.$$



Si on pose  $tg\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$ , alors l'équation devient :

$$tg2\theta_p = tg\alpha$$

Comme  $tg\alpha = tg(\alpha + \pi)$ , alors on a deux solutions telles que :

$$tg2\theta_p = tg\alpha \implies \theta'_p = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{et } tg2\theta_p = tg(\alpha + \pi) \implies \theta''_p = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta'_p + \frac{\pi}{2}$$

où  $\theta'_p$  et  $\theta''_p$  correspondent aux deux valeurs de  $\theta_p$  solution de l'équation qui annule la dérivée et qui indiquent les plans sur lesquels agissent les contraintes maximales (ou minimales) appelées **contraintes principales**.

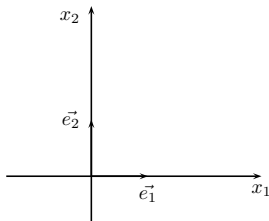
Les directions données par  $\theta'_p$  et  $\theta''_p$  sont les **directions principales** et comme

$\theta''_p = \frac{\theta'_p}{2} + \frac{\pi}{2}$ , alors elles sont **orthogonales**.

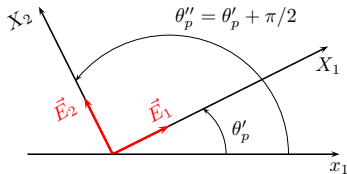


Les vecteurs unitaires  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  indiquant ces directions principales sont tels que :

$$\vec{E}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta'_p) \\ \sin(\theta'_p) \end{bmatrix} \text{ et } \vec{E}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta''_p) = \cos(\theta'_p + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta''_p) = \sin(\theta'_p + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{E}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta'_p) \\ \cos(\theta'_p) \end{bmatrix}$$



Repère initial



Repère principal

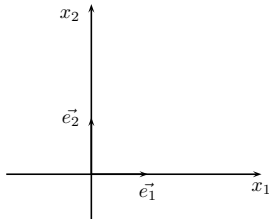
Les vecteurs unitaires  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  forment une base d'un repère appelé repère principal ou plan principal.



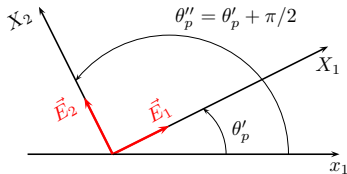


Les vecteurs unitaires  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  indiquant ces directions principales sont tels que :

$$\vec{E}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta'_p) \\ \sin(\theta'_p) \end{bmatrix} \text{ et } \vec{E}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta''_p) = \cos(\theta'_p + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta''_p) = \sin(\theta'_p + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{E}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta'_p) \\ \cos(\theta'_p) \end{bmatrix}$$



Repère initial



Repère principal

Les vecteurs unitaires  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  forment une base d'un repère appelé repère principal ou plan principal.

Les contraintes principales sont obtenues en utilisant l'équation annulant la dérivée de la contrainte normale qui s'écrit :

$$-(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + 2\sigma_{12} \cos 2\theta = 0 \iff \frac{\sin 2\theta_p}{\sigma_{12}} = \frac{\cos 2\theta_p}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } \frac{(\sin 2\theta_p)^2}{(\sigma_{12})^2} &= \frac{(\cos 2\theta_p)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2} = \frac{(\sin 2\theta_p)^2 + (\cos 2\theta_p)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2}$$

$$\text{Donc : } \sin 2\theta_p = \frac{\sigma_{12}}{R} \quad \text{et} \quad \cos 2\theta_p = \frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R}$$



Les contraintes principales sont obtenues en utilisant l'équation annulant la dérivée de la contrainte normale qui s'écrit :

$$-(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + 2\sigma_{12} \cos 2\theta = 0 \iff \frac{\sin 2\theta_p}{\sigma_{12}} = \frac{\cos 2\theta_p}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } \frac{(\sin 2\theta_p)^2}{(\sigma_{12})^2} &= \frac{(\cos 2\theta_p)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2} = \frac{(\sin 2\theta_p)^2 + (\cos 2\theta_p)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2}$$

$$\text{Donc : } \sin 2\theta_p = \frac{\sigma_{12}}{R} \quad \text{et} \quad \cos 2\theta_p = \frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R}$$



Les contraintes principales sont obtenues en utilisant l'équation annulant la dérivée de la contrainte normale qui s'écrit :

$$-(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + 2\sigma_{12} \cos 2\theta = 0 \iff \frac{\sin 2\theta_p}{\sigma_{12}} = \frac{\cos 2\theta_p}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } \frac{(\sin 2\theta_p)^2}{(\sigma_{12})^2} &= \frac{(\cos 2\theta_p)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2} = \frac{(\sin 2\theta_p)^2 + (\cos 2\theta_p)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2}$$

$$\text{Donc : } \sin 2\theta_p = \frac{\sigma_{12}}{R} \quad \text{et} \quad \cos 2\theta_p = \frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R}$$



En substituant  $\cos 2\theta_p$  et  $\sin 2\theta_p$  dans les équations de transformation, on obtient les expressions des contraintes principales notées  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  (avec  $\sigma_1 > \sigma_2$ ). En effet à partir de l'équation de  $\sigma'_{11}$  on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R} + \frac{\sigma_{12}^2}{R} \\&= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}{R} \\&= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{R^2}{R} \\&\implies \sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + R\end{aligned}$$



De même l'équation de  $\sigma'_{22}$  donne :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R} - \frac{\sigma_{12}^2}{R} \\&= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}{R} \\&= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{R^2}{R} \\&\Rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} - R\end{aligned}$$



Soit :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$



En substituant  $\cos 2\theta_p$  et  $\sin 2\theta_p$  dans l'équation de transformation donnant  $\sigma'_{12}$ , on obtient :

$$\sigma'_{12} = 0$$

Ce qui signifie que la composante de cisaillement est nulle sur les facettes de contraintes principales.

Un plan principal est donc un plan de *cisaillement nul* et par conséquent le vecteur contrainte est *parallèle* à la normale de la facette.

En effet, sur les facettes principales de normales  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  les vecteurs contraintes s'écrivent respectivement :

$$\vec{T}(M, \vec{E}_1) = \sigma_1 \vec{E}_1 \quad \text{et} \quad \vec{T}(M, \vec{E}_2) = \sigma_2 \vec{E}_2$$

La matrice représentant le tenseur des contraintes dans la base principale  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$  s'écrit alors :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$





En substituant  $\cos 2\theta_p$  et  $\sin 2\theta_p$  dans l'équation de transformation donnant  $\sigma'_{12}$ , on obtient :

$$\sigma'_{12} = 0$$

Ce qui signifie que la composante de cisaillement est nulle sur les facettes de contraintes principales.

Un plan principal est donc un plan de **cisaillement nul** et par conséquent le vecteur contrainte est **parallèle** à la normale de la facette.

En effet, sur les facettes principales de normales  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  les vecteurs contraintes s'écrivent respectivement :

$$\vec{T}(M, \vec{E}_1) = \sigma_1 \vec{E}_1 \quad \text{et} \quad \vec{T}(M, \vec{E}_2) = \sigma_2 \vec{E}_2$$

La matrice représentant le tenseur des contraintes dans la base principale  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$  s'écrit alors :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$



En substituant  $\cos 2\theta_p$  et  $\sin 2\theta_p$  dans l'équation de transformation donnant  $\sigma'_{12}$ , on obtient :

$$\sigma'_{12} = 0$$

Ce qui signifie que la composante de cisaillement est nulle sur les facettes de contraintes principales.

Un plan principal est donc un plan de **cisaillement nul** et par conséquent le vecteur contrainte est **parallèle** à la normale de la facette.

En effet, sur les facettes principales de normales  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  les vecteurs contraintes s'écrivent respectivement :

$$\vec{T}(M, \vec{E}_1) = \sigma_1 \vec{E}_1 \quad \text{et} \quad \vec{T}(M, \vec{E}_2) = \sigma_2 \vec{E}_2$$

La matrice représentant le tenseur des contraintes dans la base principale  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$  s'écrit alors :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$



En substituant  $\cos 2\theta_p$  et  $\sin 2\theta_p$  dans l'équation de transformation donnant  $\sigma'_{12}$ , on obtient :

$$\sigma'_{12} = 0$$

Ce qui signifie que la composante de cisaillement est nulle sur les facettes de contraintes principales.

Un plan principal est donc un plan de **cisaillement nul** et par conséquent le vecteur contrainte est **parallèle** à la normale de la facette.

En effet, sur les facettes principales de normales  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  les vecteurs contraintes s'écrivent respectivement :

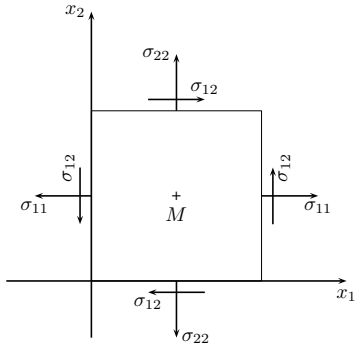
$$\vec{T}(M, \vec{E}_1) = \sigma_1 \vec{E}_1 \quad \text{et} \quad \vec{T}(M, \vec{E}_2) = \sigma_2 \vec{E}_2$$

La matrice représentant le tenseur des contraintes dans la base principale  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$  s'écrit alors :

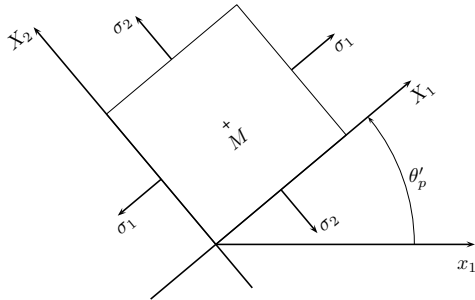
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$



La figure montre l'état principal.



Plan initial



Plan principal



D'une manière similaire, en employant l'approche précédente et l'équation de transformation donnant  $\sigma'_{12}$ , on détermine les plans du cisaillement maximum.

En écrivant  $\frac{d\sigma'_{12}}{d\theta} = 0$ , on obtient :  $(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + 2\sigma_{12} \sin 2\theta = 0$

$$\text{Soit : } \operatorname{tg} 2\theta_s = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$$

Si on pose  $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$ , alors l'équation devient :  $\operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg} \beta$

Comme  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\beta + \pi)$ , alors deux solutions sont possibles :

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg} \beta \quad \implies \quad \theta'_s = \frac{\beta}{2}$$

$$\text{et } \operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg}(\beta + \pi) \quad \implies \quad \theta''_s = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta'_s + \frac{\pi}{2}$$

où  $\theta'_s$  et  $\theta''_s$  indiquent les plans **orthogonaux** sur lesquels agissent les contraintes de cisaillement maximales.



D'une manière similaire, en employant l'approche précédente et l'équation de transformation donnant  $\sigma'_{12}$ , on détermine les plans du cisaillement maximum.

En écrivant  $\frac{d\sigma'_{12}}{d\theta} = 0$ , on obtient :  $(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + 2\sigma_{12} \sin 2\theta = 0$

$$\text{Soit : } \operatorname{tg} 2\theta_s = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$$

Si on pose  $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$ , alors l'équation devient :  $\operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg} \beta$

Comme  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\beta + \pi)$ , alors deux solutions sont possibles :

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg} \beta \quad \implies \quad \theta'_s = \frac{\beta}{2}$$

$$\text{et } \operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg}(\beta + \pi) \quad \implies \quad \theta''_s = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta'_s + \frac{\pi}{2}$$

où  $\theta'_s$  et  $\theta''_s$  indiquent les plans **orthogonaux** sur lesquels agissent les contraintes de cisaillement maximales.



D'une manière similaire, en employant l'approche précédente et l'équation de transformation donnant  $\sigma'_{12}$ , on détermine les plans du cisaillement maximum.

En écrivant  $\frac{d\sigma'_{12}}{d\theta} = 0$ , on obtient :  $(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + 2\sigma_{12} \sin 2\theta = 0$

$$\text{Soit : } \operatorname{tg} 2\theta_s = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$$

Si on pose  $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$ , alors l'équation devient :  $\operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg} \beta$

Comme  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\beta + \pi)$ , alors deux solutions sont possibles :

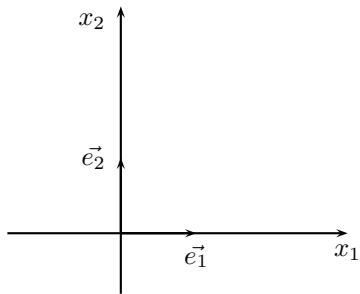
$$\operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg} \beta \quad \implies \quad \theta'_s = \frac{\beta}{2}$$

$$\text{et } \operatorname{tg} 2\theta_s = \operatorname{tg}(\beta + \pi) \quad \implies \quad \theta''_s = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta'_s + \frac{\pi}{2}$$

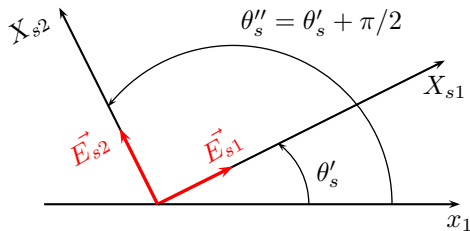
où  $\theta'_s$  et  $\theta''_s$  indiquent les plans **orthogonaux** sur lesquels agissent les contraintes de cisaillement maximales.



La figure montre le repère relatif aux cisaillements maximum.



Repère initial



Plan de cisaillement maximum





En comparant les équations donnant les directions principales et les directions des cisaillements maximum, on déduit :

$$tg2\theta_s = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} = -\frac{1}{\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}} = -\frac{1}{tg2\theta_p} = -ctg2\theta_p$$

$$\Rightarrow tg2\theta_s = tg(2\theta_p + \frac{\pi}{2})$$

En résolvant on obtient :

$$2\theta_s = 2\theta_p + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_s = \theta_p + \frac{\pi}{4}$$

Ce qui montre que les plans de cisaillement maximum sont toujours inclinés à  $45^\circ$  par rapport aux plans des contraintes principales.



En comparant les équations donnant les directions principales et les directions des cisaillements maximum, on déduit :

$$tg2\theta_s = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} = -\frac{1}{\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}} = -\frac{1}{tg2\theta_p} = -ctg2\theta_p$$

$$\implies tg2\theta_s = tg(2\theta_p + \frac{\pi}{2})$$

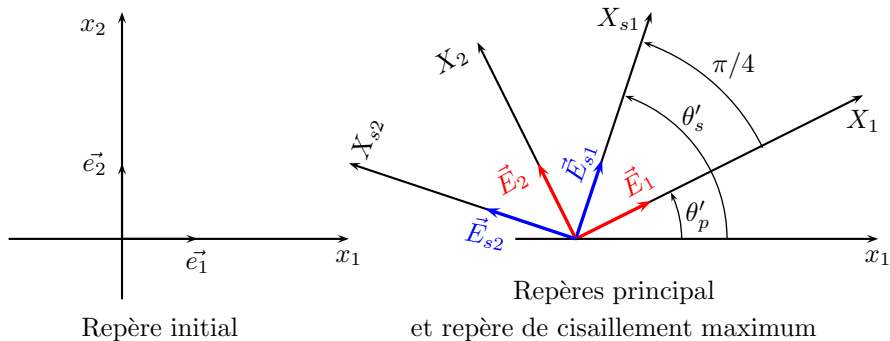
En résolvant on obtient :

$$2\theta_s = 2\theta_p + \frac{\pi}{2} \implies \theta_s = \theta_p + \frac{\pi}{4}$$

Ce qui montre que les plans de cisaillement maximum sont toujours inclinés à  $45^\circ$  par rapport aux plans des contraintes principales.



La figure montre le repère relatif aux cisaillements maximum et sa position par rapport au repère principal.



Les valeurs extrêmes des contraintes de cisaillement sont obtenues en injectant dans l'expression de  $\sigma'_{12}$  les valeurs de  $\theta$  qui annulent sa dérivée.

En effet, la dérivée de  $\sigma'_{12}$  s'annule pour :  $tg2\theta_s = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$

$$\text{Soit : } \frac{\sin 2\theta_s}{\cos 2\theta_s} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} \implies -\frac{\sin 2\theta_s}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} = \frac{\cos 2\theta_s}{\sigma_{12}}$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{(\sin 2\theta_s)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2} &= \frac{(\cos 2\theta_s)^2}{(\sigma_{12})^2} = \frac{(\sin 2\theta_s)^2 + (\cos 2\theta_s)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} = \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2}$$



Les valeurs extrêmes des contraintes de cisaillement sont obtenues en injectant dans l'expression de  $\sigma'_{12}$  les valeurs de  $\theta$  qui annulent sa dérivée.

En effet, la dérivée de  $\sigma'_{12}$  s'annule pour :  $tg2\theta_s = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$

$$\text{Soit : } \frac{\sin 2\theta_s}{\cos 2\theta_s} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} \implies -\frac{\sin 2\theta_s}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} = \frac{\cos 2\theta_s}{\sigma_{12}}$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{(\sin 2\theta_s)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2} &= \frac{(\cos 2\theta_s)^2}{(\sigma_{12})^2} = \frac{(\sin 2\theta_s)^2 + (\cos 2\theta_s)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} = \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2}$$



Les valeurs extrêmes des contraintes de cisaillement sont obtenues en injectant dans l'expression de  $\sigma'_{12}$  les valeurs de  $\theta$  qui annulent sa dérivée.

En effet, la dérivée de  $\sigma'_{12}$  s'annule pour :  $tg2\theta_s = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$

$$\text{Soit : } \frac{\sin 2\theta_s}{\cos 2\theta_s} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} \implies -\frac{\sin 2\theta_s}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} = \frac{\cos 2\theta_s}{\sigma_{12}}$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{(\sin 2\theta_s)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2} &= \frac{(\cos 2\theta_s)^2}{(\sigma_{12})^2} = \frac{(\sin 2\theta_s)^2 + (\cos 2\theta_s)^2}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} = \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2}$$



$$\text{Donc : } \sin 2\theta_s = \pm \frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}$$

$$\text{comme } \frac{\cos 2\theta_s}{\sigma_{12}} = - \frac{\sin 2\theta_s}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} \Rightarrow \cos 2\theta_s = - \frac{\sigma_{12}}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} \sin 2\theta_s, \text{ alors :}$$

$$\cos 2\theta_s = \begin{cases} -\frac{\sigma_{12}}{R}, & \text{si } \sin 2\theta_s = +\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \\ \frac{\sigma_{12}}{R}, & \text{si } \sin 2\theta_s = -\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de  $\sin 2\theta_s$  et  $\cos 2\theta_s$  dans l'équation de  $\sigma'_{12}$ , on obtient les expressions des valeurs maximales du cisaillement noté  $\tau_{max}$



$$\text{Donc : } \sin 2\theta_s = \pm \frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}$$

$$\text{comme } \frac{\cos 2\theta_s}{\sigma_{12}} = -\frac{\sin 2\theta_s}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} \Rightarrow \cos 2\theta_s = -\frac{\sigma_{12}}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} \sin 2\theta_s, \text{ alors :}$$

$$\cos 2\theta_s = \begin{cases} -\frac{\sigma_{12}}{R}, & \text{si } \sin 2\theta_s = +\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \\ \frac{\sigma_{12}}{R}, & \text{si } \sin 2\theta_s = -\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de  $\sin 2\theta_s$  et  $\cos 2\theta_s$  dans l'équation de  $\sigma'_{12}$ , on obtient les expressions des valeurs maximales du cisaillement noté  $\tau_{max}$





$$\text{Donc : } \sin 2\theta_s = \pm \frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}$$

$$\text{comme } \frac{\cos 2\theta_s}{\sigma_{12}} = -\frac{\sin 2\theta_s}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} \Rightarrow \cos 2\theta_s = -\frac{\sigma_{12}}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} \sin 2\theta_s, \text{ alors :}$$

$$\cos 2\theta_s = \begin{cases} -\frac{\sigma_{12}}{R}, & \text{si } \sin 2\theta_s = +\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \\ \frac{\sigma_{12}}{R}, & \text{si } \sin 2\theta_s = -\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de  $\sin 2\theta_s$  et  $\cos 2\theta_s$  dans l'équation de  $\sigma'_{12}$ , on obtient les expressions des valeurs maximales du cisaillement noté  $\tau_{max}$



$$\text{Donc : } \sin 2\theta_s = \pm \frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}$$

$$\text{comme } \frac{\cos 2\theta_s}{\sigma_{12}} = -\frac{\sin 2\theta_s}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} \Rightarrow \cos 2\theta_s = -\frac{\sigma_{12}}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} \sin 2\theta_s, \text{ alors :}$$

$$\cos 2\theta_s = \begin{cases} -\frac{\sigma_{12}}{R}, & \text{si } \sin 2\theta_s = +\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \\ \frac{\sigma_{12}}{R}, & \text{si } \sin 2\theta_s = -\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de  $\sin 2\theta_s$  et  $\cos 2\theta_s$  dans l'équation de  $\sigma'_{12}$ , on obtient les expressions des valeurs maximales du cisaillement noté  $\tau_{max}$ .



En effet, pour  $\sin 2\theta_s = +\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}$  et  $\cos 2\theta_s = -\frac{\sigma_{12}}{R}$

$$\begin{aligned}\tau_{max} = \sigma'_{12}(\theta_s) &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \left( \frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \right) + \sigma_{12} \left( -\frac{\sigma_{12}}{R} \right) \\ &= -\frac{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2}{R} = -\frac{R^2}{R} = -R\end{aligned}$$

soit :

$$\tau_{max} = -R = -\sqrt{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2}$$



et pour  $\sin 2\theta_s = -\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}$  et  $\cos 2\theta_s = +\frac{\sigma_{12}}{R}$

$$\begin{aligned}\tau_{max} = \sigma'_{12}(\theta_s) &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \left( -\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R} \right) + \sigma_{12} \left( \frac{\sigma_{12}}{R} \right) \\ &= \frac{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2}{R} = \frac{R^2}{R} = R\end{aligned}$$

soit :  $\tau_{max} = R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2}$

En définitif :

$$\tau_{max} = \pm R = \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2}$$



En se rappelant que :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + R \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - R$$

on établit que :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2R \implies R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

et ainsi :

$$\tau_{max} = \pm R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

ou encore :

$$|\tau_{max}| = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$



En se rappelant que :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + R \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - R$$

on établit que :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2R \implies R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

et ainsi :

$$\tau_{max} = \pm R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

ou encore :

$$|\tau_{max}| = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$



En se rappelant que :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + R \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - R$$

on établit que :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2R \implies R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

et ainsi :

$$\tau_{max} = \pm R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

ou encore :

$$|\tau_{max}| = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$



En se rappelant que :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + R \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - R$$

on établit que :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2R \implies R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

et ainsi :

$$\tau_{max} = \pm R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

ou encore :

$$|\tau_{max}| = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$





Les contraintes normales sur les facettes de cisaillement maximum, notées  $\sigma_s$  ou  $\sigma'$ , sont obtenues en introduisant les expressions de  $\sin 2\theta_s$  et  $\cos 2\theta_s$  dans les équations de transformation donnant les composantes normales  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$ .

Ainsi, en posant :

$$Z_\theta = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta$$

les équations de  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$  s'écrivent :

$$\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + Z_\theta \quad \text{et} \quad \sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - Z_\theta$$

où  $Z_\theta$  est la partie des expressions de  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$  dépendant de l'angle de rotation  $\theta$ .

Pour les valeurs de  $\theta$  correspondant à  $\theta_s$ ,  $Z_\theta$  est *nulle*



Les contraintes normales sur les facettes de cisaillement maximum, notées  $\sigma_s$  ou  $\sigma'$ , sont obtenues en introduisant les expressions de  $\sin 2\theta_s$  et  $\cos 2\theta_s$  dans les équations de transformation donnant les composantes normales  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$ .

Ainsi, en posant :

$$Z_\theta = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta$$

les équations de  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$  s'écrivent :

$$\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + Z_\theta \quad \text{et} \quad \sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - Z_\theta$$

où  $Z_\theta$  est la partie des expressions de  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$  dépendant de l'angle de rotation  $\theta$ .

Pour les valeurs de  $\theta$  correspondant à  $\theta_s$ ,  $Z_\theta$  est *nulle*



Les contraintes normales sur les facettes de cisaillement maximum, notées  $\sigma_s$  ou  $\sigma'$ , sont obtenues en introduisant les expressions de  $\sin 2\theta_s$  et  $\cos 2\theta_s$  dans les équations de transformation donnant les composantes normales  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$ .

Ainsi, en posant :

$$Z_\theta = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta$$

les équations de  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$  s'écrivent :

$$\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + Z_\theta \quad \text{et} \quad \sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - Z_\theta$$

où  $Z_\theta$  est la partie des expressions de  $\sigma'_{11}$  et  $\sigma'_{22}$  dépendant de l'angle de rotation  $\theta$ .

Pour les valeurs de  $\theta$  correspondant à  $\theta_s$ ,  $Z_\theta$  est **nulle**



En effet, pour  $\sin 2\theta_s = +\frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R}$  et  $\cos 2\theta_s = -\frac{\sigma_{12}}{R}$

$$Z_\theta = +\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \left(-\frac{\sigma_{12}}{R}\right) + \sigma_{12} \left(\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}\right) \Rightarrow Z_\theta = 0$$

de même, pour  $\sin 2\theta_s = -\frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R}$  et  $\cos 2\theta_s = +\frac{\sigma_{12}}{R}$

$$Z_\theta = +\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \left(+\frac{\sigma_{12}}{R}\right) + \sigma_{12} \left(-\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}\right) \Rightarrow Z_\theta = 0$$

Donc pour  $\theta = \theta_s$ , correspondant aux plans (facettes) de cisaillement maximum, les contraintes normales sont telles que :

$$\sigma'_{11}(\theta_s) = \sigma'_{22}(\theta_s) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$



En effet, pour  $\sin 2\theta_s = +\frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R}$  et  $\cos 2\theta_s = -\frac{\sigma_{12}}{R}$

$$Z_\theta = +\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \left(-\frac{\sigma_{12}}{R}\right) + \sigma_{12} \left(\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}\right) \Rightarrow Z_\theta = 0$$

de même, pour  $\sin 2\theta_s = -\frac{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)}{R}$  et  $\cos 2\theta_s = +\frac{\sigma_{12}}{R}$

$$Z_\theta = +\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \left(+\frac{\sigma_{12}}{R}\right) + \sigma_{12} \left(-\frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{R}\right) \Rightarrow Z_\theta = 0$$

Donc pour  $\theta = \theta_s$ , correspondant aux plans (facettes) de cisaillement maximum, les contraintes normales sont telles que :

$$\sigma'_{11}(\theta_s) = \sigma'_{22}(\theta_s) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$



On constate que lorsque les contraintes de cisaillement sont maximales, les contraintes normales sont égales à la moyenne arithmétique des contraintes normales  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ . Si on note  $\sigma_{moy}$  cette moyenne, on a :

$$\sigma_s = \sigma' = \sigma_{moy} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Dans ce cas la matrice de l'état de contrainte dans le repère relatif aux cisaillements maximum de base principale ( $\vec{E}_{s1}, \vec{E}_{s2}$ ) s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_s & \tau_{max} \\ \tau_{max} & \sigma_s \end{bmatrix}$$



On constate que lorsque les contraintes de cisaillement sont maximales, les contraintes normales sont égales à la moyenne arithmétique des contraintes normales  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ . Si on note  $\sigma_{moy}$  cette moyenne, on a :

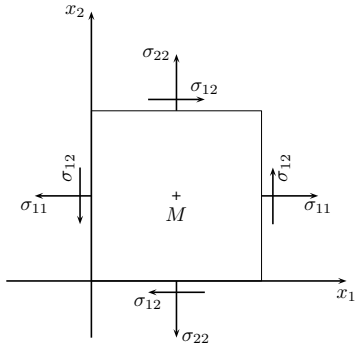
$$\sigma_s = \sigma' = \sigma_{moy} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Dans ce cas la matrice de l'état de contrainte dans le repère relatif aux cisaillements maximum de base principale ( $\vec{E}_{s1}, \vec{E}_{s2}$ ) s'écrit :

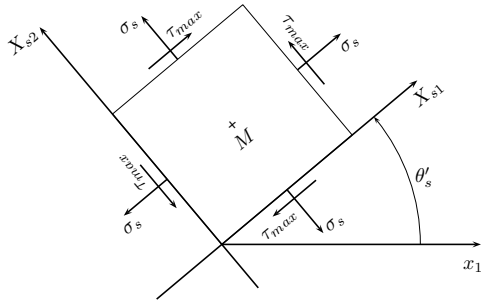
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_s & \tau_{max} \\ \tau_{max} & \sigma_s \end{bmatrix}$$



La figure montre l'état de cisaillement maximum.



Plan initial

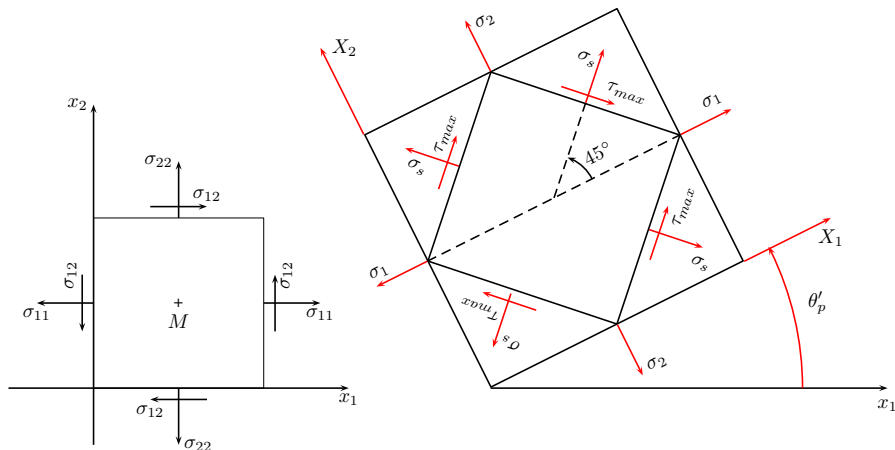


Plan de cisaillement maximum





Les résultats se rapportant aux contraintes principales et au cisaillement maximum sont résumés dans la figure suivante.



Une technique graphique, reposant sur les équations de transformation, permet une transformation rapide des contraintes d'un plan à un autre et conduit à la détermination des contraintes principales et des contraintes de cisaillement maximales.

Dans cette approche, les équations de transformation sont représentées par un cercle de contrainte appelé **cercle de Mohr**.

Ces équations de transformation donnent pour les contraintes normales :

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \right)$$

et pour les contraintes tangentielles :

$$\tau = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta$$

ce qui donne :

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 = R^2$$



Une technique graphique, reposant sur les équations de transformation, permet une transformation rapide des contraintes d'un plan à un autre et conduit à la détermination des contraintes principales et des contraintes de cisaillement maximales.

Dans cette approche, les équations de transformation sont représentées par un cercle de contrainte appelé **cercle de Mohr**.

Ces équations de transformation donnent pour les contraintes normales :

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \right)$$

et pour les contraintes tangentielles :

$$\tau = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta$$

ce qui donne :

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 = R^2$$



Une technique graphique, reposant sur les équations de transformation, permet une transformation rapide des contraintes d'un plan à un autre et conduit à la détermination des contraintes principales et des contraintes de cisaillement maximales.

Dans cette approche, les équations de transformation sont représentées par un cercle de contrainte appelé **cercle de Mohr**.

Ces équations de transformation donnent pour les contraintes normales :

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \right)$$

et pour les contraintes tangentielles :

$$\tau = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta$$

ce qui donne :

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 = R^2$$



Une technique graphique, reposant sur les équations de transformation, permet une transformation rapide des contraintes d'un plan à un autre et conduit à la détermination des contraintes principales et des contraintes de cisaillement maximales.

Dans cette approche, les équations de transformation sont représentées par un cercle de contrainte appelé **cercle de Mohr**.

Ces équations de transformation donnent pour les contraintes normales :

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \right)$$

et pour les contraintes tangentielles :

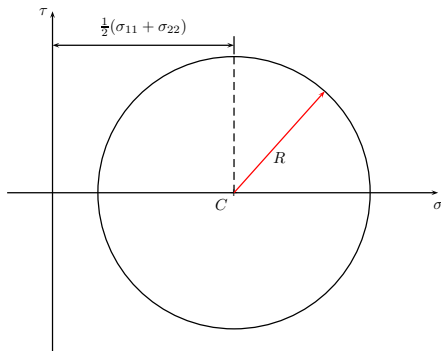
$$\tau = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta$$

ce qui donne :

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 = R^2$$



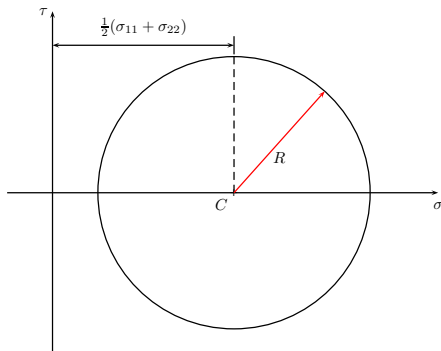
L'équation précédente représente dans le plan  $(\sigma, \tau)$  un cercle de centre  $C(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0)$  et de rayon  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$ .



Le plan  $(\sigma, \tau)$  est appelé plan de Mohr, où l'axe des abscisses représente les contraintes normales et celui des ordonnées celles de cisaillement.



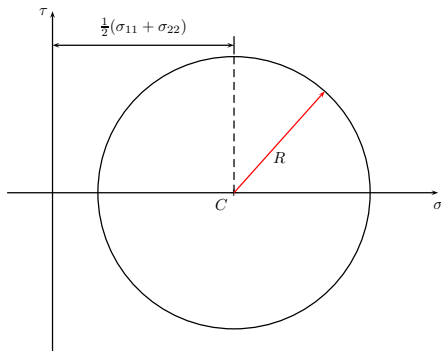
L'équation précédente représente dans le plan  $(\sigma, \tau)$  un cercle de centre  $C(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0)$  et de rayon  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$ .



Le plan  $(\sigma, \tau)$  est appelé plan de Mohr, où l'axe des abscisses représente les contraintes normales et celui des ordonnées celles de cisaillement.



L'équation précédente représente dans le plan  $(\sigma, \tau)$  un cercle de centre  $C(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0)$  et de rayon  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$ .



Le plan  $(\sigma, \tau)$  est appelé plan de Mohr, où l'axe des abscisses représente les contraintes normales et celui des ordonnées celles de cisaillement.





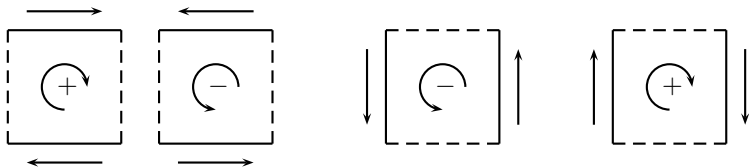
## Convention de signe pour le cercle de Mohr

Les contraintes normales obéissent à la convention de signe classique de l'élasticité (liée à la composante et à la facette).

Cependant, et seulement pour des raisons de construction du cercle de Mohr et de lecture des valeurs à partir de celui-ci, la convention de cisaillement est la suivante :

**Si les contraintes de cisaillement sur les faces opposées d'un élément produisent des forces de cisaillement qui donnent naissance à un couple dans le sens des aiguilles d'une montre, ces contraintes sont considérées positives.**

La figure ci-dessous illustre cette convention spécifique au cercle de Mohr.



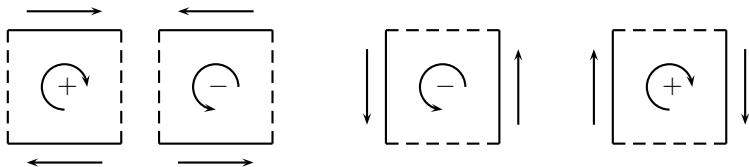
## Convention de signe pour le cercle de Mohr

Les contraintes normales obéissent à la convention de signe classique de l'élasticité (liée à la composante et à la facette).

Cependant, et seulement pour des raisons de construction du cercle de Mohr et de lecture des valeurs à partir de celui-ci, la convention de cisaillement est la suivante :

Si les contraintes de cisaillement sur les faces opposées d'un élément produisent des forces de cisaillement qui donnent naissance à un couple dans le sens des aiguilles d'une montre, ces contraintes sont considérées positives.

La figure ci-dessous illustre cette convention spécifique au cercle de Mohr.



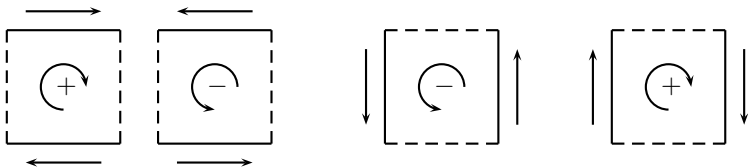
## Convention de signe pour le cercle de Mohr

Les contraintes normales obéissent à la convention de signe classique de l'élasticité (liée à la composante et à la facette).

Cependant, et seulement pour des raisons de construction du cercle de Mohr et de lecture des valeurs à partir de celui-ci, la convention de cisaillement est la suivante :

**Si les contraintes de cisaillement sur les faces opposées d'un élément produisent des forces de cisaillement qui donnent naissance à un couple dans le sens des aiguilles d'une montre, ces contraintes sont considérées positives.**

La figure ci-dessous illustre cette convention spécifique au cercle de Mohr.



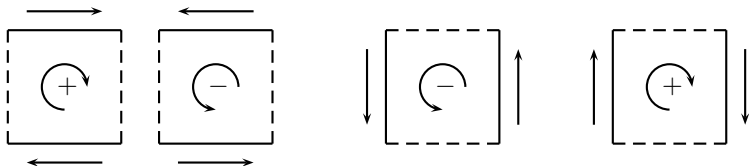
## Convention de signe pour le cercle de Mohr

Les contraintes normales obéissent à la convention de signe classique de l'élasticité (liée à la composante et à la facette).

Cependant, et seulement pour des raisons de construction du cercle de Mohr et de lecture des valeurs à partir de celui-ci, la convention de cisaillement est la suivante :

**Si les contraintes de cisaillement sur les faces opposées d'un élément produisent des forces de cisaillement qui donnent naissance à un couple dans le sens des aiguilles d'une montre, ces contraintes sont considérées positives.**

La figure ci-dessous illustre cette convention spécifique au cercle de Mohr.



## Construction du cercle de Mohr

Soient  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  données avec la signe du cercle de Mohr, la procédure pour construire le cercle de Mohr est la suivante :

- 1 Etablir un système de coordonnées rectangulaires indiquant  $+\sigma$  et  $+\tau$ . Les deux échelles de contraintes sont identiques.
- 2 Localiser le centre  $C$  du cercle sur l'axe horizontal  $\sigma$  à la distance  $\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$  à partir de l'origine.
- 3 Localiser le point  $A$  défini par les coordonnées  $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$  (avec le signe donné par la convention du cercle de Mohr).  
Ces contraintes correspondent à n'importe quelle facette d'un élément. Cependant, il est d'usage de spécifier les contraintes sur la face positive de normale  $x_1(\vec{e}_1)$ .
- 4 Tracer le cercle de centre  $C$  et de rayon  $CA$ .
- 5 Tracer la ligne  $AB$  passant par  $C$ .



## Construction du cercle de Mohr

Soient  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  données avec la signe du cercle de Mohr, la procédure pour construire le cercle de Mohr est la suivante :

- 1 Etablir un système de coordonnées rectangulaires indiquant  $+\sigma$  et  $+\tau$ . Les deux échelles de contraintes sont identiques.
- 2 Localiser le centre  $C$  du cercle sur l'axe horizontal  $\sigma$  à la distance  $\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$  à partir de l'origine.
- 3 Localiser le point  $A$  défini par les coordonnées  $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$  (avec le signe donné par la convention du cercle de Mohr).  
Ces contraintes correspondent à n'importe quelle facette d'un élément. Cependant, il est d'usage de spécifier les contraintes sur la face positive de normale  $x_1(\vec{e}_1)$ .
- 4 Tracer le cercle de centre  $C$  et de rayon  $CA$ .
- 5 Tracer la ligne  $AB$  passant par  $C$ .



## Construction du cercle de Mohr

Soient  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  données avec la signe du cercle de Mohr, la procédure pour construire le cercle de Mohr est la suivante :

- ❶ Etablir un système de coordonnées rectangulaires indiquant  $+\sigma$  et  $+\tau$ . Les deux échelles de contraintes sont identiques.
- ❷ Localiser le centre  $C$  du cercle sur l'axe horizontal  $\sigma$  à la distance  $\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$  à partir de l'origine.
- ❸ Localiser le point  $A$  défini par les coordonnées  $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$  (avec le signe donné par la convention du cercle de Mohr).

Ces contraintes correspondent à n'importe quelle facette d'un élément.

**Cependant, il est d'usage de spécifier les contraintes sur la face positive de normale  $x_1(\vec{e}_1)$ .**

- ❹ Tracer le cercle de centre  $C$  et de rayon  $CA$ .
- ❺ Tracer la ligne  $AB$  passant par  $C$ .



## Construction du cercle de Mohr

Soient  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  données avec la signe du cercle de Mohr, la procédure pour construire le cercle de Mohr est la suivante :

- ➊ Etablir un système de coordonnées rectangulaires indiquant  $+\sigma$  et  $+\tau$ . Les deux échelles de contraintes sont identiques.
- ➋ Localiser le centre  $C$  du cercle sur l'axe horizontal  $\sigma$  à la distance  $\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$  à partir de l'origine.
- ➌ Localiser le point  $A$  défini par les coordonnées  $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$  (avec le signe donné par la convention du cercle de Mohr).  
Ces contraintes correspondent à n'importe quelle facette d'un élément.  
**Cependant, il est d'usage de spécifier les contraintes sur la face positive de normale  $x_1(\vec{e}_1)$ .**
- ➍ Tracer le cercle de centre  $C$  et de rayon  $CA$ .
- ➎ Tracer la ligne  $AB$  passant par  $C$ .





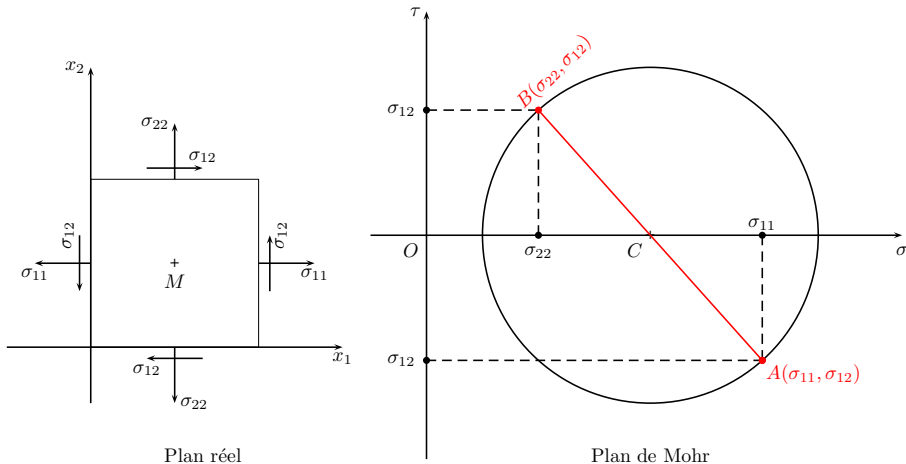
## Construction du cercle de Mohr

Soient  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  données avec la signe du cercle de Mohr, la procédure pour construire le cercle de Mohr est la suivante :

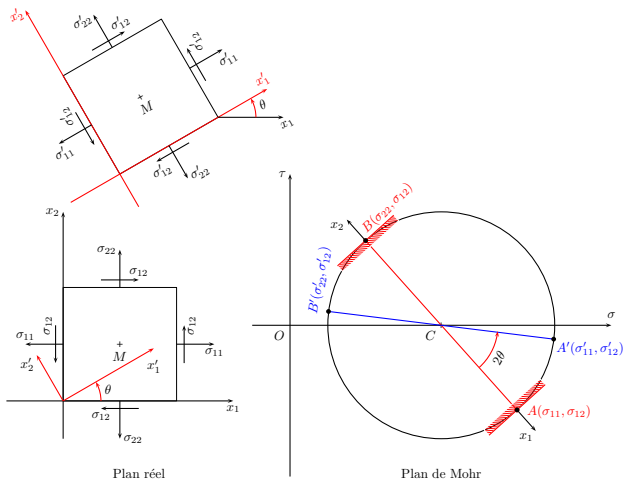
- 1 Etablir un système de coordonnées rectangulaires indiquant  $+\sigma$  et  $+\tau$ . Les deux échelles de contraintes sont identiques.
- 2 Localiser le centre  $C$  du cercle sur l'axe horizontal  $\sigma$  à la distance  $\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$  à partir de l'origine.
- 3 Localiser le point  $A$  défini par les coordonnées  $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$  (avec le signe donné par la convention du cercle de Mohr).  
Ces contraintes correspondent à n'importe quelle facette d'un élément.  
**Cependant, il est d'usage de spécifier les contraintes sur la face positive de normale  $x_1(\vec{e}_1)$ .**
- 4 Tracer le cercle de centre  $C$  et de rayon  $CA$ .
- 5 Tracer la ligne  $AB$  passant par  $C$ .



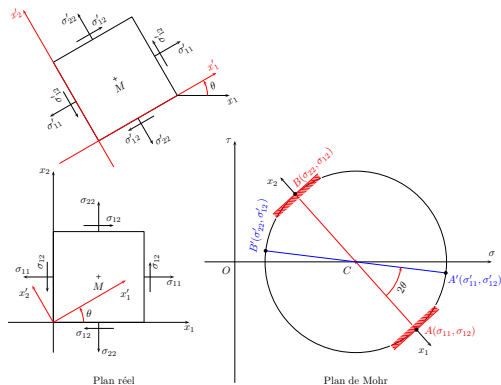
La procédure ci-dessus aboutit au cercle représenté sur la figure qui suit :



L'état de contraintes au point  $M$ , associé avec les plans originaux  $x_1$  et  $x_2$ , correspond respectivement aux points  $A$  et  $B$  sur le cercle.



Les angles sont mesurés sur le cercle de Mohr dans le même sens que sur l'élément (voir figure).

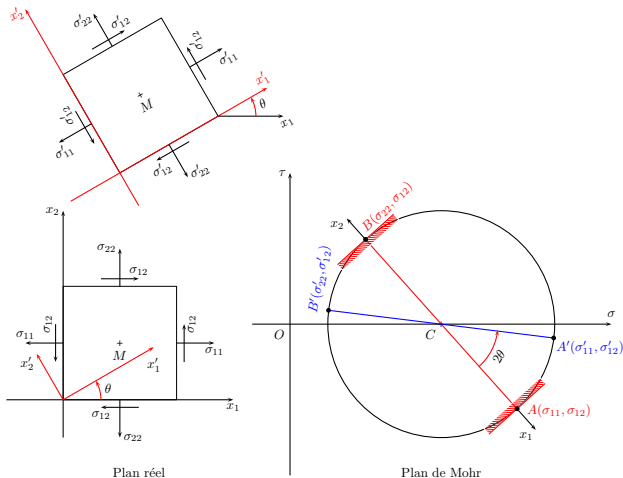


***L'origine de la mesure des angles sur le cercle est l'axe CA.***

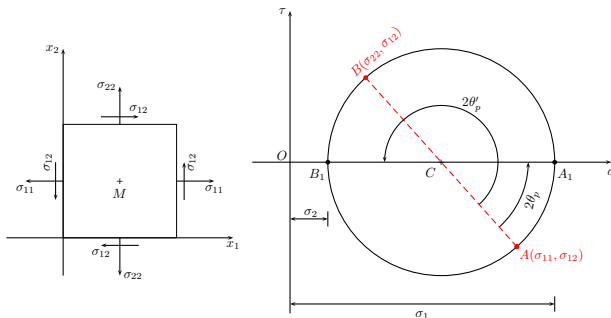
Un **angle  $2\theta$**  sur le cercle de Mohr correspond à un angle  $\theta$  sur l'élément.



Les points se trouvant sur les diamètres autres que que  $AB$  comme  $A'$  et  $B'$ , définissent les états de contraintes sur des plans  $x'_1$  et  $x'_2$  obtenus par rotation par rapport à l'état initial d'un angle  $\theta$ .



Les points  $A_1$  et  $B_1$  sur le cercle localisent les contraintes principales et fournissent leurs valeurs  $\sigma_1 = OC + R$  et  $\sigma_2 = OC - R$  respectivement.

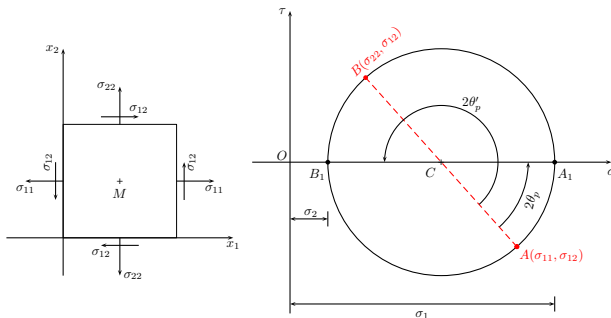


Les angles  $2\theta_p$  et  $2\theta'_p = 2\theta_p + \pi$  fournissent les directions principales.

Comme  $A_1$  et  $B_1$  sont sur l'axe des abscisse  $\sigma$ , donc les contraintes de cisaillement correspondant aux contraintes principales sont nulles.



Les points  $A_1$  et  $B_1$  sur le cercle localisent les contraintes principales et fournissent leurs valeurs  $\sigma_1 = OC + R$  et  $\sigma_2 = OC - R$  respectivement.

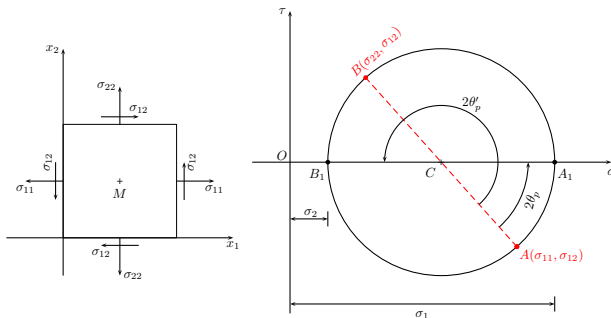


Les angles  $2\theta_p$  et  $2\theta'_p = 2\theta_p + \pi$  fournissent les directions principales.

Comme  $A_1$  et  $B_1$  sont sur l'axe des abscisse  $\sigma$ , donc les contraintes de cisaillement correspondant aux contraintes principales sont nulles.



Les points  $A_1$  et  $B_1$  sur le cercle localisent les contraintes principales et fournissent leurs valeurs  $\sigma_1 = OC + R$  et  $\sigma_2 = OC - R$  respectivement.



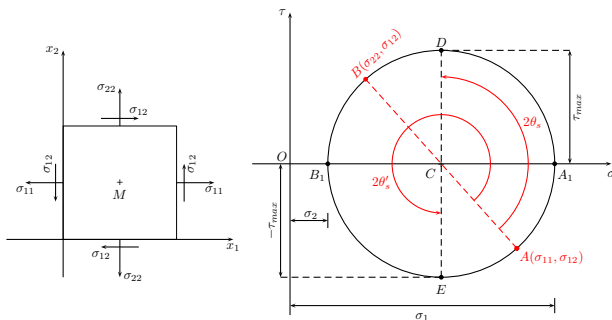
Les angles  $2\theta_p$  et  $2\theta'_p = 2\theta_p + \pi$  fournissent les directions principales.

Comme  $A_1$  et  $B_1$  sont sur l'axe des abscisse  $\sigma$ , donc les contraintes de cisaillement correspondant aux contraintes principales sont nulles.





Les points  $D$  et  $E$  représentent les contraintes de cisaillement maximales et fournissent leurs valeurs égales au rayon du cercle ( $CD = CE = R$ ).

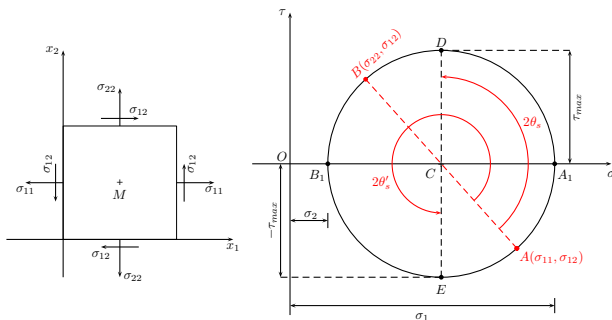


Les angles  $2\theta_s$  et  $2\theta'_s = 2\theta_s + \pi$  fournissent les directions des cisaillement maximum.

La figure montre que la contrainte normale correspondant aux cisaillements maximum est égale à  $OC = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$ .



Les points  $D$  et  $E$  représentent les contraintes de cisaillement maximales et fournissent leurs valeurs égales au rayon du cercle ( $CD = CE = R$ ).

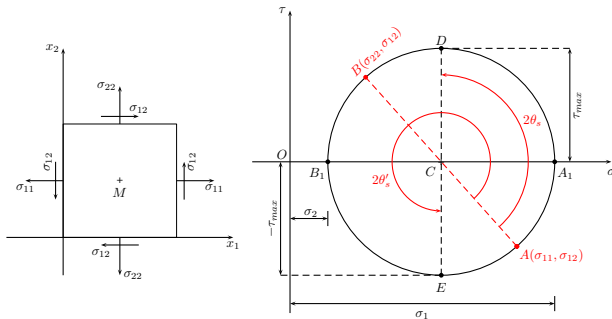


Les angles  $2\theta_s$  et  $2\theta'_s = 2\theta_s + \pi$  fournissent les directions des cisaillement maximum.

La figure montre que la contrainte normale correspondant aux cisaillements maximum est égale à  $OC = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$ .



Les points  $D$  et  $E$  représentent les contraintes de cisaillement maximales et fournissent leurs valeurs égales au rayon du cercle ( $CD = CE = R$ ).

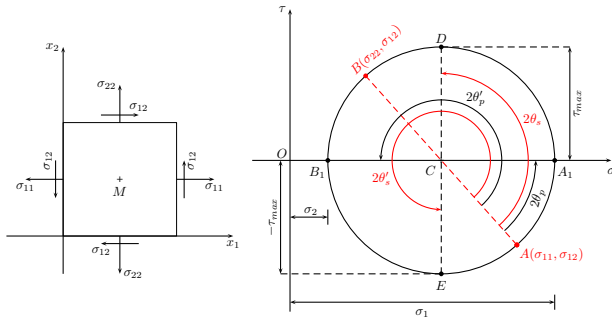


Les angles  $2\theta_s$  et  $2\theta'_s = 2\theta_s + \pi$  fournissent les directions des cisaillement maximum.

La figure montre que la contrainte normale correspondant aux cisaillements maximum est égale à  $OC = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$ .



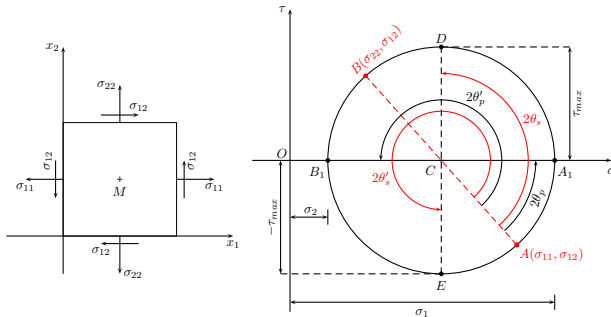
Le cercle de Mohr montre bien que les plans de contraintes de cisaillement maximales sont toujours à  $45^\circ (\frac{\pi}{4})$  à partir des plans des contraintes principales.



En effet,  $2\theta_s = 2\theta_p + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_s = \theta_p + \frac{\pi}{4}$

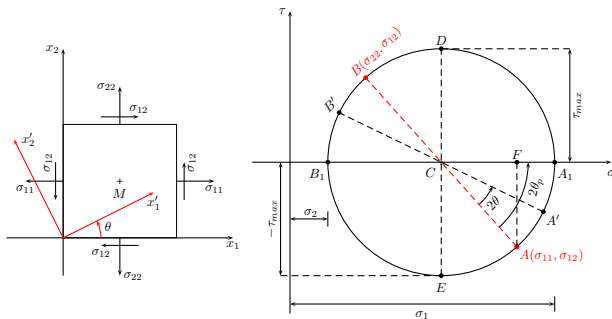


Le cercle de Mohr montre bien que les plans de contraintes de cisaillement maximales sont toujours à  $45^\circ (\frac{\pi}{4})$  à partir des plans des contraintes principales.



$$\text{En effet, } 2\theta_s = 2\theta_p + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_s = \theta_p + \frac{\pi}{4}$$

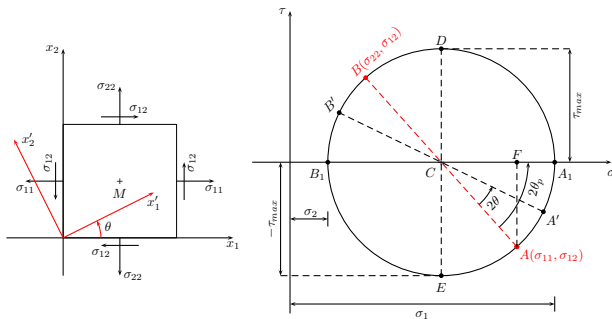




Le rayon du cercle est :  $R = CA = \sqrt{CF^2 + AF^2}$ , avec  $CF = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$  et  $AF = \sigma_{12}$ .

Le rayon est donc égal à la valeur de la contrainte de cisaillement maximale :  $|\tau_{max}| = R = CA$ .

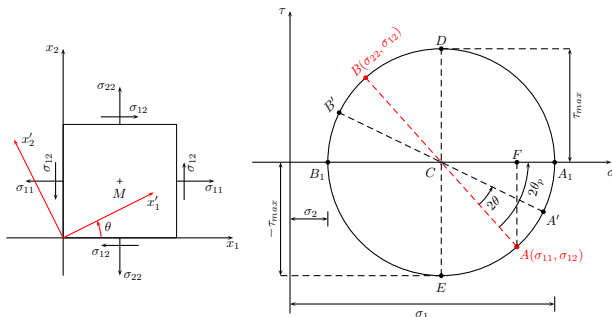




Le rayon du cercle est :  $R = CA = \sqrt{CF^2 + AF^2}$ , avec  $CF = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$  et  $AF = \sigma_{12}$ .

Le rayon est donc égal à la valeur de la contrainte de cisaillement maximale :  $|\tau_{max}| = R = CA$ .





Le rayon du cercle est :  $R = CA = \sqrt{CF^2 + AF^2}$ , avec  $CF = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$  et  $AF = \sigma_{12}$ .

Le rayon est donc égal à la valeur de la contrainte de cisaillement maximale :  $|\tau_{max}| = R = CA$ .

