



# Wybrane **wzory matematyczne** na egzamin maturalny z matematyki

## Zespół redakcyjny:

Hubert Rauch (CKE)  
Mariusz Mroczek (CKE)  
Marian Pacholak (OKE Warszawa)  
dr Wioletta Kozak (CKE)  
dr Marcin Smolić (CKE)  
dr Roman Wosiek  
Ewa Ludwikowska (OKE Gdańsk)  
Joanna Berner (OKE Warszawa)  
Piotr Ludwikowski (OKE Kraków)

## Recenzenci:

dr hab. Jan Jakóbowski (UWM)  
Agata Górniaak (recenzja nauczycielska)

## Spis treści

1. Wartość bezwzględna liczby .....	4
2. Potęgi i pierwiastki.....	4
3. Logarytmy .....	5
4. Silnia. Współczynnik dwumianowy .....	6
5. Wzór dwumianowy Newtona .....	7
6. Wzory skróconego mnożenia .....	7
7. Funkcja kwadratowa.....	7
8. Ciągi.....	9
9. Trygonometria.....	11
10. Planimetria .....	15
11. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej .....	22
12. Stereometria.....	26
13. Kombinatoryka .....	28
14. Rachunek prawdopodobieństwa.....	29
15. Parametry danych statystycznych .....	31
16. Pochodna funkcji.....	32
17. Tablica wartości funkcji trygonometrycznych .....	34

## 1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej  $x$  definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba  $|x|$  jest to odległość na osi liczbowej punktu o współrzędnej  $x$  od punktu o współrzędnej 0.

- Dla dowolnej liczby  $x$  mamy:

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli  $y \neq 0$ , to:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  oraz  $r \geq 0$  mamy:

$$|x - a| \leq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r$$

## 2. POTĘGI I PIERWIASTKI

- Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej  $a$  definiujemy jej  $n$ -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym  $\sqrt[n]{a}$  stopnia  $n$  z liczby  $a \geq 0$  nazywamy liczbę  $b \geq 0$  taką, że  $b^n = a$ .

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli  $a < 0$  oraz liczba  $n$  jest nieparzysta, to  $\sqrt[n]{a}$  oznacza liczbę  $b < 0$  taką, że  $b^n = a$ .

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech  $m, n$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

$$\text{dla } a \neq 0: \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{oraz} \quad a^0 = 1$$

$$\text{dla } a \geq 0: \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\text{dla } a > 0: \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

- Niech  $r, s$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeżeli  $a > 0$  i  $b > 0$ , to:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeżeli wykładniki  $r, s$  są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb  $a \neq 0$  i  $b \neq 0$ .

- Niech  $x, y$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli  $a \in (0, 1)$ , to nierówność  $a^x < a^y$  jest równoważna nierówności  $x > y$ .

Jeżeli  $a \in (1, +\infty)$ , to nierówność  $a^x < a^y$  jest równoważna nierówności  $x < y$ .

### 3. LOGARYTMY

- Niech  $a > 0$  i  $a \neq 1$ . Logarytmem  $\log_a b$  liczby  $b > 0$  przy podstawie  $a$  nazywamy wykładnik  $c$  potęgi, do której należy podnieść  $a$ , aby otrzymać  $b$ :

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x > 0, y > 0$  oraz  $r$  prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y & \log_a x^r &= r \cdot \log_a x \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$  oraz  $c > 0$ , to:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy  $\log x$  oraz  $\lg x$  oznaczają  $\log_{10} x$ .

### 4. SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

- Silnią liczby całkowitej dodatniej  $n$  nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do  $n$  włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że  $0! = 1$ .

Dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 0$  prawdziwa jest równość:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

- Dla liczb całkowitych  $n, k$  spełniających warunki  $0 \leq k \leq n$  definiujemy współczynnik dwumianowy  $\binom{n}{k}$  (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Prawdziwe są równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

## 5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$  mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$ :

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

## 6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$ :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$  mamy:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) & a^2 - 1 &= (a-1)(a+1) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 - 1 &= (a-1)(a^2 + a + 1) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) & a^3 + 1 &= (a+1)(a^2 - a + 1) \\ a^n - 1 &= (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) \end{aligned}$$

## 7. FUNKCJA KWADRATOWA

- Wyróżnikiem  $\Delta$  trójmianu kwadratowego  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ ) zmiennej rzeczywistej  $x$  nazywamy liczbę

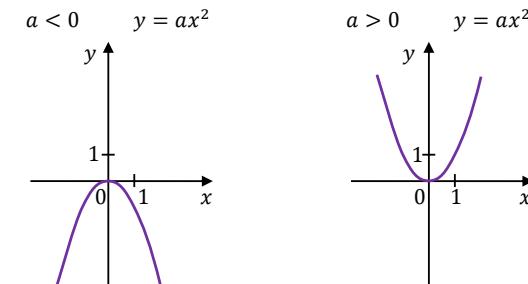
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Postać ogólna funkcji kwadratowej:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$W = (p, q) \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy  $a < 0$ , to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy  $a > 0$ , to ramiona paraboli skierowane są ku górze.



- Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$ ) zależy od wyróżnika  $\Delta$ :

- jeżeli  $\Delta > 0$ , to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeżeli  $\Delta = 0$ , to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli  $\Delta < 0$ , to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- Postać kanoniczną funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

- Jeżeli  $\Delta \geq 0$ , to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Wzory Viète'a

Jeżeli  $\Delta \geq 0$ , to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## 8. CIĄGI

- Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego ( $a_n$ ), określonego dla  $n \geq 1$ , o pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicę  $r$ :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Wzory na sumę  $S_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego ( $a_n$ ) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

- Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego ( $a_n$ ), określonego dla  $n \geq 1$ , o pierwszym wyrazie  $a_1$  i ilorazie  $q$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

- Wzory na sumę  $S_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ dla } q \neq 1 \quad S_n = n \cdot a_1 \text{ dla } q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego ( $a_n$ ) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

- Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny ( $a_n$ ), określony dla  $n \geq 1$ , o ilorazie  $q$ . Niech ( $S_n$ ) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu ( $a_n$ ), to znaczy ciąg określony wzorem  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  dla  $n \geq 1$ .

Jeżeli  $|q| < 1$ , to ciąg ( $S_n$ ) ma granicę równą:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Granicę tę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego ( $a_n$ ).

- Twierdzenie o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi ( $a_n$ ) i ( $b_n$ ), określone dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , są zbieżne i  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , to ciągi ( $a_n + b_n$ ), ( $a_n - b_n$ ), ( $a_n \cdot b_n$ ) są zbieżne, a ponadto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto  $b_n \neq 0$  dla  $n \geq 1$  oraz  $b \neq 0$ , to ciąg  $(\frac{a_n}{b_n})$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

- Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ciągów ( $a_n$ ), ( $b_n$ ) i ( $c_n$ ), określonych dla  $n \geq 1$ , spełniają nierówność  $a_n \leq b_n \leq c_n$  dla  $n \geq 1$ , a ciągi ( $a_n$ ) i ( $c_n$ ) są zbieżne do wspólnej granicy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ , to ciąg ( $b_n$ ) jest zbieżny, a ponadto  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ .

- Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy  $K_0$  złożymy na okres  $n$  lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi  $p\%$  w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy  $K_n$  jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- Wybrane granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla każdego } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{dla każdego } q \in (-1, 1)$$

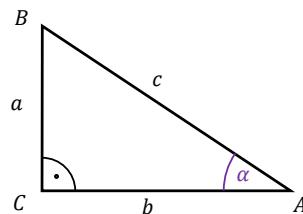
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{dla każdego } k > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty \quad \text{dla każdego } k > 0$$

## 9. TRYGONOMETRIA

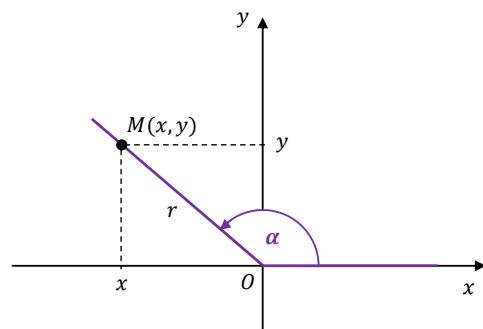
- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

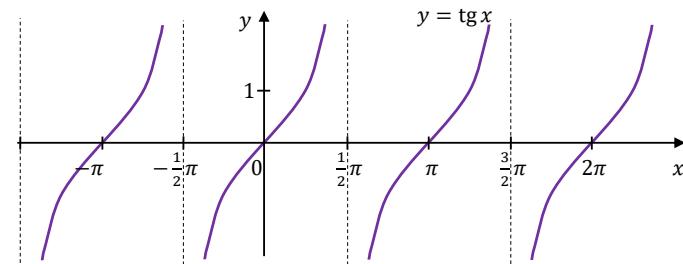
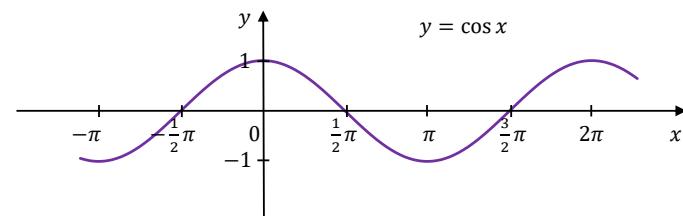
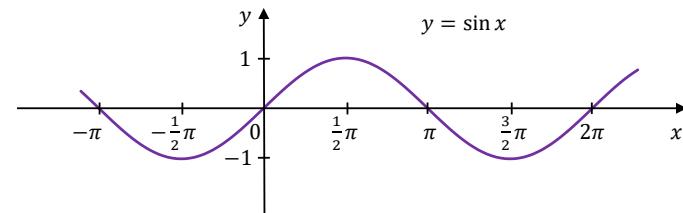


- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kata

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \quad \text{o ile } x \neq 0 \\ \text{gdzie} \\ r &= |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0\end{aligned}$$



- Wykresy funkcji trygonometrycznych



- Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kata

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicę kątów

Dla dowolnych kątów  $\alpha$  oraz  $\beta$  prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Ponadto:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{gdy } \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{gdy } \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Funkcje trygonometryczne podwojonego kata

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{o ile } \operatorname{tg} \alpha \text{ istnieje i } \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 1$$

- Wybrane wzory redukcyjne

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

- Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

- Okresowość funkcji trygonometrycznych

Dla każdego kąta  $\alpha$  i liczby całkowitej  $k$  prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

Ponadto jeżeli  $\alpha \neq 90^\circ + m \cdot 180^\circ$  (gdzie  $m \in \mathbb{Z}$ ), to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

## 10. PLANIMETRIA

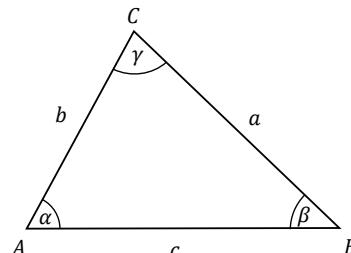
Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie  $ABC$ :

$a, b, c$  – długości boków w trójkącie  $ABC$   
 $\alpha, \beta, \gamma$  – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących, odpowiednio, przy wierzchołkach  $A, B$  oraz  $C$

$R, r$  – długości promieni okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt  $ABC$

$h_a, h_b, h_c$  – wysokości trójkąta opuszczone, odpowiednio, z wierzchołków  $A, B$  i  $C$ .  
 $p$  – połowa obwodu trójkąta  $ABC$ , tj.

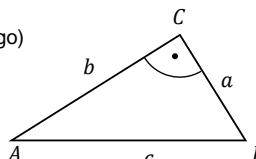
$$p = \frac{a + b + c}{2}$$



- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie  $ABC$  kąt  $\gamma$  jest kątem prostym, to:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Jeżeli w trójkącie  $ABC$  długości boków spełniają równość  $a^2 + b^2 = c^2$ , to kąt  $\gamma$  jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

- Wzory na pole trójkąta  $ABC$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \cdot \sin \beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \quad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $C$  jest kątem prostym. Niech  $D$  będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka  $C$  na podstawę  $AB$  trójkąta. Wówczas:

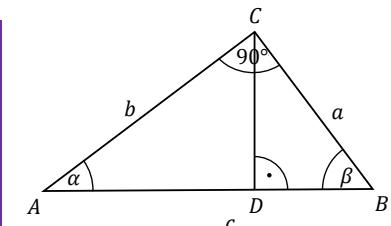
$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|}$$

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$R = \frac{1}{2}c$$

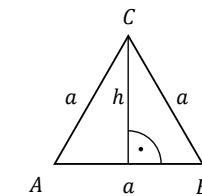
$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \tan \alpha = b \cdot \frac{1}{\tan \beta}$$



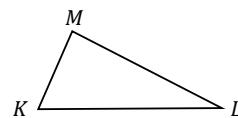
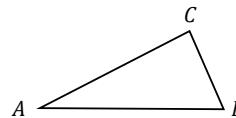
- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

$a$  – długość boku trójkąta równobocznego  
 $h$  – wysokość trójkąta równobocznego

$$\begin{aligned} h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} & P_{\Delta} &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ r &= \frac{1}{3}h & R &= \frac{2}{3}h \end{aligned}$$



- Cechy przystawania trójkątów



a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długości boków trójkąta  $ABC$  są równe odpowiednim długościom boków trójkąta  $KLM$ , np.:  $|AB| = |KL|$ ,  $|BC| = |KM|$ ,  $|CA| = |ML|$

b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

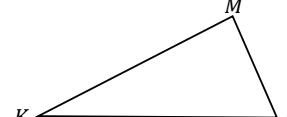
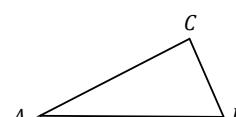
długości dwóch boków trójkąta  $ABC$  są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta  $KLM$  i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:  
 $|AB| = |KL|$ ,  $|BC| = |KM|$  i  $\angle ABC = \angle LKM$

c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długość jednego boku trójkąta  $ABC$  jest równa długości jednego boku trójkąta  $KLM$  i kąty przyległe do tego boku trójkąta  $ABC$  są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta  $KLM$ , np.:

$|AB| = |KL|$  oraz  $\angle BAC = \angle KLM$  i  $\angle ABC = \angle LKM$

- Cechy podobieństwa trójkątów



a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długości boków trójkąta  $ABC$  są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta  $KLM$ , np.:  $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$

b) cecha podobieństwa „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długości dwóch boków trójkąta  $ABC$  są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta  $KLM$  i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:  
 $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|}$  i  $\angle BAC = \angle LKM$

c) cecha podobieństwa „**kąt–kąt–kąt**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

kąty trójkąta  $ABC$  są przystające do odpowiednich kątów trójkąta  $KLM$ , np.:  
 $\angle BAC = \angle LKM$  i  $\angle ABC = \angle KLM$  i  $\angle ACB = \angle MKL$

- Twierdzenie o dwusiecznej kąta

Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnętrznego) trójkąta  $ABC$  poprowadzona z wierzchołka  $C$  przecina prostą zawierającą odcinek  $AB$  w punkcie  $D$ , to:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

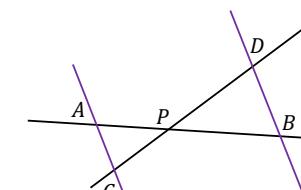
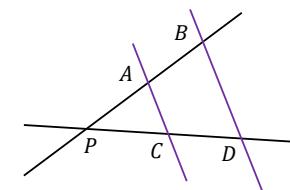
Różne proste  $AB$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$ , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

– punkt  $A$  leży wewnętrz odcinka  $PB$  oraz punkt  $C$  leży wewnętrz odcinka  $PD$  LUB

– punkt  $A$  leży na zewnątrz odcinka  $PB$  oraz punkt  $C$  leży na zewnątrz odcinka  $PD$ .

Jeżeli  $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$ , to proste  $AC$  i  $BD$  są równoległe.

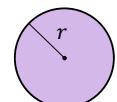
Jeżeli proste  $AC$  i  $BD$  są równoległe, to  $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$ .



- Koło

Pole  $P$  koła o promieniu  $r$  jest równe:

$$P = \pi r^2$$



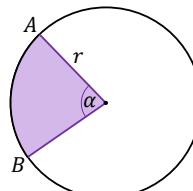
Obwód  $L$  koła o promieniu  $r$  jest równy:

$$L = 2\pi r$$

- Wycinek koła

Pole  $P$  wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$  wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Długość  $L$  łuku  $AB$  wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$  wyrażonym w stopniach jest równa:

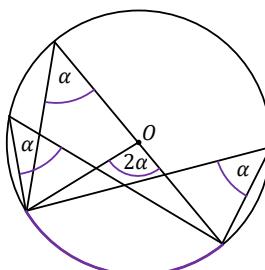
$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- Katy w okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku  $O$  jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku  $O$ , opartych na tym samym łuku, są równe.

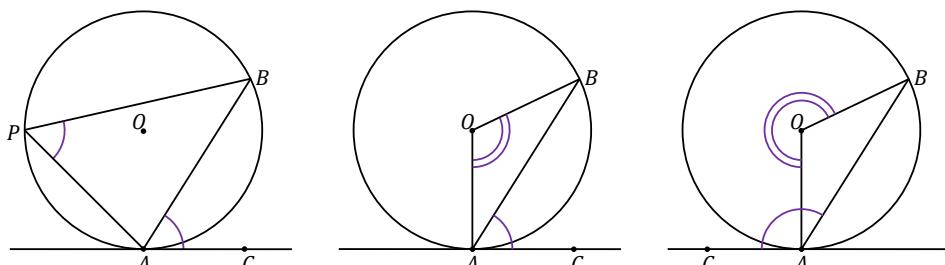


- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku  $O$  i cięciwa  $AB$  tego okręgu. Prosta  $AC$  jest styczna do tego okręgu w punkcie  $A$ , natomiast punkt  $P$  leży na tym okręgu i nie należy do kąta  $CAB$ . Wtedy:

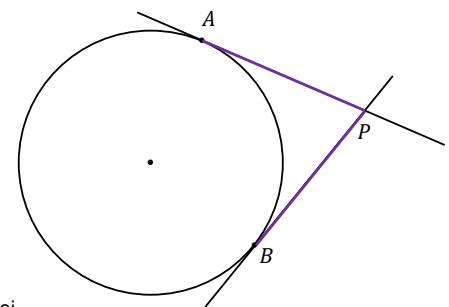
$$|\angle APB| = |\angle CAB| \quad \text{i} \quad |\angle AOB| = 2 \cdot |\angle CAB|$$

przy czym wybieramy ten z kątów środkowych  $AOB$ , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnętrzku kąta  $CAB$ .



- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach  $A$  i  $B$  przecinają się w punkcie  $P$ , to:

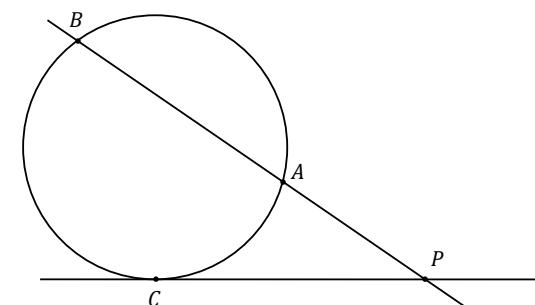


$$|PA| = |PB|$$

- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach  $A$  i  $B$  oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie  $C$ . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie  $P$ , to:

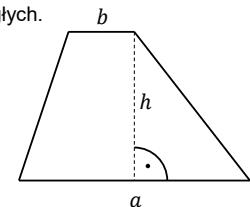
$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



- Czworokąty

Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.  
Wzór na pole  $P$  trapezu:

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

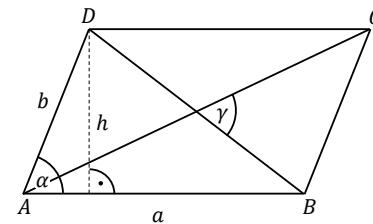


Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole  $P$  równoległoboku:

$$P = ah$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \gamma$$



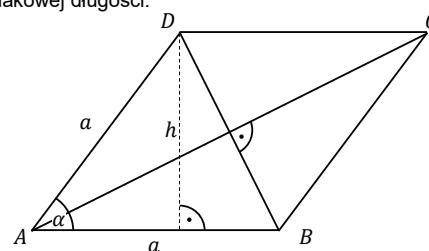
Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole  $P$  rombu:

$$P = ah$$

$$P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

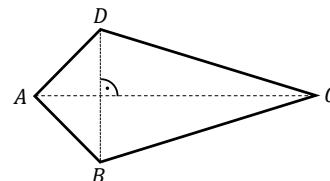
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole  $P$  deltoidu:

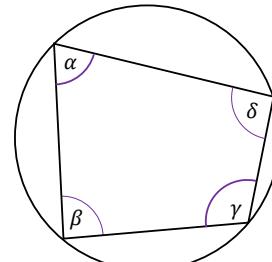
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



#### • Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwnieległych kątów wewnętrznych są równe  $180^\circ$ .

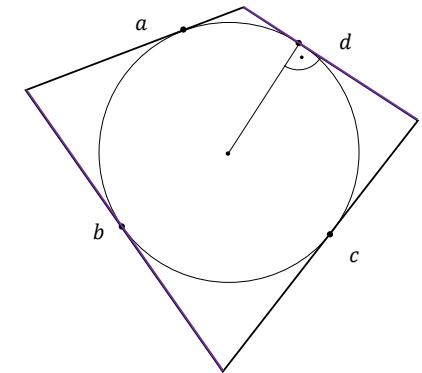
$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= \beta + \delta \\ \alpha + \gamma &= 180^\circ \quad \beta + \delta = 180^\circ\end{aligned}$$



#### • Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwnieległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



#### • Pola figur podobnych

Jeżeli figura  $\mathcal{B}$  o polu  $P_B$  jest podobna do figury  $\mathcal{A}$  o polu  $P_A$  (różnym od zera) w skali  $k$ , to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

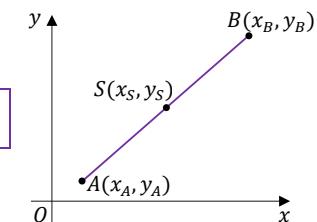
$$\frac{P_B}{P_A} = k^2$$

## 11. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŻNIE KARTEZJAŃSKIEJ

#### • Długość odcinka

Długość odcinka  $AB$  o końcach w punktach  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$  jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



#### • Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka  $S = (x_S, y_S)$  odcinka  $AB$  o końcach w punktach  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$  są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

- Równanie kierunkowe prostej

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi  $Oy$ , to można opisać ją równaniem kierunkowym:

$$y = ax + b$$

Liczba  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Prosta o równaniu  $y = ax + b$  przecina osią  $Oy$  w punkcie  $(0, b)$ .

- Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym  $a$ , która przechodzi przez punkt  $P = (x_0, y_0)$ :

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$ :

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

gdzie

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{gdy } x_B \neq x_A$$

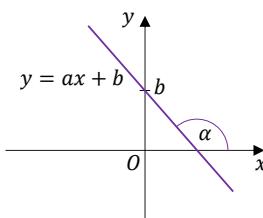
- Równanie ogólne prostej

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie } A, B, C \in \mathbb{R} \text{ i } A^2 + B^2 \neq 0$$

Jeżeli  $A = 0$ , to prosta jest równoległa do osi  $Ox$ ; jeżeli  $B = 0$ , to prosta jest równoległa do osi  $Oy$ ; jeżeli  $C = 0$ , to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- Równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$ :

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$



- Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych  $y = a_1x + b_1$  oraz  $y = a_2x + b_2$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Dwie proste o równaniach ogólnych  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  oraz  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

- Proste prostopadłe

Dwie proste o równaniach kierunkowych  $y = a_1x + b_1$  oraz  $y = a_2x + b_2$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dwie proste o równaniach ogólnych  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  oraz  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

- Odległość punktu od prostej

Odległość  $d$  punktu  $P(x_0, y_0)$  od prostej o równaniu ogólnym  $Ax + By + C = 0$  jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r > 0$  w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie okręgu o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r > 0$  w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

gdzie  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .

- Współrzędne wektora, długość wektora, działania na wektorach

Dane są punkty  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$ . Współrzędne wektora  $\vec{AB}$  zaczepionego w punkcie  $A$ :

$$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli  $\vec{u} = [u_1, u_2]$  oraz  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  są wektorami oraz  $a \in \mathbb{R}$ , to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \quad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

Długością  $|\vec{u}|$  wektora  $\vec{u} = [u_1, u_2]$  nazywamy liczbę

$$|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

- Przekształcenia geometryczne

Przesunięcie o wektor  $\vec{u} = [a, b]$  przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (x + a, y + b)$ .

Symetria osiowa  $S_{0x}$  względem osi  $Ox$  przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (x, -y)$ .

Symetria osiowa  $S_{0y}$  względem osi  $Oy$  przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (-x, y)$ .

Symetria środkowa  $S_K$  względem punktu  $K = (a, b)$  przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (2a - x, 2b - y)$ .

W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (-x, -y)$ .

- Pole trójkąta

Pole trójkąta  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  oraz  $C = (x_C, y_C)$  jest równe:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

- Współrzędne środka ciężkości trójkąta

Współrzędne środka ciężkości  $S = (x_S, y_S)$  trójkąta  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  oraz  $C = (x_C, y_C)$ , czyli punktu przecięcia jego średkowych:

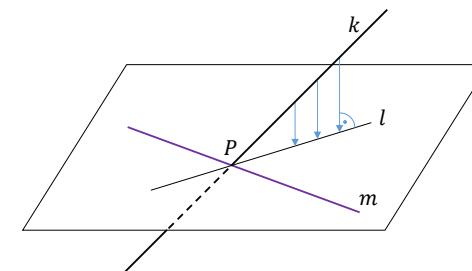
$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

## 12. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta  $k$  przebijająca płaszczyznę w punkcie  $P$  pod kątem ostrym. Prosta  $l$  jest rzutem prostokątnym prostej  $k$  na tę płaszczyznę. Prosta  $m$  leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt  $P$ .

Wówczas prosta  $m$  jest prostopadła do prostej  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m$  jest prostopadła do prostej  $l$ .



Przymijemy oznaczenia:

$P_c$  – pole powierzchni całkowitej

$P_p$  – pole podstawy

$P_b$  – pole powierzchni bocznej

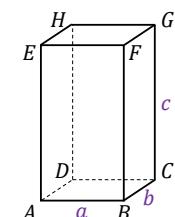
$V$  – objętość

- Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$

gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są długościami krawędzi prostopadłościanu

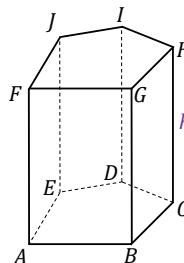


- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

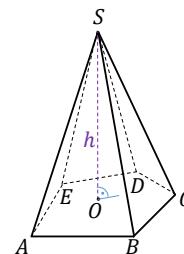
gdzie  $Ob$  jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast  $h$  – wysokością graniastosłupa.



- Ostrołup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie  $h$  jest wysokością ostrołupa.



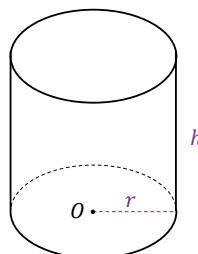
- Walec

$$P_b = 2\pi rh$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie  $h$  jest wysokością walca,  $O$  – środkiem symetrii podstawy walca,  $r$  – promieniem podstawy walca.



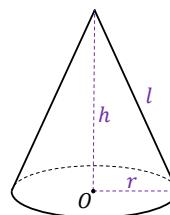
- Stożek

$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy stożka,  $h$  – jego wysokość, natomiast  $l$  – tworzącą stożka. Punkt  $O$  jest środkiem symetrii podstawy stożka.

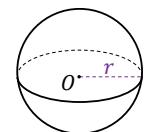


- Kula

$$P_c = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie  $r$  jest promieniem kuli, natomiast  $O$  – środkiem symetrii kuli.



## 13. KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba wszystkich sposobów, na które  $n$  różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa  $n!$ .

- Kombinacje

Liczba wszystkich sposobów, na które spośród  $n$  różnych elementów można wybrać  $k$  elementów ( $0 \leq k \leq n$ ), jest równa  $\binom{n}{k}$ .

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba wszystkich sposobów, na które z  $n$  różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  (niekoniecznie różnych) wyrazów, jest równa  $n^k$ .

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba wszystkich sposobów, na które z  $n$  różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  różnych wyrazów ( $1 \leq k \leq n$ ), jest równa

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

## 14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIĘŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

Niech  $\Omega$  będzie niepustym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, natomiast  $P$  – prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru  $\Omega$ . Wtedy:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{dla każdych zdarzeń } A \text{ oraz } B \text{ takich, że } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwnie do zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{dla każdych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad \text{dla każdych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech  $\Omega$  będzie niepustym skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego  $A$  jest równe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie  $|A|$  oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu  $A$ , natomiast  $|\Omega|$  – liczbę elementów zbioru  $\Omega$ .

- Schemat Bernoullego

Próbą Bernoullego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z nich nazywamy sukcesem, a drugi – porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu jest równe  $p$ , to prawdopodobieństwo porażki jest równe  $q = 1 - p$ .

Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoullego. W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo  $P_n(k)$  uzyskania w  $n$  próbach dokładnie  $k$  sukcesów ( $0 \leq k \leq n$ ) jest równe:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech  $A, B$  będą zdarzeniami losowymi zawartymi w  $\Omega$ , przy czym  $P(B) > 0$ . Prawdopodobieństwem warunkowym  $P(A|B)$  zdarzenia  $A$  pod warunkiem zaistnienia zdarzenia  $B$  nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zawarte w  $\Omega$  spełniają warunki:

1.  $B_1, B_2, \dots, B_n$  są parami rozłączne, tzn.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2.  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3.  $P(B_i) > 0$  dla  $1 \leq i \leq n$

to dla każdego zdarzenia losowego  $A \subset \Omega$  prawdziwa jest równość:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia losowe  $A, B_1, B_2, \dots, B_n$  zawarte w  $\Omega$  spełniają warunki:

1.  $B_1, B_2, \dots, B_n$  są parami rozłączne, tzn.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2.  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3.  $P(B_i) > 0$  dla  $1 \leq i \leq n$
4.  $P(A) > 0$

to dla każdego  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) prawdziwa jest równość:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

- Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Niech  $X$  będzie zmienną losową o wartościach  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , określoną na zbiorze  $\Omega$ , przy czym  $P(\{\omega : \omega \in \Omega \text{ oraz } X(\omega) = x_i\}) = p_i$  dla  $1 \leq i \leq n$ . Wartością oczekiwana zmiennej losowej  $X$  nazywamy liczbę:

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

## 15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna  $\bar{a}$  z liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna  $\bar{g}$  z liczb nieujemnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Średnia kwadratowa

Średnia kwadratowa  $\bar{k}$  z liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n}}$$

- Nierówności między średnimi liczbowymi

Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  będą liczbami nieujemnymi. Wtedy (przy powyższych oznaczeniach) prawdziwe są nierówności:

$$\bar{k} \geq \bar{a} \geq \bar{g}$$

Ponadto równość pomiędzy tymi średnimi liczbowymi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

- Średnia ważona

Średnia ważona  $\bar{s}$  z liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio:  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru  $n$  danych liczbowych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest:

– dla  $n$  nieparzystych:  $a_{\frac{n+1}{2}}$  (środkowy wyraz ciągu)

– dla  $n$  parzystych:  $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$  (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja  $\sigma^2$  danych liczbowych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o średniej arytmetycznej  $\bar{a}$  jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe  $\sigma$  jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

## 16. POCHODNA FUNKCJI

- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Pochodna funkcji złożonej

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{gdy } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

## 17. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

- Pochodne wybranych funkcji

Niech  $a, b, c, r$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

gdzie  $e$  jest liczbą Eulera;  $e \approx 2,72$

- Równanie stycznej

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodną w punkcie  $x_0$ , to równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  dane jest wzorem:

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

gdzie

$$a = f'(x_0)$$

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0	<b>0,0000</b>	<b>1,0000</b>	<b>0,0000</b>
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	<b>0,0872</b>	<b>0,9962</b>	<b>0,0875</b>
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	<b>0,1736</b>	<b>0,9848</b>	<b>0,1763</b>
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	<b>0,2588</b>	<b>0,9659</b>	<b>0,2679</b>
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	<b>0,3420</b>	<b>0,9397</b>	<b>0,3640</b>
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	<b>0,4226</b>	<b>0,9063</b>	<b>0,4663</b>
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	<b>0,5000</b>	<b>0,8660</b>	<b>0,5774</b>
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	<b>0,5736</b>	<b>0,8192</b>	<b>0,7002</b>
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	<b>0,6428</b>	<b>0,7660</b>	<b>0,8391</b>
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	<b>0,7071</b>	<b>0,7071</b>	<b>1,0000</b>

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
45	<b>0,7071</b>	<b>0,7071</b>	<b>1,0000</b>
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	<b>0,7660</b>	<b>0,6428</b>	<b>1,1918</b>
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	<b>0,8192</b>	<b>0,5736</b>	<b>1,4281</b>
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	<b>0,8660</b>	<b>0,5000</b>	<b>1,7321</b>
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	<b>0,9063</b>	<b>0,4226</b>	<b>2,1445</b>
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	<b>0,9397</b>	<b>0,3420</b>	<b>2,7475</b>
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	<b>0,9659</b>	<b>0,2588</b>	<b>3,7321</b>
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	0,1908	5,1446
80	<b>0,9848</b>	<b>0,1736</b>	<b>5,6713</b>
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	<b>0,9962</b>	<b>0,0872</b>	<b>11,4301</b>
86	0,9976	0,0698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900
90	<b>1,0000</b>	<b>0,0000</b>	-

**Centralna Komisja Egzaminacyjna**  
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa  
tel. 22 536 65 00  
[sekretariat@cke.gov.pl](mailto:sekretariat@cke.gov.pl)

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku**  
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk  
tel. 58 320 55 90  
[komisja@oke.gda.pl](mailto:komisja@oke.gda.pl)

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie**  
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno  
tel. 32 616 33 99  
[oke@oke.jaworzno.pl](mailto:oke@oke.jaworzno.pl)

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie**  
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków  
tel. 12 683 21 99  
[oke@oke.krakow.pl](mailto:oke@oke.krakow.pl)

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży**  
al. Legionów 9, 18-400 Łomża  
tel. 86 473 71 20  
[sekretariat@oke.lomza.pl](mailto:sekretariat@oke.lomza.pl)

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi**  
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź  
tel. 42 634 91 33  
[sekretariat@lodz.oke.gov.pl](mailto:sekretariat@lodz.oke.gov.pl)

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu**  
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań  
tel. 61 854 01 60  
[sekretariat@oke.poznan.pl](mailto:sekretariat@oke.poznan.pl)

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie**  
pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa  
tel. 22 457 03 35  
[info@oke.waw.pl](mailto:info@oke.waw.pl)

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu**  
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław  
tel. 71 785 18 94  
[sekretariat@oke.wroc.pl](mailto:sekretariat@oke.wroc.pl)

