# 对拟阵的初步研究

浙江省杭州第二中学 刘雨辰

# 概览

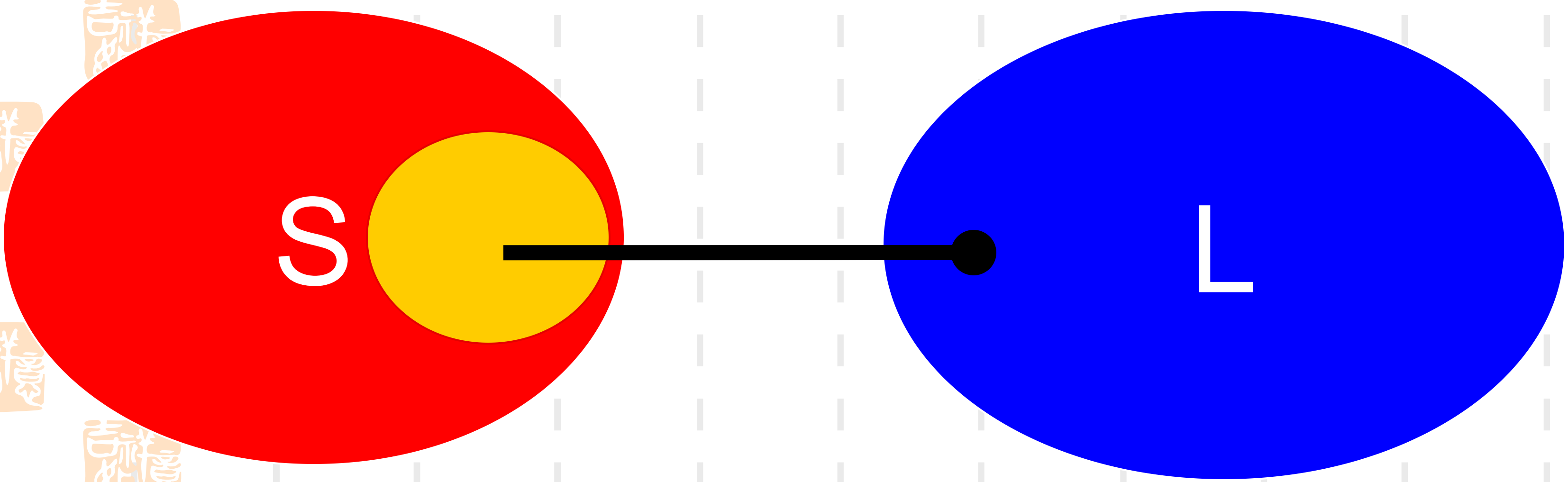
- 第一部分： 拟阵的基本概念
- 第二部分： 拟阵的最优化问题
- 第三部分 ： 一个任务调度问题
- 第四部分： 拟阵实例
- 拓展部分： Shannon开关游戏

# 第一部分：拟阵的概念

**拟阵**是一个二元组 $M=(S,L)$

1、S是一个**有限集**。

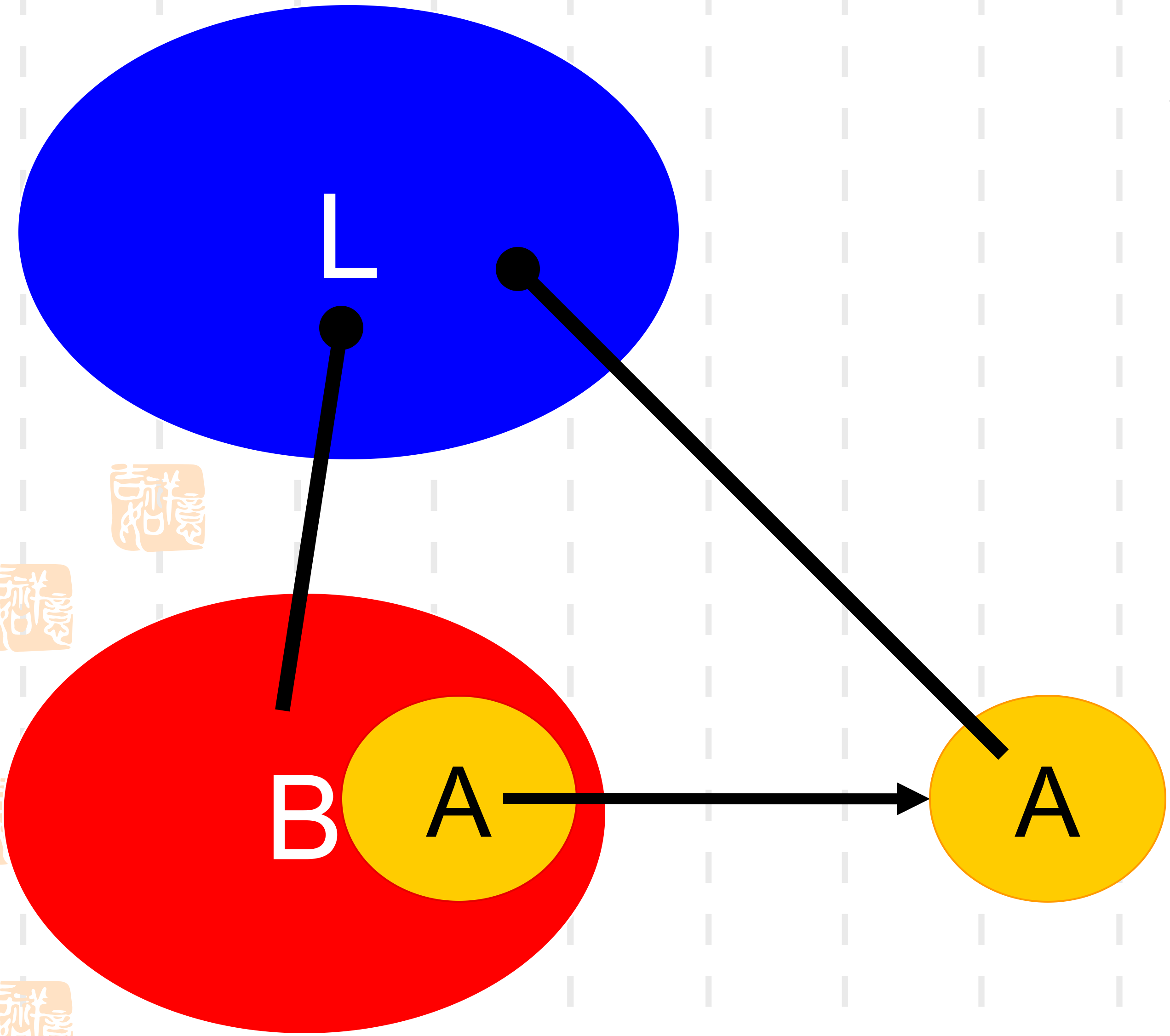
2、L是个以集合作为元素的集合,且它的元素必须是S的子集



3、遗传性：对任意 $B \in L$

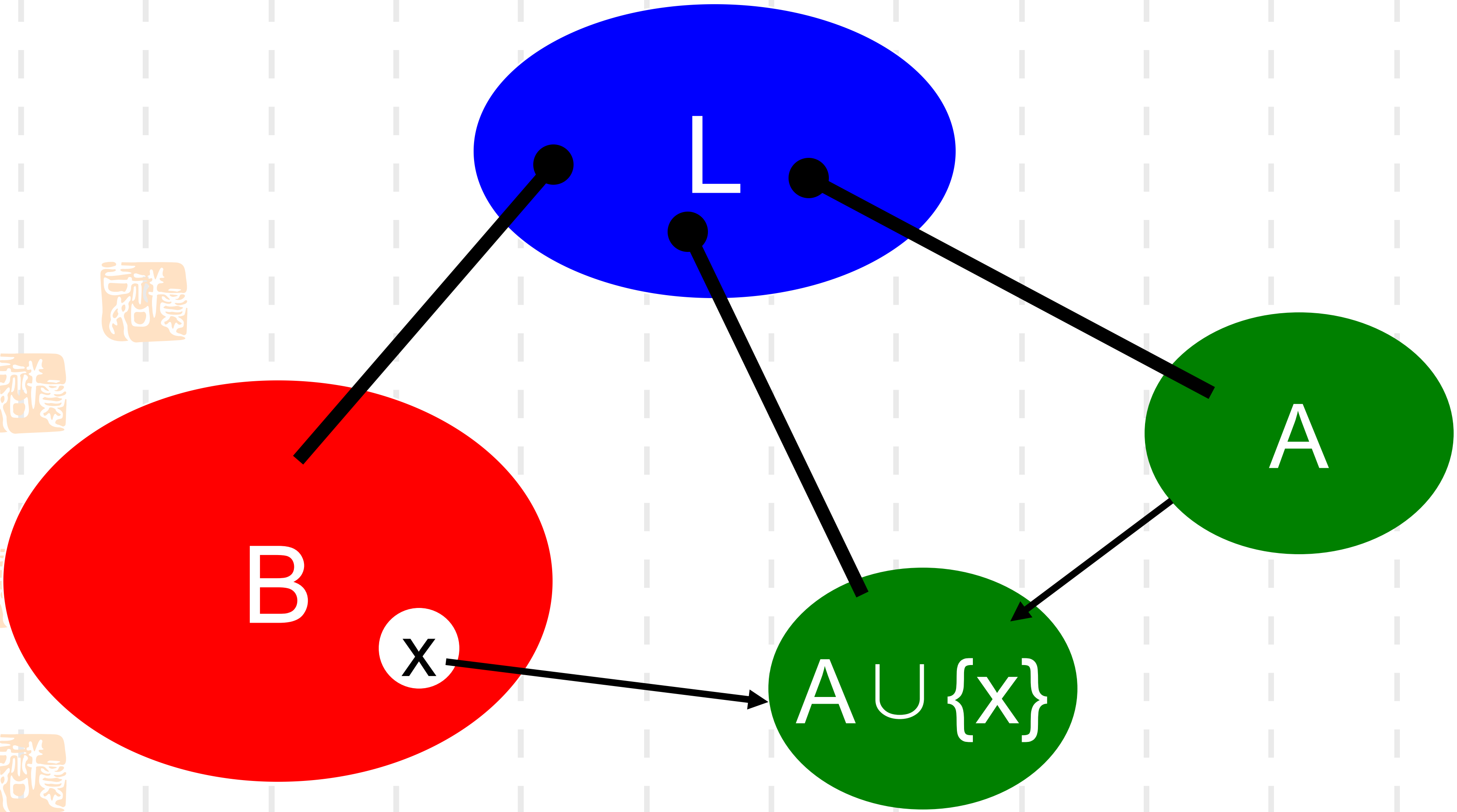
任意 $A \subseteq B$

有 $A \in L$



4、**交换性：**对任意 $A \in L, B \in L,\ |A| < |B|$

存在一个 $x \in B - A$，使 $A \cup \{x\} \in L$



# 定义

**拟阵**是一个二元组 $M=(S,L)$，满足:

1、S是一个**有限**集。

2、L是由S的一些子集组成的**有限非空**集

3、**遗传性**：对**任意** $B\in L$，**任意** $A\subseteq B$ 有 $A\in L$

4、**交换性**：对**任意** $A\in L, B\in L, |A|<|B|$ 存在一个 $x\in B-A$，使 $A\cup\{x\}\in L$

# 定义

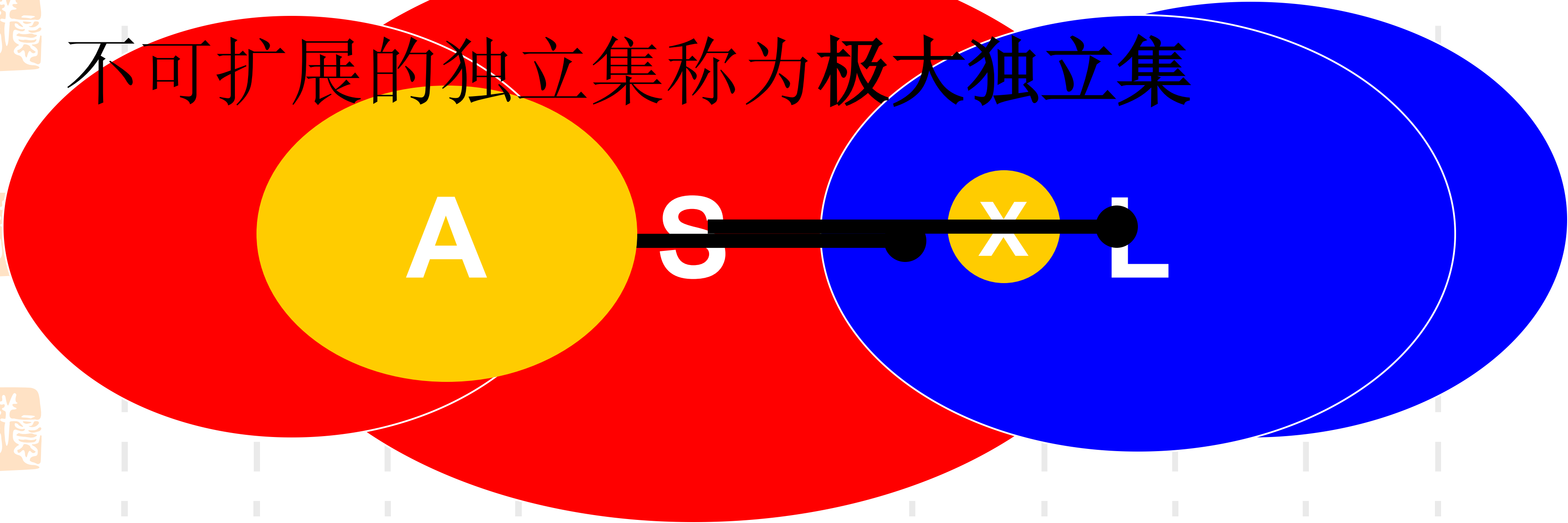
对于 $U \subseteq S$ 如果 $U \in L$ 那么称U为**独立集**

对于独立集A,若存在 $x \in S - A$ 满足

$A \cup \{x\} \in L$ 则称A为**可扩展**的

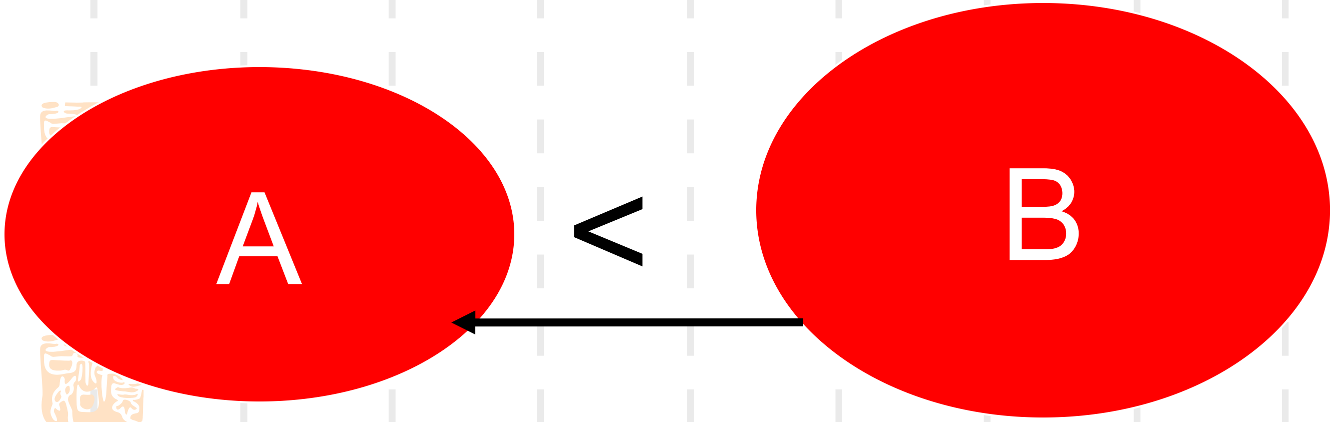
满足此条件的x称为A的一个可扩展元素

不可扩展的独立集称为**极大独立集**



# 定理:拟阵的极大独立集大小相同

根据交换性
必然可以用B中一元素扩展A



# 实例:图拟阵

考虑对于无向图 $G=(V,E)$

定义 $M=(S,L)$:

1、S是边集E

2、$L=\{x : x\subseteq E且x组成的图无环\}$

无环的边集的子集必然无环,故满足遗传性

如果边集A的边数比边集B少，

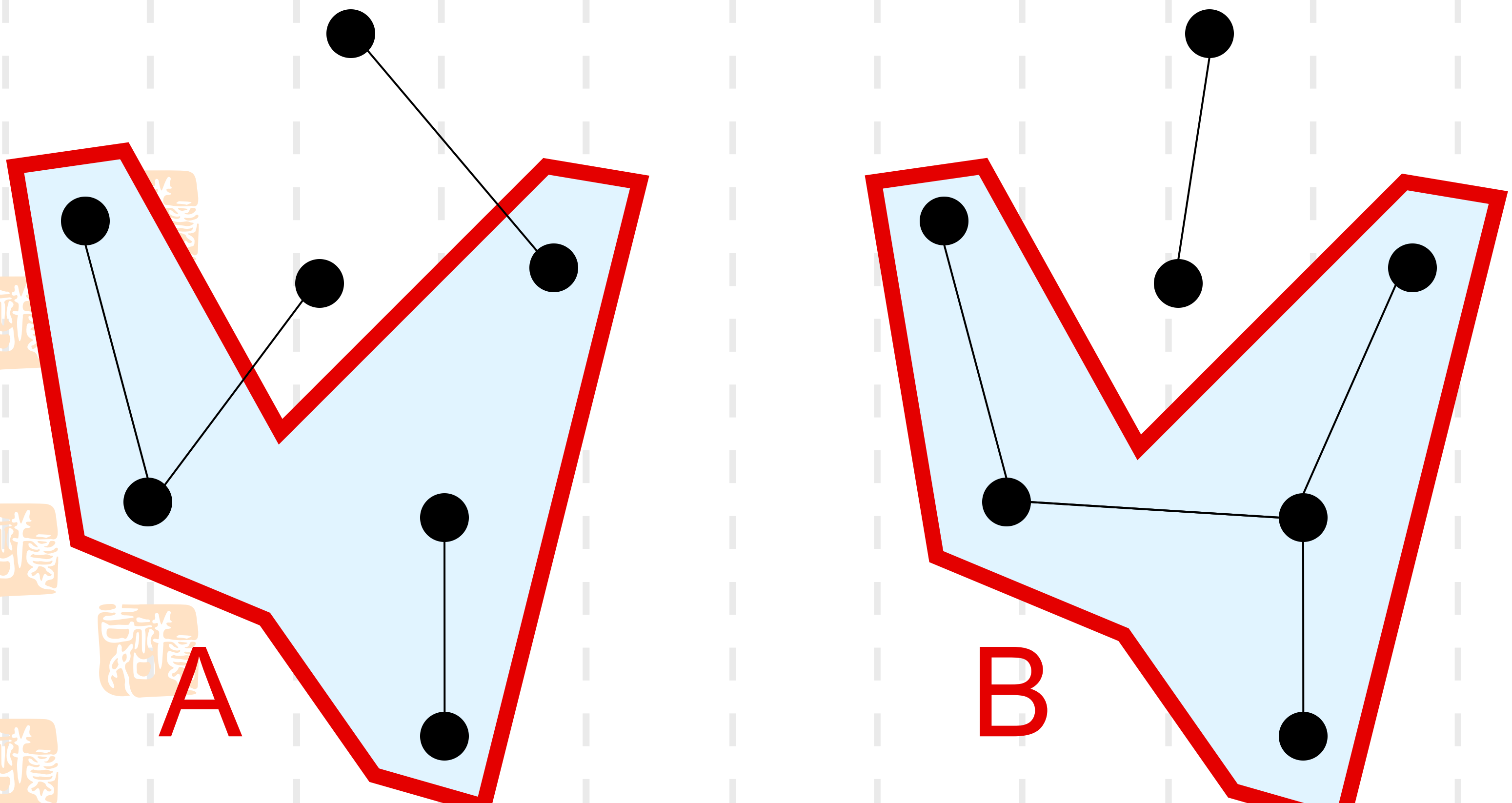
则A形成的连通分量数目比B多，

所以B中存在一个连通分量，该分量在A中不连通

则该连通分量中必然存在一条边，放入A中不形成环

该边显然属于B-A。交换性成立

M是拟阵，称为图拟阵



# 第二部分：拟阵上的最优化问题

# 问题提出

对于拟阵 $M=(S,L)$

S的元素x有一个正整数权值w(x)

S的任意子集U的权值 $w(U)=\sum_{x\in U} w(x)$

目标:求权值最大独立集。

# 贪心算法

Greedy(M,w)

A := 空集

根据w按递减顺序对S排序

for 每个 $x \in S$ 根据权$w(x)$ 的递减顺序 do

if ( $A \cup \{x\} \in L$ ) then $A := A \cup \{x\}$

return A

# 时间复杂度

| | |
|---|---|
| 排序 | $\Theta(n\log n)$ |
| 贪心 | $\Theta(n)$ 次判断 |
| 若判断需 | $\Theta(f(n))$ |
| 总复杂度 | $\Theta(n\log n + n\times f(n))$ |

# 正确性证明

- 只需证明在算法的每一步A都是某个最优解的子集，那么当算法结束时A就是一个最优解
- 运用归纳思想
- 归纳基础:初始时A为空,满足要求
- 归纳:只需证明一个最优解的子集A经过一次循环后仍满足要求.

x

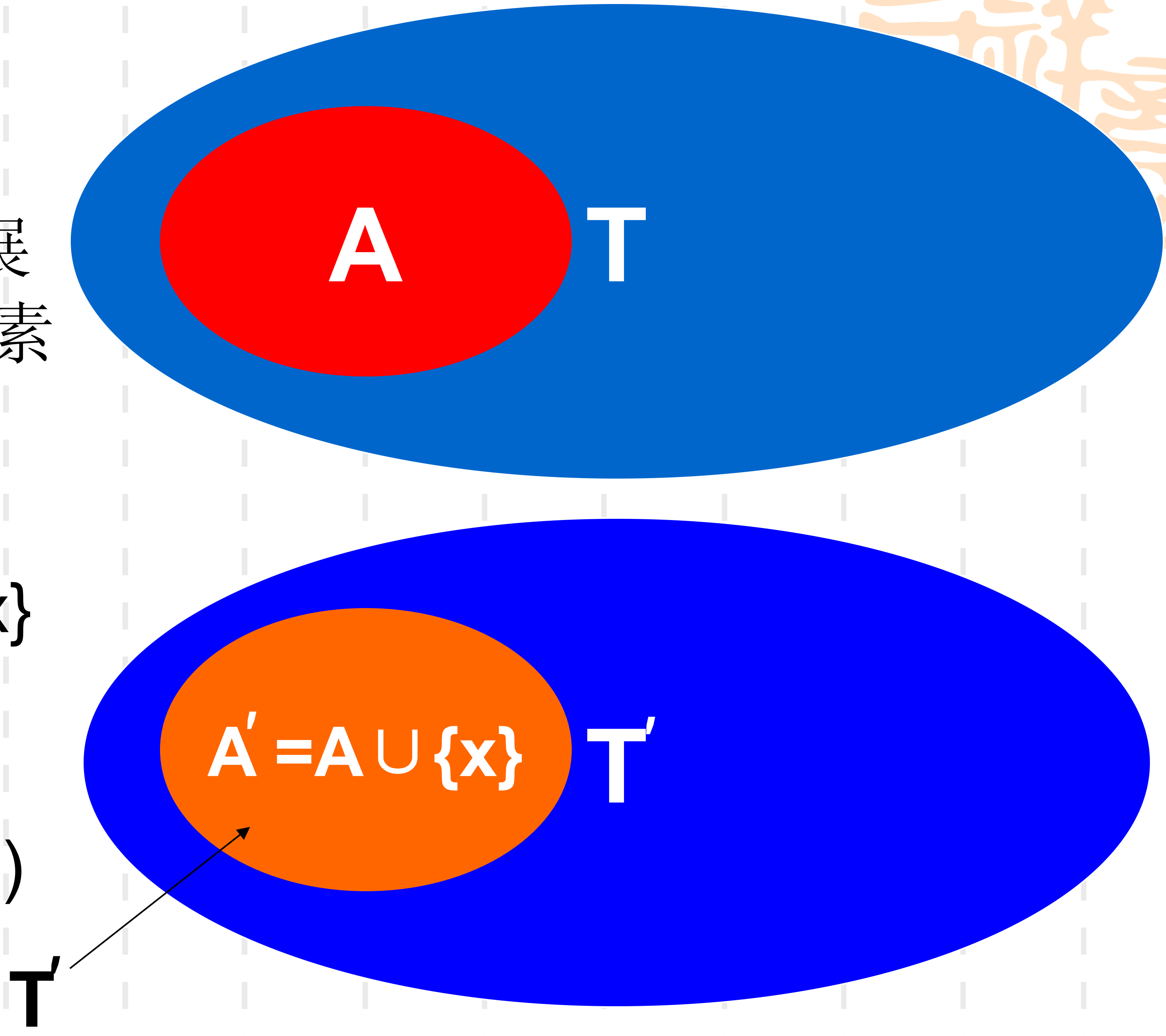
能使A扩展的最大元素

y

$T' = T - \{y\} + \{x\}$

$w(y) \leqslant w(x)$

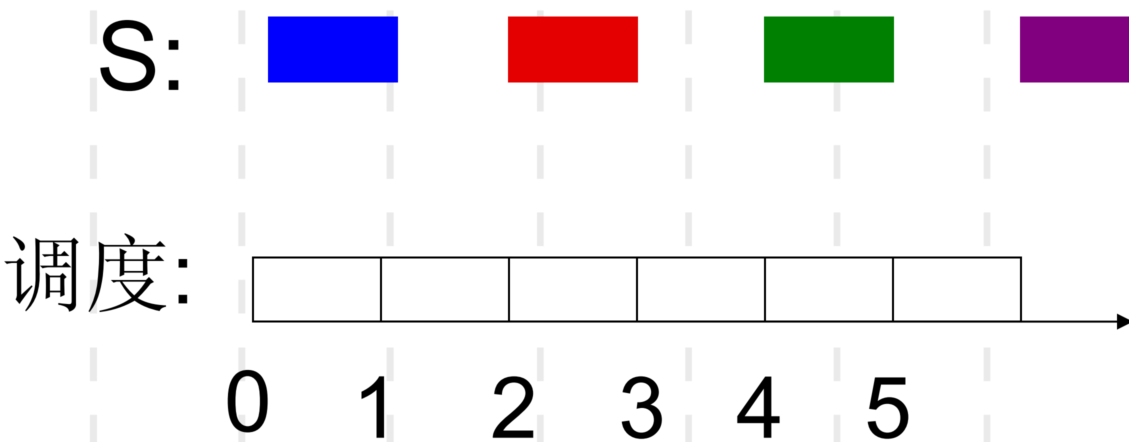
$w(T') \geqslant w(T)$



# 第三部分 任务调度问题

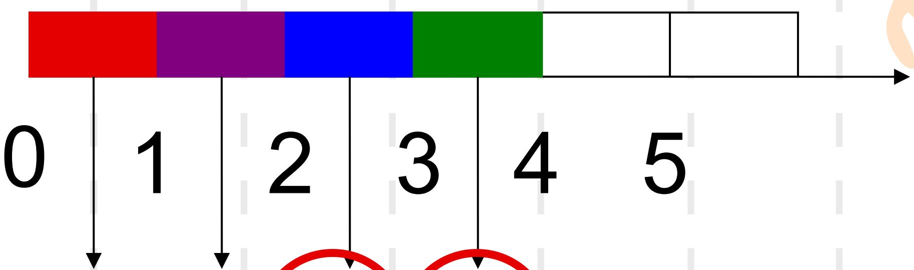
# 问题提出

- 给定一个单位时间任务的集合S
- S有n个任务1,2,…,n
- 对S的一个**调度**规定了各任务执行的顺序。
- 该调度第i个任务开始于时刻i-1,结束于时刻i



# 问题提出

调度:




$d_i$ : 2 3 1 3 罚款:6+8=14

$w_i$ : 9 7 6 8

n个整数 $d_1, d_2, \dots, d_n \ (1 \le d_i \le n)$

$d_i$ 表示第i个任务的截止时刻

n个正整数 $w_1, w_2, \dots, w_n$

$w_i$ 表示第i个任务的罚款

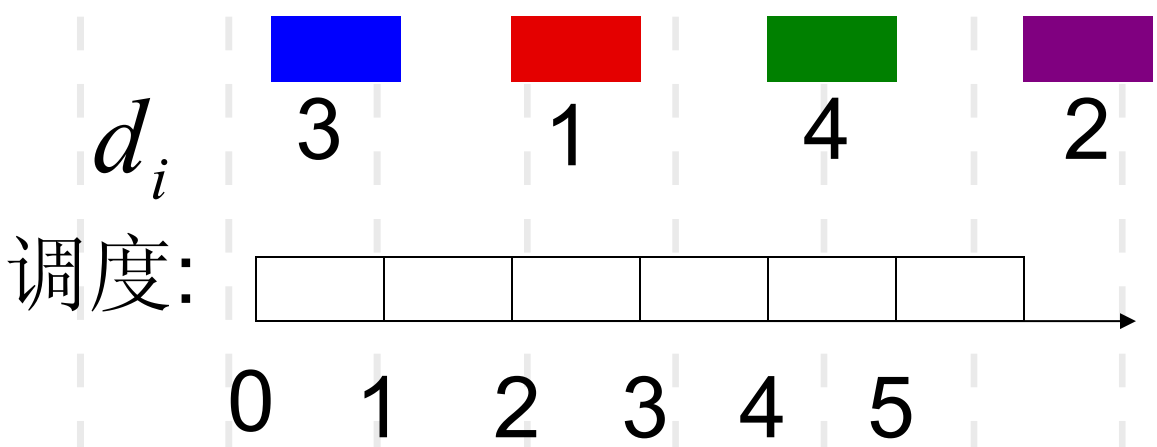
如果任务i的结束时刻超过截止时刻

则要交付 $w_i$ 的罚款。

求一个调度，使得罚款最少。

# 分析

- 考虑这么一个问题：对于S的子集A，是否存在调度方案使A中的任务都被完成。
- 将A按任务的截止时刻从小到大排序作为调度方案,如果按此调度无法全部完成A的任务，则其他任意调度方案都无法完成。



# 拟阵结构

- 对于给定的任务集合A，能够有效地判断这些任务能否全部完成
- 能全部完成的任务集合A称为可行的

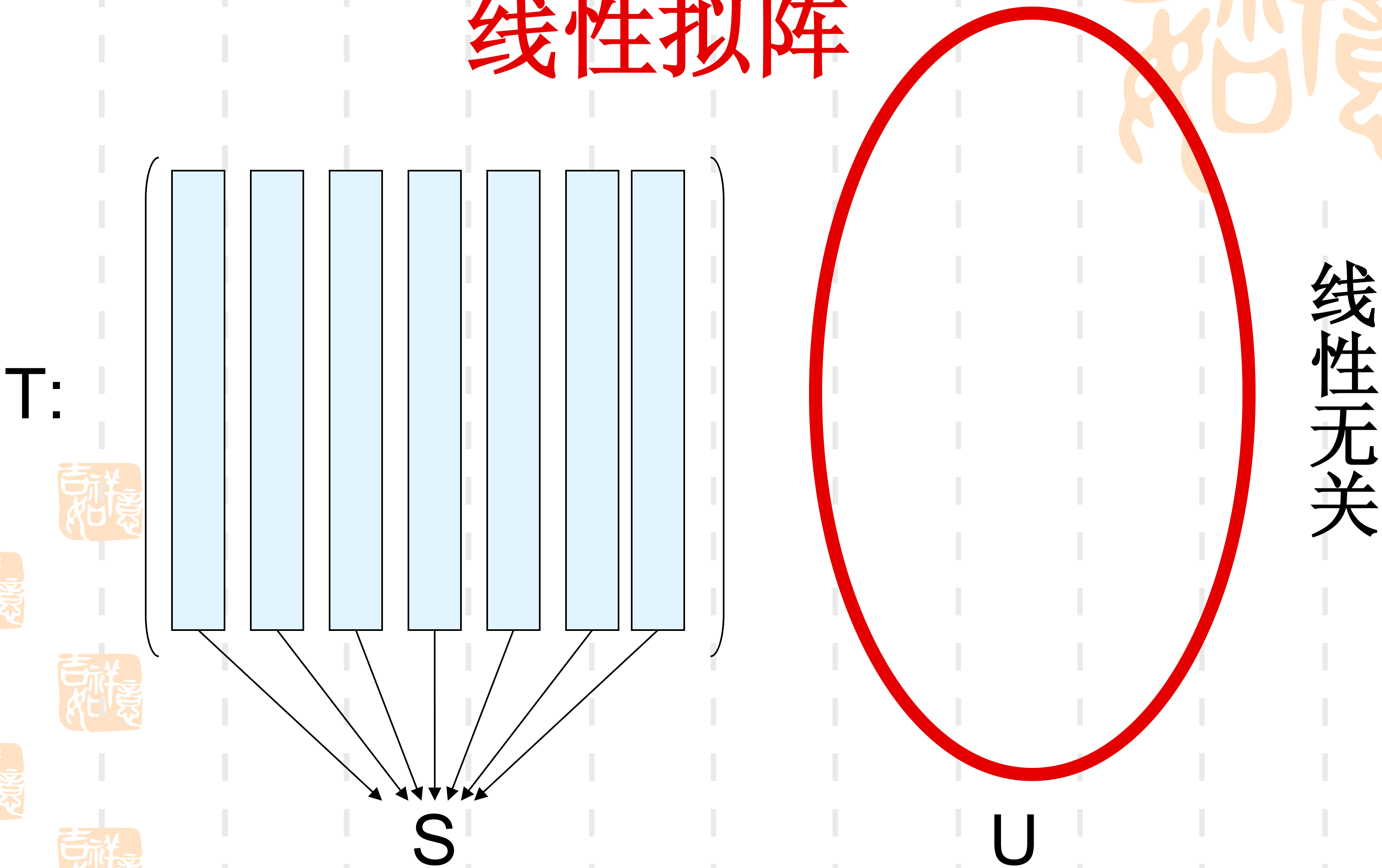
定义 $M=(S,L)$

S就是所有任务的集合

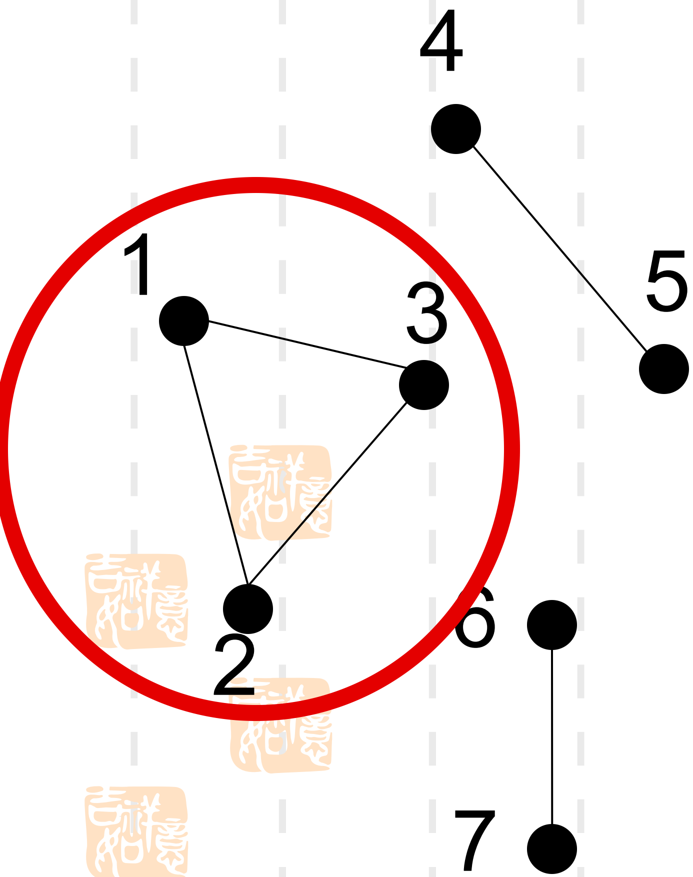
$L=\{x: x\text{是}S\text{的子集且}x\text{是可行的}\}$

# 第四部分：拟阵实例

# 线性拟阵



# 图拟阵和线性拟阵

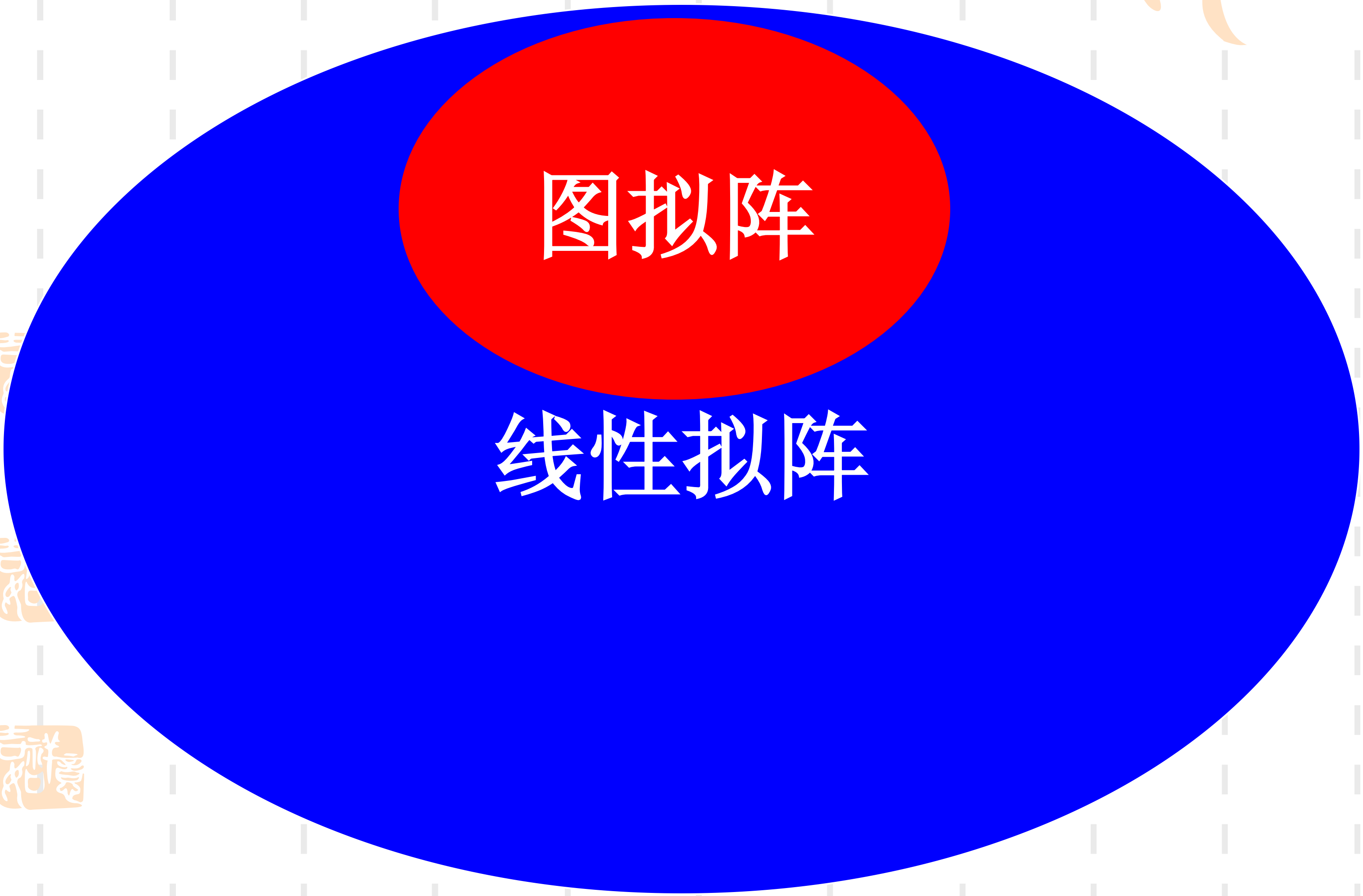



G=(V,E)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 |
| 3 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |

关联矩阵

# 图拟阵和线性拟阵



# 匹配拟阵

对于无向图 $G=(V,E)$

定义 $M=(S,L)$

S=V

S的子集A是独立集

当且仅当

A中的点能被该图的一个匹配覆盖

# 拓展部分:Shannon开关游戏浅谈

# 总结

拟阵

遗传性

交换性

本

构造 相辅相成 反证

# 总结

最小生成树问题

任务调度问题

线性无关

共性 → 拟阵

拟阵很美

谢谢

# 最小化问题转化为最大化问题

最小化问题 ⟶ 最大化问题

(12 -3 19 7 5 8)

(-12 3 -19 -7 -5 -8) + +1

(8 23 1 13 15 12)