koolearn
新东方在线

张宇考研数学

基础班讲义（1-3）

新东方在线网络课程电子教材系列

www.koolearn.com

引　言

一、基础阶段任务：

(1)熟记基本概念、定理、公式
(2)掌握基本方法与技术
(3)培养基本计算能力：求极限、求导数、求积分

基础阶段：求极限、求导、求积分

二、目标：

(1)建成基础知识结构
(2)形成基础数学素养

三、内容安排：

$$\left.\begin{array}{l}\text{(1)极限}\\\text{(2)一元微分学}\\\text{(3)一元积分学}\end{array}\right\}\text{高数上}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{(4)多元微分学}\\\text{(5)二重积分}\\\text{(6)微分方程}\end{array}\right\}\text{高数下}$$

第一讲　极限

核心考点：

(1)定义

(2)性质

(3)计算

(4)应用

一、极限定义

1. 函数极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

函数极限定义的所有形式：

	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
$f(x)\to A$						
$f(x)\to\infty$						
$f(x)\to+\infty$						
$f(x)\to-\infty$						

例如：

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $f(x)>M$

2. 数列极限

n 为自然数,$n\to\infty$ 专指 $n\to+\infty$,而略去"+"不写

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-A|<\varepsilon$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_3,A组1.1(数学二 P_3,A组1.1;数学三 P_3,A组1.5)]

以下三个命题:

① 若数列$\{u_n\}$收敛于 A,则其任意子数列$\{u_{n_i}\}$必定收敛于 A;

② 若单调数列$\{x_n\}$的某一子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于 A,则该数列必定收敛于 A;

③ 若数列$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n+1}\}$都收敛于 A,则数列$\{x_n\}$必定收敛于 A.

正确的个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】D

【分析】对于命题①,由数列收敛的定义可知,若数列$\{u_n\}$收敛于 A,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$.

可知当 $n_i>N$ 时,恒有 $|u_{n_i}-A|<\varepsilon$.

因此数列$\{u_{n_i}\}$也收敛于 A,可知命题正确.

对于命题②,不妨设数列$\{x_n\}$为单调增加的,即

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

其中某一给定子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于 A,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n_i>N$ 时,恒有

$$|x_{n_i}-A|<\varepsilon.$$

由于数列$\{x_n\}$为单调增加的数列,对于任意的 $n>N$,必定存在 $n_i\leqslant n\leqslant n_{i+1}$,有

$$-\varepsilon<x_{n_i}-A\leqslant x_n-A\leqslant x_{n_{i+1}}-A<\varepsilon,$$

从而

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

可知数列$\{x_n\}$收敛于 A. 因此命题正确.

对于命题③,因$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$,由极限的定义可知,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,必定存在自然数 N_1,N_2:

当 $2n>N_1$ 时,恒有 $|x_{2n}-A|<\varepsilon$;

当 $2n+1>N_2$ 时,恒有 $|x_{2n+1}-A|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,总有 $|x_n-A|<\varepsilon$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 可知命题正确.

故答案选 D.

二、极限三大性质

1. 唯一性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$A$唯一

【证】假设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,$A\neq B$,不妨假设$A>B$,于是

$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1>0$,$0<|x-x_0|<\delta_1$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_2>0$,$0<|x-x_0|<\delta_2$时,$|f(x)-B|<\varepsilon$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$,$B-\varepsilon<f(x)<B+\varepsilon$

取$\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$,则有$\dfrac{A+B}{2}<f(x)<\dfrac{A+B}{2}$,矛盾!证毕,故A唯一.

【例】设a为常数,$I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\arctan\dfrac{1}{x}\right)$存在,求$a,I$.

【分析】

2. 局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\exists M>0,\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)|<M$.

【证】

【例】$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在(　　)内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

【分析】

3. 局部保号性

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则 $x\to x_0$ 时,$f(x)>0$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A<0$,则 $x\to x_0$ 时,$f(x)<0$

【分析】

【例】设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-2$,则 $x=0$ 是(　　)

A. 极大值点　　B. 极小值点　　C. 非极值点　　D. 无法判断

【分析】

三、极限的计算

1. 函数极限计算

① 七种未定式$\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty\cdot 0,\infty-\infty,\infty^0,0^0,1^\infty\right)$

【注】0 不是真的 0,1 不是真的 1.

② 计算工具

(1) 洛必达法则

a) 若$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)=0$

b) 且$\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\exists$,则$\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

隐含条件:$f(x)$,$g(x)$都为无穷小量;都可导;导函数比值的极限存在.

【注】如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$

洛必达法则能不能用,用了再说,用了若存在,则存在;用了若不存在,只能说洛必达法则失效,并不能说原极限一定不存在,如:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}$用洛必达法则不存在,但实际上这个极限是存在的且$=1$.

【注】常用等价无穷小

$x\to 0$

$\sin x\sim x$

$\arcsin x\sim x$

$\tan x\sim x$

$\arctan x\sim x$

$e^x-1\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

第一组$\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty\cdot 0\right)$

【例 1】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

【分析】

【例 2】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

【分析】

【例 3】 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

【分析】 碰到 $\infty\cdot0$,有两种想法化:为 $\dfrac{\infty}{\dfrac{1}{0}}$ 或者化为 $\dfrac{0}{\dfrac{1}{\infty}}$

如 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{-\dfrac{1}{\ln^2x}\cdot\dfrac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to0^+}x\ln^2x$ 行不通

换一种 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}-x=0$ 就可以了.

【小结】"设置分母有原则,简单因式才下放"

简单:x^a,$e^{\beta x}$ 等

复杂:$\ln x$,$\arcsin x$,$\arctan x$ 等

我们再回到例 3:原式 =

第二组($\infty-\infty$)

① 有分母,则通分

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_4,A 组 1.19(3)(数学二 P_7,B 组 1.19;数学三 P_7,B 组 1.20(1))]

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

【分析】 这是"$\infty-\infty$"型未定式极限,首先通分变成"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式,然后使用洛必达法则求极限.

② 没有分母，创造分母

【例】

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]$$

第三组($\infty^0,0^0,1^\infty$)

$U(x)^{V(x)}=e^{V(x)\ln U(x)}$

【例 1】

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$$

【例 2】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}(1^\infty)$

(2) 泰勒公式

任何可导函数 $f(x)=\sum a_n x^n$

$x\to 0$

$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)(|x|<1)$

【例 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{x^3}$

【分析】

【例 2】 当 $x\to 0$ 时，$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 cx^k 为等价无穷小，求 c,k.

【分析】

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\tan x-\sin 4x}{x^3}=0$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-4}{x^2}$.

【分析】

2. 数列极限运算

(1) 若 x_n 易于连续化,转化为函数极限计算

依据:若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_4,A 组 1.19(8)(数学二 P_5,A 组 1.29;数学三 P_7,B 组 1.20(6))]

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

【分析】

(2) 若$\{x_n\}$不易于连续化,用"夹逼准则"(或定积分定义)

【例 1】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

【分析】

【例 2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\arctan n}=$ ______________.

【分析】

(3) 若$\{x_n\}$由递推式$x_n = f(x_{n-1})$给出，用“单调有界准则”：

给出$\{x_n\}$，若$\{x_n\}$单增且有上界或者单减且有下界$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \exists \Leftrightarrow \{x_n\}$收敛

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一P_7，B组1.24(数学二P_8，B组1.51;数学三P_8，B组1.36)]

设$x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n}(n = 1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

四、极限的应用 — 连续与间断

1. 基本常识

任何初等函数在其定义区间内连续(只要见到的函数都是初等函数)，故考研中只研究两类特殊的点：

分段函数的分段点(可能间断)

无定义点(必然间断)

2. 连续的定义

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则$f(x)$称在$x = x_0$处连续.

【注】$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$三者相等才连续.

3. 间断的定义

设$f(x)$在$x = x_0$点的某去心邻域有定义

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ (3) $f(x_0)$

a) 第一类间断点(1),(2) 均存在,且

(1) $\neq$ (2):x_0 为跳跃间断点

(1) $=$ (2) $\neq$ (3):x_0 为可去间断点

b) 第二类间断点(1),(2) 至少一个不存在(目前为止考研只考了(1)(2) 均不存在)

若不存在 $= \infty \Rightarrow$ 无穷间断点

若不存在 $=$ 振荡 $\Rightarrow$ 振荡间断点

【注】① 单侧定义不讨论间断性

② 若出现左右一边是振荡间断,一边是无穷间断,则我们应该分侧讨论

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_7,B组1.27(数学二 P_9,B组1.56;数学三 P_8,B组1.41)]

求函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$ 的间断点,并判断它们的类型.

【分析】

第二讲　一元函数微分学

核心考点

（1）定义

（2）计算

（3）应用$\begin{cases}\text{中值定理}\\\text{几何应用}\end{cases}$

一、定义

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 记为 $f'(x_0)$

【注】（1）左右有别

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)$ 右导数

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$ 左导数

因此 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

(2)$\Delta x\to$（广义化）狗

$f'(x_0)\triangleq\lim\limits_{\text{狗}\to 0}\dfrac{f(x_0+\text{狗})-f(x_0)}{\text{狗}}$

（3）一静一动原则，不可违反此原则，如

$\lim\limits_{2\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$ 就是典型错误.

（4）换元法，令 $x_0+\Delta x=x\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

【例 1】 设 $f(0)=0$，以下极限存在能确定 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的是（　　）

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$　　　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$

【分析】见到 $f'(x_0)$：先用定义法写出来，熟练运用定义法. 这是道关于函数导数定义的很经典的一道题.

【例 2】若 $f(x)$ 是可导的偶函数,证明 $f'(x)$ 是奇函数.

【分析】

【练习】若 $f(x)$ 是可导的奇函数,证明 $f'(x)$ 是偶函数.

二、计算

1. 基本求导公式

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

2. 基本求导方法

(1) 复合函数求导

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{15},B组2.24(数学二 P_{17},B组2.36;数学三 P_{17},B组2.28)]

求函数 $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$ 的导数.

【分析】

【注】将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 写成 $e^{g(x)\ln f(x)}$,再利用复合函数求导法则及其他法则求导.

(2) 隐函数求导

显函数:$y=f(x)$,隐函数:$F(x,y)=0$

方法:在 $F(x,y)=0$ 两边同时对 x 求导,只需注意 $y=y(x)$ 即可(复合求导).

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{15},B组2.26(数学二 P_{17},B组2.37;数学三 P_{17},B组2.29)]

设 $y=y(x)$ 是由 $\sin xy=\ln\frac{x+e}{y}+1$ 确定的隐函数,求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$ 的值.

【分析】

(3) 对数求导法

方法:对多项相乘、相除、开方、乘方得来的式子,先取对数再求导,称为对数求导数.

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{15},B组2.40(数学二 P_{14},A组2.40;数学三 P_{14},A组2.41)]

设 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\cdot\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^{b}(a>0,b>0)$,求 y'.

【分析】

(4) 反函数求导

【例1】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{12},A组2.33(数学二 P_{14},A组2.30;数学三 P_{17},B组2.27)]

设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及 $f'[f^{-1}(x)]$ 与 $f''[f^{-1}(x)]$ 都存在,且 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$. 证明:$\frac{\mathrm{d}^2 f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$.

【分析】

【例2】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{14},B组2.22(数学二 P_{17},B组2.35;数学三 P_{17},B组2.25)]

求 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+\ln\sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}}$ 的反函数的导数.

【分析】

(5) 参数方程求导

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t$ 为参数

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{15}，B 组 2.41(数学二 P_{18}，B 组 2.56；数学三 P_{18}，B 组 2.47)]

设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ $(t > -1)$ 所确定，其中 $\varphi(t)$ 具有二阶导数，且已知 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，证明：函数 $\varphi(t)$ 满足方程 $\varphi''(t) - \dfrac{1}{1+t}\varphi'(t) = 3(1+t)$.

【分析】

【练习】(2017－10－4′)

设 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0} =$ ________.

【分析】

(6) 高阶导数 $\begin{cases} \text{莱布尼茨公式} \\ \text{找规律用数学归纳法} \\ \text{展开式法} \end{cases}$

【例】$y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

【分析】

莱布尼茨公式

$$\begin{cases}(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}\\(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}\end{cases}$$

常用以下公式(找规律，用数学归纳法证得的)：

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$，$(e^x)^{(n)}=e^x$

$$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

$$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n},x>0$$

$$[\ln(x+1)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},x>-1$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

三、中值定理

1. 定理总结

(1) 涉及 $f(x)$ 的定理

设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 连续，则

①(有界性定理) $\exists K>0$，使 $|f(x)|\leqslant K$，$\forall x\in[a,b]$；

②(最值定理)$m\leqslant f(x)\leqslant M$，其中 m,M 分别为 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上的最小、最大值；

③(介值定理) 当 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 时，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\mu$；

④(零点定理) 当在 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

(① 到 ④ 只需使用，不需证明)

(2) 涉及 $f'(x)$ 的定理

⑤ 费马定理

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处$\begin{cases}1)\text{ 可导}\\2)\text{ 取极值}\end{cases}\Rightarrow f'(x_0)=0$.

【作业：证明之】

⑥ 罗尔定理

设 $f(x)$ 满足以下三条 $\begin{cases}1)[a,b] \text{ 连续} \\ 2)(a,b) \text{ 内可导} \\ 3)f(a)=f(b)\end{cases}$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

【作业:证明之】

⑦ 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases}1)[a,b] \text{ 上连续} \\ 2)(a,b) \text{ 内可导}\end{cases}$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

【注】若 $f(a)=f(b)$，则 $f'(\xi)=0$，即为罗尔定理.

⑧ 柯西中值定理

设 $f(x),g(x)$ 满足 $\begin{cases}1)[a,b] \text{ 连续} \\ 2)(a,b) \text{ 内可导} \\ 3)g'(x)\neq 0\end{cases}$，则 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

【注】a. 若取 $g(x)=x \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(\xi)}{1} \Rightarrow$ 拉格朗日中值定理；

b. 柯西中值定理 $\Rightarrow$ 拉格朗日中值定理 $\Rightarrow$ 罗尔定理，拉格朗日中值定理不可倒推柯西中值定理.

⑨ 泰勒定理(泰勒公式)

任何可导函数 $f(x)=\sum a_n x^n$.

1) 带拉格朗日余项的泰勒公式：

$f(x)$ $n+1$ 阶可导：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为通项，$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉式余项，ξ 介于 x 和 x_0 之间

如：$f(x)$ 三阶可导 $\Rightarrow$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \text{（* 泰勒公式）}$$

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间；

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式又成为麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \text{（* 麦克劳林公式）}$$

其中 ξ 介于 x 和 0 之间.

2）带佩亚诺余项的泰勒公式

若 $f(x)n$ 阶可导：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

若 $f(x)3$ 阶可导：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式又成为麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$

【注】

$\begin{cases}\text{拉氏 —— 用于证明}\\ \text{佩氏 —— 用于计算}\end{cases}$

2. 五大方面的应用

（1）涉及 $f(x)$ 的应用（①－④）

【例】设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明 $\exists\xi\in[a,b]$，使$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

［积分中值定理］

【分析】

(2) 罗尔定理的应用(⑥)

$f(a)=f(b)\Rightarrow f'(\xi)=0$

方法一:求导公式逆用法

【例 1】

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,$f(1)=0$,证明 $\exists\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

【例 2】

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,且 $f(1)>0$,$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$,证明:

(Ⅰ)方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

(Ⅱ)方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在$(0,1)$内至少有两个不同的实根.

【分析】

【注例】

$f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,且 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$,$k>1$

证明:$\exists\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=\left(1-\dfrac{1}{\xi}\right)f(\xi)$

【分析】

方法二:积分还原法

① 将欲证结论中的 ξ 改成 x

② 积分(令 $c=0$)

③ 移项,使等式一端为 0,则另一端记为 $F(x)$.

【例 1】 证明拉格朗日中值定理:$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$(2009)

【分析】

【例 2】 证明柯西中值定理:$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

【分析】

【例 3】 设 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,$g''(x)\neq 0$,$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

证明: 1)$g(x)\neq 0$,$\forall x\in(a,b)$

2)$\exists\xi\in(a,b)$,使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

【分析】

(3) 拉格朗日中值定理的应用(⑦)

$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a},\xi\in(a,b)$ 或者 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$

1) 将 f 复杂化.

【例】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,

证明:$\exists\,\xi\in(a,b)$,使 $bf(b)-af(a)=[f(\xi)+\xi f'(\xi)](b-a)$

【分析】

2) 给出相对高阶的条件 $\Rightarrow$ 证明低阶不等式

【例】设 $f''(x)<0,f(0)=0$,证明:$\forall\,x_1\neq x_2>0$,有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

【分析】

3) 给出相对低阶的条件 $\Rightarrow$ 证明高阶不等式

【例】设 $f(x)$ 二阶可导,且 $f(2)>f(1),f(2)>\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$,证明:$\exists\,\xi\in(1,3)$,使 $f''(\xi)<0$

【分析】

4) 具体化 f,由 $a<\xi<b\Rightarrow$ 不等式

【例】设 $0<a<b<1$,证明 $\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{2ab}$.

【分析】

5) ξ 的具体表达式

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{17},B 组 2.73(数学二 P_{21},B 组 2.102;数学三 P_{21},C 组 2.6)]

设 $f(x)=\arcsin x$,ξ 为 $f(x)$ 在$[0,t]$上拉格朗日中值定理的中值点,$0<t<1$,求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\xi}{t}$.

【分析】

(4) 柯西中值定理的应用(⑧)

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-g(a)}$$

f — 抽象

g — 具体

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{17},B 组 2.71(数学二 P_{21},B 组 2.100;数学三 P_{19},B 组 2.73)]

$f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(x)\neq 0$. 证明:$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}.$$

【分析】

(5) 泰勒公式的应用 —— 信号“$f^{(n)}(\xi)$,$n\geqslant 2$”

【例 2】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则

(A) 当 $f'(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(B) 当 $f''(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(C) 当 $f'(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(D) 当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

【分析】

三、导数的几何应用

三点两性一线：极值点、最值点、拐点；单调性、凹凸性；渐近线

1. 极值与单调性

(1) 极值定义

※ 必须是双侧定义，否则不考虑极值

1) 广义极值

$\exists x_0$ 的某个领域，$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 都有

$f(x)\leqslant f(x_0)$，

称 x_0 为 $f(x)$ 的广义极大值点.

2）真正极值

$\exists x_0$ 的某个去心领域，$\forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 都有

$f(x) < f(x_0)$，

称 x_0 为 $f(x)$ 的真正极大值点.

【注】若无特殊说明，按广义极值办事，最值同理.

（2）单调性与极值判别

1）若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上单调递增；

若 $f'(x) < 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上单调递减；

2）若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导，则

$$\begin{cases} \text{当 } x_0 \in (x_0-\delta,x_0) \text{ 时 } f'(x) < 0, \text{当 } x_0 \in (x_0,x_0+\delta) \text{ 时 } f'(x) > 0, \Rightarrow \text{极小} \\ \text{当 } x_0 \in (x_0-\delta,x_0) \text{ 时 } f'(x) > 0, \text{当 } x_0 \in (x_0,x_0+\delta) \text{ 时 } f'(x) < 0, \Rightarrow \text{极大} \\ \text{若 } f'(x) \text{ 在} (x_0-\delta,x_0) \text{ 与} (x_0,x_0+\delta) \text{ 内不变号} \Rightarrow \text{不是极值} \end{cases}$$

3）若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导，$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ 极小值

若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导，$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ 极大值

【注】$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$

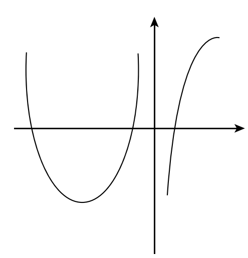
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

$$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

【例 1】证明 $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单增.

【分析】

【例 2】设 $f(x)$ 连续，其 $f'(x)$ 的图像如下：则 $f(x)$ 有几个极小值点，几个极大值点？



2. 凹凸性与拐点

(1) 凹凸性

$\forall x_1, x_2 \in I$,有:

$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ 是凹曲线

$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ 是凸曲线

(2) 拐点 —— 连续曲线凹凸弧的分界点

(3) 判别法:设 $f(x)$ 在 I 上二阶可导,

1) $\begin{cases} 若\ f''(x_0) > 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)\ 是凹的 \\ 若\ f''(x_0) < 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)\ 是凸的 \end{cases}$

2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点的左右邻域 $f''(x)$ 变号 $\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ 为拐点

【例 1】 已知曲线 $L\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t > 0)$,讨论曲线 L 的凹凸性.

【分析】

【例 2】(《带你学》P139,例 14) 设 $y = f(x)$ 三阶导数连续,$f''(x_0) = 0$,$f'''(x_0) > 0$ 证明 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

【分析】

【例 3】设 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$，则其一个拐点为(　　).

A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

【分析】

3. 渐近线

(1) 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+(\text{或}x_0^-)} f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一条铅直渐近线.

出现在:无定义点或者开区间端点

(2) 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty(\text{或}-\infty)} f(x)=A$，则称 $y=A$ 为 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

(3) 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}[f(x)-ax]=b\,\exists$，则称 $y=ax+b$ 为一条斜渐近线.

【例】曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\cdot\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 有(　　)条渐近线.

【分析】

4. 最值

(1) 对于函数 $f(x)$，在 $[a,b]$ 上找出三类点

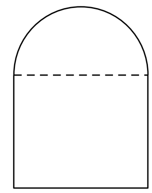
$$\begin{cases} f'(x)=0\Rightarrow x_0\ \text{驻点} \\ f'(x)\ \text{不}\ \exists\Rightarrow x_1\ \text{不可导点} \\ \text{端点}\ a,b \end{cases}$$

比较 $f(x_0)$，$f(x_1)$，$f(a)$，$f(b)$ 大小，取其最大(小)者为最大(小)值.

(2) 若在 I 上求出唯一极大(小)值点，则由实际背景 $\Rightarrow$ 此点即为最大(小)值.

若(a,b)内，端点考虑取极值即可.

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{16}，B 组 2.47(数学二 P_{19}，B 组 2.64)]



防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图所示)，截面的面积为 5 平方米，问底宽 x 为多少时才能使建造时所用的材料最省？

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{16}，B 组 2.61(数学二 P_{21}，B 组 2.97；数学三 P_{19}，B 组 2.68)]

求函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 在$[0,1]$上的最大值 $M(n)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

【分析】

第三讲　一元函数积分学

核心考点

1. 定义
2. 计算(重点难点)
3. 应用

一、定义

1. 不定积分

$\forall x \in I$,使 $F'(x)=f(x)$ 对,则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

全体原函数就叫不定积分,记成:$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

2. 定积分

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【小结】

$\int f(x)\mathrm{d}x$ 为函数族,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为面积代表值

牛顿—莱布尼茨公式 /$N-L$ 公式:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$

二、计算(四大方法)

1. 凑微分法

(1) 基本积分公式

$$\int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C, k \neq -1 \begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C \\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

【例 1】$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

【例 2】$\displaystyle\int \frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

【例 3】$\int \frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x(1+\cos x e^{\sin x})}dx$

【分析】

【例 4】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{25},B 组 3.51(数学二 P_{30},B 组 3.55;数学三 P_{29},B 组 3.52(3))]

求$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$.

【分析】

2. 换元法

当凑微分法不成功时，考虑换元，从而使题目从复杂变简单

(1) 三角换元 —— 当被积函数 $f(x)$ 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$ 可作如下换元：

$$\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow 令\ x=a\sin t,\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow 令\ x=a\tan t,\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow 令\ x=a\sec t,\begin{cases} x>0, 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ x<0, \dfrac{\pi}{2}<t<\pi \end{cases}$$

【注】若见到 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，要先化为

$\sqrt{\varphi^2(x)-k^2}$，$\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$，$\sqrt{\varphi^2(x)+k^2}$，再作三角换元.

(2) 倒代换 $\left(x=\dfrac{1}{t}\right)$— 可用于分子次数明显低于分母次数时，特别地.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$

$k=1,2,4$

(3) 复杂部分代换 — 令复杂部分 $=t$

$\sqrt[n]{ax+b}=t$，$\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，$\sqrt{a\mathrm{e}^{bx}+c}=t$，(根式代换)

a^x，$\mathrm{e}^x=t$(指数代换)

$\ln x=t$(对数代换)

$\arcsin x$，$\arctan x=t$(反三角函数代换) 等等

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{24}，B 组 3.42(数学二 P_{30}，B 组 3.44；数学三 P_{28}，B 组 3.41)]

求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{25},B 组 3.47(数学二 P_{30},B 组 3.49;数学三 P_{29},B 组 3.48)]

求$\int\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

【分析】

3. 分部积分法

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \Rightarrow \mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$

$\Rightarrow \int \mathrm{d}(uv) = \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v \Rightarrow uv = \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v$

$\Rightarrow \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

此方法一般是在运算过程中

$\begin{cases} 1.\ \text{出现了不同类型函数的乘积} \\ 2.\ \text{且求}\int u\mathrm{d}v\text{ 困难,而求}\int v\mathrm{d}u\text{ 简单时} \end{cases}$

(1) 被积函数为 $P_n(x)\cdot \mathrm{e}^{kx}$,$P_n(x)\sin ax$,$P_n(x)\cos ax$,选 $P_n(x) = u$.

(2) 被积函数为 $\mathrm{e}^{ax}\sin bx$,$\mathrm{e}^{ax}\cos bx$,选谁当 u 都行.

(3) 被积函数为 $P_n(x)\ln x$,$P_n(x)\arcsin x$;$P_n(x)\arctan x$,选 $\ln x$,arc — $= u$.

【注】 分部积分公式 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$ 的推广为:

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$$

可用表格法记忆

【例 1】 求 $\int x^2 \arctan x\mathrm{d}x$

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》数学一 P_{25},B组 3.49(数学二 P_{30},B组 3.50;数学三 P_{29},B组 3.50)]

设 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

【分析】

4. 有理函数的积分

(1) 定义:形如$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$,$(n<m)$ 的积分

(2) 方法

1) 将 $Q_m(x)$ 因式分解

2) 将$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 拆成若干最简有理公式之和

(3) 拆分原则

1)$Q_m(x)$ 分解出$(ax+b)^k \Rightarrow$ 产生 k 项

$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_3}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$,$k=1,2\cdots$

2)$Q_m(x)$ 分解出$(px^2+qx+r)^k \Rightarrow$ 产生 k 项

$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}$,$k=1,2,\cdots$

【例 1】 计算$\int \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}\mathrm{d}x$

【例 2】 计算$\int\frac{x}{x^3-x^2+x-1}\mathrm{d}x$

【自练】 $\int\frac{t^3-3t}{(t-1)^2(t+1)^2}\mathrm{d}t$

三、定积分的计算

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

(1) 先按四大基本积分法求出 $F(x)$

(2) 带入上下限,要注意换元时的细节:

对于$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$(令 $x=\varphi(t)$)

且要求 $\varphi'(t)$ 连续,并 $x=\varphi(t)$ 不超过区间$[a,b]$

【例 1】$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

【分析】

【例 2】$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$,$n$ 为大于 1 的整数.

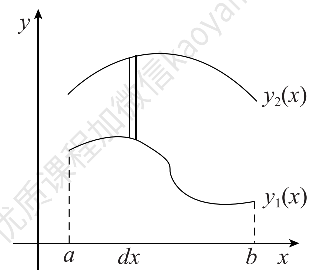
【分析】

【例 3】$\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

【分析】

四、一元积分学的应用

1. 用积分表达和计算平面图形的面积



$y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$，$x=a$，$x=b$，$(a<b)$ 所围成的平面图形的面积.

$S=\int_a^b |\,y_2(x)-y_1(x)\,|\,\mathrm{d}x$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{26}，B 组 3.74(数学二 P_{31}，B 组 3.78；数学三 P_{30}，B 组 3.73)]

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内大于零，并且满足

$$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2\ (a\text{ 为常数}),$$

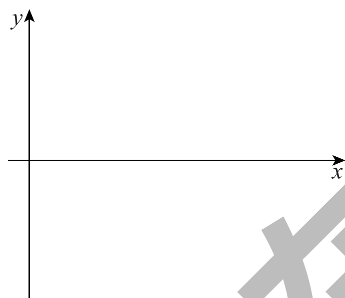
又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$，$y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2.

求函数 $y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【分析】

2. 用积分表达和计算旋转体的体积

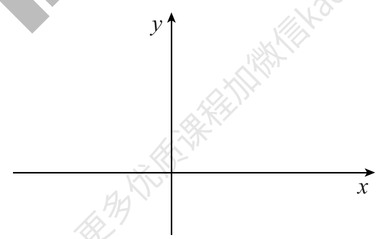
(1)$y = y(x)$ 与 $x = a, x = b, (a < b)$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积为



$$V = \int_a^b \pi y^2(x)\mathrm{d}x$$

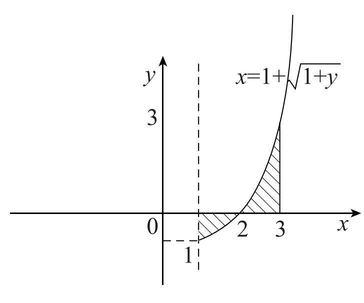
(2)$y = y(x)$ 与 $x = a, x = b, (a < b)$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积为

$$V_y = \int_a^b 2\pi x \mid y(x) \mid \mathrm{d}x\text{(柱壳法)}$$



【例】设平面图形 σ 由 $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 1, x = 3$ 围成,求 σ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积.

【分析】



3. 用积分表达和计算函数的平均值

$y(x)$ 在$[a,b]$上的平均值 $\bar{y}=\dfrac{\int_a^b y(x)\mathrm{d}x}{b-a}$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{21}，A 组 3.25(数学二 P_{25}，A 组 3.42；数学三 P_{25}，A 组 3.40)]

函数 $y=\ln x$ 在区间$[1,\mathrm{e}]$上的平均值为________.

【答案】

【分析】