Método Perturbación

Nadia

30/1/2020

SLOW-FAST LIMIT CYCLES

Para analizar desde este enfoque el sistema de Laura-Petrarch, se reescribe el modelo modificando la tercera ecuación que describe la inspiración de Pertarch, de la siguiente manera:

$$\frac{dL(t)}{dt} = -\alpha_L L + \beta_L \left[P \left(1 - \left(\frac{P}{\gamma_L} \right)^2 \right) + A_P \right] \tag{1}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\alpha_P P(t) + \beta_P \left[L + \frac{A_L}{1 + \delta_P I_P} \right] \tag{2}$$

$$\frac{dI_P(t)}{dt} = -\epsilon[-I_P + \mu P] \tag{3}$$

Donde los nuevos parámetros son positivos, siendo $\epsilon = \alpha_3$ y $\mu = \frac{\beta_3}{\alpha_3}$. Esto con el objetivo de derivar las condiciones generales en los parámetros que garantizan la **existencia de ciclo límite**.

Si ϵ es pequeña la variable $I_P(t)$ es lenta con respecto a $L(t)$ y $P(t)$ de manera que se puede usar el método de perturbación singular. Este método afirma que el sistema se puede descomponer en componentes **rápidos** y **lentos**. En este caso el subsistema rápido esta compuesto por las primeras dos ecuaciones con $I_P = cte$, mientras que el subsistema lento es solo la tercera ecuación.Tal descomposición permite construir órbitas singulares compuestas de concatenaciones de transiciones rápidas y lentas alternativas.

El principal resultado de la teoría de perturbación singular es que, bajo supuestos de regularidad adecuados, cualquier órbita del sistema se aproxima, para $\epsilon = 0$, la órbita singular correspondiente.

The fast subsystem

Las primeras dos ecuaciones con $I_P = cte$ describen la dinámica rápida del sistema. El estado $(L(t), P(t))$ de dicho sistema no puede tender hacia un cíclo límite ya que la divergencia es negativa (*Criterio de Dulac*). Así, L(t) y P(t) tienden hacia un equilibrio, hacia una solución constante (L,P) de estas dos ecuaciones.

Al eliminar L de la primera ecuación, la segunda con $\frac{dL(t)}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} = 0$ y separando las variable P y I_P, se obtiene la ecuación

$$\Phi(I_P) = \Psi(P) \tag{4}$$

Donde

$$\Phi(Z) = -\Upsilon^2 \left(A_P + \frac{\alpha_L}{\beta_L} \frac{A_L}{1 + \delta I_P} \right) \tag{5}$$

$$\Psi(P) = 3\Delta P - P^3 \tag{6}$$

con

$$\Delta \quad = \quad \frac{\beta_L \beta_P - \alpha_L \alpha_P}{3\beta_L \beta_P} \Upsilon^2 \tag{7}$$

Si Δ es positivo, es decir, si

$$\beta_L \beta_P > \alpha_L \alpha_P \tag{8}$$

La función $\Psi(P)$ tiene un mínimo en $\Psi^- = -2\Delta\sqrt{\Delta}$ en el punto $P^- = -\sqrt{\Delta}[P^+ = \sqrt{\Delta}]$.

Al graficar la función $\Psi(P)$ y $\Phi(I_P)$, esta última con los valores extremos de la inspiración poética $I_P = 0$, $I_P = \infty$, se cumple el caso en el que se mantienen las dos desigualdades entre los parámetros:

$$A_P \quad < \quad -\frac{2\Delta\sqrt{\Delta}}{\Upsilon^2} \tag{9}$$

$$A_L \quad > \quad \frac{\beta_L}{\alpha_L}\left(2\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\Upsilon^2} - A_P\right) \tag{10}$$

Bajo estas condiciones, $\Phi(I_P) = \Psi(P)$, tiene una **única y positiva** (negativa) solución **P** para

$$0 \leq I_P < I_P^-[I_P > I_P^+]$$

Siendo $I_P^-[I_P^+]$ el valor de I_P para el que $\Phi(I_P^-) = \Psi^-[\Phi(I_P^+) = \Psi^+]$.

Por otro lado, en el intervalo (I_P^-, I_P^+), $\Phi(I_P) = \Psi(P)$, tiene tres soluciones. El valor de **equilibrio** esta dado por:

Así cuando se satisfacen las condiciones (8) y el valor para el parámetro A_L (10), **el subsistema rápido tiene un equilibrio único** para pequeños ($I_P < I_P^-$) y para altos ($I_P > I_P^+$) valores de la inspiración poética y **tres equilibrios** para valores intermedios ($I_P^- < I_P < I_P^+$).

Al estudiar la estabilidad de estos equilibrios mediante la matriz Jacobiana, el resultado es que el equilibrio con $P^- < P < P^+$ es **inestable** mientras que las otras dos son **estables**. *Al equilibrio de el subsistema rápido*, para el que se cumple $I_P = \bar{I}_P$, es llamado **equilibrio manifold** de el subsistema rápido μ.

Singular orbits and slow-fast limit cycles

Para este caso ahora se considera la componente lenta del sistema, que es la inspiración poética de Petrarch I_P, descrita por la tercera ecuación del modelo dado al inicio, con ϵ **pequeña y positiva**. En el espacio tridimensional (L, P, I_P) el manifold $\frac{dZ}{dt} = 0$ en el plano

$$I_P = \mu P$$

Para μ mayor que un valor crítico μ_{crit}, tal plano se *separa* del equilibrio manifold en dos ramas, una superior (μ^+) y otra inferior (μ^-), de el subsistema rápido. El valor crítico de μ es $\frac{I_P^+}{P^+}$ donde I_P^+ es la solución de $\Phi(I_P) = \Psi(P)$ con $P = P^+$. Ahora tomando en cuenta el valor de $\Phi(I_P)$, $P^+ = \sqrt{\Delta}$ y $\Psi(P^+) = 2\Delta\sqrt{\Delta}$, se obtiene que:

$$\mu_{crit} = \frac{1}{delta\sqrt{\Delta}} \frac{\frac{\alpha_L}{\beta_L}A_L + A_P + 2\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\Upsilon^2}}{-\left(A_P + 2\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\Upsilon^2}\right)}$$

De manera que la órbita singular ocurre de dos maneras diferentes, ambas comenzando desde el origen:

$$\mu < \mu_{crit}$$

$$\mu > \mu_{crit}$$

El resultado de la teoría de perturbación singular se puede resumir mediante el siguiente teorema.

TEOREMA. *Si las condiciones (8)-(10) y ϵ es suficientemente pequeña, el sistema (1), (2), (3) tiene un atractor que es un equilibrio si $\mu < \mu_{crit}$ y un ciclo límite si $\mu > \mu_{crit}$. Además el ciclo límite tiende para $\epsilon \to 0$ a un ciclo singular límite.*

- Si $\mu < \mu_{crit}$ pero ϵ no es pequeña, no hay garantía de que el ciclo límite se asemeje al ciclo singular límite.
- Si $\epsilon = 0.001$ el carácter rápido-lento del ciclo límite es claramente reconocible.
- Si $\epsilon = 0.1$ la transición rapida ya no es detectable.
- Si ϵ incrementa aún más, el ciclo límite podría incluso desaparecer, mediante una **Bifurcación Hopf Supercrítica** (única bifurcación detectada númericamente). Está bifurcación comienza del punto μ_{crit} en el eje vertical y es ortogonal a él en este punto.

Se localiza un punto R, utilizando el conjunto de parámetros de valores:

$$\begin{array}{lll} \alpha_L = 3.6, & \alpha_P = 1.2, & \alpha_{IP} = 0.12, \\ \beta_L = 1.2, & \beta_P = 6, & \beta_{IP} = 12, \\ \Upsilon = \delta = 1, & A_L = 2, & A_P = -1. \end{array}$$

Ahora empezando de este punto y decreciendo β_{IP} (decrece $\mu = \frac{\beta_{IP}}{\alpha_{IP}}$) o incrementando α_{IP} (incrementa $\epsilon = \alpha_{IP}$ y decrece $\mu = \frac{\beta_{IP}}{\alpha_{IP}}$), el ciclo límite se encoge y desaparece.