福昕PDF编辑器

• 永久 • 轻巧 • 自由

升级会员

批量购买

永久使用

无限制使用次数

极速轻巧

超低资源占用，告别卡顿慢

自由编辑

享受Word一样的编辑自由

扫一扫，关注公众号

张宇高数下基础班讲义

新东方在线网络课程电子教材系列

第四讲　多元函数微分学

核心考点

1. 概念
2. 计算
3. 极最值

一、概念

1. 极限

设 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $P(x,y) \in D \cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，恒有

$|f(x,y) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

【例】 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$

2. 连续性

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

【注】 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$，叫不连续，不讨论间断类型

3. 偏导数(必考) $z = f(x,y)$

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0) \triangleq$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_y(x_0,y_0)\triangleq$$

【例 1】 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f'_x(0,0),f'_y(0,0)$.

【分析】 严格按定义办事

（见到 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\Rightarrow$ 先写定义再说）

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{36}，A 组 5.9(数学二 P_{38}，B 组 4.7；数学三 P_{37}，B 组 4.6)]

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin(x^2y), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f'_x(0,1)=$ ________.

【分析】

二、计算(必考)—— 多元函数微分法

1. 链式求导规则

设 $z=f(u,v,w),u=u(y),v=v(x,y),w=w(x)$

称 x,y 叫自变量，u,v,w 叫中间变量，z 叫因变量

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

2. 高阶偏导数

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{37}，B 组 5.9(数学二 P_{38}，B 组 4.6；数学三 P_{39}，C 组 4.4)]

设 $F(u,v)$ 对其变元 u,v 具有二阶连续偏导数，并设 $z=F\left(\dfrac{y}{x},x^2+y^2\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

【分析】

三、多元函数的极最值(必考)

1. 无条件的极值 $z=f(x,y)$

(1) 必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在}\\ \text{取极值}\end{cases}$,则 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$.

【注】适用于三元及以上(常考 2—5 元)

(2) 充分条件

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}''(x_0,y_0)&=A\\ f_{xy}''(x_0,y_0)&=B\\ f_{yy}''(x_0,y_0)&=C \end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta=B^2-AC\begin{cases}<0\begin{cases}A>0\Rightarrow \text{极小值点}\\ A<0\Rightarrow \text{极大值点}\end{cases}\\ >0\Rightarrow \text{不是极值点}\\ =0\Rightarrow \text{该法失效,另谋他法}\end{cases}$$

【注】只适用于二元

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{40},C 组 5.6(数学二 P_{40},C 组 4.8;数学三 P_{39},C 组 4.7)]

设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+32=0$$

确定,讨论函数 $z(x,y)$ 的极大值与极小值.

【分析】

2. 条件极值

提法:求目标函数 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件$\begin{cases}\varphi(x,y,z) = 0\\ \psi(x,y,z) = 0\end{cases}$下的极值.

拉氏乘数法:

(1) 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$、($\lambda,\mu$ 均可能取 0)

(2) 令 $F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = 0, F'_\lambda = 0, F'_\mu = 0$

(3) 解方程组 $\Rightarrow P_i(x_i,y_i,z_i) \Rightarrow u(P_i)$,比较 $\Rightarrow$ 取最大、最小者为最大、最小值.

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{38},B 组 5.18(数学二 P_{38},B 组 4.17;数学三 P_{37},B 组 4.16)]

某公司可通过电台和报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R（万元）与电台广告费 x_1（万元）及报纸广告费用 x_2（万元）之间的关系有如下经验公式：

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

（1）在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

（2）若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

【分析】

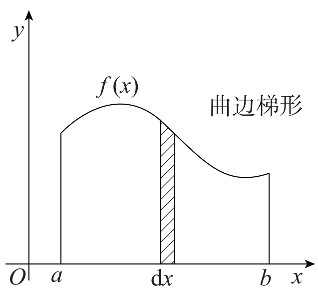
第五讲　二重积分

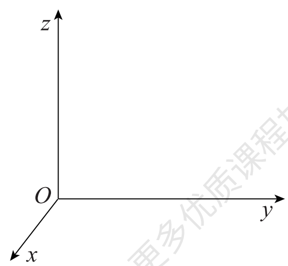
核心考点

1. 概念
2. 计算

一、概念

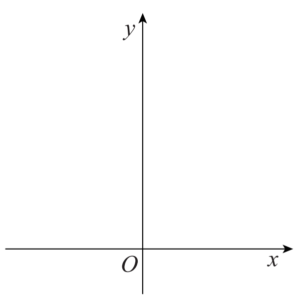
1. 比较

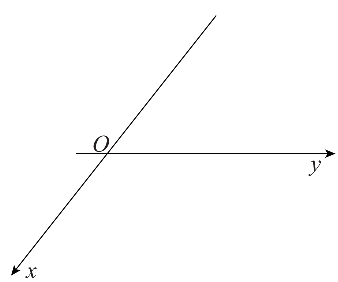




2. 对称性(必考)

(1) 普通对称性





设 D 关于 y 轴对称，$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, f(x,y) = f(-x,y) \\ 0, f(x,y) = -f(-x,y) \end{cases}$

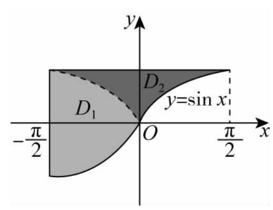
设 D 关于 x 轴对称，$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, f(x,y) = f(x,-y) \\ 0, f(x,y) = -f(x,-y) \end{cases}$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{41}，A组6.1(数学二 P_{41}，A组5.6；数学三 P_{40}，A组5.2)]

设平面区域 D 由曲线 $y = \sin x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，$x = -\frac{\pi}{2}$，$y = 1$ 围成，则 $\iint\limits_{D}(xy^3 - 1)\mathrm{d}\sigma =$ （　　）

(A)2　　　(B)-2　　　(C)π　　　(D)$-\pi$

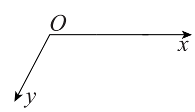
【分析】如图所示，用曲线 $y = -\sin x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0\right)$ 将区域 D 划分为 D_1 和 D_2 两部分，则 D_1 关于 x 轴对称，D_2 关于 y 轴对称，于是有



(2) 轮换对称性(直角坐标系下)

引例：

1) $\iint\limits_{D_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\leqslant 1}(2x^2 + 3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_2:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\leqslant 1}(2y^2 + 3x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$



—— 积分值与用什么字母表示无关

2) $\iint\limits_{D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1}(2x^2 + 3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\leqslant 1}(2y^2 + 3x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

定义：

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{47}，B组6.39(数学二 P_{43}，B组5.11；数学三 P_{42}，B组5.10)]

记平面区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，计算如下二重积分：

(1) $I_1=\iint\limits_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma$，其中 $f(t)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续正值函数，常数 $a>0,b>0$；

(2) $I_2=\iint\limits_D (\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda y})\mathrm{d}\sigma$，常数 $\lambda>0$.

【分析】

二、计算

1. 直角坐标系

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(1) X 型区域(上下型) $\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$

后积先定限

限内画条线

先交下曲线

后交上曲线

(2)Y 型区域(左右型)$\int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{41},A组6.3(数学二 P_{41},A组5.5;数学三 P_{41},B组5.2)]

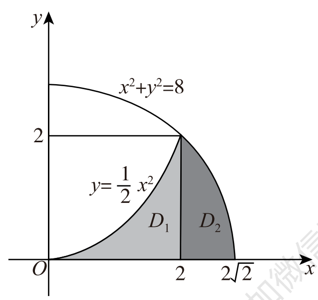
已知 $I=\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$,则 $I=$ ( )

A. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_1^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y}}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

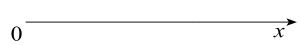
【答案】A

【分析】



2. 极坐标系

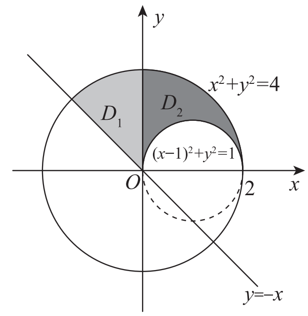
$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}\theta\cdot r\mathrm{d}r \Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$



【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》(数学一 P_{48},B组6.47)]

计算 $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由 $y=-x$,$x^2+y^2=4$,$y=\sqrt{2x-x^2}$ 所围成.

【分析】



第六讲　微分方程

核心考点

1. 概念
2. 一阶方程求解
3. 高阶方程求解

一、概念

1. $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

2. 阶数 — 方程中 y 的最高阶导数的阶数

如：$y\sin x-y''=\cos x+2$ 就是二阶微分方程

$\begin{cases} n=1,\text{一阶} \\ n\geqslant 2,\text{高阶} \end{cases}$

3. 通解 — 解中所含独立常数的个数 = 方程的阶数

二、一阶方程的求解

1. 变量可分离型

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)=g(x)h(y)\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)}=g(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(x)\mathrm{d}x$

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{59}，A 组 8.1（数学二 P_{46}，A 组 6.8；数学三 P_{51}，A 组 7.6）]

微分方程 $y'+\dfrac{1}{y}e^{y^2+3x}=0$ 的通解（其中 C 为任意常数）是　　（　　）

A. $2e^{3x}+3e^{y^2}=C$　　　　B. $2e^{3x}+3e^{-y^2}=C$

C. $2e^{3x}-3e^{-y^2}=C$　　　　D. $e^{3x}-e^{-y^2}=C$

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{61},B 组 8.16(数学二 P_{48},B 组 6.7;数学三 P_{54},B 组 7.8)]

微分方程的通解________(一定 / 不一定) 包含了所有的解.

【答案】不一定

【分析】

2. 齐次型

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$

$\Rightarrow u'x+u=f(u)\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x=f(u)-u\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow\int\dfrac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{62},B 组 8.25(数学二 P_{48},B 组 6.16;数学三 P_{54},B 组 7.15)]

求解$(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$.

【分析】

3. 一阶线性型

形如：$y'+p(x)y=q(x)$，$p(x)$，$q(x)$ 为已知函数

$\Rightarrow y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C\right)$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{61}，B 组 8.17(数学二 P_{48}，B 组 6.8；数学三 P_{54}，B 组 7.9)]

微分方程 $(y^2+1)\mathrm{d}x=y(y-2x)\mathrm{d}y$ 的通解是________.

【分析】

三、二阶方程的求解

1. $y''+py'+qy=0$　p,q 为常数

(1) 写 $\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\Delta=p^2-4q$

(2) $\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\\ \Delta=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda\Rightarrow y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\lambda x}\\ \Delta<0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}\,i}{2}=\alpha\pm\beta i\Rightarrow y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\end{cases}$

2. $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\alpha x}P_m(x)$

$y_{通解}=y_{齐次通解}+y^*_{非齐次特解}$

(1) 照搬 1$\Rightarrow y_{齐次通解}$

(2) 设定 $y^*=\mathrm{e}^{\alpha x}Q_m(x)x^k$

一看:自由项中的 α

二算:$\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\lambda_{1,2}$

三比:$\begin{cases}\alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2\Rightarrow k=0\\ \alpha=\lambda_1 \text{ 或 } \alpha=\lambda_2\Rightarrow k=1\\ \alpha=\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow k=2\end{cases}$

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{59},A 组 8.7(数学二 P_{47},A 组 6.10;数学三 P_{52},A 组 7.9)]

微分方程 $y''+2y'+y=\operatorname{sh}x$ 的一个特解应具有形式(其中 a,b 为常数)　(　　)

A. $a\operatorname{sh}x$　　B. $a\operatorname{ch}x$

C. $ax^2\mathrm{e}^{-x}+b\mathrm{e}^x$　　D. $ax\mathrm{e}^{-x}+b\mathrm{e}^x$

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{60},A 组 8.17(数学二 P_{49},B 组 6.29;数学三 P_{53},A 组 7.33)]

求微分方程 $y''+5y'+6y=2\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

【分析】

四、应用

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{60},A 组 8.16(数学二 P_{47},A 组 6.27;数学三 P_{52},A 组 7.29)]

已知曲线 $y=y(x)$ 经过点$(1,\mathrm{e}^{-1})$,且在点(x,y)处的切线在 y 轴上的截距为 xy,求

该曲线方程的表达式.

【分析】