信号与系统 Signals and Systems

第四章离散时间信号与系统的频域分析

Chapter 4 The Frequency Domain Analysis of Discrete Signal & System

控制系网络课程平台：http://www.cse.zju.edu.cn/eclass/signal_system/

本章主要内容

- 离散时间LTI系统的特征函数
- 离散时间周期信号的傅里叶级数表示
- 非周期信号的表示：离散时间信号的傅里叶变换
- 离散周期信号的傅里叶变换
- 离散傅里叶变换的性质
- 离散时间LTI系统的频域分析

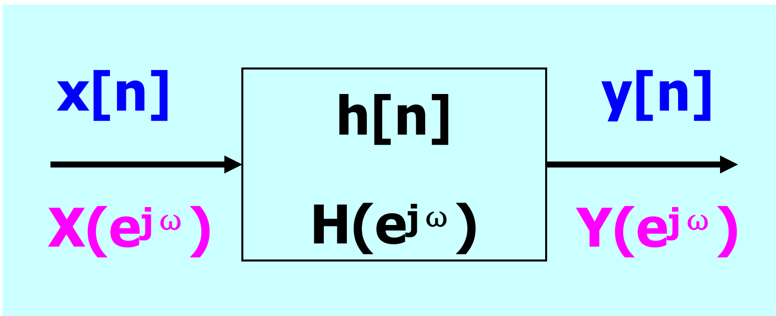
离散时间LTI系统的频域分析
——主要内容

- ➢离散时间LTI系统的频域分析
  - ❖ 离散时间LTI系统的频率响应
  - ❖ 频率选择性滤波器与理想滤波器
  - ❖ 离散时间LTI系统零状态响应的频域求解
  - ❖ 用线性常系数差分方程表征的LTI系统

离散时间LTI系统的频域分析

——离散时间LTI系统的频率响应（1）

单位脉冲响应为h[n]的离散时间LTI系统可以表示为：



$$x[n] \xrightarrow{LTI} y[n] = x[n] * h[n]$$

变换域分析

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{LTI} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

特征函数$e^{j\omega n}$的特征值 ⟺ 离散时间LTI系统的频率响应

定义1： $h[n] \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$

对不同输入频率不同加权:滤波作用

含义：某一稳定离散LTI系统的作用可以理解为按其频率响应$H(e^{j\omega})$的特性改变输入信号中各频率分量的幅度大小和初始相位。

离散时间LTI系统的频域分析
——离散时间LTI系统的频率响应（2）

离散LTI系统的频率响应定义2：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y_{zs}(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

✓ 对于级联系统，总的频率响应为各个子系统频率响应的乘积，与各子系统级联的顺序无关

✓ 频域分析法用于稳定的离散LTI系统

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)}$$

相频特性

（输入信号的延时特性）

幅频特性

（输入信号的放大特性）

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

群时延——系统对输入信号的有效公共时延

离散时间LTI系统的频域分析

——离散时间LTI系统的频率响应（3）

例4-15(P162) 求差分器的频率响应H(ejω)

解：$y[n]=x[n]-x[n-1]$ $\xrightarrow{\text{Fourier 变换}}$ $Y(e^{j\omega})=(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=(1-e^{-j\omega})\xleftrightarrow{F^{-1}}\underline{h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]}$$

差分器的脉冲响应

例4-16(P162) 求累加器的频率响应H(ejω)

解：$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]=x[n]*u[n]$ $\Rightarrow$

$$h[n]=u[n]\xleftrightarrow{F}\underline{H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)}$$

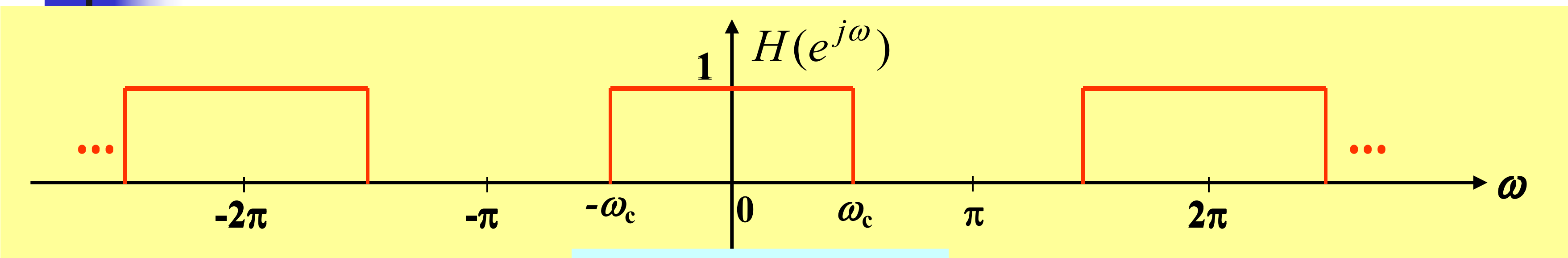
例4-17(P162) 求延时系统的频率响应H(ejω)

解：$y[n]=x[n-n_0]$ $\xrightarrow{\text{Fourier 变换}}$ $Y(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

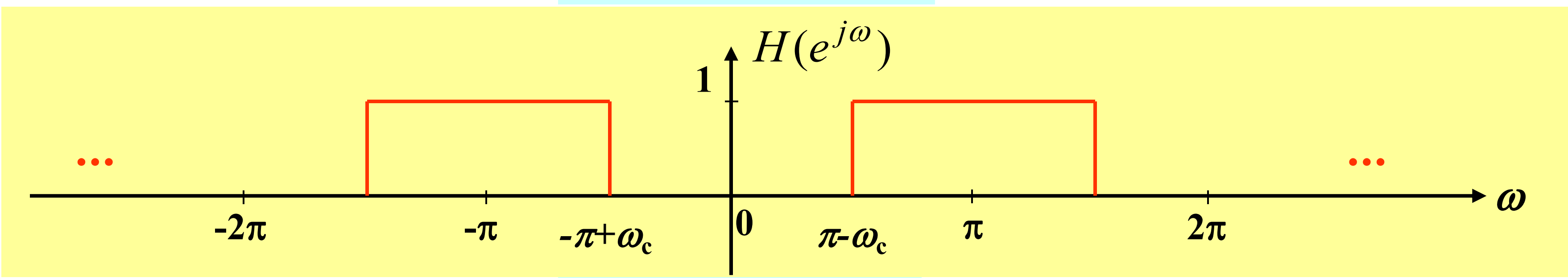
$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=e^{-j\omega n_0}\xleftrightarrow{F^{-1}}\underline{h[n]=\delta[n-n_0]}$$

离散时间LTI系统的频域分析

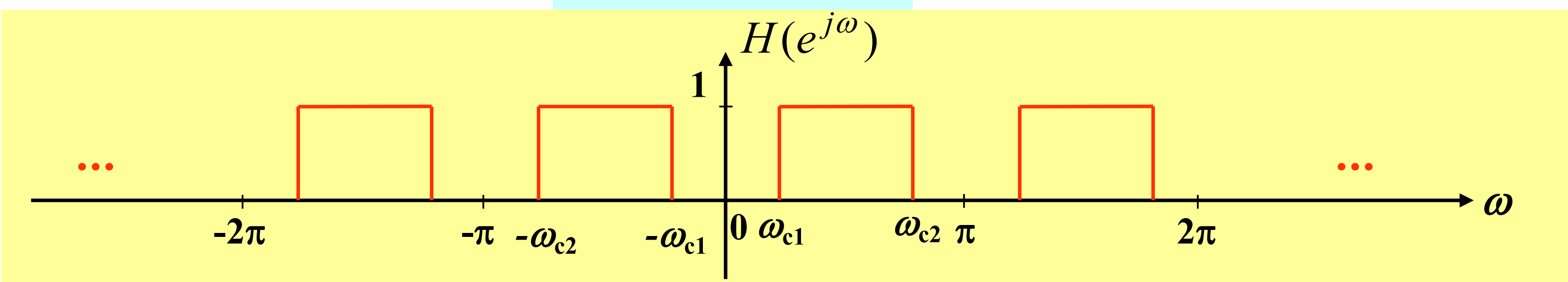
——理想滤波器（1）



理想低通滤波器



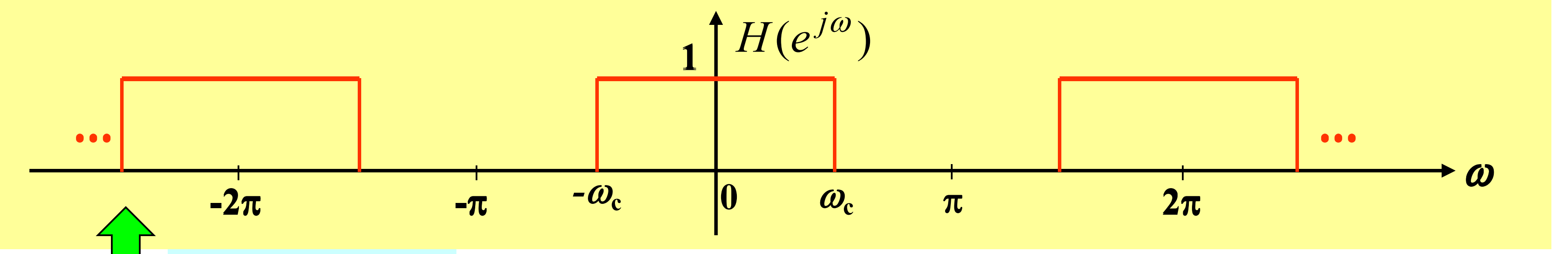
理想高通滤波器



理想带通滤波器

离散时间LTI系统的频域分析

——理想滤波器（2）

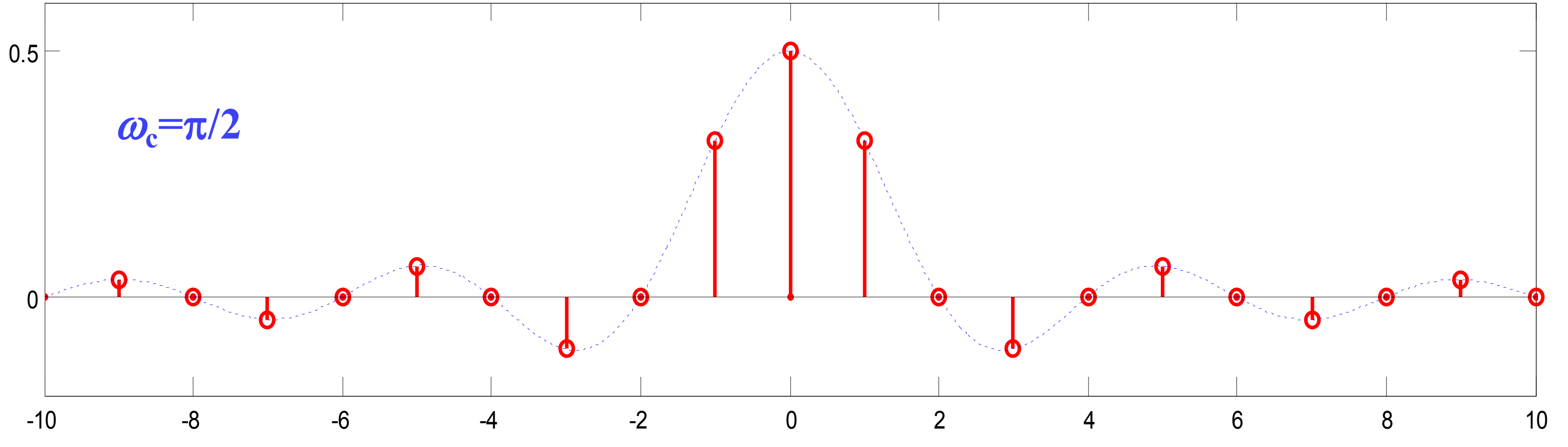


F^{-1}

$$h[n]=\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

理想低通滤波器

频域：理想



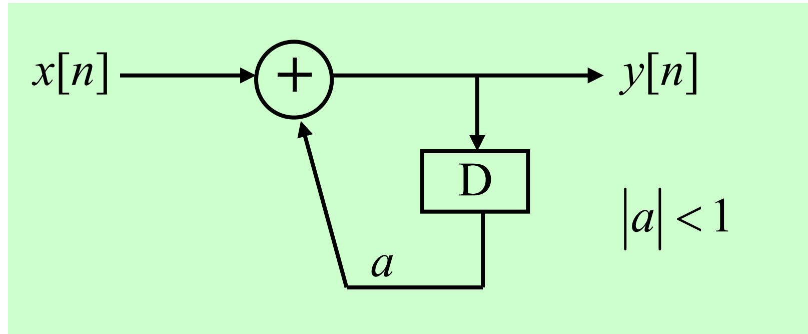
时域: $h[n]$非因果且有振荡现象

$h[n]$非因果⇒物理不可实现

离散时间LTI系统的频域分析

——理想滤波器（3）

例：一个实际一阶滤波器



$$y[n]-ay[n-1]=x[n]$$

F

$$(1-ae^{-j\omega})Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

F-1

$$h[n]=a^n u[n]$$ —因果系统

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]=x[n]*h[n]$$

$$X(e^{j\omega}) \qquad H(e^{j\omega}) \qquad Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

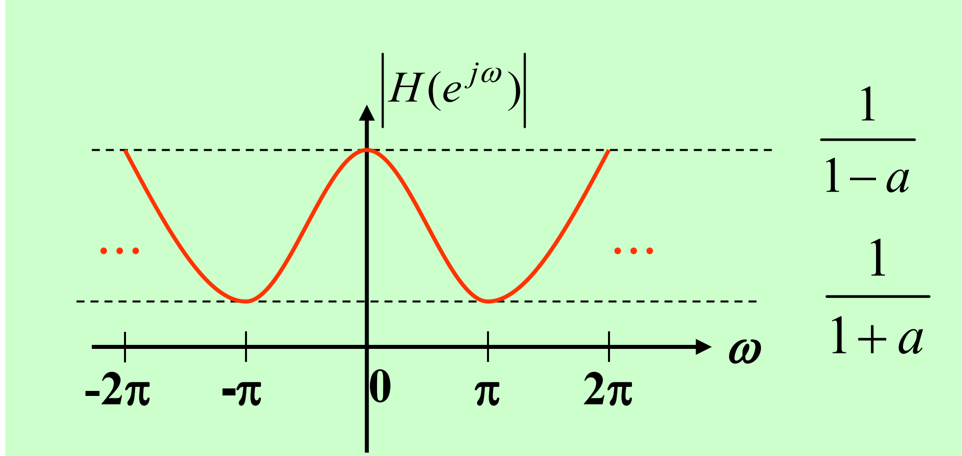
离散时间LTI系统的频域分析

——理想滤波器（4）

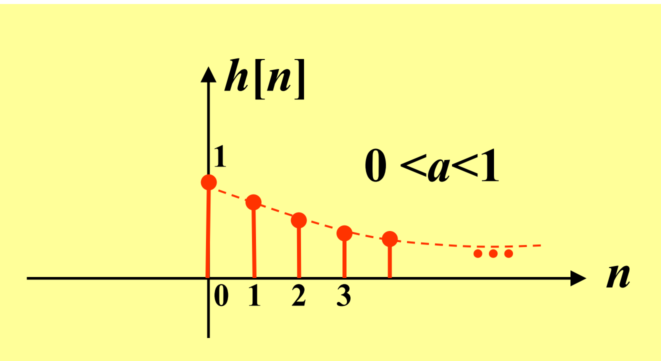
$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

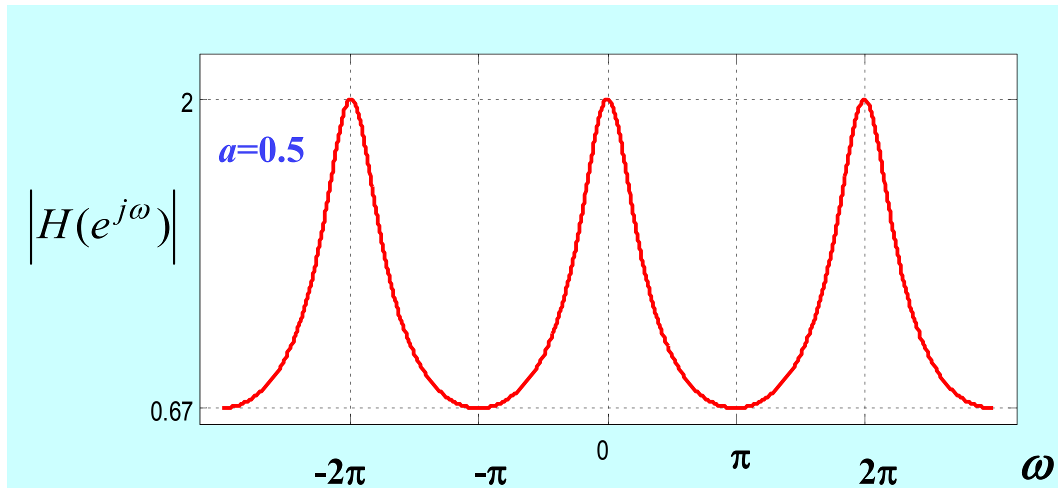
F^{-1}

$$h[n]=a^n u[n]$$



低通滤波器





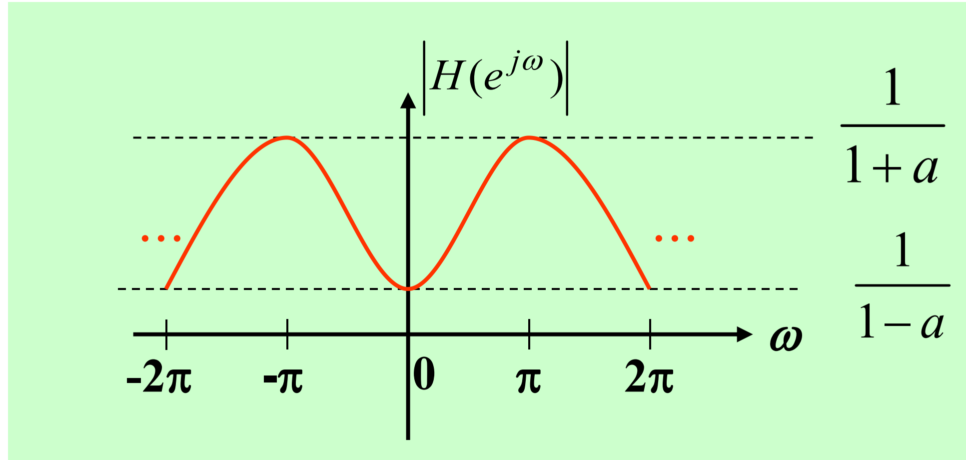
离散时间LTI系统的频域分析

——理想滤波器（5）

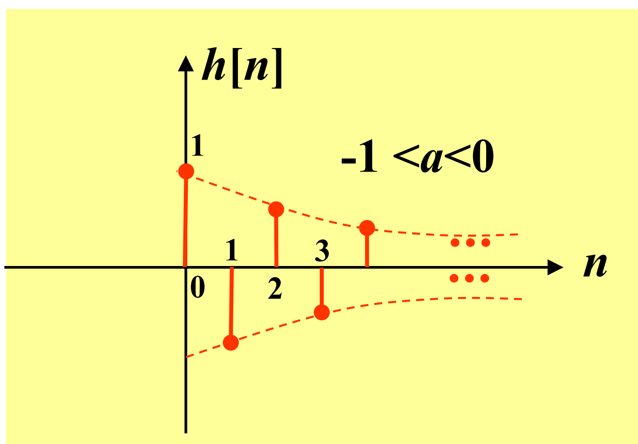
$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

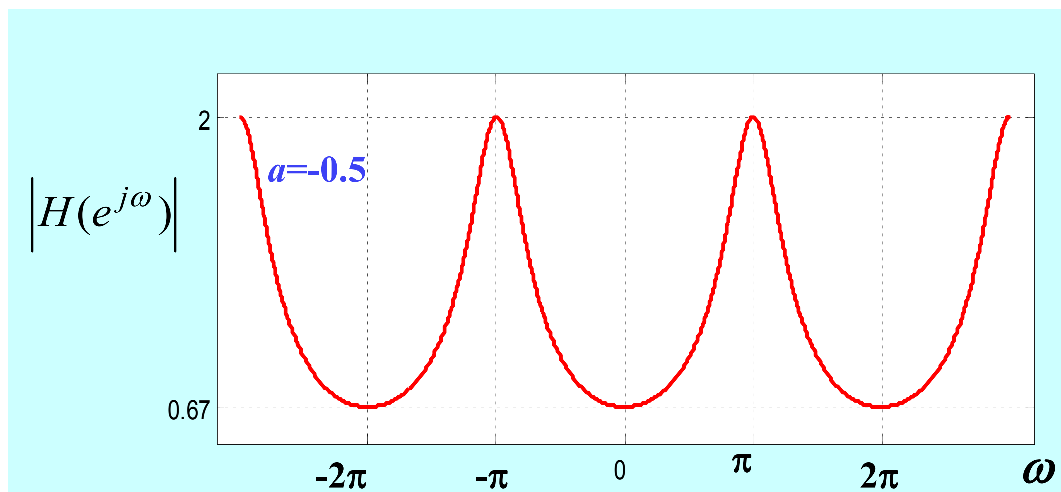
F^{-1}

$$h[n]=a^n u[n]$$



高通滤波器





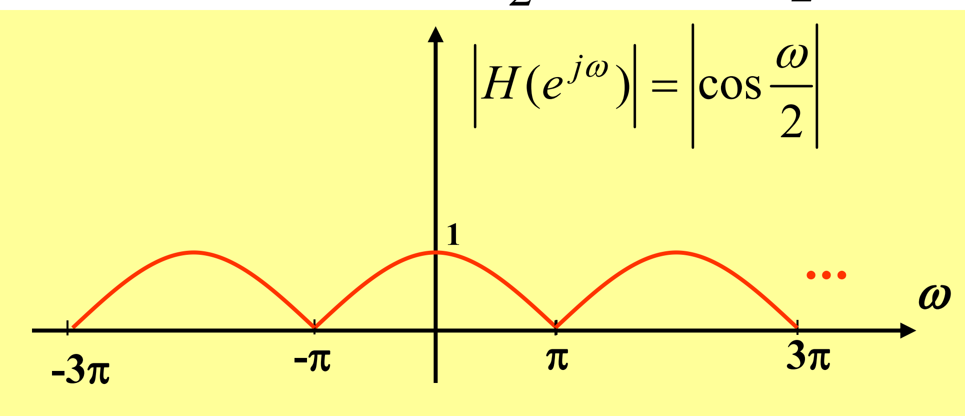
离散时间LTI系统的频域分析

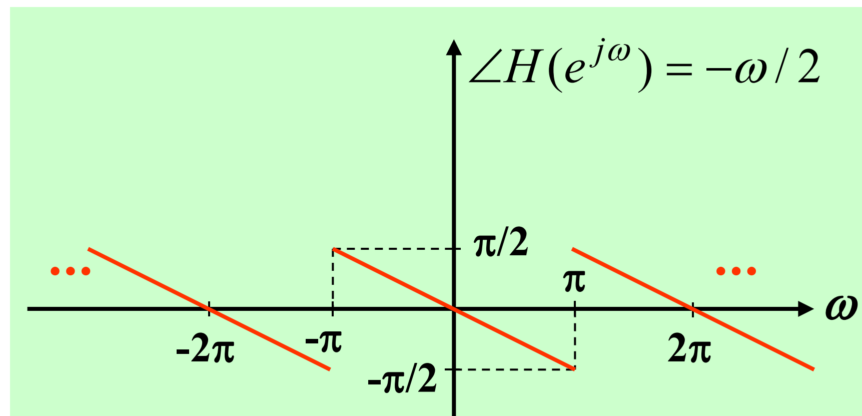
——理想滤波器（6）

一系统 $x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow$ $y[n]=\frac{1}{2}\left(x[n]+x[n-1]\right)$ 实现在输入值上连续取两点的平均，求频响。

由 $y[n]=\frac{1}{2}\left(x[n]+x[n-1]\right)$ $\Longrightarrow$ $h[n]=\frac{1}{2}\left(\delta[n]+\delta[n-1]\right)$

$$\Longrightarrow \quad H(e^{j\omega})=\frac{1}{2}(1+e^{-j\omega})=\frac{1}{2}e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2})=e^{-j\omega/2}\cos\frac{\omega}{2}$$





在高频域比在低频域有较多的衰减

群时延 $=?$

即 $x[n]=ke^{j0n}$ $\longrightarrow$ $y[n]=H(e^{j0})ke^{j0n}=k=x[n]$

$x[n]=ke^{j\pi n}$ $\longrightarrow$ $y[n]=H(e^{j\pi})ke^{j\pi n}=0$

离散时间LTI系统的频域分析

——离散时间LTI系统零状态响应的频率求解（1）

时域上：$\xrightarrow{\text{卷积和}}$ LTI系统的零状态响应y[n]

$\uparrow$ 反变换

频域上：$\xrightarrow{\text{卷积性质}}$ 输出信号y[n]的频谱$Y(e^{j\omega})$

LTI系统的$y_{ZS}[n]$ $\xrightarrow{\text{FT变换}}$ y[n]的频谱$Y(e^{j\omega})$

LTI系统的输入x[n] $\xrightarrow{\text{FT变换}}$ 输入的频谱$X(e^{j\omega})$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}}$$

F变换 $\uparrow$ $\downarrow$ F反变换

系统冲激响应h[n]

离散时间LTI系统的频域分析

——离散时间LTI系统零状态响应的频率求解（1）

例4-18 (P163) 已知因果LTI系统输入信号 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ 的零状态响应为 $y[n]=3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$，求系统的频率响应H(e$^{j\omega}$)和单位脉冲响应h[n]。

解：

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega})=\frac{3}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}}$$

$$\boxed{h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}$$

离散时间LTI系统的频域分析

——离散时间LTI系统零状态响应的频率求解（2）

例4-19 (P164) 已知离散LTI系统，h[n]为实值序列，频率响应$H(e^{j\omega})$，求系统对$\cos\omega_0 n$的响应。

解：方法一：时域求解——利用卷积和的方法，但是h[n]无通式表达；

方法二：频域求解

1）先求输出的频谱，然后进行反变换求输出；（繁琐）

2）利用特征函数特征值的概念；

$$x[n]=\cos\omega_0 n=\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

$$e^{j\omega_0 n}\xrightarrow{LTI}H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

$$H(e^{j\omega_0})=\left|H(e^{j\omega_0})\right|e^{j\theta(\omega_0)}$$

$$y[n]=\frac{1}{2}\left|H(e^{j\omega_0})\right|e^{j(\omega_0 n+\theta(\omega_0))}+\frac{1}{2}\left|H(e^{-j\omega_0})\right|e^{j(-\omega_0 n+\theta(-\omega_0))}$$

离散时间LTI系统的频域分析

——离散时间LTI系统零状态响应的频率求解（3）

$$y[n]=\frac{1}{2}\left|H(e^{j\omega_0})\right|e^{j(\omega_0 n+\theta(\omega_0))}+\frac{1}{2}\left|H(e^{-j\omega_0})\right|e^{j(-\omega_0 n+\theta(-\omega_0))}$$

h[n]是实值序列 $\Rightarrow \begin{cases}\left|H(e^{j\omega})\right|=\left|H(e^{-j\omega})\right| \\ \theta(-\omega)=-\theta(\omega)\end{cases}$

$$y[n]=\left|H(e^{j\omega_0})\right|\frac{e^{j(\omega_0 n+\theta(\omega_0))}+e^{-j(\omega_0 n+\theta(\omega_0))}}{2}=\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos(\omega_0 n+\theta(\omega_0))$$

推广：

$$A\cos(\omega_0 n+\theta_0)\xrightarrow{LTI}A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos(\omega_0 n+\theta_0+\theta(\omega_0))$$

$$A\sin(\omega_0 n+\theta_0)\xrightarrow{LTI}A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\sin(\omega_0 n+\theta_0+\theta(\omega_0))$$

离散时间LTI系统的频域分析
——用线性常系数差分方程表征的LTI系统（1）

离散时间因果LTI系统可以用线性常系数差分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

如何进行方程的频域求解？

方程两端求傅里叶变换

线性与 时移性质

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

关于变量e-jω的两个多项式之比

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

—从差分方程直接求得LTI系统的频率响应$H(e^{j\omega})$

离散时间LTI系统的频域分析

——用线性常系数差分方程表征的LTI系统（2）

例4-20 因果LTI系统 $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$ ，求解

（1）系统频率响应和单位脉冲响应h[n]；

（2）输入 $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ 求系统的零状态响应。

解：（1）对差分方程两边求傅里叶变换（或直接写出频率响应）

$$\left(1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right)Y(e^{j\omega})=2X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}=\frac{a}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{b}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$a=H(e^{j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=2}=4$$

$$b=H(e^{j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=4}=-2$$

$$\boxed{h[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}$$

离散时间LTI系统的频域分析

——用线性常系数差分方程表征的LTI系统（3）

(2) 输入 $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$，**求系统的零状态响应。**

$$x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$$

$$=\frac{C}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{D_{11}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}+\frac{D_{12}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$C=Y(e^{j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=2}=8$$

$$D_{11}=Y(e^{j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2\Big|_{e^{-j\omega}=4}=-2$$

将已求得的C=8和D_{11}=-2代入方程, 并令ω=0得

$$\frac{2}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-2}{(1-\frac{1}{4})^2}+\frac{D_{12}}{1-\frac{1}{4}}$$

得 $D_{12}=-4$

$$\therefore Y(e^{j\omega})=\frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{-2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}+\frac{-4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

F^{-1}

$$\boxed{y[n]=8(\frac{1}{2})^n u[n]-2(n+1)(\frac{1}{4})^n u[n]-4(\frac{1}{4})^n u[n]}$$

第三章基本内容

- 连续时间**LTI**系统的特征函数
- 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
- 非周期信号的表示：连续时间信号的傅里叶变换
- 周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶变换的性质
- 连续时间**LTI**系统的频域分析

第四章基本内容

- 离散时间**LTI**系统的特征函数
- 离散时间周期信号的傅里叶级数表示
- 非周期信号的表示：离散时间信号的傅里叶变换
- 离散周期信号的傅里叶变换
- 离散傅里叶变换的性质
- 离散时间**LTI**系统的频域分析