Chapitre 3

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents les systèmes à un seul degrés de liberté ont été étudiés. Il a été établi qu'un système à un seul degrés de liberté peut être défini par une seule coordonnée (u(t)). La plupart des structures dans le domaine du génie civil présentent un système dynamique complexe qui ne peut être représenté par un système à un seul degré de liberté. La complexité du système dépend du nombre de ses degrés de liberté (ddl). Ce nombre est égal au nombre des coordonnées indépendantes requises pour spécifier complètement le déplacement du système. Souvent un nombre limité de degrés de liberté suffit pour représenter convenablement un système continu complexe par un système discret équivalent.

3.2 Équation du mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté

De tels systèmes sont appelés ***systèmes discrets à plusieurs degrés de liberté*** et qui ne peuvent être traités que sous forme matricielle. Considérant l'exemple d'un bâtiment à trois étages avec les masses, les rigidités et les amortisseurs tel que illustrés sur la figure (3.1).

Pour l'étude de telles structures, on adopte les hypothèses suivantes :

1. La masse totale de la structure est concentrée au niveau des planchers.
2. Les planchers sont supposés beaucoup plus rigides que les poteaux (ou les murs porteurs ou les voiles). Les éléments porteurs sont supposés encastrés au niveau des planchers où les rotations des sections droites horizontales sont donc nulles.
3. les déformations de la structures sont indépendantes des efforts axiaux dans les éléments porteurs. Ils sont infiniment rigides longitudinalement.
4. Les forces extérieures sont supposées horizontales et concentrés au niveau des planchers (vent, forces fournies par la méthode statique équivalentes (MSE)) ou elles proviennent d'une excitation imposée à la base (séisme).

Ses hypothèses permettent de modéliser le système par un nombre fini de degrés de liberté et font en sorte que les nœuds du modèle qui représentent les points de jonction des éléments porteurs et des planchers ne peuvent subir que des déplacements horizontaux qui sont les seules degrés de liberté du système.
Sur la base de ses hypothèses, le système peut être encore simplifié et représenté comme l'idique la figure 3.2.

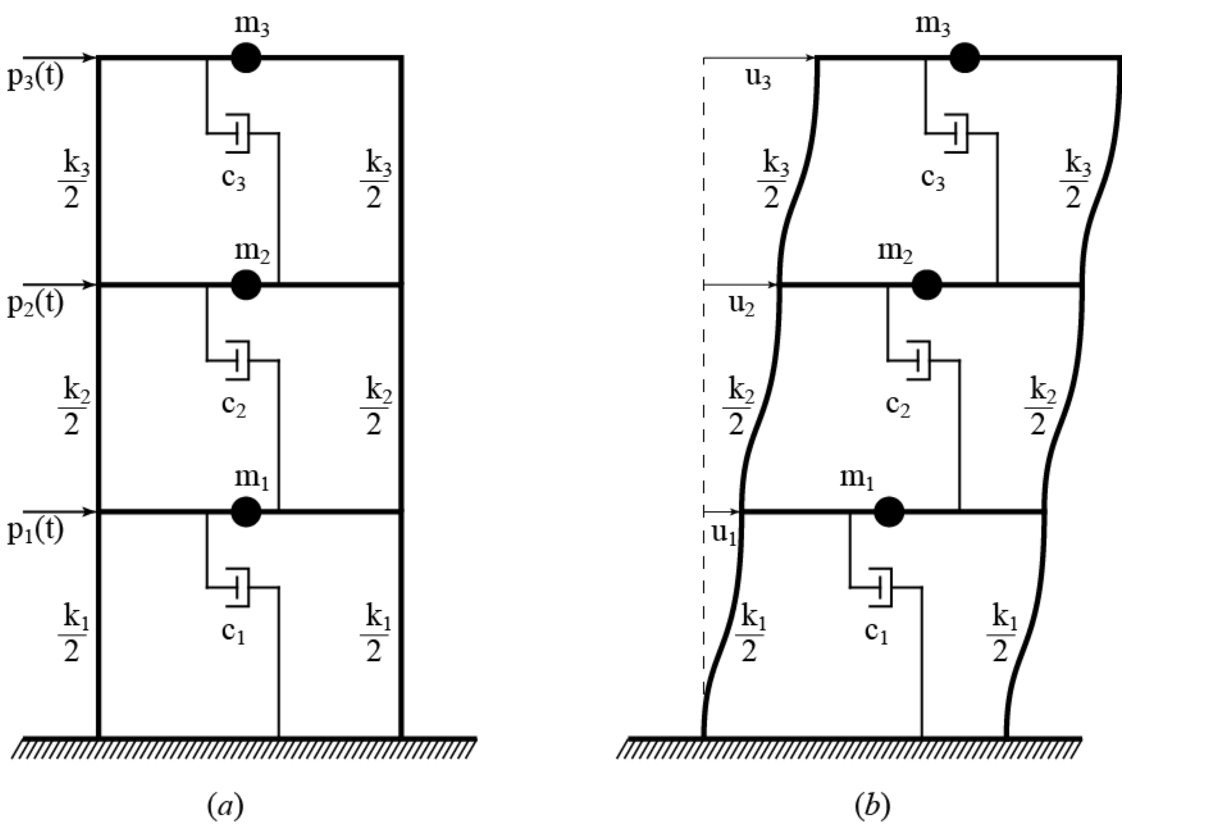


FIGURE 3.1 – Bâtiment de trois étages discrétisé par un système à trois degrés de liberté

En se référant à la figure 3.2-(c), les équations d'équilibre des trois masses s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} = p_1(t) \\ f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} = p_2(t) \\ f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} = p_3(t) \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où f_{Ii}, f_{Di} et f_{Si}, comme pour le système à un seul degré, représentent respectivement les forces d'inertie, d'amortissement et élastique relative au degrés de liberté u_i.

Pour un comportement linéaire et en se référant à la figure 3.2-(c), les forces élastiques s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} f_{S1} = f^i_{S1} + f^s_{S1} \\ f_{S2} = f^i_{S2} + f^s_{S2} \\ f_{S3} = f^i_{S3} \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Comme les forces élastiques sont proportionnelles au déplacements relatifs des degrés de liberté u_i, on a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} f^i_{S1} = k_1 u_1 \\ f^s_{S1} = -k_2(u_2 - u_1) \\ f^i_{S2} = k_2(u_2 - u_1) \\ f^s_{S2} = -k_3(u_3 - u_2) \\ f^i_{S3} = k_3(u_3 - u_2) \end{array}\right. \tag{3.3}$$

En introduisant les relations 3.3 dans le système 3.2, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} f_{S1} = k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) \\ f_{S2} = k_2(u_2 - u_1) - k_3(u_3 - u_2) \\ f_{S3} = k_3(u_3 - u_2) \end{array}\right. \tag{3.4}$$

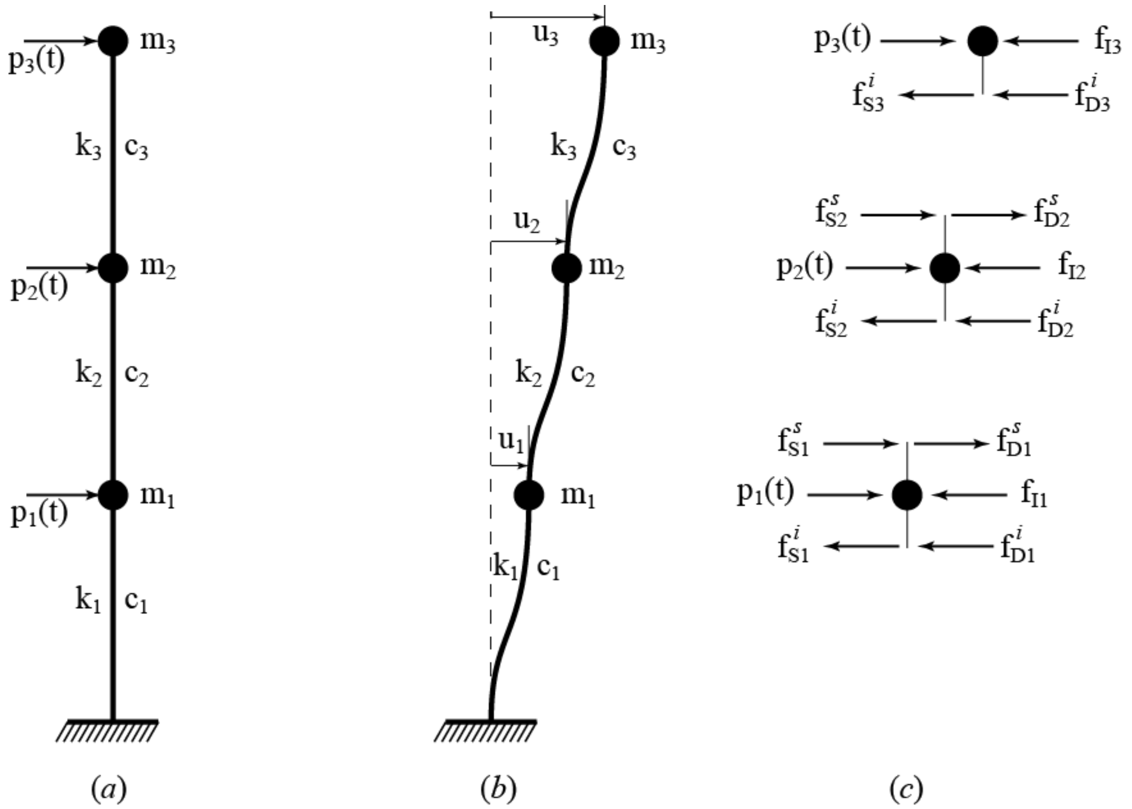


FIGURE 3.2 – Bâtiment de trois étages - modèle simplifié

Pour un amortissement visqueux et un comportement linéaire, les forces d'amortissement sont obtenues d'une manière similaire en fonction des vitesses des degrés de liberté.

$$\begin{cases} f_{D1} = f_{D1}^i + f_{D1}^s \\ f_{D2} = f_{D2}^i + f_{D2}^s \\ f_{D3} = f_{D3}^i \end{cases} \tag{3.5}$$

Les forces d'amortissement étant proportionnelles au vitesses relatives des degrés de liberté $\dot{u}_i$, on a donc :

$$\begin{cases} f_{D1}^i = c_1 \dot{u}_1 \\ f_{D1}^s = -c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ f_{D2}^i = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ f_{D2}^s = -c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\ f_{D3}^i = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \end{cases} \tag{3.6}$$

En introduisant les relations 3.6 dans le système 3.5, on obtient :

$$\begin{cases} f_{D1} = c_1 \dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ f_{D2} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\ f_{D3} = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \end{cases} \tag{3.7}$$

Les masses m_1, m_2 et m_3 sont soumises aux accélérations $\ddot{u}_1$, $\ddot{u}_2$ et $\ddot{u}_3$ ce qui génèrent les forces d'inertie suivantes :

$$\begin{cases} f_{I1} = m_1 \ddot{u}_1 \\ f_{I2} = m_2 \ddot{u}_2 \\ f_{I3} = m_3 \ddot{u}_3 \end{cases} \tag{3.8}$$

La substitution des relations 3.4, 3.6 et 3.8 dans le système d'équations 3.1 conduit aux expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1u_1 - k_2(u_2 - u_1) = p_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) + k_2(u_2 - u_1) - k_3(u_3 - u_2) = p_2(t) \\ m_3\ddot{u}_3 + c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) + k_3(u_3 - u_2) = p_3(t) \end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

L'équation 3.9 peut être réorganiser comme suit :

$$\left\{\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = p_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + (c_2 + c_3)\dot{u}_2 - c_3\dot{u}_3 - k_2u_1 + (k_2 + k_3)\dot{u}_2 - k_3u_3 = p_2(t) \\ m_3\ddot{u}_3 - c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 - k_3u_2 + k_3u_3 = p_3(t) \end{aligned}\right. \tag{3.10}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sous forme compacte, l'équation 3.11 s'écrit :

$$[M]\,[\ddot{u}(t)] + [C]\,[\dot{u}(t)] + [K]\,[u(t)] = [P(t)] \tag{3.12}$$

L'équation 3.12 représente l'équation de mouvement d'un système amorti à plusieurs degrés de liberté (MDOF) soumis à des forces extérieures concentrées appliquées à ses masses.
Avec :
$[M]$: matrice de masse, $[C]$: matrice d'amortissement, $[K]$: matrice de rigidité
et $[\ddot{u}]$, $[\dot{u}]$, $[u]$, $[P(t)]$: vecteurs des accélérations, des vitesses, des déplacements et des forces extérieures.

Pour un système à n degrés de liberté la matrice de masse $[M]$ est diagonale de dimension $n \times n$:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Les matrices d'amortissement et de rigidité, de dimension $n \times n$, sont telles que :

$$[C] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & -c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & (c_{n-1} + c_n) & -c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{n-1} & (k_{n-1} + k_n) & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

3.3 Vibrations libres non-amorties (Analyse modale)

Comme dans le cas du système à un seul degré de liberté, un système à plusieurs degrés de liberté peut osciller (vibrer) sans la présence d'une force extérieure du moment qu'un ou plusieurs de ces degrés de liberté sont soumis à des perturbations sous forme de déplacements initiaux, de vitesses initiales ou les deux en même temps. Les vibrations libres d'un système à plusieurs degrés de liberté sont gouvernées par l'équation de mouvement suivante :

$$[M]\,[\ddot{u}(t)] + [C]\,[\dot{u}(t)] + [K]\,[u(t)] = [0] \tag{3.16}$$

Le cas des vibrations libres non-amorties est d'une grande importance dans l'analyse des systèmes amortis libres et forcés. L'étude des vibrations libres non-amorties ont donc un intérêt considérable. L'équation des vibrations libres non-amorties d'un système à plusieurs degrés de liberté est obtenue en posant $[C] = [0]$ dans l'équation (3.16), ce qui donne :

$$[M]\,[\ddot{u}(t)] + [K]\,[u(t)] = [0] \tag{3.17}$$

Les théories mathématiques montrent que la solution de l'équation différentielle (3.17) s'écrit sous la forme :

$$[u(t)] = [\phi]\,sin(\omega t + \theta) \tag{3.18}$$

Soit

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} sin(\omega t + \theta)$$

où $[\phi]$ est un vecteur arbitraire indépendant du temps représentant les modes de déformation possibles, ω la fréquence de vibration et θ est un angle de déphasage. Pour un degré de liberté i, on a :

$$u_i(t) = \phi_i sin(\omega t + \theta) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.19}$$

où ϕ_i est l'amplitude du mouvement pour le i ème degré de liberté et n est le nombre de degrés de liberté de la structure.

En se référant à l'équation (3.18) le vecteur d'accélération s'écrit :

$$[\ddot{u}(t)] = \frac{d^2\,[u(t)]}{dt^2} = -\omega^2\,[\phi]\,sin(\omega t + \theta) \tag{3.20}$$

En substituant les expressions de $[u(t)]$ et $[\ddot{u}(t)]$ dans l'équation (3.17), on obtient :

$$-\omega^2\,[M]\,[\phi]\,sin(\omega t + \theta) + [K]\,[\phi]\,sin(\omega t + \theta) = \left(-\omega^2\,[M] + [K]\right)[\phi]\,sin(\omega t + \theta) = [0]$$

Puisque la relation précédente est vérifiée pour toutes les valeurs de t, donc quelque soit $sin(\omega t + \theta)$; ce qui conduit à :

$$\left([K] - \omega^2\,[M]\right)[\phi] = [0] \tag{3.21}$$

La relation (3.21) représente un système linéaire et homogène à n équations dont les inconnues sont les n composantes ϕ_i de $[\phi]$ et le scalaire ω^2. Elle représente un problème communément connu en mathématique sous l'appellation : ***problème aux valeurs propres linéaire***. Le vecteur $[\phi]$ et le scalaire ω^2 sont appelés ***vecteur propre*** et ***valeur propre*** respectivement.

Pour obtenir une solution autre que la solution trivial $[\phi] = [0]$ qui est sans intérêt car elle correspond à aucun mouvement, la matrice $([K]-\omega^2[M])$, coefficient de $[\phi]$, doit être singulière, c'est-à-dire que son déterminant doit être nul, soit :

$$Det\left([K]-\omega^2[M]\right)=\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \tag{3.22}$$

Le développement de l'équation (3.22) conduit, pour un système à n degrés de liberté, à une équation polynômiale de degré n en ω^2 appelée ***équation caractéristique***. En posant $\lambda=\omega^2$, elle s'écrit :

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda=0 \tag{3.23}$$

La solution de l'équation caractéristique (3.23) donne n valeurs de λ appelées valeur propres et qui représentent le carré des ***pulsations propres*** ω^2 ou ***fréquences naturelles***. Pour chaque valeur de $\lambda=\omega^2$, l'équation (3.21) donne une solution non-triviale pour $[\phi]$, appelé ***vecteur propre*** ou ***mode propre*** ou encore ***vecteur modal***. Cependant, comme l'expression (3.21) représente un ensemble d'équations homogènes, la solution pour $[\phi]$ n'est pas unique (indéterminée) et ses éléments sont déterminés à une constante prés (valeur relative). En d'autres termes, si $[\phi]_i$ est une solution de l'équation (3.21), alors $a[\phi]_i$ est aussi une solution, a étant un scalaire quelconque.
En résumé, l'équation (3.21) fournit n valeurs pour ω^2 notées $\omega_1^2,\omega_2^2,\ldots,\omega_n^2$. Associé à chaque fréquence propre ω_i, il y a un vecteur propre $[\phi]_i$ qui est déterminé d'une manière arbitraire en fonction d'un déplacement de référence. Autrement dit, comme les composantes du vecteur $[\phi]_i$, notées $\phi_{1i},\phi_{2i},\ldots,\phi_{ni}$ ne peuvent être déterminées qu'à une constante près, on suppose, par exemple, que le premier élément ϕ_{1i} (ou le denier élément ϕ_{ni}) a une amplitude unitaire ($\phi_{1i}=1$ ou $\phi_{ni}=1$) et ainsi on peut calculer les autres composantes ϕ_{ji} $(j=1,2,\ldots,n)$.
On retient pour la suite du développement que les fréquences propres ou fréquences naturelles $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ sont telles que $\omega_1<\omega_2<,\omega_2<,\ldots,<\omega_n$ et que les éléments d'un vecteur propre $[\phi]_i$ sont notés $\phi_{1i},\phi_{2i},\ldots,\phi_{ni}$ ou ϕ_{ji} $(j=1,2,\ldots,n)$ où le premier indice indique le degré de liberté dans le mode et le deuxième indique le mode de vibration. La plus petite valeur propre ω notée ω_1 est appelée ***fréquence fondamentale*** , il lui correspond la période fondamentale T_1, la plus grande de toutes les périodes naturelles, telle que : $T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}$. Le mode correspondant à la fréquence fondamentale est appelé ***le mode fondamental***.
En remplaçant les valeurs ω_i dans la relation (3.21), on obtient l'équation relative à chaque mode de vibration :

$$\left([K]-\omega_i^2[M]\right)[\phi]_i=[0] \tag{3.24}$$

3.4 Orthogonalité des modes propres

Les modes propres d'une structure présente la propriété fondamentale d'être ***orthogonaux***. Cette propriété est la base de l'une des méthodes les plus utilisées dans la détermination de la réponse dynamique des systèmes à plusieurs degrés de liberté : ***La méthode de superposition modale***.
Cette méthode consiste à reformuler les équations couplées du mouvement d'un système à n ddl (inconnues) en n équations découplées.

Considérant deux fréquences propres distinctes ω_i et ω_j et leurs modes propres associés $[\phi]_i$ et $[\phi]_j$.
D'après l'équation (3.24), on a :

$$[K][\phi]_i=\omega_i^2[M][\phi]_i \tag{3.25}$$
$$[K][\phi]_j=\omega_j^2[M][\phi]_j \tag{3.26}$$

Prémultipliant l'équation (3.25) par $[\phi]_j^t$ et l'équation (3.26) par $[\phi]_i^t$, on obtient :

$$[\phi]_j^t [K] [\phi]_i = \omega_i^2 [\phi]_j^t [M] [\phi]_i \tag{3.27}$$

$$[\phi]_i^t [K] [\phi]_j = \omega_j^2 [\phi]_i^t [M] [\phi]_j \tag{3.28}$$

dans lesquelles les deux membres des équations sont des scalaires.
Si on transpose les deux membres de l'équation (3.28), on obtient :

$$[\phi]_j^t [K]^t [\phi]_i = \omega_j^2 [\phi]_j^t [M]^t [\phi]_i \tag{3.29}$$

Puisque $[K]$ et $[M]$ sont symétriques, donc $[K]^t = [K]$ et $[M]^t = [M]$, donc l'équation (3.29) devient :

$$[\phi]_j^t [K] [\phi]_i = \omega_j^2 [\phi]_j^t [M] [\phi]_i \tag{3.30}$$

Des deux équations (3.27) et (3.30) on déduit les égalités suivantes :

$$\omega_i^2 [\phi]_j^t [M] [\phi]_i = \omega_j^2 [\phi]_j^t [M] [\phi]_i \tag{3.31}$$

d'où :

$$\left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right) [\phi]_j^t [M] [\phi]_i = 0 \tag{3.32}$$

Le premier membre de l'équation (3.32) est un scalaire. Comme $\omega_j \neq \omega_i$, alors :

$$[\phi]_j^t [M] [\phi]_i = 0 \qquad (i \neq j) \tag{3.33}$$

L'équation (3.33) représente la première propriété d'orthogonalité ou orthogonalité par rapport à la masse.
En substituant l'équation (3.33) dans l'équation (3.30), on obtient la deuxième propriété d'orthogonalité ou orthogonalité par rapport à la rigidité :

$$[\phi]_j^t [K] [\phi]_i = 0 \qquad (i \neq j) \tag{3.34}$$

Les vecteurs modaux sont dits orthogonaux par rapport aux matrices $[M]$ et $[K]$.

Quand $\omega_i = \omega_j$, l'équation (3.32) conduit à la condition suivante :

$$[\phi]_i^t [M] [\phi]_i \neq 0 \tag{3.35}$$

Après développement :

$$\begin{aligned}
[\phi]_i^t [M] [\phi]_i &= \phi_{1i}^2 m_1 + \phi_{2i}^2 m_2 + \phi_{3i}^2 m_3 + \cdots + \phi_{ni}^2 m_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{ji}^2 \\
&= m_i^*
\end{aligned}$$

soit :

$$m_i^* = [\phi]_i^t [M] [\phi]_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.36}$$

La quantité scalaire m_i^* est connue comme étant la ***masse modale*** ou la ***masse généralisée*** du mode i.

3.5 Matrice modale - Normalisation des vecteurs propres

Matrice modale

Les vecteurs modaux ou vecteurs propres peuvent être organisés dans une seule matrice notée $[\Phi]$ où chacune de ses colonnes représente un vecteur modal.

$$[\phi]_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{bmatrix} \quad [\phi]_2 = \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{bmatrix} \quad [\phi]_3 = \begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad [\phi]_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow [\Phi] = \left[[\phi]_1 \quad [\phi]_2 \quad [\phi]_3 \quad \dots \quad [\phi]_n \right] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \dots & \phi_{2n} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \dots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{n3} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Ayant défini la matrice modale $[\Phi]$ et comme $[M]$ et $[K]$ sont symétriques et définies positives, alors :

$$[\bar{M}] = [\Phi]^t \, [M] \, [\Phi] \tag{3.38}$$

du fait de l'orthogonalité des modes propres par rapport à la matrice de masse (3.33), les termes hors diagonale sont nuls et la matrice $[\bar{M}]$ est diagonale et s'écrit :

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n^* \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Les termes diagonaux m_i^* sont définis par l'équation (3.36) et la matrice diagonale $[\bar{M}]$ est appelée ***matrice de masse généralisée***.

De même :

$$[\bar{K}] = [\Phi]^t \, [K] \, [\Phi] \tag{3.40}$$

du fait de l'orthogonalité des modes propres par rapport à la matrice de rigidité (3.34), la matrice $[\bar{K}]$ est, elle aussi, diagonale et s'écrit :

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} k_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n^* \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Les termes diagonaux $k_1^*, k_2^*, k_3^* \dots k_n^*$ sont des scalaires appelés ***rigidités modales*** ou ***rigidités généralisées***, telles que :

$$k_i^* = [\phi]_i^t \, [K] \, [\phi]_i \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{3.42}$$

La matrice diagonale $[\bar{K}]$ est appelée ***matrice de rigidité généralisée***.

Normalisation des modes propres

D'après l'équation (3.24) il est clair que si $[\phi]_i$ est un vecteur propre, alors, pour un scalaire quelconque λ, $\lambda\,[\phi]_i$ est aussi un vecteur propre. Les vecteurs propres sont donc définis à un facteur prés. Les amplitudes des modes propres sont donc arbitraires. Pour utiliser les vecteurs modaux dans les procédures de calcul, ils sont souvent normalisés. Il existe plusieurs méthodes de normalisation, mais celle se rapportant à la matrice de masse est la plus utilisée.

Cette méthode consiste à rendre les masses généralisées m_i unitaires. Les conditions de normalité s'expriment donc comme suit :

$$\begin{aligned}[\bar{\phi}]_i^t\,[M]\,[\bar{\phi}]_j &= \delta_{ij} \qquad (i,j=1,\dots n)\\ [\bar{\phi}]_i^t\,[K]\,[\bar{\phi}]_j &= \omega_j^2\delta_{ij} \qquad (i,j=1,\dots n)\end{aligned}$$

où $[\bar{\phi}]_i$ est le vecteur propre normalisé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker tel que :

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & si \quad i\neq j\\ 1 & si \quad i=j\end{cases}$$

Les vecteurs propres $[\bar{\phi}]_i$ sont dits orthonormés par rapport à la matrice de masse. Les conditions d'orthogonalité peuvent être exprimées suivant les relations matricielles suivantes :

$$[\bar{\Phi}]^t\,[M]\,[\bar{\Phi}]=[I] \tag{3.43}$$

$$[\bar{\Phi}]^t\,[K]\,[\bar{\Phi}]=[\Gamma] \tag{3.44}$$

où $[I]$ est la matrice unité (ou identité) d'ordre n et $[\Gamma]$ est une matrice diagonale, appelée ***matrice spectrale*** stockant les n fréquences propres $\omega_i^2\,(i=1\dots n)$. Elles s'écrivent comme suit :

$$[I]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix} \qquad [\Gamma]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2\end{bmatrix}$$

$[\bar{\Phi}]$ est la matrice modale ***normalisée*** dont les colonnes sont les vecteurs modaux normalisés $[\bar{\phi}]_i$.

$$[\bar{\Phi}]=\begin{bmatrix}\bar{\phi}_{11} & \bar{\phi}_{12} & \dots & \bar{\phi}_{1n}\\ \bar{\phi}_{21} & \bar{\phi}_{22} & \dots & \bar{\phi}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{\phi}_{n1} & \bar{\phi}_{n2} & \dots & \bar{\phi}_{nn}\end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Les vecteurs modaux normalisés $[\bar{\phi}_i]$ sont déterminés à partir des vecteurs modaux aléatoires $[\phi]_i$ selon la démonstration suivante :

Pour un mode propre quelconque $[\phi]_i$, on calcule le scalaire :

$$[\phi]_i^t\,[M]\,[\phi]_i=m_i^* \tag{3.46}$$

où m_i^* est la masse modale ou la masse généralisée relative au mode i.
En divisant les deux membres de l'équation (3.46) par m_i^* on obtient :

$$\frac{[\phi]_i^t\,[M]\,[\phi]_i}{m_i^*}=1 \iff \frac{[\phi]_i^t}{\sqrt{m_i^*}}\,[M]\,\frac{[\phi]_i}{\sqrt{m_i^*}}=1$$

ce qui mène aux modes propres M-orthonormé :

$$[\bar{\phi}]_i=\frac{[\phi]_i}{\sqrt{m_i^*}}=(m_i^*)^{-\frac{1}{2}}[\phi]_i \tag{3.47}$$

3.6 Vibrations forcées des système à plusieurs degrés de liberté

3.6.1 Méthode de la superposition modale

3.6.1.1 Utilisation des coordonnées normales ou généralisées

La formulation des équations du mouvement sous forme matricielle est présentée par l'équation (3.12) qui s'écrit :

$$[M]\,[\ddot{u}(t)] + [C]\,[\dot{u}(t)] + [K]\,[u(t)] = [P(t)]$$

Étant donné que la matrice de rigidité, carrée et symétrique, a des termes hors diagonale non nuls, les équations de mouvement sont donc couplées.
La résolution des équations couplées est lourde et laborieuse et il est souvent plus avantageux d'obtenir la même réponse à partir de la superposition des modes propres de vibration libre.
Il a été montré que les modes de vibrations libre d'un système à n degrés de liberté est représenté par n vecteurs indépendants et orthogonaux. Comme toute ensemble de vecteurs orthogonaux peut servir de base pour exprimer tout vecteur de dimension n.
Tout vecteur déplacement $[u(t)]$ peut être écrit sous la forme d'une superposition de modes propres multipliés chacun par un scalaire appelé ***amplitude modale***, soit :

$$[u(t)] = z_1(t)[\phi]_1 + z_2(t)[\phi]_2 + \cdots + z_n(t)[\phi]_n = \sum_{i=1}^{n} z_i(t)[\phi]_i \tag{3.48}$$

où $z_i(t)$ est la ***coordonnée modale*** ou ***coordonnée généralisée*** ou encore l'***amplitude modale*** du mode i.
Pour une composante modale $[u(t)]_i$ du déplacement dans le mode i, on a :

$$[u(t)]_i = [\phi]_i z_i(t) \tag{3.49}$$

$$\Longrightarrow \qquad [u(t)] = \sum_{i=1}^{n} [u(t)]_i$$

Sous forme matricielle, l'équation (3.48) s'écrit :

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} [\phi]_1 & [\phi]_2 & [\phi]_3 & \dots & [\phi]_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

Soit :

$$[u(t)] = [\Phi][z(t)] \tag{3.50}$$

avec :
$[z(t)]$: vecteur des coordonnées modales ou coordonnées généralisées.
$[\Phi]$: Matrice modale ou matrice de modes propres.
L'équation (3.50) définie une transformation permettant de passer des coordonnées normales aux coordonnées géométriques. La matrice modale $[\Phi]$ apparait ainsi comme une matrice de transformation ou matrice de changement de base.
Inversement, toute coordonnée modale z_i peut être calculée en tenant compte des propriétés

d'orthogonalité des modes propres.
En effet, en prémultipliant les équations (3.50) par $[\phi]_i^t[M]$, on obtient :

$$[\phi]_i^t[M][u(t)] = [\phi]_i^t[M][\Phi][z(t)] \tag{3.51}$$

Or

$$[\phi]_i^t[M][u(t)] = \sum_{j=1}^{n}[\phi]_i^t[M][\phi]_j z_j(t) \tag{3.52}$$

$$= [\phi]_i^t[M]\left(\sum_{j=1}^{n}[\phi]_j z_j(t)\right) \tag{3.53}$$

D'après (3.34) $[\phi]_j^t\,[K]\,[\phi]_i = 0 \quad pour (i \neq j)$, alors :

$$[\phi]_i^t[M][u(t)] = [\phi]_i^t[M][\phi]_i z_i(t) \tag{3.54}$$

Ce qui conduit à :

$$z_i(t) = \frac{[\phi]_i^t[M][u(t)]}{[\phi]_i^t[M][\phi]_i} = \frac{[\phi]_i^t[M][u(t)]}{m_i^*} \tag{3.55}$$

Si on utilise les modes propres normalisés $[\bar{\phi}]_i$, l'expression de l'amplitude modale z_i devient :

$$z_i(t) = [\bar{\phi}]_i^t[M][u(t)] \tag{3.56}$$

3.6.1.2 Découplage des équations différentielles du mouvement non-amorti

L'équation différentielle du mouvement non-amorti d'un système à plusieurs degrés de liberté s'écrit :

$$[M]\,[\ddot{u}(t)] + [K]\,[u(t)] = [P(t)] \tag{3.57}$$

Comme $[\ddot{u}(t)] = \dfrac{d}{dt^2}[u(t)]$, alors en tenant compte de (3.50) on aura :

$$[\ddot{u}(t)] = \frac{d}{dt^2}\left([\Phi][z(t)]\right) = [\Phi]\frac{d}{dt^2}\left([z(t)]\right)$$

soit :

$$[\ddot{u}(t)] = [\Phi][\ddot{z}(t)] \tag{3.58}$$

En introduisant les équations (3.50) et (3.58) dans la relation (3.57), on obtient :

$$[M][\Phi][\ddot{z}(t)] + [M][\Phi][z(t)] = P(t) \tag{3.59}$$

En prémultipliant par $[\Phi]^t$, on obtient :

$$[\Phi]^t[M][\Phi][\ddot{z}(t)] + [\Phi]^t[M][\Phi][z(t)] = [\Phi]^t P(t) \tag{3.60}$$

Or d'après (3.38) et (3.40) on a : $[\Phi]^t[M][\Phi] = [\bar{M}]$ et $[\Phi]^t[K][\Phi] = [\bar{K}]$
où $[\bar{M}]$ et $[\bar{K}]$ sont des matrices diagonales.
En posant

$$[\bar{P}(t)] = [\Phi]^t[P(t)] \tag{3.61}$$

L'équation du mouvement devient :

$$[\bar{M}][\ddot{z}(t)] + [\bar{K}][z(t)] = [\bar{P}(t)] \tag{3.62}$$

où $[\bar{P}(t)]$ est le vecteur des charges généralisées et $[\bar{M}]$ et $[\bar{K}]$ sont respectivement les matrices diagonales de masse et de rigidité généralisées.
Sous forme développée, l'équation (3.62) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} m_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1(t) \\ \ddot{z}_2(t) \\ \ddot{z}_3(t) \\ \vdots \\ \ddot{z}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^*(t) \\ p_2^*(t) \\ p_3^*(t) \\ \vdots \\ p_n^*(t) \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

soit un ensemble de n équations indépendantes :

$$\begin{cases} m_1^*\ddot{z}_1(t) + k_1^* z_1(t) = p_1^*(t) \\ m_2^*\ddot{z}_2(t) + k_2^* z_2(t) = p_2^*(t) \\ m_3^*\ddot{z}_3(t) + k_3^* z_3(t) = p_3^*(t) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ m_n^*\ddot{z}_n(t) + k_n^* z_n(t) = p_n^*(t) \end{cases} \tag{3.64}$$

Pour un mode i l'équation s'écrit :

$$m_i^*\ddot{z}_i(t) + k_i^* z_i(t) = p_i^*(t) \tag{3.65}$$

avec :

$$p_i^*(t) = [\phi]_i^t [P(t)] \tag{3.65-b}$$

où m_i^*, k_i^* et $p_i^*(t)$ sont respectivement la masse généralisée, la rigidité généralisée et la charge généralisée des coordonnées modales (ou coordonnées normales) pour le mode i.
L'équation (3.65) est analogue à l'équation du mouvement d'un oscillateur élémentaire à un seul degré de liberté non-amorti pour le mode i.
On sait que d'après (3.24) :

$$[K][\phi]_i = \omega_i^2 [M][\phi]_i$$

En prémultipliant les deux membres par $[\phi]_i^t$ on obtient :

$$[\phi]_i^t [K][\phi]_i = \omega_i^2 [\phi]_i^t [M][\phi]_i$$

Soit :

$$k_i^* = \omega_i^2 m_i^* \tag{3.66}$$

En remplaçant (3.66) dans (3.65), on obtient :

$$m_i^*\ddot{z}_i(t) + \omega_i^2 m_i^* z_i(t) = p_i^*(t)$$

En divisant par m_i, on aboutit à :

$$\ddot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = \frac{p_i^*(t)}{m_i^*} = \gamma_i(t) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{3.67}$$

où $\gamma_i(t)$ est la force généralisée par unité de masse généralisée du mode i.
L'équation (3.67) est l'équation du mouvement d'un système à un seul degré de liberté non-amorti relative au mode i. L'ensemble des équations pour $i = 1, \dots, n$, où n est le nombre des degrés de liberté, représentent les équations ***découplées*** du mouvement d'un système non-amorti à plusieurs degrés de liberté (n ddl).
On constate ainsi que les équations couplées établies en coordonnées géométriques (3.57) sont découplées par l'utilisation des coordonnées normales (ou généralisées) pour donner les équations (3.67). La transformation est définie par la relation (3.50).
En résolvant les équations(3.67) à la manière des équations des systèmes à un seul degré de liberté, on obtient les amplitudes modales z_i $(i = 1, \dots, n)$, ce qui permet de calculer la réponse $[u]$ dans le système des coordonnées géométriques à partir de l'équation (3.50).

3.6.1.3 Découplage des équations différentielles du mouvement amorti

Dans ce cas l'équation du mouvement pour un système à n degrés de liberté s'écrit :

$$[M]\,[\ddot{u}(t)] + [C]\,[\dot{u}(t)] + [K]\,[u(t)] = [P(t)] \tag{3.68}$$

$[C]$ représente la matrice d'amortissement visqueux. En général, les modes propres ne sont pas orthogonaux par rapport à la matrice d'amortissement $[C]$. Mais sous certaines conditions, les propriétés d'orthogonalité des modes propres sont applicables à la matrice d'amortissement. Dans ce cas la matrice d'amortissement généralisée est donnée par la relation :

$$[\bar{C}] = [\Phi]^t[C][\Phi] \tag{3.69}$$

Elle est, au même titre que $[\bar{M}]$ et $[\bar{K}]$, diagonale et s'écrit :

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} c_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n^* \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

avec

$$c_i^* = [\phi]_i^t\,[C]\,[\phi]_i \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{3.71}$$

c_i^* est le coefficient d'amortissement généralisé relatif au mode i.
Le vecteur des vitesses $[\dot{u}(t)]$ est tel que : $[\dot{u}(t)] = \dfrac{d}{dt}\,([u(t)])$

En considérant l'équation (3.50) on a :

$$[\dot{u}(t)] = \frac{d}{dt}\,([\Phi][z(t)]) = [\Phi]\frac{d}{dt}\,([z(t)])$$

soit :

$$[\dot{u}(t)] = [\Phi][\dot{z}(t)] \tag{3.72}$$

En introduisant (3.50), (3.58) et (3.69) dans (3.68), on obtient :

$$[M]\,[\Phi]\,[\ddot{z}(t)] + [C]\,[\Phi]\,[\dot{z}(t)] + [K]\,[\Phi]\,[z(t)] = [P(t)] \tag{3.73}$$

En prémultipliant par $[\Phi]^t$, on obtient :

$$[\Phi]^t\,[M]\,[\Phi]\,[\ddot{z}(t)] + [\Phi]^t\,[C]\,[\Phi]\,[\dot{z}(t)] + [\Phi]^t\,[K]\,[\Phi]\,[z(t)] = [\Phi]^t\,[P(t)]$$

Soit :

$$[\bar{M}]\,[\ddot{z}(t)] + [\bar{C}]\,[\dot{z}(t)] + [\bar{K}]\,[z(t)] = [\Phi]^t\,[P(t)] = [\bar{P}(t)] \tag{3.74}$$

Le caractère diagonale des matrices $[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$ et $[\bar{C}]$, comme pour le cas non-amorti, permet le découplage des équations du mouvement qui s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1^*\ddot{z}_1(t) + c_1^*\dot{z}_1(t) + k_1^*z_1(t) = p_1^*(t) \\ m_2^*\ddot{z}_2(t) + c_2^*\dot{z}_1(t) + k_2^*z_2(t) = p_2^*(t) \\ m_3^*\ddot{z}_3(t) + c_3^*\dot{z}_1(t) + k_3^*z_3(t) = p_3^*(t) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ m_n^*\ddot{z}_n(t) + c_n^*\dot{z}_1(t) + k_n^*z_n(t) = p_n^*(t) \end{cases} \tag{3.75}$$

L'équation représentant chaque mode est ainsi indépendante des autres. Pour un mode i on a :

$$m_i^* \ddot{z}_i(t) + c_i^* \dot{z}_1(t) + k_i^* z_i(t) = p_i^*(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

En divisant les deux membres par le scalaire m_i^*, on obtient :

$$\ddot{z}_i(t) + \frac{c_i^*}{m_i^*} \dot{z}_1(t) + \frac{k_i^*}{m_i^*} z_i(t) = \frac{p_i^*(t)}{m_i^*} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.76}$$

Sachant que $k_i^* = \omega_i^2 m_i^*$ et en admettant, comme pour le cas des systèmes à un seul degré de liberté, que :

$$c_i^* = 2\xi_i \omega_i m_i^* \tag{3.77}$$

où ξ_i représente le taux d'amortissement visqueux relatif au mode i, alors l'équation (3.76) devient :

$$\ddot{z}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = \gamma_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.78}$$

où $\gamma_i = \dfrac{p_i^*(t)}{m_i^*}$ est la charge généralisée par unité de masse généralisée relative au mode i. L'équation (3.78) est similaire à celle d'un système amorti forcé à un seul degré de liberté. Sa résolution est parfaitement identique à l'équation différentielle du système à un seul degré de liberté (SDOF) présentée au chapitre 1.

3.6.1.4 Méthode de superposition modale

L'utilisation des coordonnées normales sert à transformer les équations de mouvement d'un ensemble de n équations différentielles simultanées qui sont couplées par des termes hors diagonale dans les matrices de rigidité et d'amortissement à un ensemble de n équations de coordonnées normales indépendantes.

On constate que les expressions des propriétés généralisées de tout mode i sont équivalentes à celles définies précédemment pour un système élémentaire (à un seul degré de liberté) généralisé. Par conséquent, l'utilisation des modes normaux transforme le système à plusieurs degrés de liberté (MDOF) ayant n degrés de liberté en un ensemble de n systèmes élémentaires (SDOF) généralisés indépendants où chaque mode i répond avec ses propres caractéristiques : son propre mode de vibration $[\phi]_i$, sa fréquence propre ω_i et son amortissement modal ξ_i.

La solution complète du système à plusieurs degrés de liberté est alors obtenue en superposant les solutions modales indépendantes. En effet, connaissant les réponses de chaque mode $i, (i = 1, \ldots, n)$, la réponse totale est obtenue dans le système géométrique selon la relation (3.50) qui s'exprime comme suit :

$$[u(t)] = [\Phi][z(t)]$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi]_1 & [\phi]_2 & [\phi]_3 & \ldots & [\phi]_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi]_1 z_1(t) & [\phi]_2 z_2(t) & [\phi]_3 z_3(t) & \ldots & [\phi]_n z_n(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} [\phi]_i z_i(t) \tag{3.80}$$

L'expression (3.80) montre que la réponse totale dans le système des coordonnées géométriques est la somme des contributions de chaque mode, d'où le nom de ***superposition modale*** donnée à la méthode.

L'utilisation de cette méthode conduit également à une économie significative de l'effort de calcul, car dans la majorité des cas, il ne sera pas nécessaire d'utiliser toutes les n réponses modales pour représenter avec précision la réponse de la structure. Pour la plupart des systèmes structurels, les modes inférieurs apportent la contribution principale à la réponse totale.

3.6.2 Méthode modale spectrale

La méthode modale spectrale allie entre le spectre de réponse et la méthode de superposition modale pour déterminer la réponse d'une structure à l'action d'un tremblement de terre.

3.6.2.1 Analyse de la réponse à un tremblement de terre

L'analyse des systèmes à plusieurs degrés de liberté soumis à des mouvements de base dus aux tremblements de terre revêt une grande importance et un grand intérêt dans l'étude des structures. Le mouvement de la base met la structure en vibration induisant des déformations et des contraintes dans ses différents éléments.
Dans ce cas, aucune force extérieure n'est appliquée au système et seul le mouvement à la base, $u_g(t)$, excite le système tel que indiqué sur la figure 3.3.

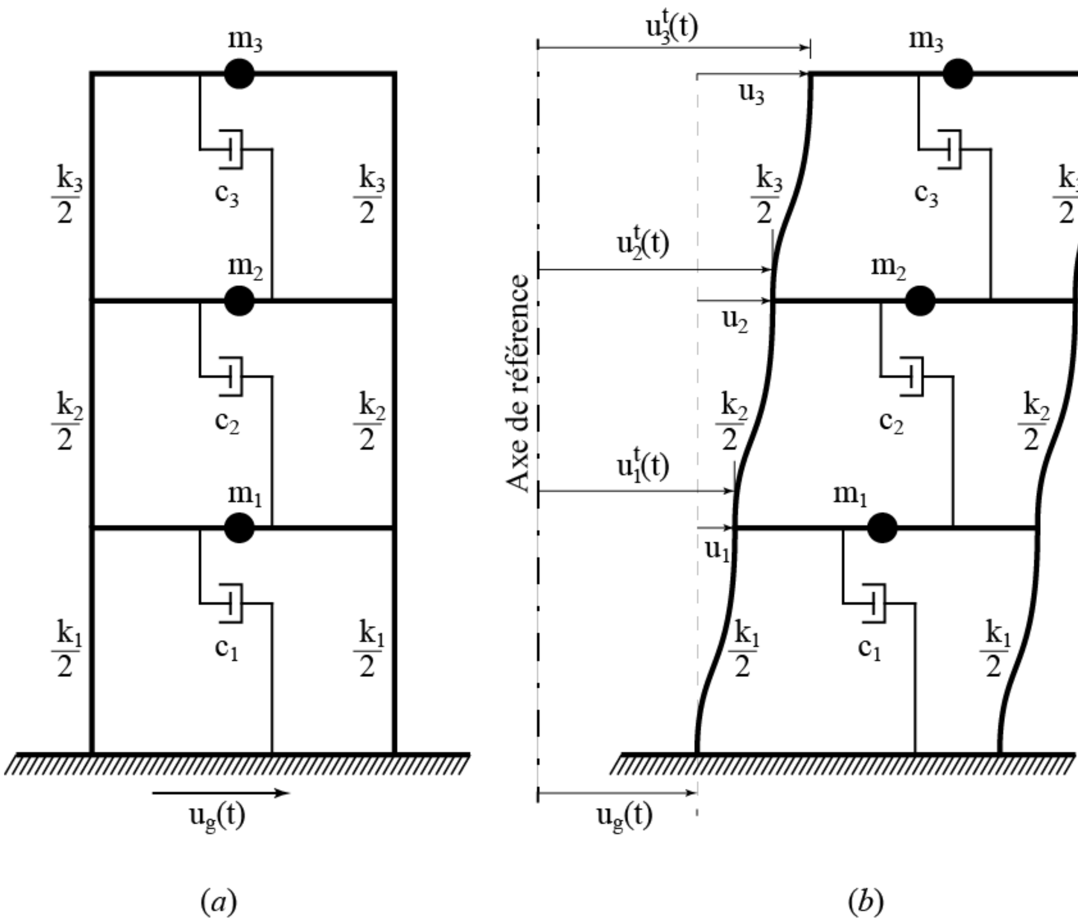


FIGURE 3.3 – Bâtiment de trois étages soumise à un mouvement à sa base dû à un tremblement de terre

D'une manière similaire à la démarche adoptée dans la section 3.2, l'ensemble des forces qui agissent sur le système à trois degrés liberté, pris comme exemple, sont telles que indiquées sur la figure 3.4.

En se référant aux relations (3.1), les équations d'équilibre, en absence des forces extérieures, s'écrivent, dans ce cas, comme suit :

$$\begin{cases} f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} = 0 \\ f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} = 0 \\ f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} = 0 \end{cases} \tag{3.81}$$

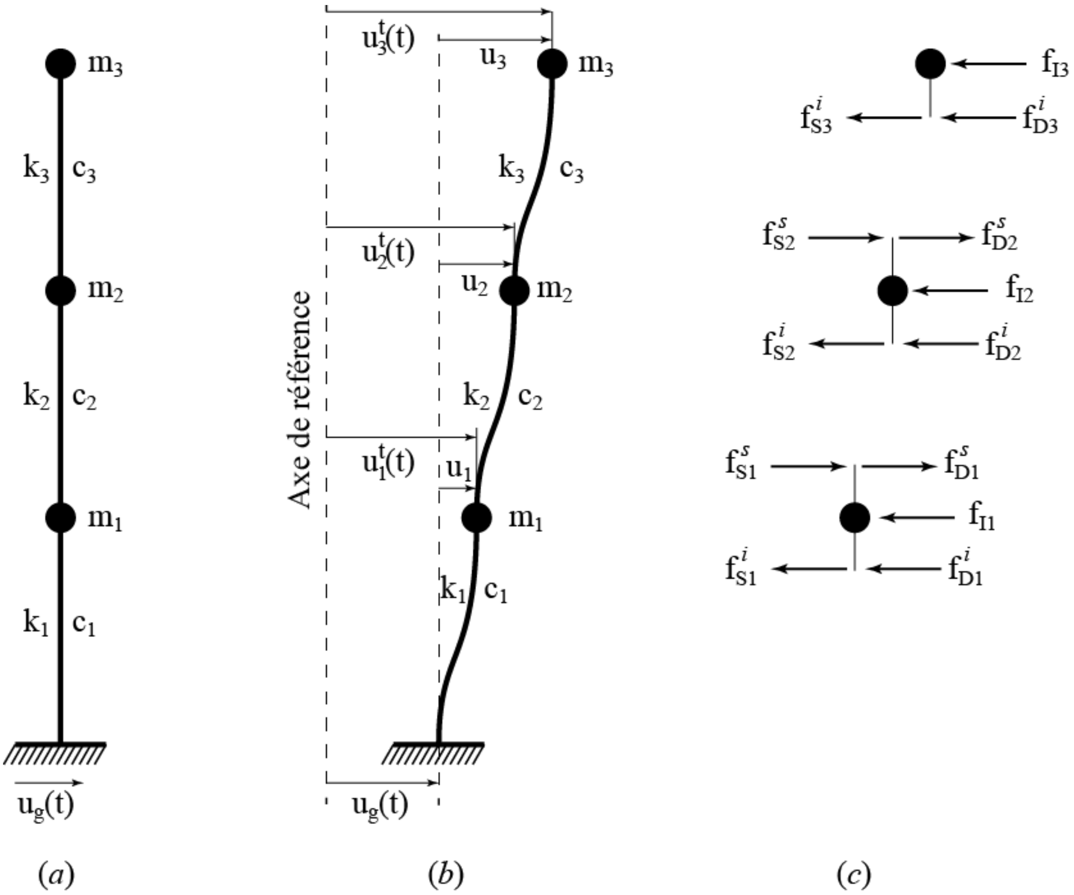


FIGURE 3.4 – Bâtiment de trois étages soumise à un mouvement à sa base dû à un tremblement de terre

où f_{Ii}, f_{Di}, $f_{Si}(i = 1, 2, 3)$ représentent respectivement les forces d'inertie, d'amortissement et élastique relatives au degrés de liberté u_i. Leurs expressions sont les mêmes que celles données par les équations (3.4), (3.7) et (3.8) à la seule différence que les forces d'inertie f_I sont liées au déplacement total des masses, tandis que les forces de d'amortissement et les forces élastiques restent liées à la vitesse et au déplacement relatif des masses. Les équations donnant ces différentes forces s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} f_{S1} = k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) \\ f_{S2} = k_2(u_2 - u_1) - k_3(u_3 - u_2) \\ f_{S3} = k_3(u_3 - u_2) \end{array}\right. \tag{3.82}$$

pour les forces élastiques, et

$$\left\{\begin{array}{l} f_{D1} = c_1 \dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ f_{D2} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\ f_{D3} = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \end{array}\right. \tag{3.83}$$

pour les force d'amortissement.
Les masses m_1, m_2 et m_3 sont soumises aux accélérations $\ddot{u}_1^t$, $\ddot{u}_2^t$ et $\ddot{u}_3^t$ ce qui génèrent les forces d'inertie suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} f_{I1} = m_1 \ddot{u}_1^t \\ f_{I2} = m_2 \ddot{u}_2^t \\ f_{I3} = m_3 \ddot{u}_3^t \end{array}\right. \tag{3.84}$$

En introduisant les équations (3.82), (3.83) et (3.84) dans (3.81), on obtient une équation similaire à l'équation (3.10) sans second membre (forces extérieures nulles), soit :

$$\left\{ \begin{array}{r} m_1\ddot{u}_1^t + (c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1+k_2)u_1 - k_2u_2 = 0 \\ m_2\ddot{u}_2^t - c_2\dot{u}_1 + (c_2+c_3)\dot{u}_2 - c_3\dot{u}_3 - k_2u_1 + (k_2+k_3)\dot{u}_2 - k_3u_3 = 0 \\ m_3\ddot{u}_3^t - c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 - k_3u_2 + k_3u_3 = 0 \end{array} \right. \tag{3.85}$$

Comme montré sur la figure 3.4, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^t(t) = u_1(t) + u_g(t) \\ u_2^t(t) = u_2(t) + u_g(t) \\ u_3^t(t) = u_3(t) + u_g(t) \end{array} \right. \tag{3.86}$$

En passant aux accélérations on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_1^t(t) = \ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_2^t(t) = \ddot{u}_2(t) + \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_3^t(t) = \ddot{u}_3(t) + \ddot{u}_g(t) \end{array} \right. \tag{3.87}$$

où u_g et $\ddot{u}_g$ représentent le déplacement et l'accélération de la base de la structure dus à un tremblement de terre.
La substitution dans les équations (3.85) $\ddot{u}_1^t(t)$, $\ddot{u}_2^t(t)$ et $\ddot{u}_3^t(t)$ par leurs expressions données par les équations (3.87) conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{r} m_1\ddot{u}_1 + (c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1+k_2)u_1 - k_2u_2 = -m_1\ddot{u}_g \\ m_2\ddot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + (c_2+c_3)\dot{u}_2 - c_3\dot{u}_3 - k_2u_1 + (k_2+k_3)\dot{u}_2 - k_3u_3 = -m_2\ddot{u}_g \\ m_3\ddot{u}_3 - c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 - k_3u_2 + k_3u_3 = -m_3\ddot{u}_g \end{array} \right. \tag{3.88}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1\ddot{u}_g \\ -m_2\ddot{u}_g \\ -m_3\ddot{u}_g \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.89}$$

En posant $p_{eff1}(t) = -m_1\ddot{u}_g$, $p_{eff2}(t) = -m_2\ddot{u}_g$ et $p_{eff3}(t) = -m_3\ddot{u}_g$, les équations (3.88) et (3.89) deviennent identiques aux équations (3.11) et (3.12). Le système à trois degrés de liberté soumis à l'action d'une excitation sismique à la base est donc équivalent à un système soumis à des charges extérieures effectives $p_{eff1}(t)$, $p_{eff2}(t)$ et $p_{eff3}(t)$, appliquées à ses masses m_1, m_2 et m_3 respectivement. Le second membre de l'équation (3.89) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} p_{eff1}(t) \\ p_{eff2}(t) \\ p_{eff3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1\ddot{u}_g \\ -m_2\ddot{u}_g \\ -m_3\ddot{u}_g \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \tag{3.90}$$

Or

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} p_{eff1}(t) \\ p_{eff2}(t) \\ p_{eff3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1\ddot{u}_g \\ -m_2\ddot{u}_g \\ -m_3\ddot{u}_g \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \tag{3.92}$$

Soit sous forme compacte :

$$[P_{eff}(t)] = -[M]\,[r]\,\ddot{u}_g \tag{3.93}$$

avec :

$$[r] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

Ce développement pour un système à trois degrés de liberté est parfaitement généralisable pour n'importe quel nombre de degrés de liberté. En effet, pour un système n degrés de liberté, l'équation du mouvement sous forme matricielle compacte est la suivante :

$$[M]\,[\ddot{u}(t)] + [C]\,[\dot{u}(t)] + [K]\,[u(t)] = [P_{eff}(t)] = -[M]\,[r]\,\ddot{u}_g \tag{3.95}$$

$[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont des matrices carrées symétriques, de dimension $n \times n$, données par les relations (3.13), (3.14) et (3.15) respectivement et $[r]$ un vecteur de dimension n tel que sa transposée s'écrit :

$$[r]^t = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{n\ termes} \tag{3.96}$$

Soit un vecteur formé de n termes unitaires.

3.6.2.2 Calcul des déplacements modaux et des déplacements totaux

L'analyse de la réponse d'un système à plusieurs degrés de liberté sous l'action d'un tremblement de terre représenté par une accélération $\ddot{u}_g(t)$ agissant à la base de la structure a conduit à l'équation de mouvement (3.95) qui est identique à l'équation du mouvement pour un système à plusieurs degrés de liberté soumis à des charges dynamiques extérieures (3.12). La méthode de la superposition modale permet de découpler l'équation du mouvement (3.95) en un ensemble d'équations indépendantes représentant un ensemble de systèmes à un seul degrés de liberté.
L'expression (3.76) fournit l'équation découplée pour un mode i qui s'écrit dans le cas de l'excitation sismique à la base sous la forme :

$$\ddot{z}_i(t) + \frac{c_i^*}{m_i^*}\dot{z}_i(t) + \frac{k_i^*}{m_i^*}z_i(t) = \frac{p_{eff\,i}^*(t)}{m_i^*} \tag{3.97}$$

Soit en considérant les équation (3.66) et (3.77) :

$$\ddot{z}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{z}_1(t) + \omega_i^2 z_i(t) = \frac{p_{eff\,i}^*(t)}{m_i^*} \tag{3.98}$$

Sachant, d'après les équations (3.65-b) et (3.36), que :

$$p_{eff\,i}^*(t) = \{\phi\}_i^t[P_{eff}(t)] \quad m_i^* = \{\phi\}_i^t[M]\{\phi\}_i$$

Donc l'équation (3.98) devient :

$$\ddot{z}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{z}_1(t) + \omega_i^2 z_i(t) = \frac{\{\phi\}_i^t[P_{eff}(t)]}{\{\phi\}_i^t[M]\{\phi\}_i} = -\frac{\{\phi\}_i^t[M]\{r\}}{\{\phi\}_i^t[M]\{\phi\}_i}\ddot{u}_g(t) \tag{3.99}$$

On définit le facteur de participation modal relatif au mode i, noté Ψ_i, tel que :

$$\Psi_i = \frac{\{\phi\}_i^t[M]\{r\}}{\{\phi\}_i^t[M]\{\phi\}_i} = \frac{\{\phi\}_i^t[M]\{r\}}{m_i^*} \tag{3.100}$$

Si les modes propres sont normalisés, alors $m_i^* = 1$ et le facteur de participation modal s'écrit :

$$\Psi_i = \frac{\{\phi\}_i^t[M]\{r\}}{\{\phi\}_i^t[M]\{\phi\}_i} = \{\phi\}_i^t[M]\{r\} \tag{3.101}$$

L'équation relative au mode i devient :

$$\ddot{z}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{z}_1(t) + \omega_i^2 z_i(t) = -\Psi_i\ddot{u}_g(t) \tag{3.102}$$

Par analogie au système à un seul degré de liberté dont la réponse est donnée par la relation (2.160), la réponse modale s'exprime par l'intégrale de de Duhamel qui s'écrit :

$$z_i(t) = -\frac{1}{\omega_{di}}\int_0^t \Psi_i\ddot{u}_g(\tau)e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}sin\omega_{di}(t-\tau)\,d\tau \tag{3.103}$$

Soit pour un système peu amorti ($\xi \leq 0.2$), ce qui est le cas pour la plupart des structures en génie civil, où la pulsation modale amortie ω_{di} est pratiquement égale à la pulsation modale ω_i, la réponse modale s'écrit :

$$z_i(t) = -\frac{\Psi_i}{\omega_i}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau = \Psi_i D_i(t) \tag{3.104}$$

avec

$$D_i(t) = -\frac{1}{\omega_i}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau \tag{3.105}$$

D'après l'équation (3.50), la réponse, pour le mode i, dans le système de coordonnées géométriques $\{u(t)\}_i$ en fonction de la réponse modale $z_i(t)$ s'écrit :

$$\{u(t)\}_i = \{\phi\}_i z_i(t) = \{\phi\}_i\Psi_i D_i(t) \tag{3.106}$$

La réponse totale du système à plusieurs degrés de liberté soumis à tremblement de terre à sa base est donnée par le vecteur des déplacements totaux $u(t)$ obtenu par la sommation des vecteurs déplacement $u_i(t)$ de chaque mode :

$$\begin{aligned}
\{u(t)\} &= \{u(t)\}_1 + \{u(t)\}_2 + \cdots + \{u(t)\}_n \\
&= \{\phi\}_1\Psi_1 D_1(t) + \{\phi\}_2\Psi_2 D_2(t) + \cdots + \{\phi\}_n\Psi_i D_n(t) \\
&= \begin{bmatrix}\{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \dots & \{\phi\}_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Psi_1 D_1(t)\\ \Psi_2 D_2(t)\\ \dots\\ \Psi_n D_n(t)\end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \dots & \{\phi\}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \Psi_2 & \dots & 0\\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \Psi_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}D_1(t)\\ D_2(t)\\ \dots\\ D_n(t)\end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Soit

$$\{u(t)\} = [\Phi][\Psi]\{D(t)\} \tag{3.107}$$

avec

$$[\Psi] = \begin{bmatrix}\Psi_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \Psi_2 & \dots & 0\\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \Psi_n\end{bmatrix} \tag{3.108}$$

où $[\Psi]$ est la matrice diagonale des facteurs de participation modaux et $\{D(t)\}$ est le vecteur des déplacements $D_i(t)$ définis par l'équation (3.105).

Sous forme développée on a :

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{11}(t) \\ u_{21}(t) \\ \vdots \\ u_{j1}(t) \\ \vdots \\ u_{n1}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{mode 1}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{12}(t) \\ u_{22}(t) \\ \vdots \\ u_{j2}(t) \\ \vdots \\ u_{n2}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{mode 2}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{1i}(t) \\ u_{2i}(t) \\ \vdots \\ u_{ji}(t) \\ \vdots \\ u_{ni}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{mode i}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{1n}(t) \\ u_{2n}(t) \\ \vdots \\ u_{jn}(t) \\ \vdots \\ u_{nn}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{mode n}}$$

où $u_j(t)$ et $u_{ji}(t)$ sont respectivement le déplacement total du degré de liberté (niveau) j et le déplacement du degré de liberté (niveau) j sous le mode i (i, $j = 1, \ldots n$) et on a :

$$u_j(t) = u_{j1}(t) + u_{j2}(t) + \cdots + u_{ji}(t) + \cdots + u_{jn}(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}(t)$$

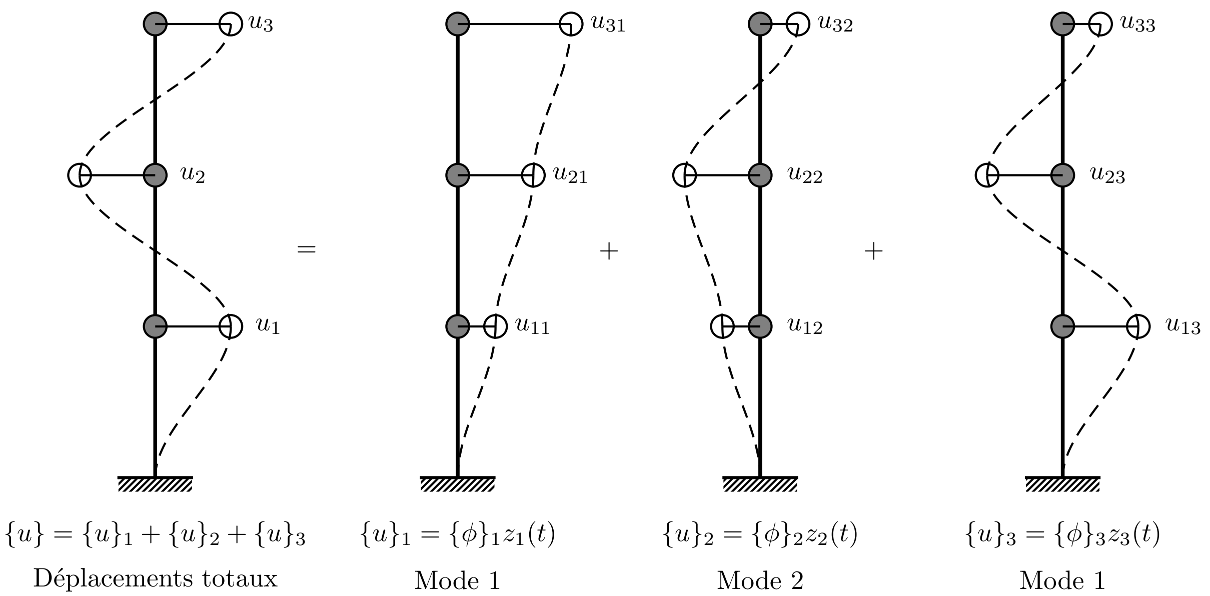


FIGURE 3.5 – Superposition modale des déplacements pour un système à trois degrés de liberté

En tenant compte de la relation (3.106) :

$$u_j(t) = \phi_{j1}\Psi_1 D_1(t) + \phi_{j2}\Psi_2 D_2(t) + \cdots + \phi_{ji}\Psi_i D_i(t) + \cdots + \phi_{jn}\Psi_n D_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ji}\Psi_i D_i(t)$$

3.6.2.3 Calcul des forces sismiques modales

Une fois les déplacements déterminés, le vecteur $\{f_S(t)\}$ des forces élastiques s'écrit :

$$\{f_S(t)\} = [K]\{u(t)\} = [K][\Phi]\{\Psi_i D_i(t)\} \tag{3.109}$$

soit :

$$\{f_S(t)\} = [K]\{\phi\}_1\Psi_1 D_1(t) + [K]\{\phi\}_2\Psi_2 D_2(t) + \cdots + [K]\{\phi\}_n\Psi_n D_n(t) \tag{3.110}$$

or d'après (3.24) $[K][\phi]_i = \omega_i^2[M][\phi]_i$, donc :

$$\{f_S(t)\} = \omega_1^2[M]\{\phi\}_1\Psi_1 D_1(t) + \omega_2^2[M]\{\phi\}_2\Psi_2 D_2(t) + \cdots + \omega_n^2[M]\{\phi\}_n\Psi_n D_n(t) \tag{3.111}$$

Pour un mode i, la force élastique est donnée par le vecteur :

$$\{f_S(t)\}_i = [M]\{\phi\}_i\omega_i^2\Psi_i D_i(t) \tag{3.112}$$

où $D_i(t)$ représente l'historique du déplacement spectrale associé au mode i. En posant :

$$A_i(t) = \omega_i^2 D_i(t) = -\omega_i \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)} sin\omega_i(t-\tau)\, d\tau \tag{3.113}$$

Le vecteur des forces élastiques associé à chaque mode i s'écrit :

$$\{f_S(t)\}_i = [M]\{\phi\}_i\Psi_i A_i(t) \tag{3.114}$$

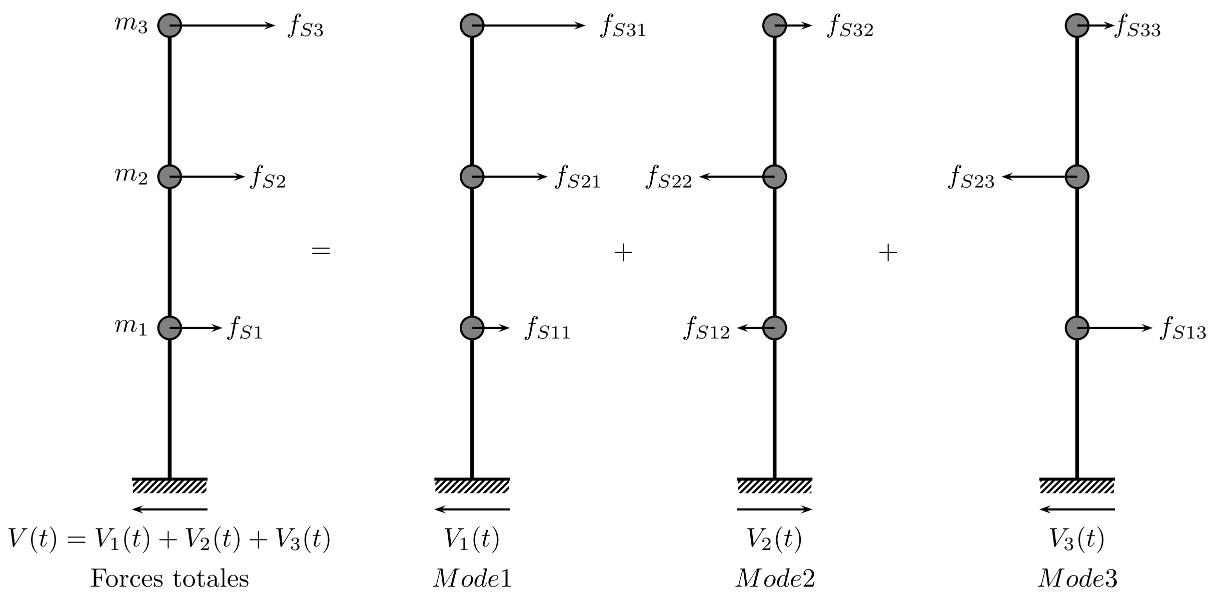


FIGURE 3.6 – Superposition modale des forces pour un système à trois degrés de liberté

Le vecteur des forces élastiques totales $\{f_S(t)\}$ s'écrit donc :

$$\{f_S(t)\} = \{f_S(t)\}_1 + \{f_S(t)\}_2 + \cdots + \{f_S(t)\}_n \tag{3.115}$$

Soit sous forme développée :

$$\{f_S(t)\} = \begin{Bmatrix} f_{S1}(t) \\ f_{S2}(t) \\ \vdots \\ f_{Sj}(t) \\ \vdots \\ f_{Sn}(t) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{S11}(t) \\ f_{S21}(t) \\ \vdots \\ f_{Sj1}(t) \\ \vdots \\ f_{Sn1}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{mode1}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{S12}(t) \\ f_{S22}(t) \\ \vdots \\ f_{Sj2}(t) \\ \vdots \\ f_{Sn2}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{mode2}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{S1i}(t) \\ f_{S2i}(t) \\ \vdots \\ f_{Sji}(t) \\ \vdots \\ f_{Sni}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{mode i}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{S1n}(t) \\ f_{S2n}(t) \\ \vdots \\ f_{Sjn}(t) \\ \vdots \\ f_{Snn}(t) \end{Bmatrix}}_{\text{mode n}} \tag{3.116}$$

où $f_{Sji}(t)$ la force élastique du mode i au niveau du degré de liberté j ($j = 1, \ldots, n$).
La force élastique totale pour un degré de liberté j est donnée par la relation :

$$f_{Sj}(t) = f_{Sj1}(t) + f_{Sj2}(t) + \cdots + f_{Sji}(t) + \cdots + f_{Sjn}(t) \tag{3.117}$$

Pour un mode i, le vecteur des forces élastiques représentant les forces élastiques appliquées aux différents degrés de liberté est tel que :

$$\{f_S(t)\}_i = \begin{Bmatrix} f_{S1i}(t) \\ f_{S2i}(t) \\ \vdots \\ f_{Sji}(t) \\ \vdots \\ f_{Sni}(t) \end{Bmatrix} \tag{3.118}$$

3.6.2.4 Calcul des forces modales et de la force totale de cisaillement à la base

Pour chaque mode i, la force de cisaillement à la base notée $V_{Bi}(t)$ est la somme de toutes les forces élastiques aux différents niveaux. Ainsi :

$$V_{Bi}(t) = f_{S1i}(t) + f_{S2i}(t) + \cdots + f_{Sni}(t) = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{S1i}(t) \\ f_{S2i}(t) \\ \vdots \\ f_{Sni}(t) \end{Bmatrix} = \{r\}^t\{f_S(t)\}_i \tag{3.119}$$

Soit :

$$V_{Bi}(t) = \{r\}^t[M]\{\phi\}_i\Psi_i A_i(t) \tag{3.120}$$

Comme $V_{Bi}(t)$ est un scalaire, il est donc identique à sa transposée, c'est-à-dire : $V_{Bi}(t) = (V_{Bi}(t)^{tr}$, alors :

$$V_{Bi}(t) = \Big(\{r\}^t[M]\{\phi\}_i\Psi_i A_i(t)\Big)^t = \{\phi\}_i^t[M]^t\big(\{r\}^t\big)^t\Psi_i A_i(t) = \{\phi\}_i^t[M]^t\{r\}\Psi_i A_i(t)$$

En tenant copte de la symétrie de $[M]$ ($[M]^t = [M]$), le cisaillement à la base relatif au mode i s'écrit :

$$V_{Bi}(t) = \{\phi\}_i^t[M]\{r\}\Psi_i A_i(t) \tag{3.121}$$

D'après l'équation (3.101), définissant le facteur de participation Ψ_i, on a :

$$\{\phi\}_i^t[M]\{r\} = \{\phi\}_i^t[M]\{\phi\}_i\Psi_i = m_i^*\Psi_i$$

et donc

$$V_{Bi}(t) = m_i^*\Psi_i^2 A_i(t) \tag{3.122}$$

Le terme $m_i^*\Psi_i^2$ est défini comme étant ***la masse modale effective*** associée au mode i. Si cette masse effective est notée $m_{eff i}$, l'expression du cisaillement à la base devient :

$$V_{Bi}(t) = m_{eff i} A_i(t) \tag{3.123}$$

avec

$$m_{eff i} = m_i^*\Psi_i^2 \tag{3.124}$$

Ainsi la masse totale M_{tot} de la structure est telle que :

$$M_{tot} = m_{eff1} + m_{eff2} + \cdots + m_{effn} = m_1^*\Psi_1^2 + m_2^*\Psi_2^2 + \cdots + m_n^*\Psi_n^2 \tag{3.125}$$

En introduisant le vecteur $\{\Psi\}$ ou vecteur des facteurs de participation modaux :

$$\{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{Bmatrix}$$

alors :

$$M_{tot} = \{\Psi\}^t[\bar{M}]\{\Psi\} \tag{3.126}$$

d'après l'équation 3.28 $[\bar{M}] = [\Phi]^t[M][\Phi]$, donc :

$$M_{tot} = \{\Psi\}^t[\Phi]^t[M][\Phi]\{\Psi\} \tag{3.127}$$

Or la masse totale est donnée par la relation :

$$M_{tot} = \{r\}^t[M]\{r\} \tag{3.128}$$

par comparaison des équations (3.127) et (3.128) on a :

$$[\Phi]\{\Psi\} = \{r\} \tag{3.129}$$

en effet,

$$\begin{aligned}
[\Phi]\{\Psi\} &= \left[\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \dots \quad \{\phi\}_n\right] \begin{Bmatrix} \dfrac{\{\phi\}_1^t[M]\{r\}}{m_1^*} \\ \dfrac{\{\phi\}_2^t[M]\{r\}}{m_2^*} \\ \vdots \\ \dfrac{\{\phi\}_n^t[M]\{r\}}{m_n^*} \end{Bmatrix} \\
&= \left(\frac{\{\phi\}_1\{\phi\}_1^t}{m_1^*} + \frac{\{\phi\}_2\{\phi\}_2^t}{m_2^*} + \dots + \frac{\{\phi\}_n\{\phi\}_n^t}{m_n^*} \right)[M]\{r\} \\
&= \left(\frac{\{\phi\}_1}{\sqrt{m_1^*}}\frac{\{\phi\}_1^t}{\sqrt{m_1^*}} + \frac{\{\phi\}_2}{\sqrt{m_2^*}}\frac{\{\phi\}_2^t}{\sqrt{m_2^*}} + \dots + \{\phi\}\frac{\{\phi\}_n}{\sqrt{m_n^*}}\frac{[\phi]_n^t}{\sqrt{m_n^*}} \right)[M]\{r\} \\
&= \left(\{\bar{\phi}\}_1\{\bar{\phi}\}_1^t + \{\bar{\phi}\}_2\{\bar{\phi}\}_2^t + \dots + \{\bar{\phi}\}_n\{\bar{\phi}\}_n^t \right)[M]\{r\} \\
&= \left[\{\bar{\phi}\}_1 \quad \{\bar{\phi}\}_1 \quad \dots \quad \{\bar{\phi}\}_1\right] \begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}\}_1^t \\ \{\bar{\phi}\}_2^t \\ \vdots \\ \{\bar{\phi}\}_2^t \end{Bmatrix} [M]\{r\}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad [\Phi]\{\Psi\} = [\bar{\Phi}][\bar{\Phi}]^t[M]\{r\} \tag{3.130}$$

Par ailleurs, on a : $[\bar{\Phi}]^t[M][\bar{\Phi}] = [I]$ en prémultipliant à gauche par $[\bar{\Phi}]$ et à droite par $[M][\bar{\Phi}]^t$ et en considérant l'associativité du produit matriciel, on obtient :

$$[\bar{\Phi}]\left([\bar{\Phi}]^t[M][\bar{\Phi}]\right)[M][\bar{\Phi}]^t = [\bar{\Phi}][I][M][\bar{\Phi}]^t$$

$$\Longrightarrow \quad [\bar{\Phi}][\bar{\Phi}]^t[M]\left([\bar{\Phi}][M][\bar{\Phi}]^t\right) = [\bar{\Phi}][I][M][\bar{\Phi}]^t$$

Comme $[\bar{\Phi}][M][\bar{\Phi}]^t = [I]$ et $[I][M] = [M][I] = [M]$, alors :

$$[\bar{\Phi}][\bar{\Phi}]^t[M]\left([I]\right) = [I]$$

Soit

$$[\bar{\Phi}][\bar{\Phi}]^t[M] = [I] \tag{3.131}$$

En remplaçant (3.131) dans (3.130), on aura :

$$[\Phi]\{\Psi\} = [\bar{\Phi}][\bar{\Phi}]^t[M][r] = [I]\{r\}$$

ce qui donne :

$$[\Phi]\{\Psi\} = \{r\} \tag{3.132}$$

En définitif, on a :

$$M_{tot} = \{r\}^t[M]\{r\} = \{\Psi\}^t[\Phi]^t[M][\Phi]\{\Psi\} = \{\Psi\}^t[\bar{M}]\{\Psi\} \tag{3.133}$$

On définit ***le facteur de participation massique*** L_i pour le mode i par la relation :

$$L_i = \frac{m_{effi}}{M_{tot}} = \frac{m_i^*\Psi_i^2}{M_{tot}} \tag{3.134}$$

L_i est exprimé en pourcentage (%) et représente la contribution du mode i dans la réponse dynamique totale du système. Il est clair que :

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \sum_{i=1}^{n} L_i = 1\ (100\%)$$

Habituellement, lorsque le pourcentage cumulé des masses effectives est supérieure à 90%, il est possible de négliger les modes vibratoires restants. Cette disposition est considérée par les règles parasismiques Algériennes (RPA 99 / V2003) dans son article 4.3.4 concernant le nombre de mode à considérer dans le calcul des forces sismiques.

La réponse totale est obtenue par la sommation (la superposition) des forces de cisaillement relatives à chaque mode. Ainsi la force totale de cisaillement $V_B(t)$ à la base de la structure est donnée par la relation :

$$\begin{aligned}
V_B(t) &= V_{B1}(t) + V_{B2}(t) + \cdots + V_{Bn}(t) \\
&= m_{eff1}A_1(t) + m_{eff2}A_2(t) + \cdots + m_{effn}A_n(t) \\
&= m_1^*\Psi_1^2A_1(t) + m_2^*\Psi_2^2A_2(t) + \cdots + m_n^*\Psi_n^2A_n(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i^*\Psi_i^2A_i(t) \\
&= \begin{Bmatrix} m_1^* & m_2^* & \dots & m_n^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_1^2A_1(t) \\ \Psi_1^2A_2(t) \\ \vdots \\ \Psi_1^2A_n(t) \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^* & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Psi_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Psi_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ \vdots \\ A_n(t) \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow V_B(t) = \{r\}^t[\bar{M}][\Psi]^2\{A(t)\} \tag{3.135}$$

ou encore, comme $[\bar{M}] = [\Phi]^t[M][\Phi]$,

$$V_B(t) = \{r\}^t[\Phi]^t[M][\Phi][\Psi]^2\{A(t)\}$$

où $[\Psi]$ est une matrice diagonale contenant les facteurs de participation modal telle que définie par l'expression (3.108) et $\{A(t)\}$ est le vecteur de la pseudo-accélération, tel que :

$$\{A(t)\} = \begin{Bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ \vdots \\ A_n(t) \end{Bmatrix}$$

En utilisant le coefficient de participation massique L_i, la force de cisaillement $V_{Bi}(t)$ pour un mode i s'écrit :

$$V_{Bi}(t) = m_{eff\,i} A_i(t) = M_{tot} L_i A_i(t) \tag{3.136}$$

La force totale de cisaillement à la base du système $V(t)$ s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned} V_B(t) &= V_{B1}(t) + V_{B2}(t) + \cdots + V_{Bn}(t) \\ &= M_{tot} L_1 A_1(t) + M_{tot} L_1 A_1(t) + \cdots + M_{tot} L_1 A_1(t) \\ &= M_{tot}\Big(L_1 A_1(t) + L_2 A_2(t) + \cdots + L_n A_n(t)\Big) = M_{tot}\Big(\sum_{i=1}^{n} L_i A_i(t)\Big) \\ &= M_{tot}\begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & \ldots & L_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ \vdots \\ A_n(t) \end{Bmatrix} \\ \Longrightarrow \quad V_B(t) &= M_{tot}\{L\}^t\{A(t)\} \end{aligned} \tag{3.137}$$

où $\{L\}$ est le vecteur des facteurs de participation massique qui s'écrit sous sa forme transposée :

$$\{L\}^t = \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & \ldots & L_n \end{Bmatrix} \tag{3.138}$$

3.6.2.5 Moments modaux et moment total de renversement à la base

Connaissant la distribution des forces élastiques effectives aux différents degrés de liberté donnée par la relation (3.116) et illustrée, pour un système à trois degrés de liberté, par la figure 3.7, la valeur de la résultante des moments de renversement à la base du système est obtenue par la procédure statique standard.

En effet, le moment de renversement résultant pour un système à n degrés de liberté distants de la base par les hauteurs h_1, h_2, $\ldots$, h_n s'écrit :

$$M_B(t) = f_{S1}(t)h_1 + f_{S2}(t)h_2 + \cdots + f_{Sn}(t)h_n = \sum_{i=1}^{n} f_{Si}(t)h_i \tag{3.139}$$

Soit en écriture matricielle :

$$M_B(t) = \begin{Bmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{S1}(t) \\ f_{S2}(t) \\ \vdots \\ f_{Sn}(t) \end{Bmatrix} \tag{3.140}$$

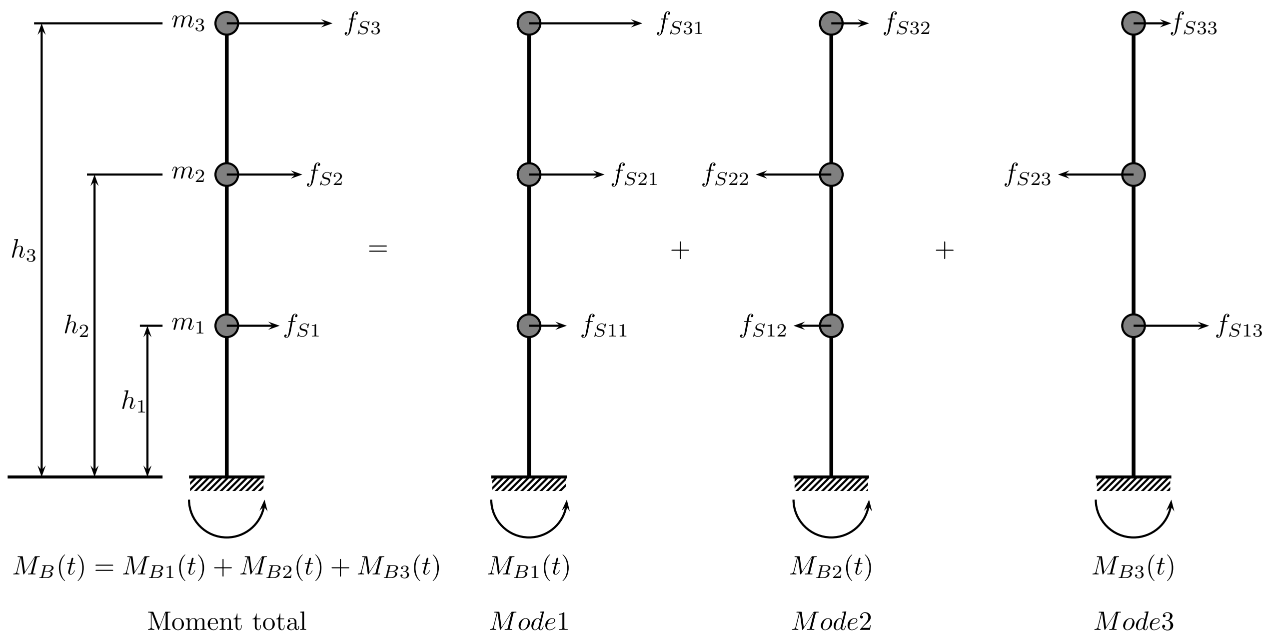


FIGURE 3.7 – Superposition des moments à la base pour un système à trois degrés de liberté

En tenant compte de l'équation (3.116), on obtient :

$$M_B(t) = \begin{Bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} f_{S11}(t) \\ f_{S21}(t) \\ \vdots \\ f_{Sn1}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{S12}(t) \\ f_{S22}(t) \\ \vdots \\ f_{Sn2}(t) \end{Bmatrix} + \cdots + \begin{Bmatrix} f_{S1n}(t) \\ f_{S2n}(t) \\ \vdots \\ f_{Snn}(t) \end{Bmatrix} \right) \tag{3.141}$$

De l'équation (3.141) on en déduit que le moment de renversement à la base $M_{Bi}(t)$ pour le mode est donnée par l'expression :

$$M_{Bi}(t) = \begin{Bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{S1i}(t) \\ f_{S2i}(t) \\ \vdots \\ f_{Sni}(t) \end{Bmatrix} = \{h\}^t \{f_S(t)\}_i \tag{3.142}$$

et que :

$$M_B(t) = M_{B1}(t) + M_{B2}(t) + \cdots + M_{Bn}(t) \tag{3.143}$$

avec $\{h\}^t = \{h_1 \; h_2 \; \dots \; h_n\}$ le vecteur des hauteurs des différents degrés de liberté du système. En substituant dans la relation (3.142) $\{f_S(t)\}_i$ par son expression donnée par l'équation (3.114), on obtient :

$$M_{Bi}(t) = \{h\}^t [M] \{\phi\}_i \Psi_i A_i(t) \tag{3.144}$$

En substituant (3.144) dans (3.143), on aboutit à :

$$\begin{aligned} M_B(t) &= \{h\}^t [M] \{\phi\}_1 \Psi_1 A_1(t) + \{h\}^t [M] \{\phi\}_2 \Psi_2 A_2(t) + \cdots + \{h\}^t [M] \{\phi\}_n \Psi_n A_n(t) \\ &= \{h\}^t [M] \Big(\{\phi\}_1 \Psi_1 A_1(t) + \{\phi\}_2 \Psi_2 A_2(t) + \cdots + \{\phi\}_n \Psi_n A_n(t) \Big) \\ \Longrightarrow \; M_B(t) &= \{h\}^t [M] \left(\begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \dots & \{\phi\}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_1 A_1(t) \\ \Psi_2 A_2(t) \\ \vdots \\ \Psi_n A_n(t) \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{3.145}$$

Sachant que : $\left[\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \ldots \quad \{\phi\}_n\right] = [\Phi]$ et que $\begin{Bmatrix} \Psi_1 A_1(t) \\ \Psi_2 A_2(t) \\ \vdots \\ \Psi_n A_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Psi_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Psi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ \vdots \\ A_n(t) \end{Bmatrix}$

Alors le moment total de renversement à la base devient :

$$M_B(t) = \{h\}^t[M][\Phi][\Psi]\{A(t)\} \tag{3.146}$$

Pour un mode donné i, le moment de renversement à la base peut s'écrire en fonction de l'effort tranchant à la base. Ainsi, en partant des équations (3.120), on a :

$$V_{Bi}(t) = \{r\}^t[M]\{\phi\}_i \Psi_i A_i(t) \qquad \Longrightarrow \Psi_i A_i(t) = \frac{V_{Bi}(t)}{\{r\}^t[M]\{\phi\}_i}$$

en remplaçant $\Psi_i A_i(t)$ par son expression précédente dans l'équation (3.144), on obtient :

$$M_{Bi}(t) = \{h\}^t[M]\{\phi\}_i \Psi_i A_i(t) = \{h\}^t[M]\{\phi\}_i \frac{V_{Bi}(t)}{\{r\}^t[M]\{\phi\}_i} = \frac{\{h\}^t[M]\{\phi\}_i}{\{r\}^t[M]\{\phi\}_i} V_{Bi}(t)$$

En posant

$$H_i = \frac{\{h\}^t[M]\{\phi\}_i}{\{r\}^t[M]\{\phi\}_i} \tag{3.147}$$

alors

$$M_{Bi}(t) = H_i V_{Bi}(t) \tag{3.148}$$

où la grandeur H_i, rapport des deux scalaires $\{h\}^t[M]\{\phi\}_i$ et $\{r\}^t[M]\{\phi\}_i$, ayant la dimension d'une longueur, représente le point d'application de la force $R_{Si}(t) = V_{Bi}(t)$ résultante des forces $f_{Sji}(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ appliquées aux différents degrés de liberté du mode i tel que illustré sur la figure 3.8.

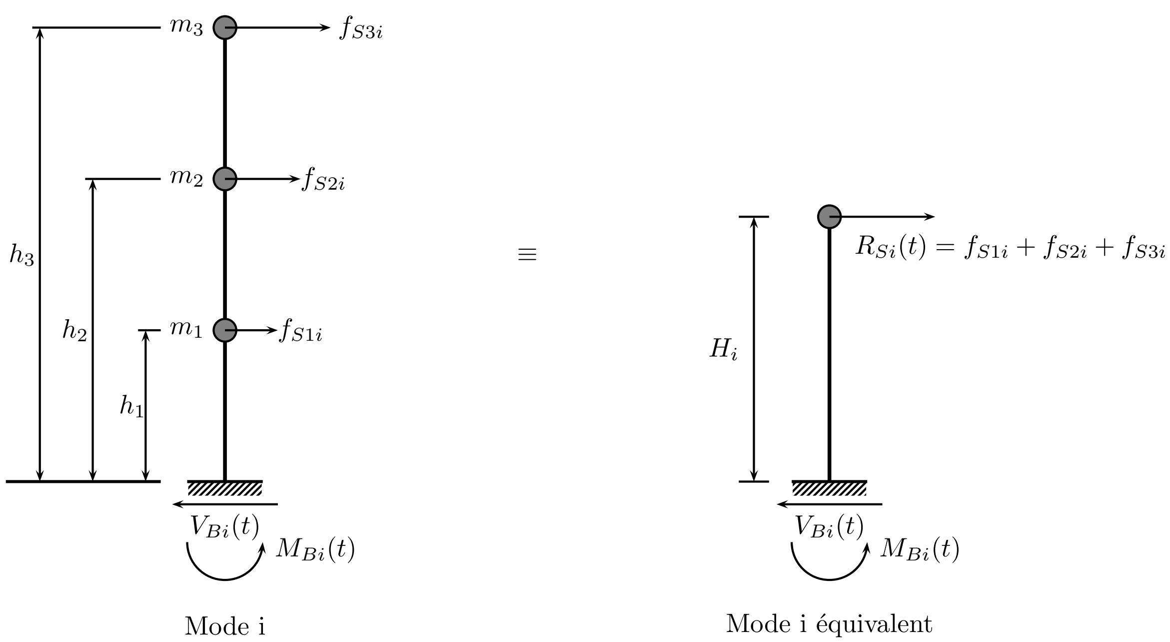


FIGURE 3.8 – Force résultante et sa position pour un mode i

Le moment de renversement total à la base $M_B(t)$ peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} M_B(t) &= M_{B1}(t) + M_{B2}(t) + \cdots + M_{Bn}(t) \\ &= H_1 V_{B1}(t) + H_2 V_{B2}(t) + \cdots + H_n V_{Bn}(t) \\ &= \begin{Bmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{B1}(t) \\ V_{B2}(t) \\ \vdots \\ V_{Bn}(t) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

3.6.2.6 Méthode de superposition modale spectrale

La réponse totale d'un système à plusieurs degrés de liberté, soumis à un tremblement de terre, en terme de déplacements et de forces est obtenue par la méthode de superposition modale. La réponse est exprimée en fonction du temps (historique). Lors du dimensionnement des structures seules les valeurs maximales sont retenues. Le système à plusieurs degrés de liberté étant décomposé, par analyse modale, en un ensemble de systèmes indépendants relatifs aux modes de vibration où chaque mode est équivalent à un système à un seul degré de liberté. La réponse totale maximale est donc obtenue par la combinaison des réponses maximales de chaque mode.
Il est donc nécessaire de déterminer les valeurs maximales modales pour les différents paramètres de la réponse : déplacement, forces élastiques, effort tranchant ou force de cisaillement à la base et moment de renversement à la base.

Déplacement modal maximum

En considérant l'équation (3.106), le déplacement maximum du mode i est telle que :

$$\{u\}_{i,max} = \underset{t}{max}\big(\{\phi\}_i z_i(t)\big) = \underset{t}{max}\big([\phi]_i \Psi_i D_i(t)\big) = \{\phi\}_i \Psi_i \underset{t}{max}\big(D_i(t)\big) \tag{3.149}$$

or en se référant aux équations (2.264) et (3.105), on a :

$$\underset{t}{max}\big(D_i(t)\big) = Sd(\xi_i, Ti) = Sd_i \tag{3.150}$$

où $Sd(\xi_i, Ti)$ qu'on note Sd_i représente la valeur spectrale du déplacement relatif du mode i. ξ_i et T_i sont le taux d'amortissement critique et la période du mode i.
Le déplacement maximum du mode i s'écrit donc :

$$\{u\}_{i,max} = \{\phi\}_i \Psi_i Sd_i \tag{3.151}$$

soit :

$$\{u\}_{i,max} = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ji} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} \Psi_i Sd_i \tag{3.152}$$

Le déplacement maximum d'un degré de liberté j dans le mode i s'écrit :

$$u_{ji,max} = \phi_{ji} \Psi_i Sd_i \tag{3.153}$$

Forces élastiques maximales modales

D'après l'équation (3.114), la valeur maximale de la force élastique relative au mode i est donnée par la relation :

$$\{f_S\}_{i,max} = \underset{t}{max}\Big([M]\{\phi\}_i \Psi_i A_i(t)\Big) = [M]\{\phi\}_i \Psi_i \underset{t}{max}\Big(A_i(t)\Big) \tag{3.154}$$

Compte tenu des équations (2.269) et (3.113), la quantité $\underset{t}{max}\,(A_i(t))$ est la pseudo accélération spectrale relatif au mode i notée Sa_i, telle que :

$$Sa_i = \underset{t}{max}\big(A_i(t)\big) = Sa(\xi_i, T_i) \tag{3.155}$$

Ainsi, la force élastique relative au mode i s'écrit :

$$\{f_S\}_{i,max} = [M][\phi]_i \Psi_i Sa_i \tag{3.156}$$

Sous forme développée :

$$\{f_S\}_{i,max} = \begin{Bmatrix} f_{S1i,max} \\ f_{S2i,max} \\ \vdots \\ f_{Sji,max} \\ \vdots \\ f_{Sni,max} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ji} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} \Psi_i Sa_i \tag{3.157}$$

Ce qui donne pour un degré de liberté j dans le mode i :

$$f_{Sji,max} = m_j \phi_{ji} \Psi_i Sa_i \tag{3.158}$$

Sachant d'après l'équation (2.272) que :

$$Sa_i = \omega_i^2 Sd_i \tag{3.159}$$

La valeur maximale de la force élastique relative au mode i s'écrit aussi sous la forme :

$$\{f_S\}_{i,max} = [M][\phi]_i \Psi_i \omega_i^2 Sd_i \tag{3.160}$$

Effort tranchant ou force de cisaillement maximum à la base pour un mode i

Pour un mode i, l'effort tranchant (ou force de cisaillement) $V_{Bi,max}$ à la base est donné (e) par la relation :

$$\begin{aligned} V_{Bi,max} &= f_{S1i,max} + f_{S2i,max} + \cdots + f_{Sji,max} + \cdots + f_{Sni,max} \\ &= \{r\}^t \{f_S\}_{i,max} \end{aligned} \tag{3.161}$$

En introduisant (3.156), on obtient :

$$V_{Bi,max} = \{r\}^t [M]\{\phi\}_i \Psi_i Sa_i \tag{3.162}$$

On peut aussi obtenir l'expression (3.162) directement à partir de l'équation (3.121) qui décrit la variation temporelle (historique) de l'effort tranchant à la base du mode i. En effet :

$$V_{Bi,max} = \max_t \Big(\{r\}^t [M]\{\phi\}_i \Psi_i A_i(t)\Big) = \{r\}^t [M]\{\phi\}_i \Psi_i \max_t \Big(A_i(t)\Big) = \{r\}^t [M]\{\phi\}_i \Psi_i Sa_i$$

Comme le scalaire $\{r\}^t[M]\{\phi\}_i = \Big(\{r\}^t[M]\{\phi\}_i\Big)^t = \{\phi\}_i^t[M]\{r\}$ et d'après l'équation (3.100) $\{\phi\}_i^t[M]\{r\} = m_i^* \Psi_i$, alors :

$$V_{Bi,max} = m_i^* \Psi_i^2 Sa_i \tag{3.163}$$

soit du fait que $m_i^* \Psi_i^2 = m_{eff\,i}$ (masse effective du mode i) :

$$V_{Bi,max} = m_{eff\,i} Sa_i \tag{3.164}$$

ou encore en tenant compte de (3.134) :

$$V_{Bi,max} = M_{tot} L_i Sa_i \tag{3.165}$$

Moment de renversement à la base pour un mode i

Le moment de renversement à la base pour un mode donné i, s'écrit :

$$M_{Bi,max} = \begin{Bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{S1i,max} \\ f_{S2i,max} \\ \vdots \\ f_{Sni,max} \end{Bmatrix} = \{h\}^t \{f_S\}_{i,max} \tag{3.166}$$

Soit en introduisant (3.156) :

$$M_{Bi,max} = \{h\}^t [M][\phi]_i \Psi_i Sa_i \tag{3.167}$$

L'équation (3.144) fournit également la même expression en écrivant :

$$\begin{aligned} M_{Bi,max} &= \max_t \Big(M_{Bi}(t) \Big) \\ &= \max_t \Big(\{h\}^t [M]\{\phi\}_i \Psi_i A_i(t) \Big) \\ &= \{h\}^t [M]\{\phi\}_i \Psi_i \max_t \Big(A_i(t) \Big) \\ &= \{h\}^t [M]\{\phi\}_i \Psi_i Sa_i \end{aligned}$$

Superposition des réponses modales spectrales

En utilisant la méthode du spectre de réponse pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté, la réponse maximale est obtenue individuellement pour chaque mode de l'ensemble de modes utilisés pour représenter la réponse. La question se pose alors de savoir comment ces valeurs modales maximales doivent être combinées afin d'obtenir la meilleure estimation de la réponse totale maximale.

Les équations à réponse modale telles que les équations (3.107) et (3.115) fournissent des résultats précis uniquement quand elles sont évaluées simultanément dans le temps. Dans l'approche basée sur les spectres de réponse, le temps est éliminé de ces équations et seules les valeurs maximales modales son considérées.
Ces valeurs de réponse maximales pour les modes individuels ne peuvent pas se produire en même temps ; par conséquent, un moyen doit être trouvé pour combiner les maxima modaux de manière à approximer la réponse totale maximale. A cet effet, trois approches ont été préconisées pour combiner les réponses modales :

a) Somme des valeurs absolues (SVA) :

La valeur maximale totale pour une réponse donnée est obtenue par la somme arithmétique des valeurs maximales de chaque mode.
Ainsi le vecteur des déplacements totaux s'écrit :

$$\{u\}_{max} = \{u\}_{1,max} + \{u\}_{2,max} + \cdots + \{u\}_{i,max} + \cdots + \{u\}_{n,max} \tag{3.168}$$

En remplaçant l'équation (3.151) dans (3.161), on obtient :

$$\begin{aligned}
\{u\}_{max} &= \{\phi\}_1\Psi_1 Sd_1 + \{\phi\}_2\Psi_2 Sd_2 + \cdots + \{\phi\}_i\Psi_i Sd_i + \cdots + \{\phi\}_n\Psi_n Sd_n \\
&= \begin{bmatrix}\{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \ldots & \{\phi\}_i & \ldots & \{\phi\}_n\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\Psi_1 Sd_1 \\ \Psi_2 Sd_2 \\ \vdots \\ \Psi_i Sd_i \\ \vdots \\ \Psi_n Sd_n\end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \ldots & \{\phi\}_i & \ldots & \{\phi\}_n\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\Psi_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Psi_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Psi_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \Psi_n\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}Sd_1 \\ Sd_2 \\ \vdots \\ Sd_i \\ \vdots \\ Sd_n\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.169}$$

ce qui donne sous forme condensée :

$$\{u\}_{max} = [\Phi][\Psi]\{Sd\} \tag{3.170}$$

avec $\{Sd\}^t = \begin{Bmatrix}Sd_1 & Sd_2 & \ldots & Sd_i & \ldots & Sd_n\end{Bmatrix}$ est le vecteur des pseudo-déplacements des différents modes qui représentent les valeurs maximales des déplacements de chaque mode.
Sous forme développée on a :

$$\{u\}_{max} = \begin{Bmatrix}u_{1,max} \\ u_{2,max} \\ \vdots \\ u_{j,max} \\ \vdots \\ u_{n,max}\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix}u_{11,max} \\ u_{21,max} \\ \vdots \\ u_{j1,max} \\ \vdots \\ u_{n1,max}\end{Bmatrix}}_{\text{mode 1}} + \underbrace{\begin{Bmatrix}u_{12,max} \\ u_{22,max} \\ \vdots \\ u_{j2,max} \\ \vdots \\ u_{n2,max}\end{Bmatrix}}_{\text{mode 2}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix}u_{1i,max} \\ u_{2i,max} \\ \vdots \\ u_{ji,max} \\ \vdots \\ u_{ni,max}\end{Bmatrix}}_{\text{mode i}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix}u_{1n,max} \\ u_{2n,max} \\ \vdots \\ u_{jn,max} \\ \vdots \\ u_{nn,max}\end{Bmatrix}}_{\text{mode n}} \tag{3.171}$$

En tenant compte de l'équation (3.152), on obtient :

$$\begin{aligned}
\{u\}_{max} &= \begin{Bmatrix}u_{1,max} \\ u_{2,max} \\ \vdots \\ u_{j,max} \\ \vdots \\ u_{n,max}\end{Bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{Bmatrix}\phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{j1} \\ \vdots \\ \phi_{n1}\end{Bmatrix} \Psi_1 Sd_1}_{\text{mode 1}} + \underbrace{\begin{Bmatrix}\phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{j2} \\ \vdots \\ \phi_{n2}\end{Bmatrix} \Psi_2 Sd_2}_{\text{mode 2}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix}\phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ji} \\ \vdots \\ \phi_{ni}\end{Bmatrix} \Psi_i Sd_i}_{\text{mode i}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix}\phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \\ \phi_{jn} \\ \vdots \\ \phi_{nn}\end{Bmatrix} \Psi_n Sd_n}_{\text{mode n}}
\end{aligned} \tag{3.172}$$

Donc pour un degré de liberté j, le déplacement total maximum, $u_{j,max}$, est donnée par la relation :

$$u_{j,max} = \phi_{j1}\Psi_1 Sd_1 + \phi_{j2}\Psi_2 Sd_2 + \cdots + \phi_{ji}\Psi_i Sd_i + \cdots + \phi_{jn}\Psi_n Sd_n = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ji}\Psi_i Sd_i \quad (3.173)$$

Le vecteur de la force élastique totale maximale, $\{f_S\}_{max}$, s'écrit dans ce cas :

$$\{f_S\}_{max} = \{f_S\}_{1,max} + \{f_S\}_{2,max} + \cdots + \{f_S\}_{i,max} + \cdots + \{f_S\}_{n,max} \quad (3.174)$$

Soit sous forme développée :

$$\begin{aligned} \{f_S\}_{max} &= \begin{Bmatrix} f_{S1,max} \\ f_{S2,max} \\ \vdots \\ f_{Sj,max} \\ \vdots \\ f_{Sn,max} \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{S11,max} \\ f_{S21,max} \\ \vdots \\ f_{Sj1,max} \\ \vdots \\ f_{Sn1,max} \end{Bmatrix}}_{\text{mode1}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{S12,max} \\ f_{S22,max} \\ \vdots \\ f_{Sj2,max} \\ \vdots \\ f_{Sn2,max} \end{Bmatrix}}_{\text{mode2}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{S1i,max} \\ f_{S2i,max} \\ \vdots \\ f_{Sji,max} \\ \vdots \\ f_{Sni,max} \end{Bmatrix}}_{\text{mode i}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{S1n,max} \\ f_{S2n,max} \\ \vdots \\ f_{Sjn,max} \\ \vdots \\ f_{Snn,max} \end{Bmatrix}}_{\text{mode n}} \end{aligned} \quad (3.175)$$

Ce qui mène à écrire pour la composante j relative au degré de liberté j dans le mode i :

$$f_{Sj,max} = f_{Sj1,max} + f_{Sj2,max} + \cdots + f_{Sji,max} + \cdots + f_{Sjn,max} \quad (3.176)$$

En tenant compte de l'expression (3.158), on obtient :

$$\begin{aligned} f_{Sj,max} &= m_j\phi_{j1}\Psi_1 Sa_1 + m_j\phi_{j2}\Psi_2 Sa_2 + \cdots + m_j\phi_{ji}\Psi_i Sa_i + \cdots + m_j\phi_{jn}\Psi_n Sa_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_j\phi_{ji}\Psi_i Sa_i \end{aligned} \quad (3.177)$$

Ainsi, le vecteur des forces élastiques totales s'écrit sous forme développée :

$$\{f_S\}_{max} = \begin{Bmatrix} f_{S1,max} \\ f_{S2,max} \\ \vdots \\ f_{Sj,max} \\ \vdots \\ f_{Sn,max} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} m_1\phi_{11} \\ m_2\phi_{21} \\ \vdots \\ m_j\phi_{j1} \\ \vdots \\ m_n\phi_{n1} \end{Bmatrix} \Psi_1 Sa_1}_{\text{mode 1}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} m_1\phi_{12} \\ m_2\phi_{22} \\ \vdots \\ m_j\phi_{j2} \\ \vdots \\ m_n\phi_{n2} \end{Bmatrix} \Psi_2 Sa_2}_{\text{mode 2}} + \cdots + \underbrace{\begin{Bmatrix} m_1\phi_{1i} \\ m_2\phi_{2i} \\ \vdots \\ m_j\phi_{ji} \\ \vdots \\ m_n\phi_{ni} \end{Bmatrix} \Psi_i Sa_i}_{\text{mode i}} + \ldots$$

$$+ \underbrace{\begin{Bmatrix} m_1\phi_{1n} \\ m_2\phi_{2n} \\ \vdots \\ m_j\phi_{jn} \\ \vdots \\ m_n\phi_{nn} \end{Bmatrix} \Psi_n Sa_n}_{\text{mode n}} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_1\phi_{1i}\Psi_i Sa_i \\ \sum_{i=1}^{n} m_2\phi_{2i}\Psi_i Sa_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} m_j\phi_{ji}\Psi_i Sa_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} m_n\phi_{ni}\Psi_i Sa_i \end{Bmatrix} \tag{3.178}$$

La force de cisaillement maximale ou l'effort tranchant maximum à la base s'écrit :

$$V_{Bmax} = V_{B1,max} + V_{B2,max} + \cdots + V_{Bi,max} + \cdots + V_{Bn,max} \tag{3.179}$$

En tenant compte de (3.165), l'effort tranchant maximum s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{Bmax} &= M_{tot}L_1Sa_1 + M_{tot}L_2Sa_2 + \cdots + M_{tot}L_iSa_i + \cdots + M_{tot}L_nSa_n \\ &= M_{tot}\Big(L_1Sa_1 + L_2Sa_2 + \cdots + L_iSa_i + \cdots + L_nSa_n\Big) \\ &= M_{tot}\begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & \ldots & L_i & \ldots & L_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Sa_1 \\ Sa_2 \\ \vdots \\ Sa_i \\ \vdots \\ Sa_n \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Soit :

$$V_{Bmax} = M_{tot}\{L\}^t\{Sa\} \tag{3.180}$$

L'effort tranchant maximum à la base V_{Bmax} peut être obtenu autrement en écrivant son équilibre statique avec les composantes du vecteur des forces élastiques maximales $\{f_S\}_{max}$:

$$\begin{aligned} V_{Bmax} &= f_{S1,max} + f_{S2,max} + \cdots + f_{Si,max} + \cdots + f_{Sn,max} \\ &= \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{S1,max} \\ f_{S2,max} \\ \vdots \\ f_{Sj,max} \\ \vdots \\ f_{Sn,max} \end{Bmatrix} = \{r\}^t\{f_S\}_{max} \end{aligned} \tag{3.181}$$

En considérant l'équation (3.162), l'effort tranchant à la base est donnée par la relation :

$$\begin{aligned}
V_{Bmax} &= \{r\}^t[M][\phi]_1\Psi_1 Sa_1 + \{r\}^t[M][\phi]_2\Psi_2 Sa_2 + \dots + \{r\}^t[M][\phi]_i\Psi_i Sa_i + \dots + \{r\}^t[M][\phi]_n\Psi_n Sa_n \\
&= \{r\}^t[M]\Big([\phi]_1\Psi_1 Sa_1 + [\phi]_2\Psi_2 Sa_2 + \dots + [\phi]_i\Psi_i Sa_i + \dots + [\phi]_n\Psi_n Sa_n\Big) \\
&= \{r\}^t[M]\begin{bmatrix}[\phi]_1 & [\phi]_2 & \dots & [\phi]_i & \dots & [\phi]_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Psi_1 Sa_1\\ \Psi_2 Sa_2\\ \vdots\\ \Psi_i Sa_i\\ \vdots\\ \Psi_n Sa_n\end{Bmatrix} \\
&= \{r\}^t[M]\begin{bmatrix}[\phi]_1 & [\phi]_2 & \dots & [\phi]_i & \dots & [\phi]_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & \Psi_2 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \Psi_i & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \Psi_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Sa_1\\ Sa_2\\ \vdots\\ Sa_i\\ \vdots\\ Sa_n\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.182}$$

soit sous forme condensée :

$$V_{Bmax} = \{r\}^t[M][\Phi][\Psi]\{Sa\} \tag{3.183}$$

Si on se réfère à l'équation (3.178), l'effort tranchant maximum à la base est donné par la relation :

$$\begin{aligned}
V_{Bmax} &= \sum_{i=1}^{n} m_1\phi_{1i}\Psi_i Sa_i + \sum_{i=1}^{n} m_2\phi_{2i}\Psi_i Sa_i + \dots + \sum_{i=1}^{n} m_j\phi_{ji}\Psi_i Sa_i + \dots + \sum_{i=1}^{n} m_n\phi_{ni}\Psi_i Sa_i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_j\phi_{ji}\Psi_i Sa_i
\end{aligned} \tag{3.184}$$

Le moment de renversement total maximum à la base M_{Bmax} est obtenu en sommant les valeurs absolues des valeurs maximales modales :

$$M_{Bmax} = M_{B1,max} + M_{B2,max} + \dots + M_{Bi,max} + \dots + M_{Bn,max} \tag{3.185}$$

Comme le moment de reversement maximum à la base pour un mode quelconque i est tel que indiqué par l'équation (3.167), alors :

$$\begin{aligned} M_{Bmax} &= \{h\}^t[M][\phi]_1\Psi_1 Sa_1 + \{h\}^t[M][\phi]_2\Psi_2 Sa_2 + \cdots + \{h\}^t[M][\phi]_i\Psi_i Sa_i + \cdots + \{h\}^t[M][\phi]_n\Psi_n Sa_n \\ &= \{h\}^t[M]\Big([\phi]_1\Psi_1 Sa_1 + [\phi]_2\Psi_2 Sa_2 + \cdots + [\phi]_i\Psi_i Sa_i + \cdots + [\phi]_n\Psi_n Sa_n\Big) \\ &= \{h\}^t[M]\left[\phi]_1 \quad \phi]_2 \quad \ldots \quad \phi]_i \quad \ldots \quad \phi]_n\right] \begin{Bmatrix} \Psi_1 Sa_i \\ \Psi_2 Sa_i \\ \vdots \\ \Psi_i Sa_i \\ \vdots \\ \Psi_n Sa_i \end{Bmatrix} \\ &= \{h\}^t[M]\left[\phi]_1 \quad \phi]_2 \quad \ldots \quad \phi]_i \quad \ldots \quad \phi]_n\right] \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Psi_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Psi_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \Psi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Sa_i \\ Sa_i \\ \vdots \\ Sa_i \\ \vdots \\ Sa_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{3.186}$$

Ce qui donne :

$$M_{Bmax} = \{h\}^t[M][\Phi][\Psi]\{Sa\} \tag{3.187}$$

La méthode de combinaison des modes basée sur la somme des valeurs absolues des valeurs modales maximales fournit, pour une réponse donnée, une limite supérieure. Elle suppose que les réponses modales atteignent leurs maximums au même moment, alors que ce n'est pas le cas. C'est une méthode très conservatrice qui mène à des surestimations lors du dimensionnement des structures.
Cette méthode est aussitôt abandonnée au profit d'autres méthodes basées sur des considérations statistiques et qui fournissent des valeurs plus raisonnables et plus réalistes. Parmi ces approches on cite la méthode SRSS (Square Root of the Sum of the Squares) ou la méthode de la racine carrée de la somme des carrées et la méthode CQC (Complete quadratique combination) ou la méthode de la combinaison quadratique complète.

b) Combinaison quadratique ou SRSS :

C'est une méthode statistique qui considère que les valeurs modales maximales dans chaque mode individuel sont statistiquement ***indépendantes*** et aléatoirement en phase.
Dans ce cas la réponse maximale totale est telle que :

$$R_{max} = \sqrt{R^2_{1,max} + R^2_{2,max} + \cdots + R^2_{i,max} + \cdots + R^2_{n,max}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} R^2_{i,max}} \tag{3.188}$$

Dans le cas où deux fréquences modales sont étroitement espacées, alors les deux modes sont couplés et la réponse due aux deux modes est ***dépendante***.
Généralement (sauf prescription d'un règlement), deux modes i et j sont réputés dépendants si la différence entre leurs fréquences propres est à moins de 10% de la plus petite des deux.
En effet, dans la pratique les résultats donnés par SRSS ne sont pas acceptables si :

$$\frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_i} < 0.1 \qquad (1 \leq i \leq j \leq n) \tag{3.189}$$

Dans ce cas, la méthode SRSS peut être modifiée en utilisant la somme des valeurs absolues de tous les modes dont les fréquences propres sont espacées de moins de 10% et SRSS pour tous les autres modes :

$$R_{max} = \sqrt{R_{1,max}^2 + R_{2,max}^2 + \cdots + (R_{i,max} + R_{j,max})^2 + \cdots + R_{n,max}^2} \tag{3.190}$$

Le RPA 99 V2003 considère deux modes i et j comme dépendants si :

$$r = \frac{T_i}{T_j} \leq \frac{10}{10 + \sqrt{\xi_i \xi_j}} \qquad \text{avec} \quad T_i \leq T_j \tag{3.191}$$

c) Combinaison quadratique complète ou CQC :

Quand les fréquences des différents modes sont proches, la méthode SRSS ne donne pas des résultats raisonnables et elle est remplacée par la méthode CQC qui surmonte les limitations de la méthode SRSS en incluant les contributions intermodales. La réponse est donnée la relation :

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} R_i R_j} \tag{3.192}$$

où ρ_{ij} est le coefficient de corrélation entre les mode i et j tel que :

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j}\,(\xi_i + r\xi_j)\, r^{\frac{3}{2}}}{(1 - r^2) + 4\xi_i \xi_j r\,(1 + r^2) + 4\left(\xi_i^2 + \xi_j^2\right) r^2} \tag{3.193}$$

avec ξ_i et ξ_j taux d'amortissement critique des modes i et j et $r = \dfrac{\omega_i}{\omega_j}$.
ρ_{ij} est tel que : $0 \leq \rho_{ij} \leq 1$ et $\rho_{ij} = 1$ pour $i = j$.

ρ_{ij} est tel que : $0 \leq \rho_{ij} \leq 1$ et $\rho_{ij} = 1$ pour $i = j$.
Pour un amortissement critique modal constant ($\xi_i = \xi_j = \xi$) alors :

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2\,(1 + r)\, r^{\frac{3}{2}}}{(1 - r^2)^2 + 4\xi^2 r\,(1 + r)^2} \tag{3.194}$$

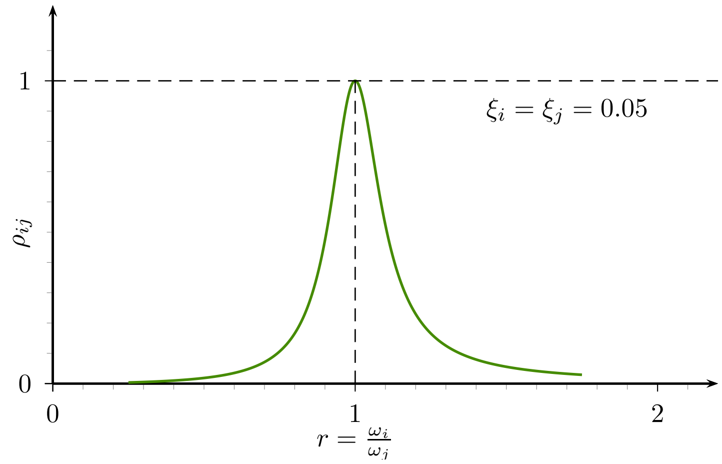
La réponse obtenue par la méthode CQC peut s'écrire :

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} R_i R_j}_{i \neq j}} \tag{3.195}$$

Le second terme ($i \neq j$) représente l'effet de la corrélation entre les valeurs maximales des réponses modales à travers le coefficient de corrélation ρ_{ij}.
Il apparait ainsi que la méthode CQC inclut la méthode $SRSS$.
En effet pour des fréquences bien séparées (r s'éloigne de l'unité) la valeur de ρ_{ij} décroit rapidement en tendant vers 0 rapprochant ainsi la relation CQC de la relation $SRSS$.

d) Nombre de modes retenus dans la méthode de superposition spectrale

Le nombre total des modes représente le nombre de degrés de liberté dans le modèle. Pour une solution complète, tous les modes sont à inclure. Cependant, en raison des difficultés liées à la taille des problèmes étudiés et le temps de calcul seuls un nombre réduits de modes est



retenu dans l'estimation de la réponse.
En général, le nombre de mode à considérer doit être suffisant pour assurer que tous les modes restants n'apportent pas une contribution de plus de 10% dans la réponse totale.
Les règles parasismiques Algériennes RPA 99/Version 2003 préconisent un nombre de modes qui mobilise une masse effective cumulée supérieure ou égale à 90% de la masse totale ou qui permet la prise en compte de tous les modes dont la masse modale effective est supérieure à 5% de la masse totale de la structure.
Dans le cas où l'influence des modes de torsion est importante, le RPA 99/ V2003 préconise un nombre minimum de modes supérieur ou égale à $3\sqrt{N}$ (N étant le nombre de niveaux au dessus du sol) et que les modes retenus ont une période inférieure ou égale à $0.20\,s$. Le nombre minimum ne peut être inférieur à trois.

3.7 Exercices

Exercice 1

Soit la structure plane représentée sur la figure (3.9a) où les poutres horizontales sont considérées infiniment rigides et que les masses sont concentrées à leurs centres. La structure est ainsi idéalisée par un système à deux degrés de liberté comme indiqué sur la figure (3.9b).

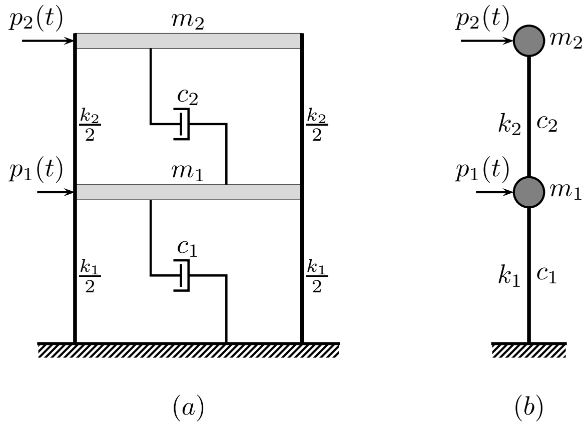


FIGURE 3.9 – Système à deux degrés de liberté

On donne : $m_1 = 400\ kg, \quad m_2 = 200\ kg, \quad k_1 = 2 \times 10^5\ N/m, \quad \text{et} \quad k_2 = 10^5\ N/m.$

1. Calculer les fréquences et les modes propres.
2. Dessiner l'allure des déformation du système pour chaque mode.
3. Normaliser les modes propres et déduire la matrice modale normalisée.

Exercice 2

La structure de la figure (3.9) non-amortie ($c_1 = c_2 = 0$),initialement au repos et soumise soudainement à une charge constante $[P(t)]$ telle que :

$$[P(t)] = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix} f(t) \qquad avec \qquad f(t) = \begin{cases} 1 & pour \quad t \geq 0 \\ 0 & pour \quad t < 0 \end{cases}$$

où $f(t)$ est une fonction, appelée fonction échelon, donnée par la figure (3.10).

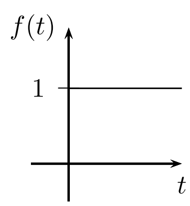


FIGURE 3.10 – Fonction échelon $f(t) = 1$

Par la méthode de la superposition modale, calculer :

1. les déplacements des deux degrés de liberté
2. les forces élastiques auxquelles sont soumises les degrés de liberté.
3. la force appliquée à la base de la structure.

Exercice 3

On considère la même structure de l'exercice 2 mais avec un amortissement définie par : $c_1 = 800\ N.s/m$ et $c_2 = 400\ N.s/m$.

1. Répondre aux mêmes questions de l'exercice 2.

Exercice 4

En donnant le spectre de réponse de calcul selon le RPA99-V2003, calculer la force V_{max} à la base de la structure de l'exercice 3.

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$