基于连通性状态压缩的动态规划问题

长沙市雅礼中学　陈丹琦

Email： skyfish_cdq@163.com

引入

- 我的论文针对其中的一类问题进行探讨和研究——状态中需要记录若干个元素之间的连通情况，称为基于连通性状态压缩的动态规划问题

状态压缩动态规划

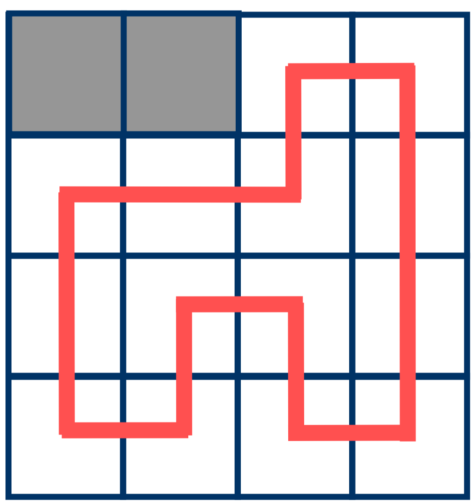
以集合信息为状态

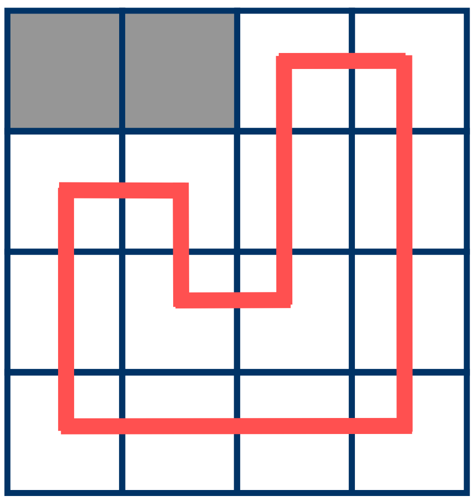
状态总数为指数级

【例】Formula 1 (Ural1519)

- 一个 $m * n$ 的棋盘
- 有的格子存在障碍
- 求经过所有非障碍格子的哈密顿回路个数

$$m, n \leqslant 12$$





初步分析

- 问题特点：
  - 数据规模小 $m, n \le 12$
  - 棋盘模型

~~搜索~~？ $O((mn)!)$

划分阶段：从上到下，从左到右逐格递推

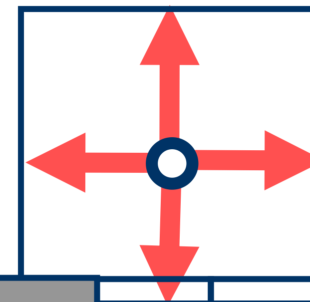
基本概念：插头，轮廓线

状态压缩！

基本概念

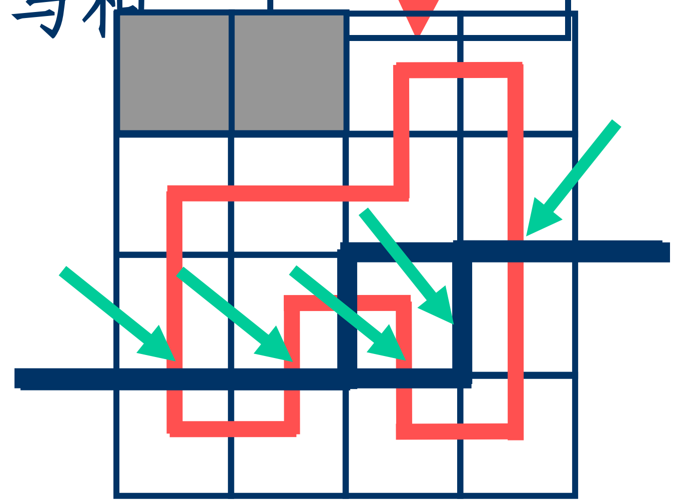
- 插头

一个格子某个方向的插头存在表示这个格子在这个方向与相邻格子相连.



- 轮廓线

已决策格子和未决策格子的分界线



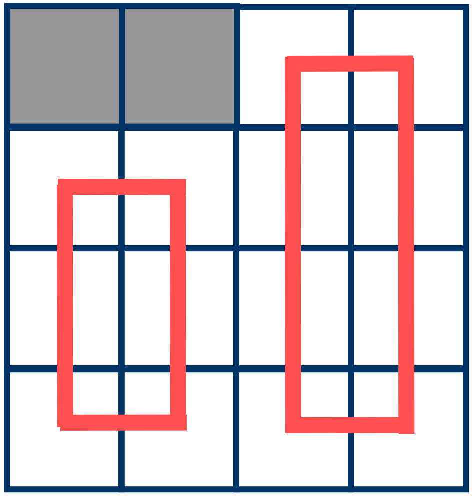
轮廓线上方与其相连的有$n+1$个插头，包括n个下插头和1个右插头.

初步分析

- 问题特点:
  - 数据规模小
  - 棋盘模型

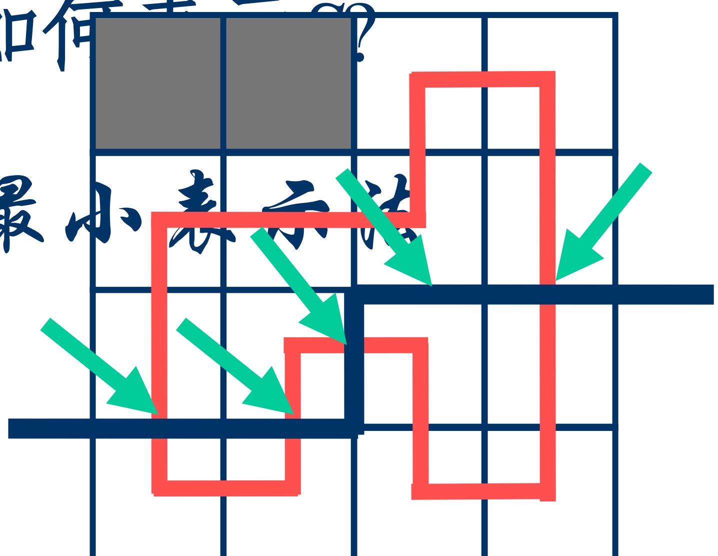
    每个插头是否存在
  - 所有的非障碍格子连通

    插头之间的连通性!



确立状态

- 设 $f(i,j,S)$ 表示转移完 (i,j)，轮廓线上从左到右 $n+1$ 个插头是否存在以及它们的连通性为 S 的方案总数.
- 无插头标记0，有插头标记一个正整数
- 连通的插头标记相同的数字
- 从左到右依次标记
- 如何表示 S?
- 最小表示法



1	2	2	0	1

$f(3,2,\{1,2,2,0,1\})$

状态转移

- 考虑每个格子的状态，根据上一个状态$O(n)$扫描计算出新的最小表示状态.
- 对于$m = n = 12$的无障碍棋盘的极限数据，扩展状态总数为1333113，问题已经基本解决.
- 本题为一个棋盘模型的**简单回路**问题.
  针对问题的特殊性，是否有更好的方法呢?

进一步分析

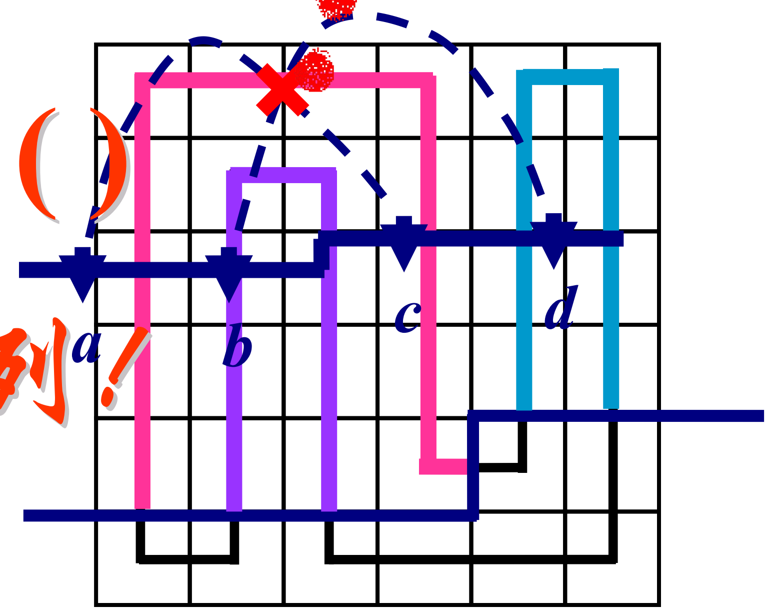
- 每个非障碍格子恰好有2个插头
- 轮廓线以上由若干条互不相交的路径构成
- 从左到右一定不会出现4个插头a, b, c, d,
- 每条路径的两端对应两个插头
- a, c配对，b, d配对

插头不会交叉

( ) (( )) ( )

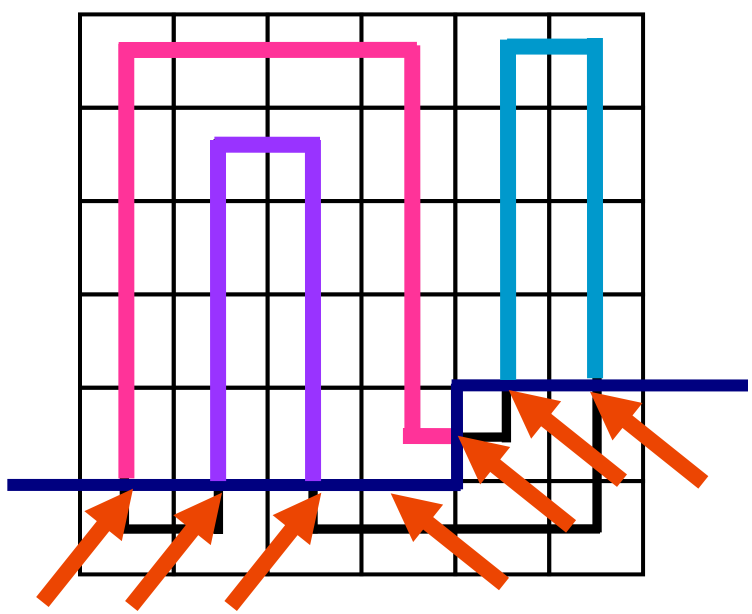
插头两两匹配

括号序列!



括号表示法

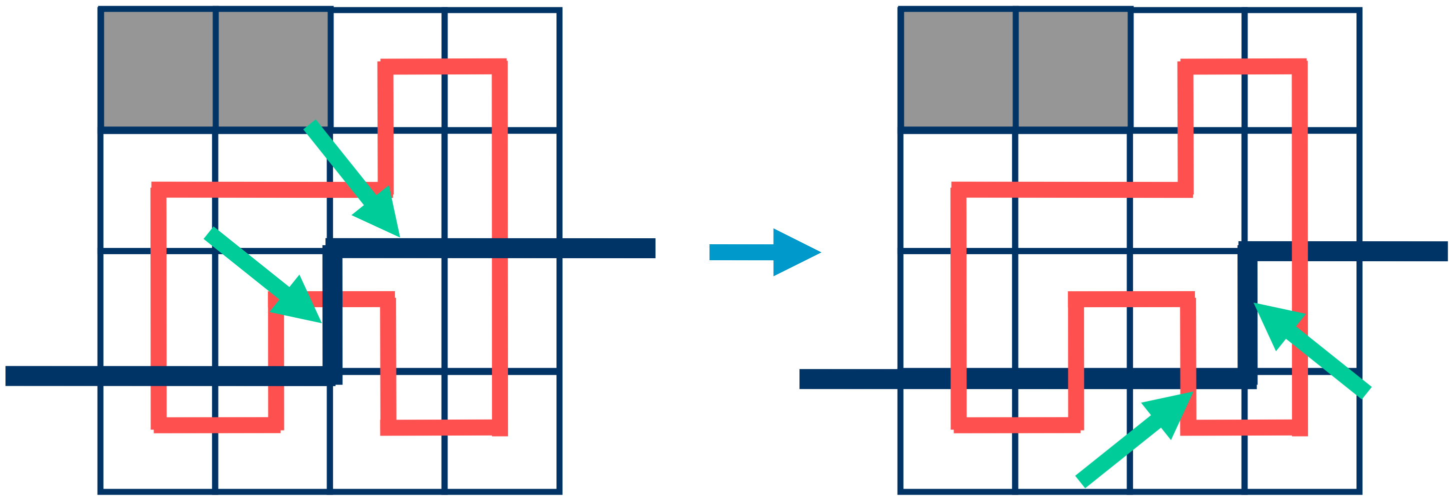
3进制
- 0: 无插头状态，用 # 表示
- 1: 左括号插头，用 (表示
- 2: 右括号插头，用) 表示



(( ) #) ( )

$(1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2)_3$

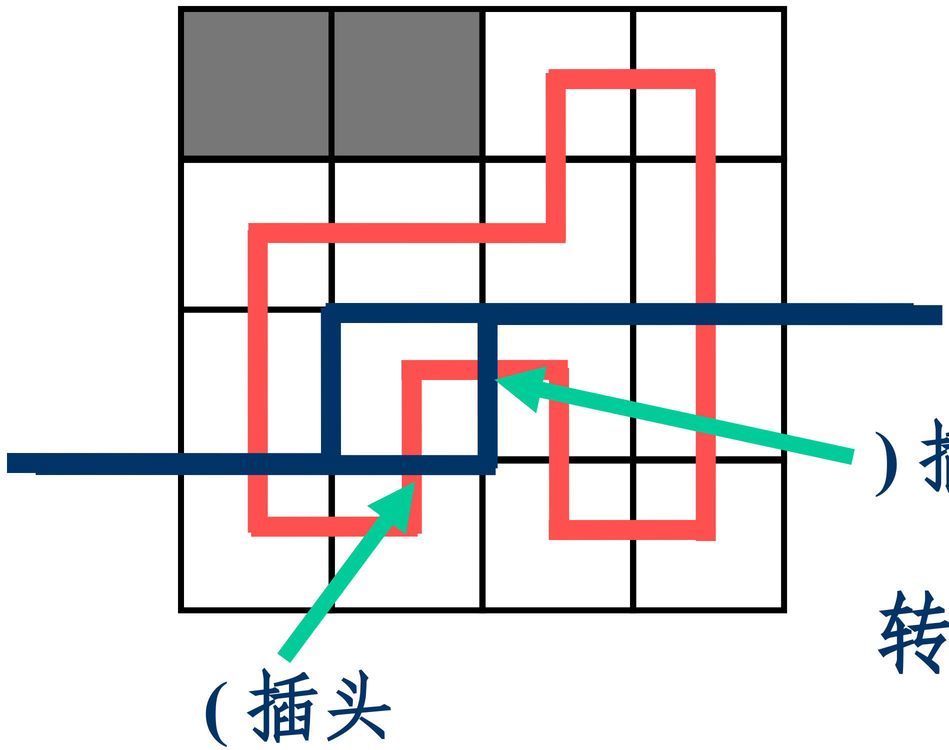
状态的转移



- 每次转移相当于轮廓线上当前决策格子的左插头改成下插头，上插头改成右插头的状态.

Case 1

没有上插头和左插头，有下插头和右插头，相当于构成一个新的连通块.



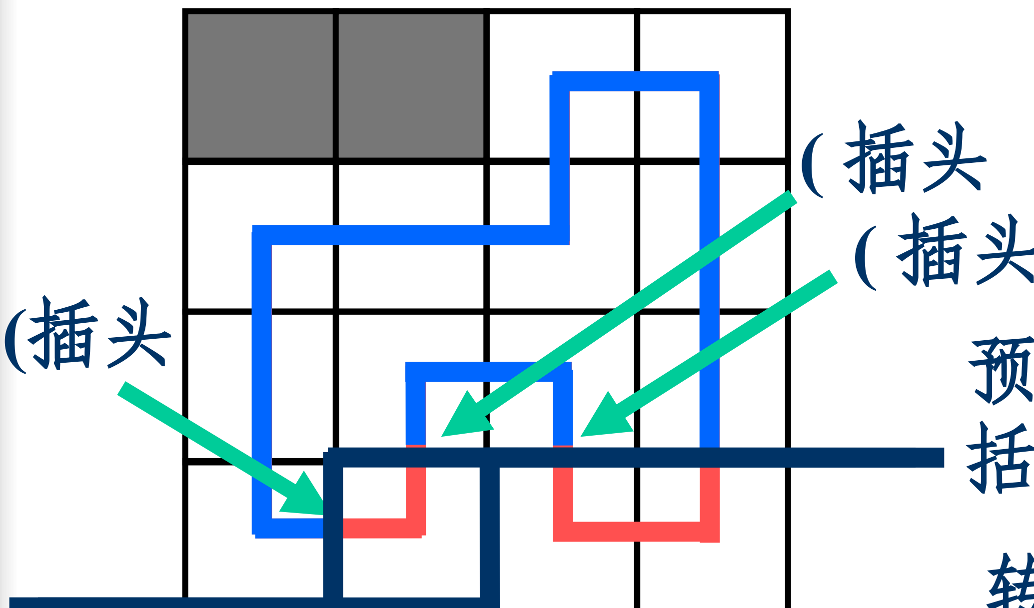
$$
\begin{array}{ccccc}
(& \# & \# & \# &) \\
 & \downarrow & \downarrow & & \\
(& (&) & \# &)
\end{array}
$$

转移时间：$O(1)$

Case 2

有上插头和左插头，这种情况下相当于合并两个连通分量

Case 2.1 上插头和左插头均为 (插头



(( ))

(# # ( )

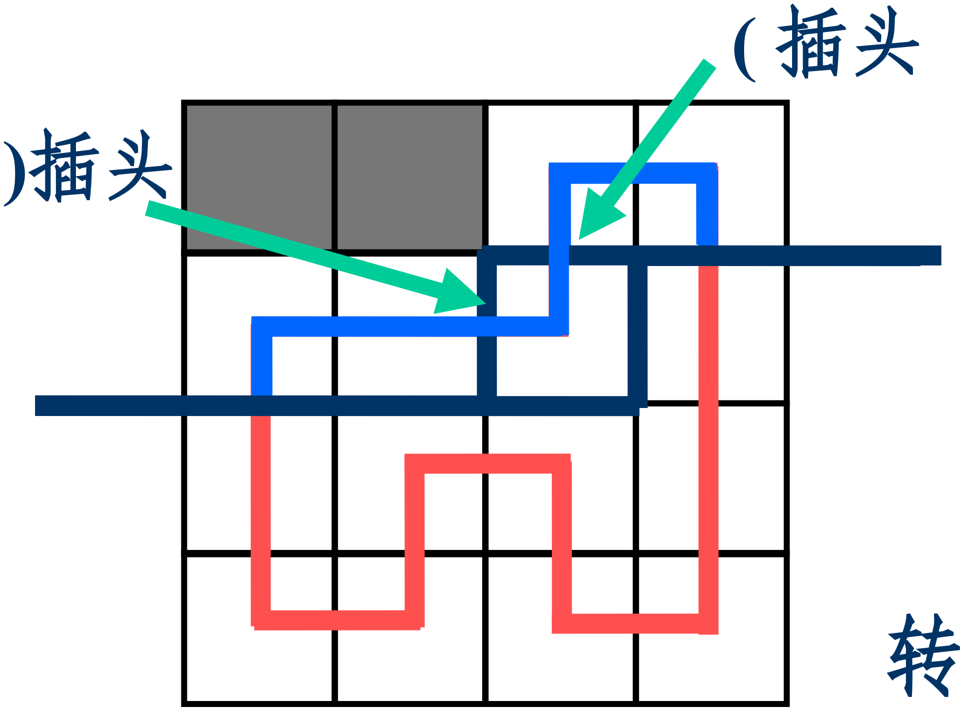
预处理每个状态每的括号所匹配的括号

转移时间：$O(1)$

Case 2

有上插头和左插头

Case 2.2 左插头为)插头，上插头为(插头



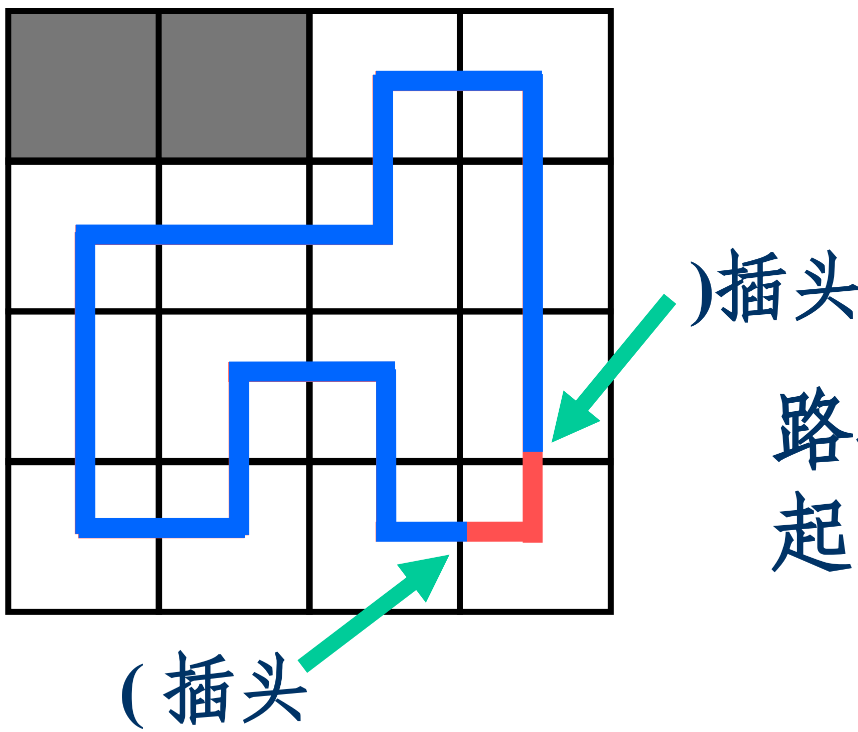
$$\begin{array}{cccc} (& \# &) & (&) \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ (& \# & \# & \# &) \end{array}$$

转移时间：$O(1)$

Case 2

有上插头和左插头

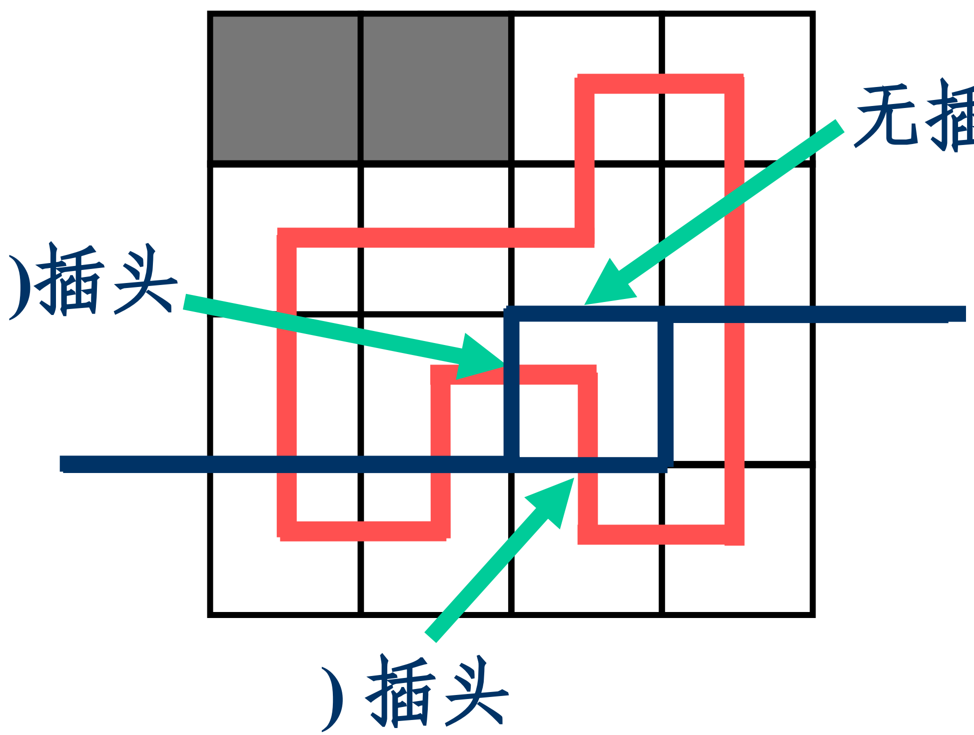
Case 2.3 左插头为(插头，上插头为)插头



路径的两端连接起来形成回路

Case 3

上插头和左插头恰好有一个，这种情况相当于延续原来的连通分量



无插头 (( ) #)

↓ ↓

(( ) #)

转移时间：$O(1)$

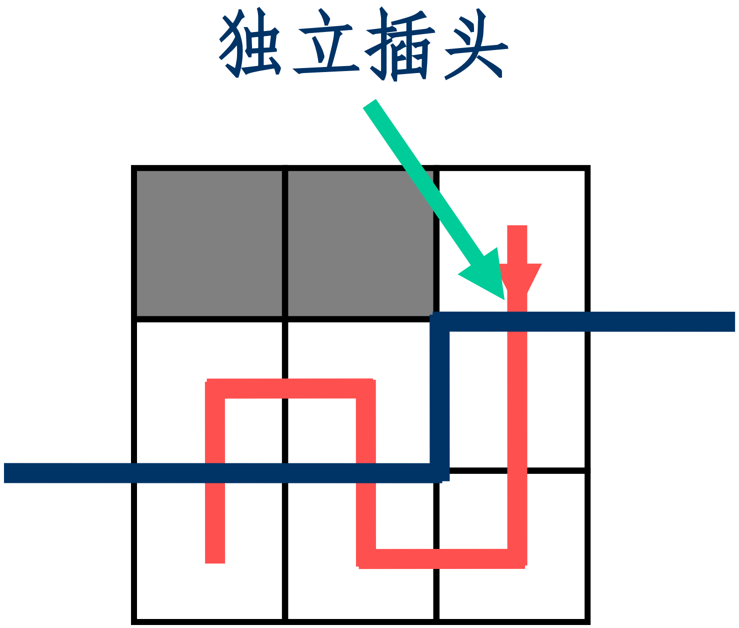
实验比较

测试数据	最小表示 7Based	最小表示 8Based	括号表示 3Based	括号表示 4Based
$m=n=10$ 无障碍	31ms	15ms	0ms	0ms
$m=n=11$ (1,1)为障碍	187ms	109ms	46ms	31ms
$m=n=12$ 无障碍	873ms	$\boxed{\textbf{499ms}}$	265ms	$\boxed{\textbf{140ms}}$

建议使用2^k进制，位运算效率高

拓展

- 如果求经过所有非障碍格子的**哈密顿路径**的个数呢?



3进制→4进制

- 0 → 无插头状态
- 1 → 左括号插头
- 2 → 右括号插头
- 3 → 独立插头

广义的括号匹配

- 如果一个连通块只有1个插头或大于2个插头呢?
- 括号表示法需要满足
  连通块内恰好有2个插头.
- 对于一个大于2个插头的连通块

  最左边的插头标记为 (

  最右边的插头标记为)

  中间的插头标记为)(

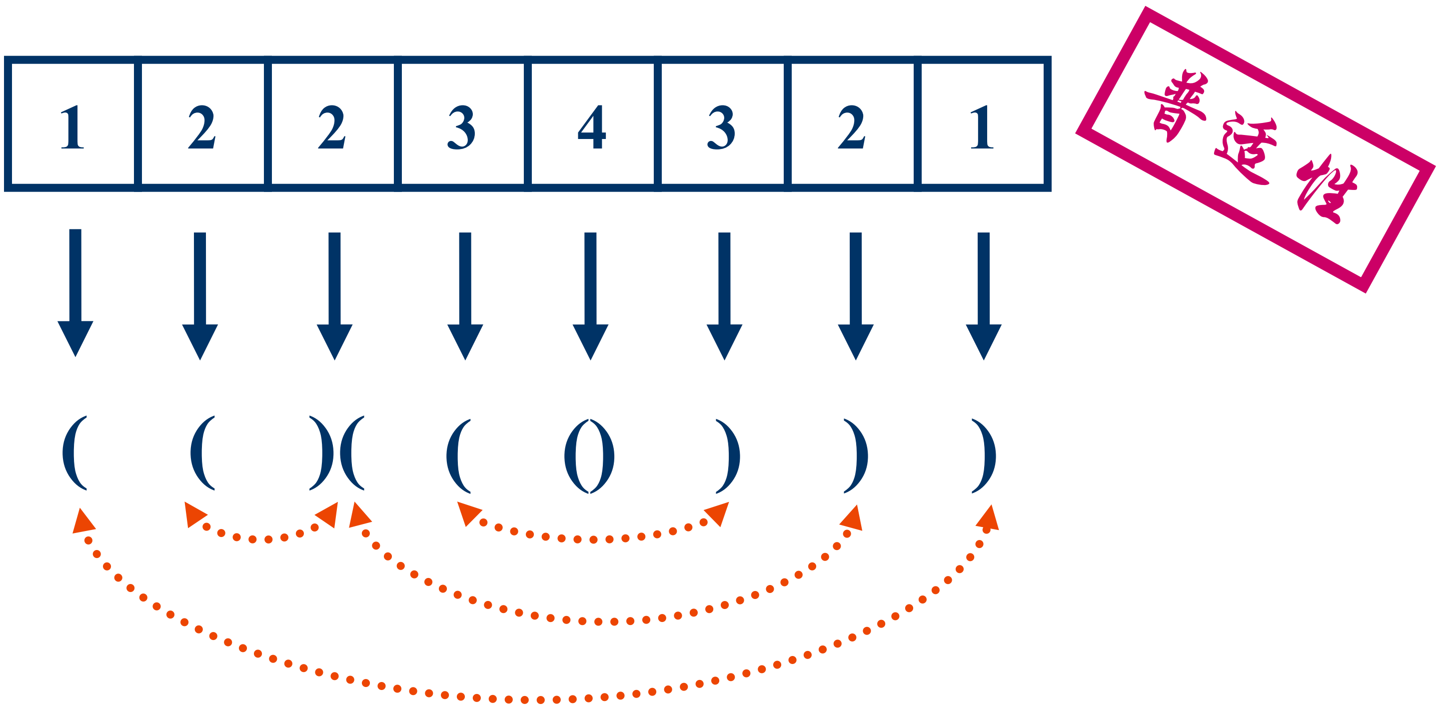
特殊性

- 单独为一个连通块的插头标记为 ()

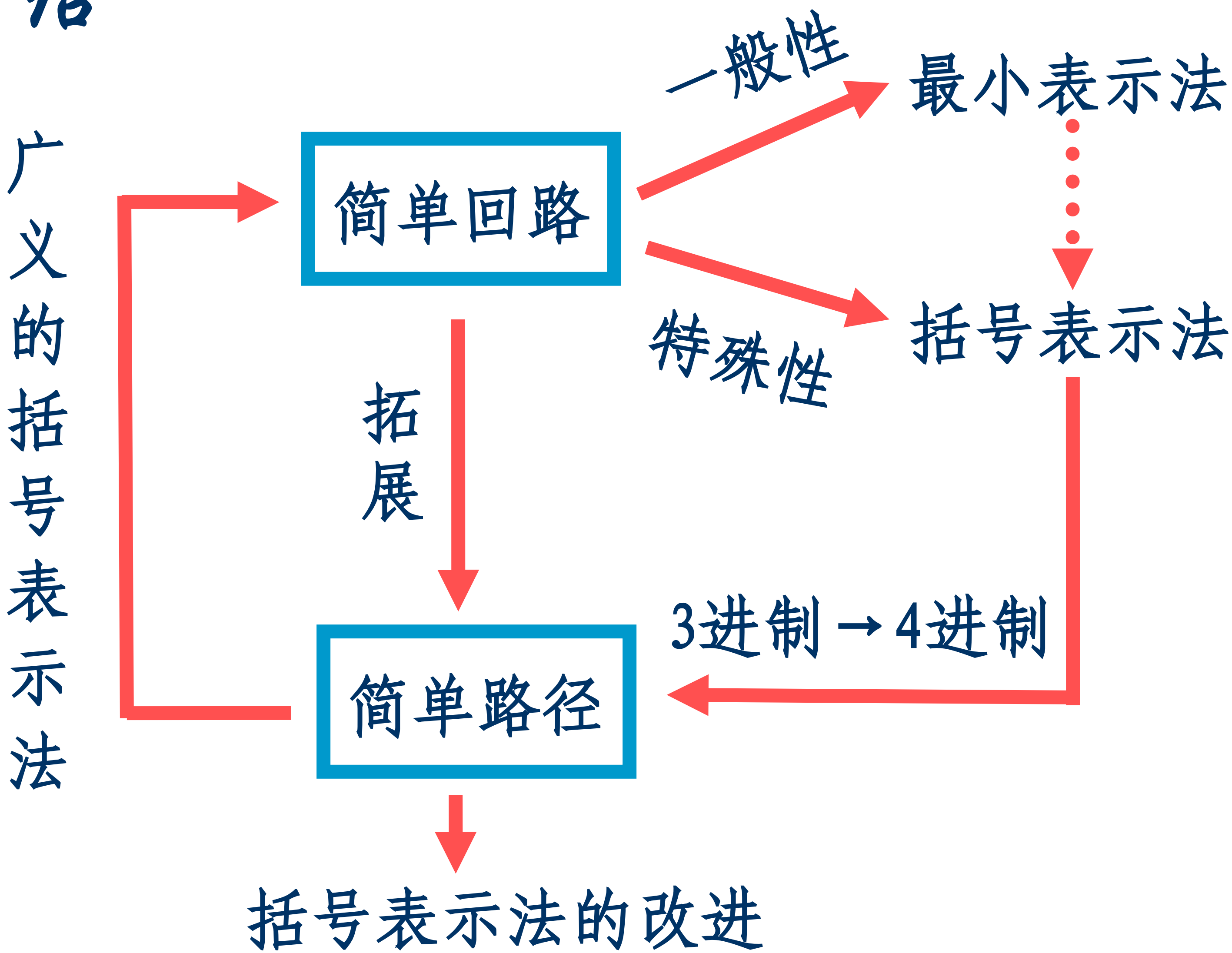
广义的括号表示法

广义的括号表示法

- 左括号与右括号匹配对应的插头连通
- 例：最小表示法 → 广义括号表示法



总结



全文研究内容

- 一类简单路径问题

  Formula 1(Ural1519)

  Formula 2(改编自Formula 1)

- 一类棋盘染色问题

  Black & White(Uva10532)

- 一类基于非棋盘模型的问题

  生成树计数 (NOI2007)

- 一类最优性问题的剪枝优化

  Rocket Mania (Zju2125)

Thank you for listening!

Questions are welcome.

棋盘染色问题

- k连通块问题
- 记录轮廓线上n个格子的连通性和染色情况.
- 相邻的格子是否相连取决于两个格子的颜色是否相同.

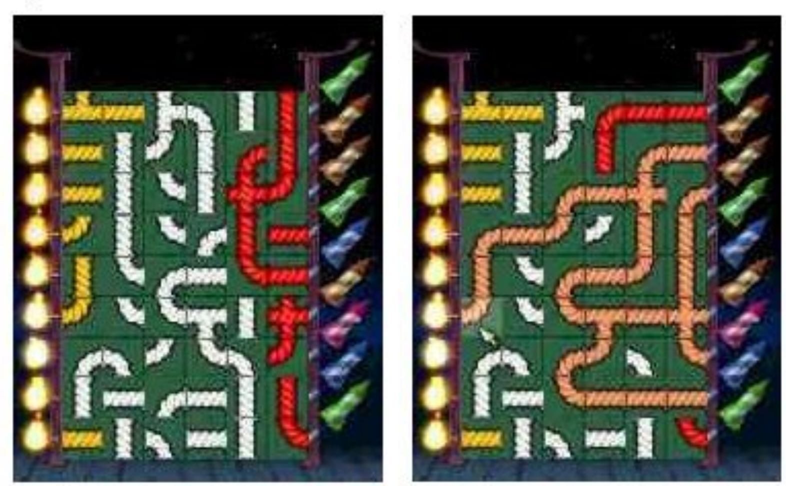
棋盘与非棋盘问题的共通点

- 存在一个序，在这个序中有边相连的点的距离不超过k.
- k一定是一个比较小的数，以这k个数为轮廓线确立状态.
- Formula 1中点的序即为从左到右，从上到下，$k = n$.
- Noi2007的生成树计数一题, 序为$1 .. n$, 有边相连的点距离不超过5.

Rocket Mania

- 一个9 * 6的棋盘, 左边9根火柴, 右边9根火箭. 每个格子可能为空格,也可能为一段管道.
- 管道有4种:

- 点燃左边第X根火柴，要求旋转每个管道使得发射的火箭尽可能的多.



Analysis

- 状态：$f[i][j][S][Fire]$
- 剪枝一：如果没有一个插头被火柴点燃，那么这个状态可以舍去.
- 剪枝二：如果一个插头没有被火柴点燃，并且这个插头为一个独立的连通块，那么这个插头为无效插头，可以设置为无效插头状态.

Analysis

- 状态：$f[i][j][S][Fire]$
- 剪枝三：最优性剪枝，对于一个(i,j)选择Fire中包含1最多的状态Best，如果一个状态的所有插头在Best中不仅存在而且都被火柴点燃，那么这个状态就可以舍去.

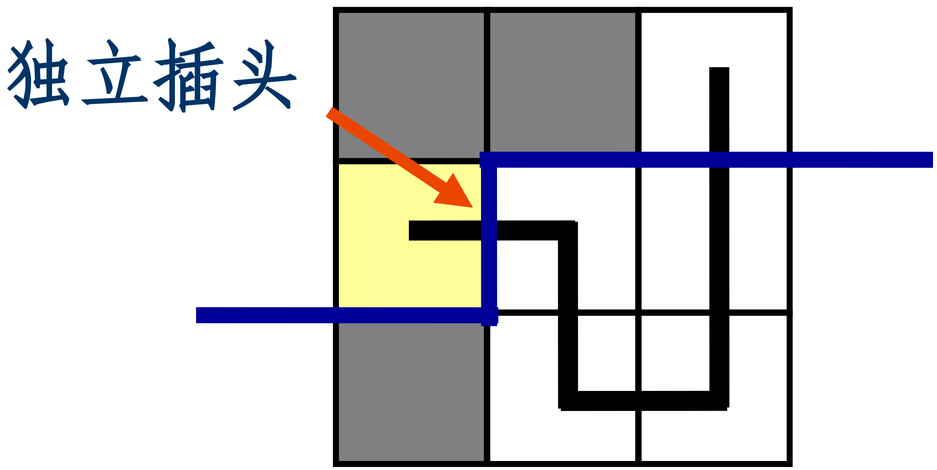
问题的特点

- 数据规模中某一维或某几维非常小，这是状态压缩的基础.
- 需要满足动态规划的基本性质：最优性原理和无后效性.
- 它与图论模型有着密切的关联，问题本身与连通性有关或者隐含着连通信息.

哈密顿路径的转移

- 考虑与独立插头有关的几种转移:

  I. 上插头和左插头都不存在

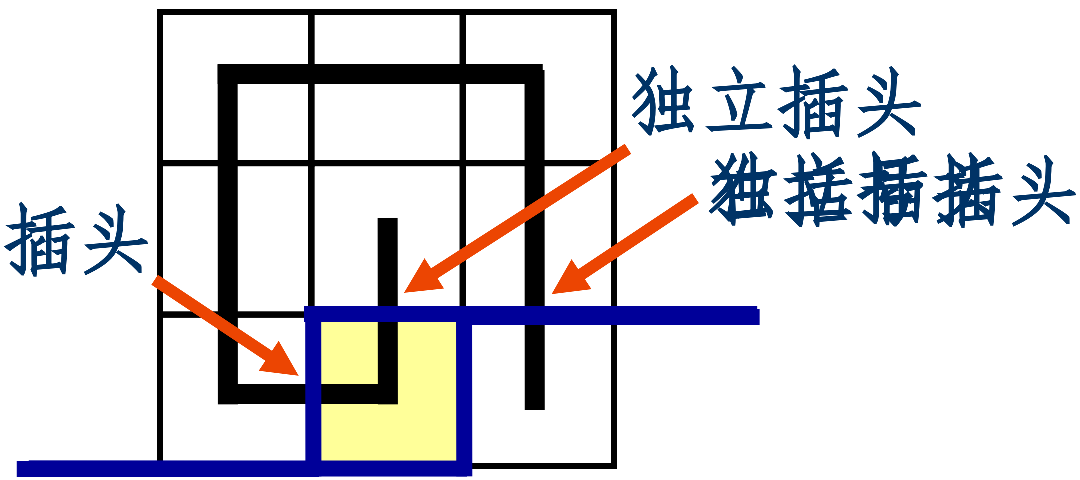


一个右插头或下插头成为了路径的一端.

哈密顿路径的转移

- 考虑与独立插头有关的几种转移:

  II. 上插头和左插头都存在

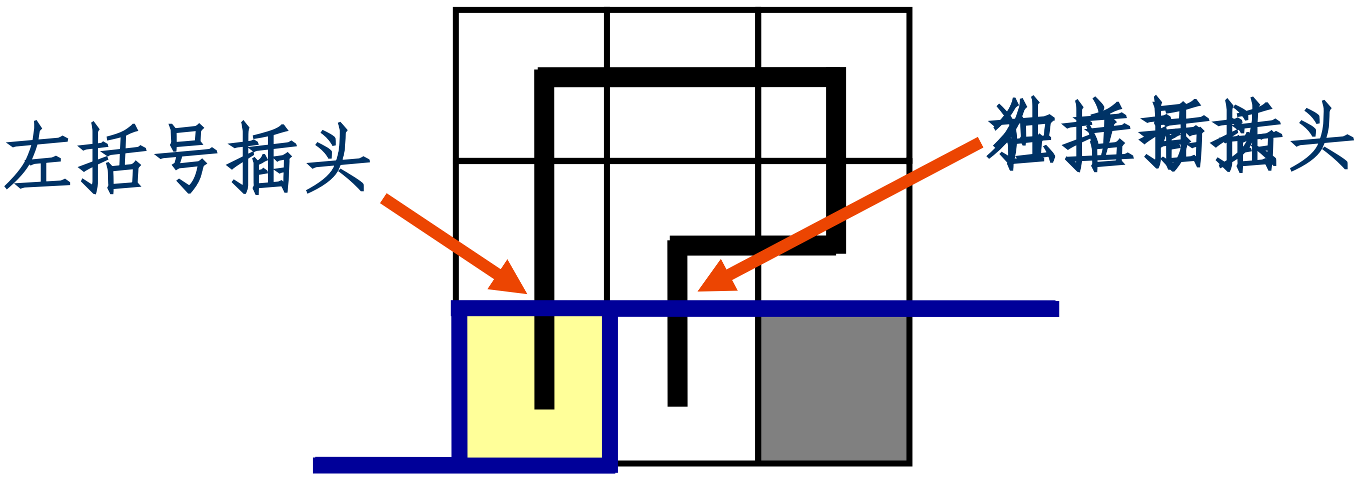


左括号插头和独立插头连接起来后，左括号插头对应的右括号插头成为了新的独立插头.

哈密顿路径的转移

- 考虑与独立插头有关的几种转移:

  III. 上插头和左插头恰好有一个存在



左括号插头被“封住”，成为路径的一端，它所对应的右括号插头成为了一个新的独立插头.

相关试题

- Uva10531 Maze Statistics
- SRM312 CheapestIsland
- IPSC2007 Delicious Cake
- NWERC2004 Pipes
- Hnoi2007 Park
- Poj1739 Tony’s Tour
- …

括号表示法的优势

- 元素之间相对独立
- 转移代价低，常数因子小
- 更加直观，清晰，自然

参考文献

- 刘汝佳、黄亮《算法艺术与信息学竞赛》
- 金恺 《Black & White》解题报告, 2004年
- 毛子青《动态规划算法的优化技巧》, 2001年
- http://icpcres.ecs.baylor.edu/onlinejudge
- http://acm.timus.ru
- http://acm.zju.edu.cn

致谢

- 感谢CCF给我提供一个与大家交流的平台
- 感谢朱全民老师在我写这篇论文时对我的指导
- 感谢刘汝佳教练对我的指导和启发
- 感谢刘宸亨和金斌同学对我的论文的帮助
- 感谢集训队员郑暾，周冬，余林韵，俞华程，顾研，周梦宇，肖汉骏对我的帮助