



用高斯消元法 解线性方程组

北京景山学校 何江舟



GPA排名系统（CTSC2001）

高等院校往往采用GPA来评价学生的学术表现。传统的排名方式是求每一个学生的平均成绩，以平均成绩作为依据进行排名。对于不同的课程，选课学生的平均成绩会受到课程的难易程度等因素的影响，因此这种排名方式不够合理。

为此，我们需要对排名系统进行这样的改进：对第 i 门课的每一个学生的成绩加上一个特定的修正值 d_i （调整后的成绩不按照百分制），使得经过调整后，该课的平均分等于选该课的所有学生的所有课的平均分。对每一门课都这样调整，使得上述条件对所有课程都满足。

你的任务是根据一个年级学生某学年的成绩，通过上述调整，得出他们的排名。



简要分析

A_i : 选修第 i 门课的学生的集合

B_j : 第 j 个学生选修课程的集合

$G_{i,j}$: 第 j 个学生第 i 门课的成绩

d_i : 第 i 门课的修正值

对于第 p 门课, 可列出如下关系式:

$$\frac{1}{|A_p|} \sum_{j \in A_p} G_{p,j} + d_p = \frac{1}{\sum_{j \in A_p} |B_j|} \sum_{j \in A_p} \sum_{i \in B_j} (G_{i,j} + d_i)$$

这是关于 d_i ($i=1,2,\dots,n$) 的线性方程, 我们可以整理出 n 个这样的方程。



线性方程组的一般形式


下面是n元线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

我们可以把它表示为增广矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}$$

先看一个例子


$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times 2 \times 0.5$$


$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2.5 & -1.5 & 6.5 \end{pmatrix} \times 2.5$$


$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ & -0.875 & 5.25 \end{pmatrix}$$



得出:

$$x_3 = 5.25 / (-0.875) = -6$$

$$x_2 = (2 - (-1)x_3) / 4 = -1$$

$$x_1 = (1 - (-1)x_2 - 3x_3) / 2 = 9$$



消元过程

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & \dots & a_{2,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & & \dots & & \\ a_{n,1}^{(1)} & a_{n,2}^{(1)} & \dots & a_{n,n}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

注：用上标(k)表示
第k次消元前的状态

第1次消元，第1行的乘数：
($i=2,3,\dots,n$)


$$m_{i,1} = \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}}$$

得到新的增广矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{2,2}^{(2)} & \dots & a_{2,n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \dots & & \\ & a_{n,2}^{(2)} & \dots & a_{n,n}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - m_{i,1} a_{1,j}^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i,1} b_1^{(1)} \end{cases}$$

($i,j=2,3,\dots,n$)



消元过程

第k次消元前的增广矩阵:

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{2,2}^{(2)} & \dots & a_{2,n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \dots & & \\ \text{第k步消元} & & & & \\ \text{的主元素} & \underbrace{a_{k,k}^{(k)}} & \dots & a_{k,n}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & \dots & & \\ & & & a_{n,k}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array} \right]$$

第k步消元的主行

第k次消元, 第k行的乘数:
($i=k+1, k+2, \dots, n$)

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$$

增广矩阵的变化:
($i, j=k+1, k+2, \dots, n$)

$$\begin{cases} a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{i,k} b_k^{(k)} \end{cases}$$



回代过程

最后得到的增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{2,2}^{(2)} & \dots & a_{2,n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \dots & & \\ & & & a_{n,n}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array} \right]$$

最终结果的计算：

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}^{(i)} x_j}{a_{i,i}^{(i)}}$$



为什么要选主元素

前面介绍的消元法都是按照自然顺序，即 x_1 、 x_2 、……、 x_n 的顺序消元的。有：

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$$

所以每一次消元的主元素都不能为0。如果按照自然顺序消元的过程中出现的 $a_{k,k}^{(k)}=0$ ，那么消元无法继续进行下去。或者 $|a_{k,k}^{(k)}|$ 很小，也会严重影响计算精度。



为什么要选主元素

例如（假设运算过程中使用单精度实数）：

$$\begin{bmatrix} 10^{-10} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 10^{-10} & 1 & 1 \\ & -10^{10} & -10^{10} \end{bmatrix}$$

解得： $x_1=0$ ， $x_2=1$

这个解与第二个方程差异很大。究其原因，因为消元过程中第一个方程所乘的系数过大，使得上式“吃掉”了下式，所以在结果中根本无法体现下式。

但如果调整一下顺序：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-10} & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解得： $x_1=1$ ， $x_2=1$ ，这个解基本符合原方程

所以每次消元的主元素的绝对值应该尽可能大，使得与主行相乘的乘数尽可能小。



选主元素

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \dots\dots\dots & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{2,2}^{(2)} & \dots\dots\dots & a_{2,n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \dots\dots\dots & & \\ & & a_{k,k}^{(k)} & \dots\dots & a_{k,n}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & \dots\dots\dots & & \\ & & a_{l,k}^{(k)} & \dots\dots & a_{l,n}^{(k)} & b_l^{(k)} \\ & & & \dots\dots\dots & & \\ & & a_{n,k}^{(k)} & \dots\dots & a_{n,n}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array} \right]$$

进行第 k 次消元时，将 $a_{k,k}$ 一下各元素（包括 $a_{k,k}$ ）进行比较，将其中的最大者所在行与第 k 行交换。



无解的情况

如果在消元的过程中，增广矩阵出现这样一行：左侧各未知数的系数都为0，而右侧的常数项不为0，则意味着方程组无解。



无数组解的情况

在消元过程中，出现这样一行：各未知数的系数和常数项都为0。这相当于少了一个方程，也就是接下来的消元过程中，方程的个数少于未知数的个数，方程要么无解，要么有无数组解。下面讨论对于这样的方程，如何得到一组解。先看这样一个方程：

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

如果继续消元（消第2列），必须保证 $a_{2,2} \neq 0$ ，可是第2列中不存在非0的项。



无数组解的情况

只能够把第3列的元素作为第2次消元的主元素，进行消元：

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{green arrow}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第2次消元得到的元素全部为0，所以第三行元素已失去意义。 x_2 没有做过主元素，可随意取值，再进行回代，得到一组可行解。如令 $x_2=0$ ， $x_3=1$ ， $x_1=1.5$ 。

对于一般的线性方程组，先进行消元，每次消元前找到系数不完全为0的列，相应的元素作为此次消元的主元素，直至第 k 次消元时，得到的新元素全部为0，这时把各未知数分为两种：第 $k+1$ 列至第 n 列对应的未知数，可以将这些未知数随意取值；第1列至第 k 列对应的未知数，这些未知数的值在回代过程中确定。



性能分析

时间复杂度: $O(n^3)$

消元 $O(n^3)$

选主元素: $O(n^2)$

回代 $O(n^2)$

空间复杂度: $O(n^2)$

增广矩阵 $O(n^2)$

如使用全选主元素, 还需一个存储列与元素对应信息的表, 为 $O(n)$

精度:

由于采用实数运算, 另外每一次 (第一次除外) 消元都要使用以前消元产生的结果, 每一次回代都要使用消元结果和其它回代结果, 所以累积误差比较严重, 该方法只能够求得近似解。但是可以根据具体需要进行相应改进。



整数线性方程组的精确解法

前面讨论了对于一般线性方程组通过实数运算得到近似解的算法。而在一些问题中，常常要求精确解，这里讨论一下系数、常数项和解均为整数的线性方程组的精确解法。

前面是用这种方法消元的：

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$$

$$\begin{cases} a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{i,k} b_k^{(k)} \end{cases}$$

显然这里进行的是实数运算。



整数线性方程组的精确解法

由于不能够保证 $a_{i,k(k)}$ 是 $a_{k,k(k)}$ 的倍数，要想消元，必须使两行分别乘以一个乘数。

$$m_{i,k} = \frac{[a_{i,k}^{(k)}, a_{k,k}^{(k)}]}{a_{k,k}^{(k)}}$$

$$m'_{i,k} = \frac{[a_{i,k}^{(k)}, a_{k,k}^{(k)}]}{a_{i,k}^{(k)}}$$

$$\begin{cases} a_{i,j}^{(k+1)} = m'_{i,k} a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = m'_{i,k} b_i^{(k)} - m_{i,k} b_k^{(k)} \end{cases}$$

方程较多时，系数有可能越来越大，到一定程度有可能导致系数越界，因此要随时对各行化简，即把这一行中所有元素除以这些元素的最大公约数。

但是，无论如何，这也保证不了不会发生越界，因此这种算法一般适用于系数、未知数范围较小，未知数个数较少的方程。



齿轮

你有一套玩具，包括许多不同尺寸的齿轮（至多20种，假定每一种齿轮有无限多个），每个齿轮最多100齿。你希望用它们构造不同比例的传动装置。一个传动装置包括偶数个齿轮，这些齿轮两两一组互相咬合，每一组齿轮都与下一组用轴承相连。用 c_1 、 c_2 、.....、 c_m 表示每组第一个齿轮的齿数，用 d_1 、 d_2 、.....、 d_m 表示每组第二个齿轮的齿数。

$$c:d = \prod_{i=1}^m \frac{C_i}{D_i}$$

例如你有3种齿轮：6齿、12齿、30齿，你需要实现4:5的传动比例，一种可行的方案是：使用4个齿轮，分2组，第1组的两个分别为12齿、6齿，第2组的两个分别为12齿、30齿。



简要分析

把这些齿轮的齿数设为 a_1 、 a_2 、.....、 a_n ，设它们作为C类齿轮的数量分别为 e_1 、 e_2 、.....、 e_n ，作为D类齿轮的数量分别为 f_1 、 f_2 、.....、 f_n 。有如下关系：

$$c : d = \prod_{i=1}^n \frac{a_i^{e_i}}{a_i^{f_i}} = \prod_{i=1}^n a_i^{e_i - f_i}$$

这时候我们不难发现，一种齿轮同时当作C类、D类使用是一种浪费。设 $x_i = e_i - f_i$ ， $x_i > 0$ 表示这种齿轮只作为C类， $x_i < 0$ 表示这种齿轮只作为D类。这就转化为解 x_i 问题。

我们可以将 c 、 d 、 a_i 这些值分解质因数。由于 a_i 不超过100，所以 $a_1 \dots a_n$ 能够分解为的质因数不超过25种。另外，如果 c 或 d 中包括这以外的质因数，显然问题无解。



简要分析

设 $g_{r,i}$ 为质数 r 在 a_i 的质因数分解中的指数, c_r 、 d_r 分别为质数 r 在 c 、 d 中的质因数分解中的指数。有如下关系:

$$2^{(x_1g_{2,1}+x_2g_{2,2}+\dots+x_ng_{2,n})}=2^{(c_2-d_2)}$$

$$3^{(x_1g_{3,1}+x_2g_{3,2}+\dots+x_ng_{3,n})}=3^{(c_3-d_3)}$$

.....

这完全可以表示为关于指数的等式, 即:

$$g_{2,1}x_1+g_{2,2}x_2+\dots+g_{2,n}x_n=c_2-d_2$$

$$g_{3,1}x_1+g_{3,2}x_2+\dots+g_{3,n}x_n=c_3-d_3$$

.....

$$g_{97,1}x_1+g_{97,2}x_2+\dots+g_{97,n}x_n=c_{97}-d_{97}$$

当然还有一个约束条件:

$$x_1+x_2+\dots+x_n=0$$

这就完全转化为了解线性方程组的问题, 而且这需要精确地解出这个整数线性方程组, 并且还要面临不定方程的问题, 如果能够得出整数解, 则问题有解。



小结

高斯消元法是一种比较简单、适用范围较广的有效算法，但在实际应用中，我们往往需要具体问题具体分析，对这样的标准算法进行改进，才能满足我们的需要。



谢谢

请多提宝贵意见