UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication

Département d'Informatique et de Technologies de l'Information

Domaine : Infomatique
Option : Master Informatique Fondamentale
Module : Logique et fondements de l'informatique 2 (LFI2)

la Machine de turing

Présente par: Dr. Nour El Houda Sayah Ben Aissa

Année universitaire : 2024-2025

Introduction : Machine de Turing et Problème de la Décidabilité

Les 23 problèmes de Hilbert (1900):

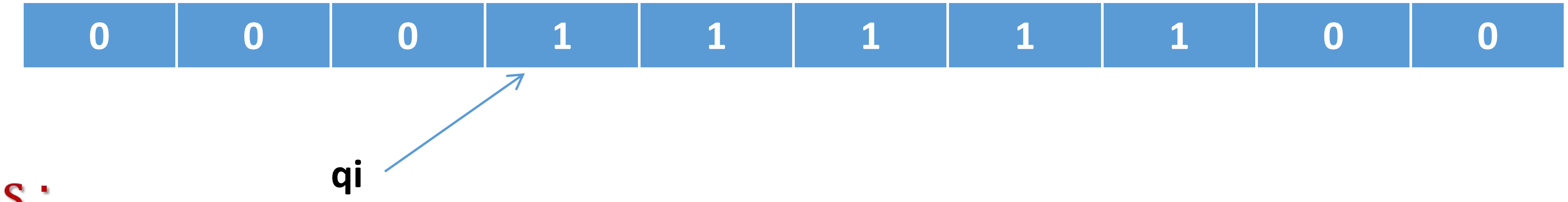
- **le problème de la décidabilité (Entscheidungsproblem):** Existe-t-il un algorithme universel permettant de déterminer si une proposition mathématique est vraie ou fausse ?
- **Objectif :** Formaliser les fondements des mathématiques et automatiser le raisonnement logique.

✓ Réponse d'Alan Turing (1936) :

- **Publication:** "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem"
- **Résultat fondamental:** Le problème de la décidabilité est **indécidable** : il n'existe aucune machine (ni algorithme universel) capable de résoudre tous les problèmes mathématiques.

La Machine de Turing : Un Modèle Abstrait

- Concept :
  - Machine **imaginaire** composée d'un ruban infini, d'une tête de lecture/écriture et d'un ensemble fini d'états.
  - Exécute des opérations élémentaires (déplacement, lecture, écriture) selon une table de règles.



- Motivations :
  - Définir la calculabilité: Une fonction est calculable si une machine de Turing peut la résoudre.
  - Unifier les modèles de calcul: Équivalence avec les fonctions récursives (Church-Turing).

Description Formelle d'une MT

Une Machine de Turing est un modèle abstrait de calcul, défini par un triplet : MT = (S, E, I)

1. Alphabet de symboles (S): Ensemble fini de symboles utilisés sur le ruban.

- Exemple général : $S = \{S_0, S_1, S_2, ..., S_n\}$
- Symboles spéciaux :
    - S_0 : symbole blanc (souvent noté 0)
    - S_1 : symbole barre (souvent noté 1)

2. États internes (E): Ensemble fini d'états fque peut prendre la machine pour contrôler ses actions.

- Exemple général : $E = \{q_0, q_1, ..., qf\}$
- États particuliers :
    - q_0 : état initial (début de l'exécution)
    - qf : état final (arrêt de la machine)

3. Instructions (I): Les instructions sont des règles d'action de la machine. Elles indiquent, selon le symbole lu et l'état courant, quoi faire :

- Lire un symbole ,Écrire un nouveau symbole
- Se déplacer : → : vers la droite, ← : vers la gauche
- Changer d'état.

Fonctionnement d'une MT

- Syntaxe générale :

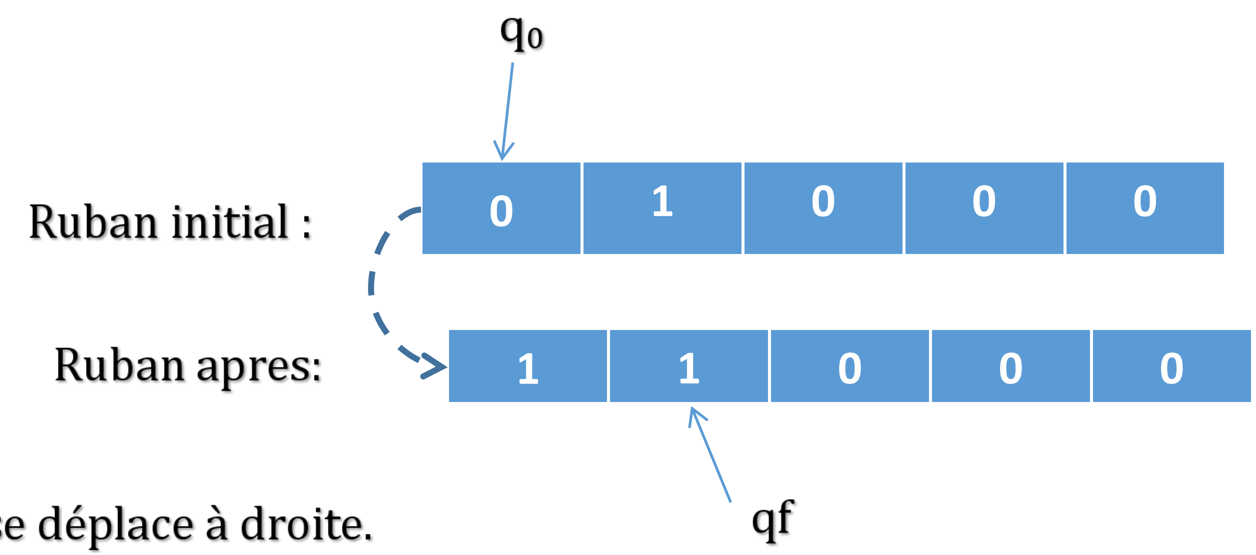
$$(q_i, S_j) \rightarrow (q_k, S_l, \text{direction})$$

➢ Cela signifie si la machine est dans l'état q_i Et lit le symbole S_j sur le ruban Alors elle :

1. Passe à l'état q_k
2. Écrit le symbole S_l à la place de S_j
3. Se déplace d'une case à gauche (←) ou à droite (→)

Exemple concret :
Machine Turing pour inverser un bit

- <u>Alphabets et états :</u>
  - Symboles : $S = \{0, 1\}$
  - États : $E = \{q_0, qf\}$



- <u>Instructions :</u>

1. $(q_0, 0) \rightarrow (qf, 1, \rightarrow)$

   ↳ Si elle lit 0, elle écrit 1, va à l'état final et se déplace à droite.

2. $(q_0, 1) \rightarrow (qf, 0, \rightarrow)$

   ↳ Si elle lit 1, elle écrit 0, va à l'état final et se déplace à droite.

Déplacement à Gauche

- Ruban : Séquence de symboles (exemple : 0 0 0 S_i 1 1 1 1 1 0 0 0)
- Tête de lecture/écriture : Positionnée sur le symbole S_i
- État courant : q_i (état interne de la MT)
- Format de la règle : $(q_i, S_i) \rightarrow (q_t, \leftarrow)$
- Signification:
    - Si la MT est dans l'état qj et lit le symbole Si,
    - Alors elle se déplace d'une case à gauche,
    - Et passe dans le nouvel état qt.

Exécution pas à pas sur le ruban

Définition de la machine MT1

- Alphabet (S) : {0, 1}
- États (E) : {q_0, q_1, q_f}

- ## États spéciaux:
  - q_0 :État initial,
  - q_f : État final (acceptant)

- ## Instructions (I):
  - q_0 1 G q_1 == (q_0, 1) → (q_1, ←)
  - q_1 0 1 q_f == (q_0, 0) → (q_f, 1)

a. $q_0$11

Étape 1:

0	0	0	1	1	0	0	0	0	0

q_0

Étape 2:

0	0	0	1	1	0	0	0	0	0

q_1

Étape 3:

0	0	1	1	1	0	0	0	0	0

q_f

Exécution pas à pas sur le ruban

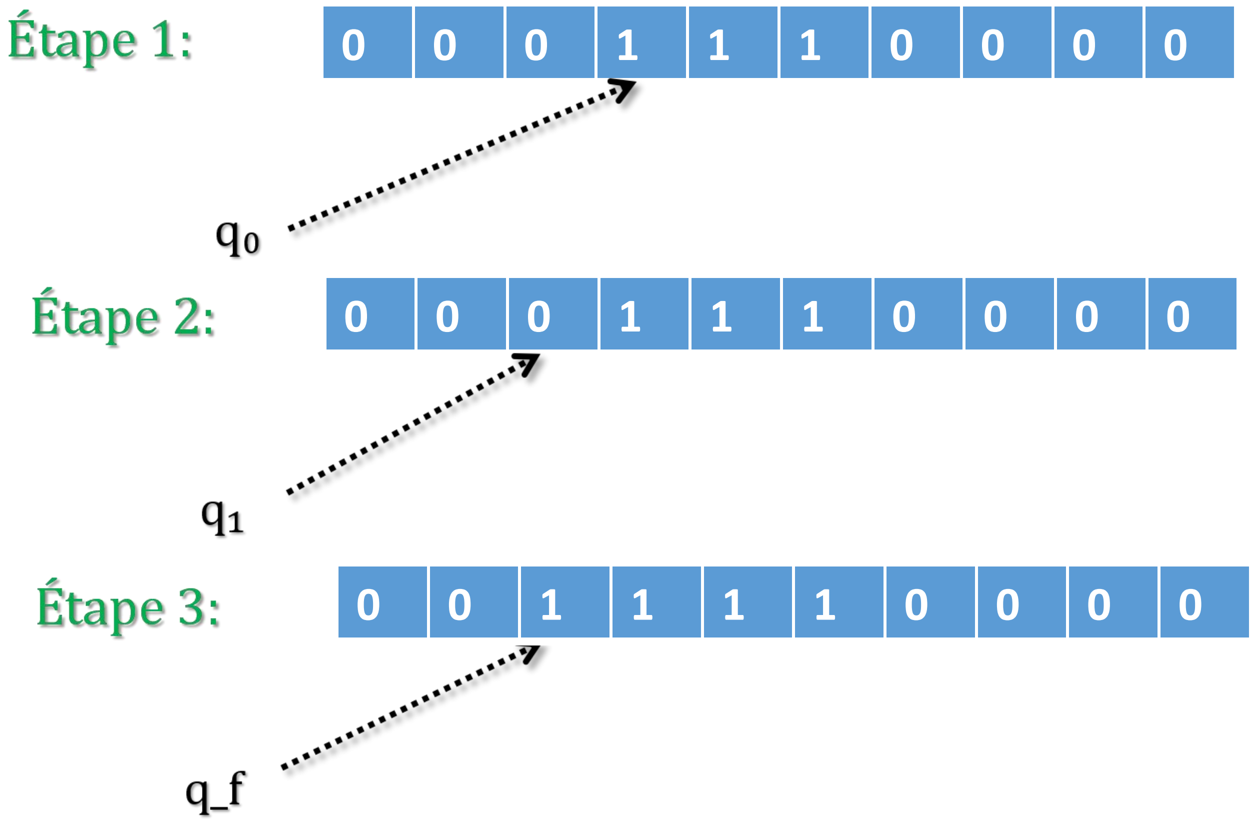
Définition de la machine MT1

- Alphabet (S) : {0, 1}
- États (E) : {q_0, q_1, q_f}

- **États spéciaux:**
  - q_0 :État initial,
  - q_f : État final (acceptant)

- **Instructions (I):**
  - q_0 1 G q_1 == $(q_0, 1) \rightarrow (q_1, \leftarrow)$
  - q_1 0 1 q_f == $(q_0, 0) \rightarrow$ (q_f, 1)

b. $q_0$111



🧠 Que fait cette machine de Turing ?

- 🔁 Comportement :
  - Q_0, 11 → Qf, 111
  - Q_0, 111 → Qf, 1111

➡ Elle calcule le successeur de la valeur initiale

Représentation des Entiers Naturels

📌 **Symboles utilisés :**

- 1 : représente une unité (valeur)
- 0 : joue le rôle de séparateur ou blanc

📐**Encodage d'un entier X:** Un entier X est noté $\underline{X}$ et représenté par X + 1 symboles.

Entier	Encodage (sur le ruban)	Formule
$\underline{0}$	… 0 0 0 1 0 0 0 …	$1^1 = 1$
$\underline{1}$	… 0 0 0 1 1 0 0 0 …	$1^2 = 2$
$\underline{2}$	… 0 0 0 1 1 1 0 0 0 …	$1^3 = 3$
$\underline{X}$	… 0 0 0 1^(X+1) 0 0 0 …	1^(X+1)

Représentation des n-uplets sur une MT

Notation :

- Pour un couple : $(n, m) =_{(def)} \underline{n} * \underline{m} = 1^{n+1} * 1^{m+1}$
- Pour un n-uplet : $(n_1, n_2, \ldots, n_p) =_{(def)} \underline{n_1} * \underline{n_2} * \ldots * \underline{n_p} = 1^{n1+1} * 1^{n2+1} * \ldots * 1^{np+1}$

Exemples :

- $(0, 1) =_{(def)} \underline{0} * \underline{1} = 1^1 * 1^2 \rightarrow$ ...0001*11 00000...

- $(2, 3) =_{(def)} \underline{2} * \underline{3} = 1^3 * 1^4 \rightarrow$ ...000111*1111 00000...

- $(4, 0, 1) =_{(def)} \underline{4} * \underline{0} * \underline{1} = 1^5 * 1^1 * 1^2 \rightarrow$ ...00011111*1*11 00000...

Les Fonctions Turing-calculables

- Définition:
  - Soit une fonction :F : $\mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}^p$ et une machine de Turing : MT = ⟨S, E, I⟩
- F est dite calculable par la machine de Turing MT si :

$$q_0 \, \underline{n_1} * \underline{n_2} * \ \dots * \underline{n_p} \rightarrow q_f \, \mathrm{F}(\underline{n_1} * \underline{n_2} * \ \dots * \underline{n_p})$$

- Cette définition montre comment une MT calcule une fonction en passant de l'état initial à l'état final via le traitement des entrées.

🎯Exemple 2 – Déroulement

- 🔧 **Définition de la machine MT :**
- Alphabet : S = {0, 1}, États : E = {q_0, q_1, q_f}
- Instructions (I) :
    1. q_0 1D → q_0,
    2. q_0 0 → 1, q_1,
    3. q_1 1G → q_1,
    4. q_1 0D → q_f
- 📄 Déroulement pour l'entrée 0 encodée sur le ruban:

Étape	Ruban	État
1	0 0 0 1 0 0 0	q_0
2	0 0 0 1 0 0 0	q_0
3	0 0 0 1 1 0 0	q_1
4	0 0 0 1 1 0 0	q_1
5	0 0 0 1 1 0 0	q_f

$$q_0\ \underline{0} \rightarrow q_f\ \underline{1}$$

🎯Exemple 2 – Déroulement

⚙ Déroulement pour l’entrée 1:

On encode 1 par 1^2 = 11, donc le ruban initial contient :... 0 0 1 1 0 0 ... (la tête commence sur le premier 1)

Étape	Ruban	État
1	0 0 0 1 1 0 0 0	q_0
2	0 0 0 1 1 0 0 0	q_0
3	0 0 0 1 1 0 0 0	q_0
4	0 0 0 1 1 1 0 0	q_1
5	0 0 0 1 1 1 0 0	q_1
6	0 0 0 1 1 1 0 0	q_1
7	0 0 0 1 1 1 0 0	q_f

$$q_0\,\underline{1} \rightarrow q_f\,\underline{2}$$

- La machine transforme l’encodage de 1 (11) en celui de 2 (111),Elle calcule le successeur de l’entier donné.

🎯Exemple 2 – Déroulement

⚙ Déroulement pour l'entrée 2:

Encodage : $00q_0 11100 = 0q_0 1^3 0$

$(1) \rightarrow 01q_0 1^2 0$
$(1) \rightarrow 01^2 q_0 10$
$(1) \rightarrow 01^3 q_0 0$

$(1)^* \rightarrow 01^3 q_0 0$

$(2) \rightarrow 01^3 q_1 10$

$(3) \rightarrow 01^2 q_1 1^2 0$
$(3) \rightarrow 01 q_1 1^3 0$
$(3) \rightarrow 0 q_1 1^4 0$
$(3) \rightarrow 0 q_1 01^4 0$

$(3)^* \rightarrow 0 q_1 01^4 0$

$(4) \rightarrow 0\, q_f 1^4 0$

$\boxed{q_0\ \underline{2} \rightarrow q_f\ \underline{3}}$

Alphabet : $S = \{0, 1\}$, États : $E = \{q_0, q_1, q\_f\}$
Instructions (I) :

1. $q_0\ 1D \rightarrow q_0$,
2. $q_0\ 0 \rightarrow 1, q_1$,
3. $q_1\ 1G \rightarrow q_1$,
4. $q_1\ 0D \rightarrow q\_f$