Método Perturbación

Nadia

30/1/2020

SLOW-FAST LIMIT CYCLES

Para analizar desde este enfoque el sistema de Laura-Petrarch, se reescribe el modelo modificando la tercera ecuación que describe la inspiración de Pertarch, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{dL(t)}{dt} &= -\alpha_L L + \beta_L \left[P\left(1-\left(\frac{P}{\gamma_L}\right)^2\right) + A_P\right] \\
\frac{dP(t)}{dt} &= -\alpha_P P(t) + \beta_P \left[L + \frac{A_L}{1+\delta_P I_P}\right] \\
\frac{dI_P(t)}{dt} &= -\epsilon[-I_P + \mu P]
\end{aligned}$$

Donde los nuevos parámetros son positivos, siendo $\epsilon = \alpha_3$ y $\mu = \frac{\beta_3}{\alpha_3}$. Esto con el objetivo de derivar las condiciones generales en los parámetros que garantizan la **existencia de ciclo límite**.

Si ϵ es pequeña la variable $Z(t)$ es lenta con respecto a $L(t)$ y $P(t)$ de manera que se puede usar el método de perturbación singular. Este método afirma que el sistema se puede descomponer en componentes **rápidos** y **lentos**. En este caso el subsistema rápido esta compuesto por las primeras dos ecuaciones con $Z = cte$, mientras que el subsistema lento es solo la tercera ecuación.Tal descomposición permite construir órbitas singulares compuestas de concatenaciones de transiciones rápidas y lentas alternativas.

El principal resultado de la teoría de perturbación singular es que, bajo supuestos de regularidad adecuados, cualquier órbita del sistema se aproxima, para $\epsilon = 0$, la órbita singular correspondiente.

The fast subsystem

Las primeras dos ecuaciones con $Z = cte$ describen la dinámica rápida del sistema. El estado $(L(t), P(t))$ de dicho sistema no puede tender hacia un cíclo límite ya que la divergencia es negativa (*Criterio de Dulac*). Así, L(t) y P(t) tienden hacia un equilibrio, hacia una solución constante (L,P) de estas dos ecuaciones.

Al eliminar L de la primera ecuación, la segunda con $\frac{dL(t)}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} = 0$ y separando las variable P y Z, se obtiene la ecuación

$\Phi(Z) = \Psi(P)$

Donde

$$\Phi(Z) \quad = -\Upsilon^2 \left(A_P + \frac{\alpha_L}{\beta_L}\frac{A_L}{1+\delta I_P}\right) \Psi(P) \quad = 3\Delta P - P^3$$

con

$$\Delta \quad = \quad \frac{\beta_L\beta_P - \alpha_L\alpha_P}{3\beta_L\beta_P}\Upsilon^2$$

Si Δ es positivo, es decir, si

$\beta_L\beta_P > \alpha_L\alpha_P$,