koolearn
新东方在线

数学

2019

MATHS

基础

新东方在线
全国硕士研究生考试研究中心

目　录

主讲老师：张宇

高等数学

新东方在线 www.koolearn.com

引 言

一、基础阶段任务：

(1)熟记基本概念、定理、公式

(2)掌握基本方法与技术

(3)培养基本计算能力:求极限、求导数、求积分

基础阶段:求极限、求导、求积分

二、目标：

(1)建成基础知识结构

(2)形成基础数学素养

三、内容安排：

(1)极限
(2)一元微分学
(3)一元积分学
} 高数上

(4)多元微分学
(5)二重积分
(6)微分方程
} 高数下

第一讲 极限

核心考点：

(1)定义

(2)性质

(3)计算

(4)应用

一、极限定义

1. 函数极限

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

函数极限定义的所有形式：

	$x \to x_0$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$	$x \to \infty$	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
$f(x) \to A$						
$f(x) \to \infty$						
$f(x) \to +\infty$						
$f(x) \to -\infty$						

例如：

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，有 $f(x) > M$

2. 数列极限

n 为自然数，$n \to \infty$ 专指 $n \to +\infty$，而略去"+"不写

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_3，A组1.1(数学二 P_3，A组1.1；数学三 P_3，A组1.5)]

以下三个命题：

① 若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，则其任意子数列 $\{u_{n_i}\}$ 必定收敛于 A；

② 若单调数列 $\{x_n\}$ 的某一子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A，则该数列必定收敛于 A；

③ 若数列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 都收敛于 A，则数列 $\{x_n\}$ 必定收敛于 A.

正确的个数为 （　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】D

【分析】对于命题①，由数列收敛的定义可知，若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$.

可知当 $n_i > N$ 时，恒有 $|u_{n_i} - A| < \varepsilon$.

因此数列 $\{u_{n_i}\}$ 也收敛于 A，可知命题正确.

对于命题②，不妨设数列 $\{x_n\}$ 为单调增加的，即

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots,$$

其中某一给定子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n_i > N$ 时，恒有

$$|x_{n_i} - A| < \varepsilon.$$

由于数列 $\{x_n\}$ 为单调增加的数列，对于任意的 $n > N$，必定存在 $n_i \leqslant n \leqslant n_{i+1}$，有

$$-\varepsilon < x_{n_i} - A \leqslant x_n - A \leqslant x_{n_{i+1}} - A < \varepsilon,$$

从而

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

可知数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A. 因此命题正确.

对于命题③，因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A$，由极限的定义可知，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，必定存在自然数 N_1, N_2：

当 $2n > N_1$ 时，恒有 $|x_{2n} - A| < \varepsilon$；

当 $2n + 1 > N_2$ 时，恒有 $|x_{2n+1} - A| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，总有 $|x_n - A| < \varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 可知命题正确.

故答案选 D.

二、极限三大性质

1. 唯一性

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则$A$唯一

【证】 假设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，$A\neq B$，不妨假设$A>B$，于是

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1>0$，$0<|x-x_0|<\delta_1$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_2>0$，$0<|x-x_0|<\delta_2$时，$|f(x)-B|<\varepsilon$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，$B-\varepsilon<f(x)<B+\varepsilon$

取$\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$，则有$\dfrac{A+B}{2}<f(x)<\dfrac{A+B}{2}$，矛盾！证毕，故A唯一.

【例】 设a为常数，$I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\arctan\dfrac{1}{x}\right)$存在，求$a$，$I$.

【分析】

2. 局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\exists M>0$，$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|<M$.

【证】

【例】$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在(　　)内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

【分析】

3. 局部保号性

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则 $x\to x_0$ 时,$f(x)>0$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A<0$,则 $x\to x_0$ 时,$f(x)<0$

【分析】

【例】设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-2$,则 $x=0$ 是(　　)

A. 极大值点　　B. 极小值点　　C. 非极值点　　D. 无法判断

【分析】

三、极限的计算

1. 函数极限计算

① 七种未定式$\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty\cdot 0,\infty-\infty,\infty^0,0^0,1^\infty\right)$

【注】0 不是真的 0,1 不是真的 1.

② 计算工具

（1）洛必达法则

a）若$\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)=0$

b）且$\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\exists$，则$\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

隐含条件：$f(x)$，$g(x)$都为无穷小量；都可导；导函数比值的极限存在.

【注】 如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$

洛必达法则能不能用，用了再说，用了若存在，则存在；用了若不存在，只能说洛必达法则失效，并不能说原极限一定不存在，如：

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}$用洛必达法则不存在，但实际上这个极限是存在的且$=1$.

【注】 常用等价无穷小

$x\to 0$

$\sin x\sim x$

$\arcsin x\sim x$

$\tan x\sim x$

$\arctan x\sim x$

$e^x-1\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

第一组$\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty\cdot 0\right)$

【例 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

【分析】

【例 2】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

【分析】

【例 3】 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

【分析】碰到 $\infty\cdot0$,有两种想法化:为$\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}$ 或者化为$\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}$

如$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{-\frac{1}{\ln^2x}\cdot\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to0^+}x\ln^2x$ 行不通

换一种 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}-x=0$ 就可以了.

【小结】"设置分母有原则,简单因式才下放"

简单:x^a,$e^{\beta x}$ 等

复杂:$\ln x$,$\arcsin x$,$\arctan x$ 等

我们再回到例 3:原式 $=$

第二组($\infty-\infty$)

① 有分母,则通分

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_4,A 组 1.19(3)(数学二 P_7,B 组 1.19;数学三 P_7,B 组 1.20(1))]

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

【分析】这是"$\infty-\infty$"型未定式极限,首先通分变成"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式,然后使用洛必达法则求极限.

② 没有分母，创造分母

【例】

$\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$

第三组（$\infty^0,0^0,1^\infty$）

$U(x)^{V(x)}=e^{V(x)\ln U(x)}$

【例 1】

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$

【例 2】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}(1^\infty)$

（2）泰勒公式

任何可导函数 $f(x)=\sum a_nx^n$

$x\to 0$

$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)(|x|<1)$

【例 1】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{x^3}$

【分析】

【例 2】当 $x\to 0$ 时，$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 cx^k 为等价无穷小，求 c,k.

【分析】

【例 3】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\tan x-\sin 4x}{x^3}=0$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-4}{x^2}$.

【分析】

2. 数列极限运算

(1) 若 x_n 易于连续化，转化为函数极限计算

依据：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_4，A 组 1.19(8)(数学二 P_5，A 组 1.29；数学三 P_7，B 组 1.20(6))]

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

【分析】

(2) 若 $\{x_n\}$ 不易于连续化，用“夹逼准则”(或定积分定义)

【例 1】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

【分析】

【例 2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\arctan n}=$ ____________.

【分析】

(3) 若$\{x_n\}$由递推式$x_n = f(x_{n-1})$给出，用“单调有界准则”：

给出$\{x_n\}$，若$\{x_n\}$单增且有上界或者单减且有下界$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \exists \Leftrightarrow \{x_n\}$收敛

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一P_7，B组1.24(数学二P_8，B组1.51；数学三P_8，B组1.36)]

设$x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

四、极限的应用 — 连续与间断

1. 基本常识

任何初等函数在其定义区间内连续(只要见到的函数都是初等函数)，故考研中只研究两类特殊的点：

分段函数的分段点(可能间断)

无定义点(必然间断)

2. 连续的定义

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则$f(x)$称在$x = x_0$处连续.

【注】$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$三者相等才连续.

3. 间断的定义

设$f(x)$在$x = x_0$点的某去心邻域有定义

(1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (3) $f(x_0)$

a) 第一类间断点(1),(2) 均存在,且

(1) $\neq$ (2):x_0 为跳跃间断点

(1) $=$ (2) $\neq$ (3):x_0 为可去间断点

b) 第二类间断点(1),(2) 至少一个不存在(目前为止考研只考了(1)(2) 均不存在)

若不存在 $= \infty \Rightarrow$ 无穷间断点

若不存在 $=$ 振荡 $\Rightarrow$ 振荡间断点

【注】① 单侧定义不讨论间断性

② 若出现左右一边是振荡间断,一边是无穷间断,则我们应该分侧讨论

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_7,B组1.27(数学二 P_9,B组1.56;数学三 P_8,B组1.41)]

求函数 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x(\pi + 2x)}{2\cos x}, & x \leqslant 0, \\ \sin \dfrac{1}{x^2 - 1}, & x > 0 \end{cases}$ 的间断点,并判断它们的类型.

【分析】

第二讲　一元函数微分学

核心考点

(1) 定义

(2) 计算

(3) 应用$\begin{cases}\text{中值定理}\\\text{几何应用}\end{cases}$

一、定义

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 记为 $f'(x_0)$

【注】(1) 左右有别

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)$ 右导数

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$ 左导数

因此 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

(2)$\Delta x\to$(广义化)狗

$f'(x_0)\triangleq\lim\limits_{\text{狗}\to 0}\dfrac{f(x_0+\text{狗})-f(x_0)}{\text{狗}}$

(3) 一静一动原则,不可违反此原则,如

$\lim\limits_{2\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$ 就是典型错误.

(4) 换元法,令 $x_0+\Delta x=x\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

【例 1】设 $f(0)=0$,以下极限存在能确定 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的是(　　)

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$　　　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$

C. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h-\sin h)}{h^2}$　　　　D. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2h)-f(h)}{h}$

【分析】见到 $f'(x_0)$：先用定义法写出来，熟练运用定义法. 这是道关于函数导数定义的很经典的一道题.

【例 2】 若 $f(x)$ 是可导的偶函数，证明 $f'(x)$ 是奇函数.

【分析】

【练习】 若 $f(x)$ 是可导的奇函数，证明 $f'(x)$ 是偶函数.

二、计算

1. 基本求导公式

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

2. 基本求导方法

(1) 复合函数求导

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{15},B 组 2.24(数学二 P_{17},B 组 2.36;数学三 P_{17},B 组 2.28)]

求函数 $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$ 的导数.

【分析】

【注】将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 写成 $e^{g(x)\ln f(x)}$,再利用复合函数求导法则及其他法则求导.

(2) 隐函数求导

显函数:$y=f(x)$,隐函数:$F(x,y)=0$

方法:在 $F(x,y)=0$ 两边同时对 x 求导,只需注意 $y=y(x)$ 即可(复合求导).

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{15},B 组 2.26(数学二 P_{17},B 组 2.37;数学三 P_{17},B 组 2.29)]

设 $y=y(x)$ 是由 $\sin xy=\ln\dfrac{x+e}{y}+1$ 确定的隐函数,求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$ 的值.

【分析】

(3) 对数求导法

方法:对多项相乘、相除、开方、乘方得来的式子,先取对数再求导,称为对数求导数.

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{15},B 组 2.40(数学二 P_{14},A 组 2.40;数学三 P_{14},A 组 2.41)]

设 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\cdot\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^{b}(a>0,b>0)$,求 y'.

【分析】

(4) 反函数求导

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{12},A 组 2.33(数学二 P_{14},A 组 2.30;数学三 P_{17},B 组 2.27)]

设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及 $f'[f^{-1}(x)]$ 与 $f''[f^{-1}(x)]$ 都存在,且 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$. 证明:$\frac{\mathrm{d}^2 f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$.

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{14},B 组 2.22(数学二 P_{17},B 组 2.35;数学三 P_{17},B 组 2.25)]

求 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+\ln\sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}}$ 的反函数的导数.

【分析】

(5) 参数方程求导

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,$t$ 为参数

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{15},B 组 2.41(数学二 P_{18},B 组 2.56;数学三 P_{18},B 组 2.47)]

设函数 $y = f(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ $(t > -1)$ 所确定,其中 $\varphi(t)$ 具有二阶导数,且已知$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$,证明:函数 $\varphi(t)$ 满足方程 $\varphi''(t) - \dfrac{1}{1+t}\varphi'(t) = 3(1+t)$.

【分析】

【练习】(2017 — 10 — 4′)

设$\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$,则$\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0} =$ ________________.

【分析】

(6) 高阶导数$\begin{cases} \text{莱布尼茨公式} \\ \text{找规律用数学归纳法} \\ \text{展开式法} \end{cases}$

【例】$y=x^2\sin 2x$,求 $y^{(50)}$.

【分析】

莱布尼茨公式

$$\begin{cases}(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}\\ (uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}\end{cases}$$

常用以下公式(找规律,用数学归纳法证得的):

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n,(e^x)^{(n)}=e^x$

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)$

$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)$

$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n},x>0$

$[\ln(x+1)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n},x>-1$

$\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot\dfrac{n!}{(x+a)^{n+1}}$

三、中值定理

1. 定理总结

(1) 涉及 $f(x)$ 的定理

设 $f(x)$ 在$[a,b]$连续,则

①(有界性定理) $\exists K>0$,使 $|f(x)|\leqslant K,\forall x\in[a,b]$;

②(最值定理)$m\leqslant f(x)\leqslant M$,其中 m,M 分别为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小、最大值;

③(介值定理) 当 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 时,则 $\exists\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=\mu$;

④(零点定理) 当在 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

(① 到 ④ 只需使用,不需证明)

(2) 涉及 $f'(x)$ 的定理

⑤ 费马定理

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处$\begin{cases}1)\ \text{可导}\\ 2)\ \text{取极值}\end{cases}\Rightarrow f'(x_0)=0$.

【作业:证明之】

⑥ 罗尔定理

设 $f(x)$ 满足以下三条 $\begin{cases} 1)[a,b] \text{ 连续} \\ 2)(a,b) \text{ 内可导} \\ 3)f(a)=f(b) \end{cases}$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

【作业:证明之】

⑦ 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases} 1)[a,b] \text{ 上连续} \\ 2)(a,b) \text{ 内可导} \end{cases}$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

【注】若 $f(a)=f(b)$，则 $f'(\xi)=0$，即为罗尔定理.

⑧ 柯西中值定理

设 $f(x),g(x)$ 满足 $\begin{cases} 1)[a,b] \text{ 连续} \\ 2)(a,b) \text{ 内可导} \\ 3)g'(x)\neq 0 \end{cases}$，则 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

【注】a. 若取 $g(x)=x \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(\xi)}{1} \Rightarrow$ 拉格朗日中值定理；

b. 柯西中值定理 $\Rightarrow$ 拉格朗日中值定理 $\Rightarrow$ 罗尔定理，拉格朗日中值定理不可倒推柯西中值定理.

⑨ 泰勒定理(泰勒公式)

任何可导函数 $f(x)=\sum a_n x^n$.

1) 带拉格朗日余项的泰勒公式：

$f(x)$ $n+1$ 阶可导：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为通项，$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉式余项，ξ 介于 x 和 x_0 之间

如：$f(x)$ 三阶可导 $\Rightarrow$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \text{(* 泰勒公式)}$$

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间；

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式又成为麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \text{(* 麦克劳林公式)}$$

其中 ξ 介于 x 和 0 之间.

2）带佩亚诺余项的泰勒公式

若 $f(x)n$ 阶可导：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

若 $f(x)3$ 阶可导：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式又成为麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$

【注】

$$\begin{cases}\text{拉氏 —— 用于证明}\\ \text{佩氏 —— 用于计算}\end{cases}$$

2. 五大方面的应用

（1）涉及 $f(x)$ 的应用（①－④）

【例】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

［积分中值定理］

【分析】

（2）罗尔定理的应用（⑥）

$f(a)=f(b) \Rightarrow f'(\xi)=0$

方法一：求导公式逆用法

【例 1】

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，$f(1)=0$，证明 $\exists \xi \in (0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

【例 2】

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在$(0,1)$内至少有两个不同的实根.

【分析】

【注例】

$f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x)\,dx$，$k>1$

证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi)=\left(1-\dfrac{1}{\xi}\right)f(\xi)$

【分析】

方法二:积分还原法

① 将欲证结论中的 ξ 改成 x

② 积分(令 $c=0$)

③ 移项,使等式一端为 0,则另一端记为 $F(x)$.

【例 1】证明拉格朗日中值定理:$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$(2009)

【分析】

【例 2】 证明柯西中值定理：$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

【分析】

【例 3】 设 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

证明： 1) $g(x)\neq 0$，$\forall x\in(a,b)$

2) $\exists\xi\in(a,b)$，使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

【分析】

(3) 拉格朗日中值定理的应用(⑦)

$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, \xi \in (a,b)$ 或者 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \xi \in (a,b)$

1) 将 f 复杂化.

【例】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,

证明:$\exists \xi \in (a,b)$,使 $bf(b)-af(a)=[f(\xi)+\xi f'(\xi)](b-a)$

【分析】

2) 给出相对高阶的条件 $\Rightarrow$ 证明低阶不等式

【例】 设 $f''(x)<0, f(0)=0$,证明:$\forall x_1 \neq x_2 > 0$,有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

【分析】

3) 给出相对低阶的条件 $\Rightarrow$ 证明高阶不等式

【例】 设 $f(x)$ 二阶可导,且 $f(2)>f(1), f(2)>\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$,证明:$\exists \xi \in (1,3)$,使 $f''(\xi)<0$

【分析】

4) 具体化 f,由 $a<\xi<b \Rightarrow$ 不等式

【例】 设 $0<a<b<1$,证明 $\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{2ab}$.

【分析】

5)ξ的具体表达式

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{17},B组2.73(数学二 P_{21},B组2.102;数学三 P_{21},C组2.6)]

设 $f(x)=\arcsin x$,ξ为$f(x)$在$[0,t]$上拉格朗日中值定理的中值点,$0<t<1$,求极限$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\xi}{t}$.

【分析】

(4) 柯西中值定理的应用(⑧)

$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{f(b)-g(a)}$ $\quad f$ — 抽象

$\quad g$ — 具体

【例1】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{17},B组2.71(数学二 P_{21},B组2.100;数学三 P_{19},B组2.73)]

$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$f'(x)\neq0$.证明:$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}.$$

【分析】

(5) 泰勒公式的应用 —— 信号“$f^{(n)}(\xi),n\geqslant2$”

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，则

(A) 当 $f'(x) < 0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

(B) 当 $f''(x) < 0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

(C) 当 $f'(x) > 0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

(D) 当 $f''(x) > 0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

【分析】

三、导数的几何应用

三点两性一线：极值点、最值点、拐点；单调性、凹凸性；渐近线

1. 极值与单调性

(1) 极值定义

※ 必须是双侧定义，否则不考虑极值

1) 广义极值

$\exists x_0$ 的某个领域，$\forall x \in U(x_0, \delta)$ 都有

$f(x) \leqslant f(x_0)$，

称 x_0 为 $f(x)$ 的广义极大值点.

2) 真正极值

$\exists x_0$ 的某个去心领域, $\forall x \in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 都有

$f(x) < f(x_0)$,

称 x_0 为 $f(x)$ 的真正极大值点.

【注】若无特殊说明,按广义极值办事,最值同理.

(2) 单调性与极值判别

1) 若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$,则 $f(x)$ 在 I 上单调递增;

若 $f'(x) < 0, \forall x \in I$,则 $f(x)$ 在 I 上单调递减;

2) 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续,在 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 内可导,则

$$\begin{cases} \text{当 } x_0 \in (x_0-\delta, x_0) \text{ 时 } f'(x) < 0, \text{当 } x_0 \in (x_0, x_0+\delta) \text{ 时 } f'(x) > 0, \Rightarrow \text{极小} \\ \text{当 } x_0 \in (x_0-\delta, x_0) \text{ 时 } f'(x) > 0, \text{当 } x_0 \in (x_0, x_0+\delta) \text{ 时 } f'(x) < 0, \Rightarrow \text{极大} \\ \text{若 } f'(x) \text{ 在}(x_0-\delta, x_0) \text{与}(x_0, x_0+\delta) \text{ 内不变号} \Rightarrow \text{不是极值} \end{cases}$$

3) 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导, $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ 极小值

若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导, $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ 极大值

【注】$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$

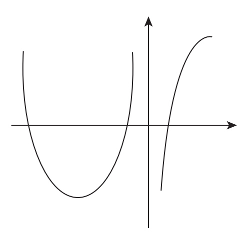
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

【例 1】证明 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ 在$(0, +\infty)$ 内单增.

【分析】

【例 2】设 $f(x)$ 连续,其 $f'(x)$ 的图像如下:则 $f(x)$ 有几个极小值点,几个极大值点?



2. 凹凸性与拐点

(1) 凹凸性

$\forall x_1, x_2 \in I$,有:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f(x) \text{ 是凹曲线}$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f(x) \text{ 是凸曲线}$$

(2) 拐点 —— 连续曲线凹凸弧的分界点

(3) 判别法:设 $f(x)$ 在 I 上二阶可导,

$$1)\begin{cases} \text{若 } f''(x_0) > 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x) \text{ 是凹的} \\ \text{若 } f''(x_0) < 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x) \text{ 是凸的} \end{cases}$$

2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点的左右邻域 $f''(x)$ 变号 $\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ 为拐点

【例 1】已知曲线 $L\begin{cases} x = t^2+1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases}(t > 0)$,讨论曲线 L 的凹凸性.

【分析】

【例 2】(《带你学》P139,例 14) 设 $y = f(x)$ 三阶导数连续,$f''(x_0) = 0$,$f'''(x_0) > 0$ 证明$(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

【分析】

【例 3】 设 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$，则其一个拐点为（　　）.

A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

【分析】

3. 渐近线

(1) 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+(\text{或}x_0^-)} f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一条铅直渐近线.

出现在：无定义点或者开区间端点

(2) 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty(\text{或}-\infty)} f(x)=A$，则称 $y=A$ 为 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

(3) 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}[f(x)-ax]=b\ \exists$，则称 $y=ax+b$ 为一条斜渐近线.

【例】 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 有（　　）条渐近线.

【分析】

4. 最值

(1) 对于函数 $f(x)$，在 $[a,b]$ 上找出三类点

$$\begin{cases} f'(x)=0\Rightarrow x_0\ \text{驻点} \\ f'(x)\ \text{不}\ \exists\Rightarrow x_1\ \text{不可导点} \\ \text{端点}\ a,b \end{cases}$$

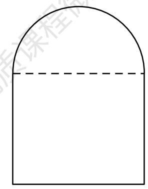
比较 $f(x_0)$,$f(x_1)$,$f(a)$,$f(b)$ 大小,取其最大(小)者为最大(小)值.

(2)若在 I 上求出唯一极大(小)值点,则由实际背景 $\Rightarrow$ 此点即为最大(小)值.

若(a,b)内,端点考虑取极值即可.

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{16},B 组 2.47(数学二 P_{19},B 组 2.64)]

防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图所示),截面的面积为 5 平方米,问底宽 x 为多少时才能使建造时所用的材料最省?



【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{16},B 组 2.61(数学二 P_{21},B 组 2.97;数学三 P_{19},B 组 2.68)]

求函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 在$[0,1]$上的最大值 $M(n)$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

【分析】

第三讲　一元函数积分学

核心考点

1. 定义
2. 计算(重点难点)
3. 应用

一、定义

1. 不定积分

$\forall x \in I$,使 $F'(x)=f(x)$ 对,则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

全体原函数就叫不定积分,记成:$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

2. 定积分

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【小结】

$\int f(x)\mathrm{d}x$ 为函数族,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为面积代表值

牛顿—莱布尼茨公式 /$N-L$ 公式:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$

二、计算(四大方法)

1. 凑微分法

(1) 基本积分公式

$$\int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C, k \neq -1 \begin{cases} \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

【例 1】$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

【例 2】$\int \frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

【例 3】$\int \frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x(1+\cos x e^{\sin x})}\mathrm{d}x$

【分析】

【例 4】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{25},B 组 3.51(数学二 P_{30},B 组 3.55;数学三 P_{29},B 组 3.52(3))]

求$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

【分析】

2. 换元法

当凑微分法不成功时，考虑换元，从而使题目从复杂变简单

(1) 三角换元 —— 当被积函数 $f(x)$ 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$ 可作如下换元：

$$\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow \text{令 } x = a\sin t, \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow \text{令 } x = a\tan t, \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow \text{令 } x = a\sec t, \begin{cases} x > 0, 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ x < 0, \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

【注】若见到 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，要先化为

$\sqrt{\varphi^2(x)-k^2}$，$\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$，$\sqrt{\varphi^2(x)+k^2}$，再作三角换元.

(2) 倒代换 $\left(x=\dfrac{1}{t}\right)$— 可用于分子次数明显低于分母次数时，特别地.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$

$k=1,2,4$

(3) 复杂部分代换 — 令复杂部分 $=t$

$\sqrt[n]{ax+b}=t$，$\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，$\sqrt{ae^{bx}+c}=t$，(根式代换)

$a^x, e^x = t$(指数代换)

$\ln x = t$(对数代换)

$\arcsin x, \arctan x = t$(反三角函数代换) 等等

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{24}，B 组 3.42(数学二 P_{30}，B 组 3.44；数学三 P_{28}，B 组 3.41)]

求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

【分析】

【**例 2**】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{25},B 组 3.47(数学二 P_{30},B 组 3.49;数学三 P_{29},B 组 3.48)]

求$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

【**分析**】

3. 分部积分法

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'\Rightarrow \mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$

$\Rightarrow\int \mathrm{d}(uv)=\int v\mathrm{d}u+\int u\mathrm{d}v\Rightarrow uv=\int v\mathrm{d}u+\int u\mathrm{d}v$

$\Rightarrow\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$

此方法一般是在运算过程中

$\begin{cases}1.\ \text{出现了不同类型函数的乘积}\\ 2.\ \text{且求}\int u\mathrm{d}v\ \text{困难,而求}\int v\mathrm{d}u\ \text{简单时}\end{cases}$

(1) 被积函数为 $P_n(x)\cdot e^{kx}$,$P_n(x)\sin ax$,$P_n(x)\cos ax$,选 $P_n(x)=u$.

(2) 被积函数为 $e^{ax}\sin bx$,$e^{ax}\cos bx$,选谁当 u 都行.

(3) 被积函数为 $P_n(x)\ln x$,$P_n(x)\arcsin x$;$P_n(x)\arctan x$,选 $\ln x$,arc —$=u$.

【注】分部积分公式$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 的推广为:

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\cdots+(-1)^n u^{(n)}v+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$$

可用表格法记忆

【例 1】求$\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题》数学一 P_{25},B组 3.49(数学二 P_{30},B组 3.50;数学三 P_{29},B组 3.50)]

设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算$\int f(x)\mathrm{d}x$.

【分析】

4. 有理函数的积分

(1) 定义:形如$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x,(n<m)$ 的积分

(2) 方法

1) 将 $Q_m(x)$ 因式分解

2) 将$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理公式之和

(3) 拆分原则

1)$Q_m(x)$ 分解出$(ax+b)^k \Rightarrow$ 产生 k 项

$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k},k=1,2\cdots$

2)$Q_m(x)$ 分解出$(px^2+qx+r)^k \Rightarrow$ 产生 k 项

$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k},k=1,2,\cdots$

【例 1】计算$\int \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}\mathrm{d}x$

【例 2】计算$\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\mathrm{d}x$

【自练】$\int \frac{t^3-3t}{(t-1)^2(t+1)^2}\mathrm{d}t$

三、定积分的计算

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

(1) 先按四大基本积分法求出 $F(x)$

(2) 带入上下限,要注意换元时的细节:

对于$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$(令 $x=\varphi(t)$)

且要求 $\varphi'(t)$ 连续,并 $x=\varphi(t)$ 不超过区间$[a,b]$

【例 1】$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

【分析】

【例 2】$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$,$n$ 为大于 1 的整数.

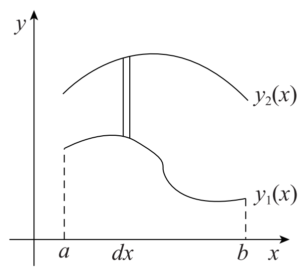
【分析】

【例 3】$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

【分析】

四、一元积分学的应用

1. 用积分表达和计算平面图形的面积



$y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$，$x=a$，$x=b$，$(a<b)$所围成的平面图形的面积.

$S=\int_a^b |y_2(x)-y_1(x)|\,\mathrm{d}x$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{26}，B组3.74(数学二 P_{31}，B组3.78；数学三 P_{30}，B组3.73)]

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内大于零，并且满足

$$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2(a\text{ 为常数}),$$

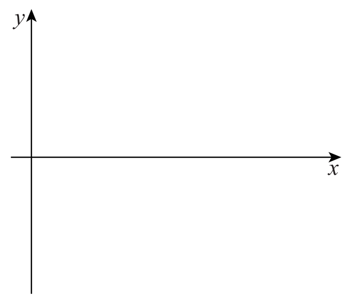
又曲线$y=f(x)$与$x=1$，$y=0$所围的图形 S 的面积为2.

求函数$y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【分析】

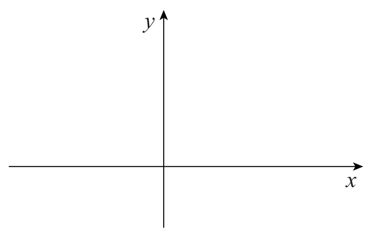
2. 用积分表达和计算旋转体的体积

(1) $y=y(x)$ 与 $x=a,x=b,(a<b)$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积为



$$V=\int_a^b \pi y^2(x)\mathrm{d}x$$

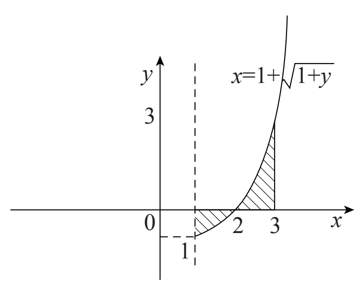
(2) $y=y(x)$ 与 $x=a,x=b,(a<b)$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积为



$$V_y=\int_a^b 2\pi x\,|\,y(x)\,|\,\mathrm{d}x\text{(柱壳法)}$$

【例】 设平面图形 σ 由 $y=x^2-2x,y=0,x=1,x=3$ 围成,求 σ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积.

【分析】



3. 用积分表达和计算函数的平均值

$y(x)$ 在$[a,b]$上的平均值 $\bar{y}=\dfrac{\int_a^b y(x)\mathrm{d}x}{b-a}$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{21},A 组 3.25(数学二 P_{25},A 组 3.42;数学三 P_{25},A 组 3.40)]

函数 $y=\ln x$ 在区间$[1,\mathrm{e}]$上的平均值为________.

【答案】

【分析】

第四讲　多元函数微分学

核心考点

1. 概念
2. 计算
3. 极最值

一、概念

1. 极限

设 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $P(x,y) \in D \cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，恒有

$|f(x,y) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

【例】求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$

2. 连续性

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

【注】若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$，叫不连续，不讨论间断类型

3. 偏导数(必考) $z = f(x,y)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0) \triangleq$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_y(x_0,y_0)\triangleq$$

【例 1】设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f'_x(0,0),f'_y(0,0)$.

【分析】严格按定义办事

（见到 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\Rightarrow$ 先写定义再说）

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{36}，A 组 5.9（数学二 P_{38}，B 组 4.7；数学三 P_{37}，B 组 4.6）]

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin(x^2y), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f'_x(0,1)=$ ________.

【分析】

二、计算（必考）—— 多元函数微分法

1. 链式求导规则

设 $z=f(u,v,w),u=u(y),v=v(x,y),w=w(x)$

称 x,y 叫自变量，u,v,w 叫中间变量，z 叫因变量

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

2. 高阶偏导数

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{37}，B 组 5.9（数学二 P_{38}，B 组 4.6；数学三 P_{39}，C 组 4.4）]

设 $F(u,v)$ 对其变元 u,v 具有二阶连续偏导数，并设 $z=F\left(\dfrac{y}{x},x^2+y^2\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

【分析】

三、多元函数的极最值(必考)

1. 无条件的极值 $z=f(x,y)$

(1) 必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在}\\\text{取极值}\end{cases}$,则 $f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$.

【注】适用于三元及以上(常考 2—5 元)

(2) 充分条件

$$\left.\begin{aligned}f_{xx}''(x_0,y_0)=A\\f_{xy}''(x_0,y_0)=B\\f_{yy}''(x_0,y_0)=C\end{aligned}\right\}\Rightarrow\Delta=B^2-AC\begin{cases}<0\begin{cases}A>0\Rightarrow\text{极小值点}\\A<0\Rightarrow\text{极大值点}\end{cases}\\>0\Rightarrow\text{不是极值点}\\=0\Rightarrow\text{该法失效,另谋他法}\end{cases}$$

【注】只适用于二元

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{40},C组5.6(数学二 P_{40},C组4.8;数学三 P_{39},C组4.7)]

设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+32=0$$

确定,讨论函数 $z(x,y)$ 的极大值与极小值.

【分析】

2. 条件极值

提法：求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$下的极值.

拉氏乘数法：

(1) 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$、($\lambda,\mu$ 均可能取 0)

(2) 令 $F'_x=0,F'_y=0,F'_z=0,F'_\lambda=0,F'_\mu=0$

(3) 解方程组 $\Rightarrow P_i(x_i,y_i,z_i)\Rightarrow u(P_i)$，比较 $\Rightarrow$ 取最大、最小者为最大、最小值.

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{38}，B 组 5.18(数学二 P_{38}，B 组 4.17；数学三 P_{37}，B 组 4.16)]

某公司可通过电台和报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R（万元）与电台广告费 x_1（万元）及报纸广告费用 x_2（万元）之间的关系有如下经验公式：

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

【分析】

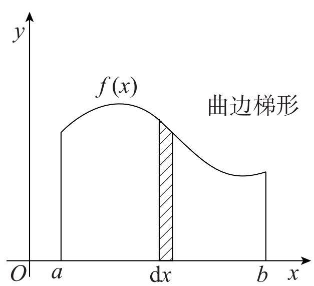
第五讲　二重积分

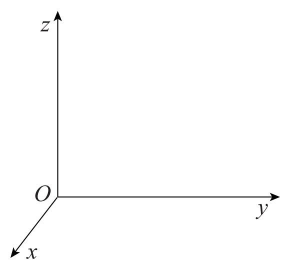
核心考点

1. 概念
2. 计算

一、概念

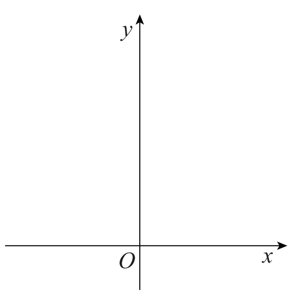
1. 比较

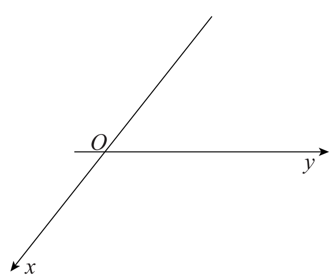




2. 对称性(必考)

(1) 普通对称性





设 D 关于 y 轴对称，$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, f(x,y)=f(-x,y)\\ 0, f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$

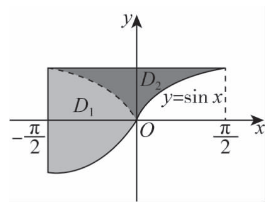
设 D 关于 x 轴对称，$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, f(x,y)=f(x,-y)\\ 0, f(x,y)=-f(x,-y)\end{cases}$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{41}，A组6.1(数学二 P_{41}，A组5.6;数学三 P_{40}，A组5.2)]

设平面区域 D 由曲线 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$x=-\frac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成，则 $\iint\limits_{D}(xy^3-1)\mathrm{d}\sigma=$ ( )

(A)2　　(B)-2　　(C)π　　(D)$-\pi$

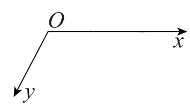
【分析】如图所示，用曲线 $y=-\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0\right)$ 将区域 D 划分为 D_1 和 D_2 两部分，则 D_1 关于 x 轴对称，D_2 关于 y 轴对称，于是有



(2) 轮换对称性(直角坐标系下)

引例：

1) $\iint\limits_{D_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\leqslant 1}(2x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\leqslant 1}(2y^2+3x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$



—— 积分值与用什么字母表示无关

2) $\iint\limits_{D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1}(2x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{4}\leqslant 1}(2y^2+3x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

定义：

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题·习题分册》数学一 P_{47}，B组6.39(数学二 P_{43}，B组5.11;数学三 P_{42}，B组5.10)]

记平面区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，计算如下二重积分：

(1)$I_1=\iint\limits_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma$，其中 $f(t)$ 为定义在$(-\infty,+\infty)$ 上的连续正值函数，常数 $a>0,b>0$；

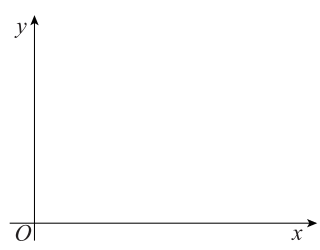
(2)$I_2=\iint\limits_D (\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda y})\mathrm{d}\sigma$，常数 $\lambda>0$.

【分析】

二、计算

1. 直角坐标系

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



(1)X 型区域(上下型)$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$

后积先定限

限内画条线

先交下曲线

后交上曲线

(2)Y 型区域(左右型)$\int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题・习题分册》数学一 P_{41},A组6.3(数学二 P_{41},A组5.5;数学三 P_{41},B组5.2)]

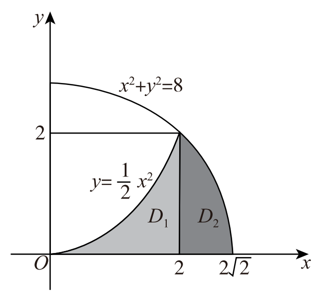
已知 $I=\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$,则 $I=$ ( )

A. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_1^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y}}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

【答案】A

【分析】



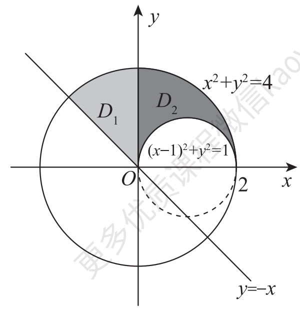
2. 极坐标系

$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}\theta\cdot r\mathrm{d}r \Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典1000题・习题分册》(数学一 P_{48},B组6.47)]

计算 $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由 $y=-x, x^2+y^2=4, y=\sqrt{2x-x^2}$ 所围成.

【分析】



第六讲 微分方程

核心考点

1. 概念
2. 一阶方程求解
3. 高阶方程求解

一、概念

1. $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

2. 阶数 — 方程中 y 的最高阶导数的阶数

如：$y\sin x-y''=\cos x+2$ 就是二阶微分方程

$\begin{cases} n=1,\text{一阶} \\ n\geqslant 2,\text{高阶} \end{cases}$

3. 通解 — 解中所含独立常数的个数 = 方程的阶数

二、一阶方程的求解

1. 变量可分离型

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)=g(x)h(y)\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)}=g(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(x)\mathrm{d}x$

【例 1】［取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{59}，A 组 8.1(数学二 P_{46}，A 组 6.8；数学三 P_{51}，A 组 7.6)］

微分方程 $y'+\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{y^2+3x}=0$ 的通解(其中 C 为任意常数) 是 ( )

A. $2\mathrm{e}^{3x}+3\mathrm{e}^{y^2}=C$ B. $2\mathrm{e}^{3x}+3\mathrm{e}^{-y^2}=C$

C. $2\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^{-y^2}=C$ D. $\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-y^2}=C$

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{61},B 组 8.16(数学二 P_{48},B 组 6.7;数学三 P_{54},B 组 7.8)]

微分方程的通解________(一定 / 不一定)包含了所有的解.

【答案】不一定

【分析】

2. 齐次型

形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$

$\Rightarrow u'x+u=f(u)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x=f(u)-u\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P_{62},B 组 8.25(数学二 P_{48},B 组 6.16;数学三 P_{54},B 组 7.15)]

求解$(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$.

【分析】

3. 一阶线性型

形如：$y'+p(x)y=q(x)$，$p(x)$，$q(x)$ 为已知函数

$\Rightarrow y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C\right)$

【例】［取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{61}，B 组 8.17(数学二 P_{48}，B 组 6.8；数学三 P_{54}，B 组 7.9)］

微分方程 $(y^2+1)\mathrm{d}x=y(y-2x)\mathrm{d}y$ 的通解是________.

【分析】

三、二阶方程的求解

1. $y''+py'+qy=0$　p,q 为常数

(1) 写 $\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\Delta=p^2-4q$

$$(2)\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}\\ \Delta=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda\Rightarrow y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}\\ \Delta<0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}\,i}{2}=\alpha\pm\beta i\Rightarrow y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\end{cases}$$

2. $y''+py'+qy=e^{\alpha x}P_m(x)$

$y_{通解}=y_{齐次通解}+y^*_{非齐次特解}$

(1) 照搬 1⇒$y_{齐次通解}$

(2) 设定 $y^*=e^{\alpha x}Q_m(x)x^k$

一看:自由项中的 α

二算:$\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\lambda_{1,2}$

三比:$\begin{cases}\alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2\Rightarrow k=0\\ \alpha=\lambda_1 \text{ 或 } \alpha=\lambda_2\Rightarrow k=1\\ \alpha=\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow k=2\end{cases}$

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{59},A 组 8.7(数学二 P_{47},A 组 6.10;数学三 P_{52},A 组 7.9)]

微分方程 $y''+2y'+y=\operatorname{sh}x$ 的一个特解应具有形式(其中 a,b 为常数)　(　　)

A. $a\operatorname{sh}x$　　B. $a\operatorname{ch}x$

C. $ax^2e^{-x}+be^x$　　D. $axe^{-x}+be^x$

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{60},A 组 8.17(数学二 P_{49},B 组 6.29;数学三 P_{53},A 组 7.33)]

求微分方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$ 的通解.

【分析】

四、应用

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P_{60},A 组 8.16(数学二 P_{47},A 组 6.27;数学三 P_{52},A 组 7.29)]

已知曲线 $y=y(x)$ 经过点$(1,e^{-1})$,且在点(x,y)处的切线在 y 轴上的截距为 xy,求该曲线方程的表达式.

【分析】

主讲老师：张宇

线性代数

新东方在线 www.koolearn.com

第一讲　行列式

一、从行列式讲起

先看一个式子：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 我们称其为 2 阶行列式，其中 a_{ij} 的第一个下标 i 表示此元素所在的行数，第二个下标 j 表示此元素所在的列数，$i=1,2$，$j=1,2$，于是此行列式中有 4 个元素，并且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 这是一个什么样的计算规则？它背后有什么样的意义？

希望读者跟着我的思路走. 请你将此行列式的第一行的两个元素 a_{11}，a_{12} 看成一个 2 维向量 $[a_{11},a_{12}]\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{\alpha}_1$（线性代数中，向量不需要在字母上加箭头写成 $\vec{\alpha_1}$，只要写 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 即可，此后类同，不再重复）. 将此行列式的第二行的两个元素 a_{21}，a_{22} 看成另一个 2 维向量 $[a_{21},a_{22}]\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{\alpha}_2$. 不失一般性，将其标在直角坐标系中，且以这两个向量为邻边拼出一个 $\square OABC$，则 $S_{\square OABC}=?$

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的长度（模）为 l，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的长度（模）为 m，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 x 轴正向的夹角为 α，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 x 轴正向的夹角为 β，于是，如图 1 所示：

$$\begin{aligned} S_{\square OABC} &= l\cdot m\cdot\sin(\beta-\alpha) \\ &= l\cdot m(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha) \\ &= l\cos\alpha\cdot m\sin\beta-l\sin\alpha\cdot m\cos\beta \\ &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

于是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=S_{\square OABC}$.

我们看到了一个极其直观有趣的结论：**2 阶行列式是由两个 2 维向量组成的，其(运算规则的)结果为以这两个向量为邻边的平行四边形的面积**. 这不仅得出了 2 阶行列式的计算规则，也能够清楚地看到其几何意义.

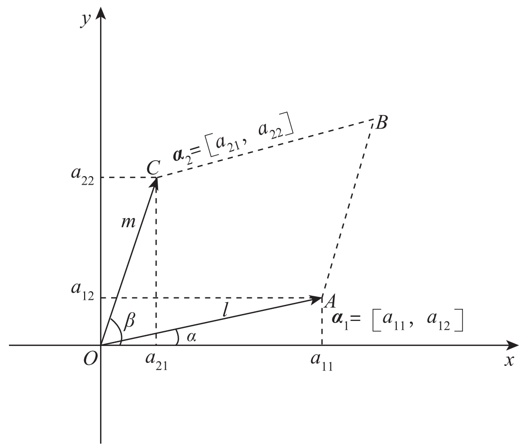


图 1

线性代数这门学问最大的一个特点是“可以作线性推广”——3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是什么？我希望读者能够仿照上述定义回答出：**3 阶行列式是由 3 个 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},a_{13}]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},a_{23}]$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[a_{31},a_{32},a_{33}]$ 组成的，其(运算规则的)结果为以这 3 个向量为邻边的平行六面体的体积**. 如图 2 所示：

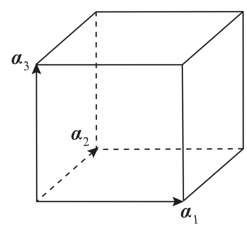


图 2

依此类推，我们便可以给出 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的本质定义：

n 阶行列式由 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}]$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=[a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}]$ 组成，其结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积.

二、行列式的性质

性质 1 行列互换,其值不变,即$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

性质 2 行列式中某行(列)元素全为零,则行列式为零.

性质 3 行列式中某行(列)元素有公因子$k(k\neq0)$,则k可提到行列式外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 (1)本书用k ⓘ表示第i行乘k,$k[j]$表示第j列乘k;读者做题时可不必写出.

(2)以后称上述等式从右到左的运算为**"倍乘"性质**.

性质 4 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和,则可拆成两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 等式从右到左是两个行列式相加的运算.如果两个行列式的其他元素对应相等,只有一行(列)不同时,可以相加,相加时其他元素不变,不同元素的行(列)对应相加即可.

性质 5 行列式中两行(列)互换,行列式的值反号.

【注】 (1)以后用 ⓘ↔ⓙ表示第i行与第j行互换,$[i]\leftrightarrow[j]$表示第i列与第j列互换;

(2)以后称上述运算为**"互换"性质**.

性质 6 行列式中的两行(列)元素相等或对应成比例,则行列式为零.

性质 7 行列式中某行(列)的k倍加到另一行(列),行列式的值不变.

【注 1】 (1)以后用ⓘ$+k$ⓙ表示第j行的k倍加到第i行,$[i]+k[j]$表示第j列的k倍加到第i列;

(2)以后称上述运算为**"倍加"性质**.

【注 2】 以上 7 个性质均可由本书前言中"一、从行列式讲起"所介绍的行列式的几何背景直观地得到,而不需复杂抽象的分析.如性质 6 所说到的"两行元素对应成比例,

则行列式为零”，可取$\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}$，因向量[2，3]与向量[4，6]为平行向量，故$\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}=S_{\square}=0$，如图1—1所示，一目了然.

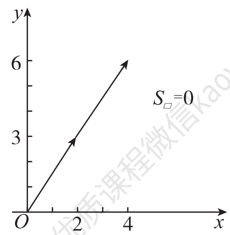


图 1—1

三、行列式的展开定理

1. 余子式

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行，第 j 列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的$n-1$阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记成 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

2. 代数余子式

余子式 M_{ij} 乘$(-1)^{i+j}$后称为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

3. 行列式按某一行(列)展开的展开公式

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases}a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n),\\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

四、几个重要的行列式

1. 上(下)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

3. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

4. 行和或列和相等的行列式(行和是指每一行元素相加的和,列和同理)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n \times n} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

五、例题

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P71,A 组 42(数学二 P59,A 组 40;数学三 P61,A 组 23)]

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P72,A 组 61(数学二 P61,A 组 72;数学三 P62,A 组 36)]

计算行列式$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$.

【分析】

【例 3】[取自《张宇线性代数 9 讲》P11,例 1.9]

计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}.$$

【分析】

【例 4】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P73,A 组 62(数学二 P61,A 组 70;数学三 P72,B 组 80)]

计算 $D_5=\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}.$

【分析】

【例 5】[取自《张宇线性代数 9 讲》P17，习题 1.7]

计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

第二讲　矩阵

一、矩阵的定义及其基本运算

1. 矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数，排成 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $(a_{ij})_{m \times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 当 $m=n$ 时，称为 n 阶方阵.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m \times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s \times k}$. 若 $m=s$，$n=k$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵.

2. 矩阵的基本运算

(1)**相等**　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m \times n}=\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s \times k} \Leftrightarrow m=s,n=k$，且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且对应元素相等.

(2)**加法**　两个矩阵是同型矩阵时，可以相加，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m \times n}+(b_{ij})_{m \times n}=(c_{ij})_{m \times n},$$

其中，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，即对应元素相加.

(3)**数乘矩阵**　设 k 是一个数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵. 数 k 和 $\boldsymbol{A}$ 的乘积称为数乘矩阵，即

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$
$$=(ka_{ij})_{m \times n},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都乘以 k.

(4)**矩阵的乘法**　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s \times n$ 矩阵(矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数必须与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的

行数相等)，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可乘，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times n$ 矩阵，记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$. $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 s 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的 s 个对应元素两两乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

矩阵乘法满足下列运算规律：

①结合律 $(\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times r})\boldsymbol{C}_{r\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}(\boldsymbol{B}_{s\times r}\boldsymbol{C}_{r\times n})$；

②分配律 $\boldsymbol{A}_{m\times s}(\boldsymbol{B}_{s\times n}+\boldsymbol{C}_{s\times n})=\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}+\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{C}_{s\times n}$；

$(\boldsymbol{A}_{m\times s}+\boldsymbol{B}_{m\times s})\boldsymbol{C}_{s\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{C}_{s\times n}+\boldsymbol{B}_{m\times s}\boldsymbol{C}_{s\times n}$；

③数乘与矩阵乘积的结合律

$$(k\boldsymbol{A}_{m\times s})\boldsymbol{B}_{s\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}(k\boldsymbol{B}_{s\times n})=k(\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}).$$

【注】 矩阵的乘法一般情况下不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

例如
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix},\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}.$$

【例 1】[取自《张宇线性代数 9 讲》P40，例 3.3]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^n$.

【分析】

【例 2】[取自《张宇线性代数 9 讲》P39，例 3.2]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

【分析】

【例 3】［取自《张宇线性代数 9 讲》P41，例 3.7］

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【分析】

二、初等变换法与求 A^{-1}

1. 初等变换

(1)一个非零常数乘矩阵的某一行(列);

(2)互换矩阵中某两行(列)的位置;

(3)将某行(列)的 k 倍加到另一行(列).

以上三种变换称为矩阵的三种初等行(列)变换,且分别称为倍乘、互换、倍加初等行(列)变换.

【例 1】化 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\1 & -1 & 2 & -1 & 0\\4 & -2 & 6 & 3 & -4\\2 & 4 & -2 & 4 & -7\end{bmatrix}$为行阶梯型矩阵

【分析】

【例 2】化 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$为行最简阶梯型矩阵

【分析】

2. 用初等变换求逆矩阵的方法

$$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}],$$

【例】[取自《张宇线性代数 9 讲》**P**47,例 3.19]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

【分析】

第三讲　方程组

一、齐次线性方程组的求解

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

称为 m 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组，其向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n.$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

1. 有解的条件

当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关），方程组（Ⅰ）有唯一零解；

当 $r(\boldsymbol{A})=r<n$ 时（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关），方程组（Ⅰ）有非零解，且有 $n-r$ 个线性无关解.

2. 解的性质

若 $\boldsymbol{A\xi}_1=\mathbf{0},\boldsymbol{A\xi}_2=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2)=\mathbf{0}$，其中 k_1,k_2 是任意常数.

3. 基础解系和解的结构

(1)基础解系:设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$,①是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解;②线性无关;③方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出,则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(2)通解:设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

4. 求解方法

①将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化成阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$(或最简阶梯形矩阵),初等行变换将方程组化为同解方程组,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,只需解 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 即可.设 $r(\boldsymbol{A})=r$,

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n},$$

其中,m 是原方程组中方程个数,n 是未知量个数;

②按列找出一个秩为 $r(A)$ 的子矩阵;

③按照基础解系的定义写出通解。

【例】[取自《张宇线性代数 9 讲》P104,例 6.1]

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

的通解.

【分析】

二、非齐次线性方程组

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{Ⅱ}$$

称为 m 个方程 n 个未知量的非齐次线性方程组，其向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

矩阵 $\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵，简记成 $[\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}]$ 或 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$.

1. 有解的条件

若 $r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$（$\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出），则方程组（Ⅱ）无解；

若 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=n$（即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 线性相关），则方程组（Ⅱ）有唯一解；

若 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=r<n$，则方程组（Ⅱ）有无穷多解 .

2. 解的性质

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\xi}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则(1)$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；(2)$k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解 .

3. 求解方法和通解结构

将增广矩阵作初等行变换化成阶梯形（或最简阶梯形）矩阵，求出对应齐次线性方程组的通解加上一个非齐次线性方程组的特解即是非齐次线性方程组的通解.

【例 1】[取自《张宇线性代数 9 讲》P106，例 6.2]

求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3, \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7, \end{cases}$$

并用对应的齐次方程组的基础解系表示通解.

【分析】

【例 2】[取自《张宇线性代数 9 讲》P122，例 6.25]

求线性方程组

$$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3+3x_4=11, \\ -3x_1+x_2-4x_3-2x_4=-6, \\ -x_1-9x_2+3x_4=15, \end{cases}$$

满足条件 $x_1=x_2$ 的全部解.

【分析】

第四讲　特征值与二次型

一、特征值与特征向量的基本概念

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是一个数，若存在 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}, \tag{①}$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

由①式，得

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0},$$

因 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，故

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0. \tag{②}$$

②式称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，是未知量 λ 的 n 次方程，有 n 个根(重根按照重数计)，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为特征矩阵，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 称为特征多项式.

【例】[取自《张宇线性代数 9 讲》P131，例 7.2(1)]

【分析】

二、矩阵相似的定义

1. 定义 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵,若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,记成 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

三、矩阵相似对角化的定义

若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,记 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

四、求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$

对于 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,若其成立,则 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$,其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n]$,$\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量,且 $\boldsymbol{\xi}_i$ 对应的特征值为 λ_i,故此问题事实上仍是求解 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的问题.

五、二次型的定义及其矩阵表达式

n 元变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2 &+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ &+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ &\cdots\cdots \\ &+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n **元二次型**,简称**二次型**.

考研只研究系数 $a_{ij}\in\mathbf{R}(i\leqslant j,i,j=1,2,\cdots,n)$的情况,且称此二次型 f 为**实二次型**.

因为 $x_ix_j=x_jx_i$,现若令 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,于是

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+ \\ &\quad\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \qquad (*) \\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_ix_j, \qquad (**) \end{aligned}$$

其中(*)式称为完全展开式,(**)式称为和式. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则二次型可表示为

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}). \qquad (***)$$

(***)式称为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵表达式,实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵**. 这里需要着重多说几句.

二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个**对称矩阵**,其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$a_{ij}=a_{ji}$,即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$. 为什么要强调这一点?

事实上,一个二次型可以有不同的写法,例如三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2,$$

可以写成

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+3x_2x_1,$$

也可以写成

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_1$$

等. 对应地用矩阵表示也有多种形式：

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad ①$$

$$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad ②$$

$$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}. \quad ③$$

这样，代表二次型的矩阵就不唯一了，不利于研究二次型问题. 现在我们立了“规矩”，**规定二次型的矩阵必须是对称矩阵，代表二次型的矩阵就是唯一的了**. 所以只有对称矩阵才是二次型的矩阵，也只有用对称矩阵表达的式子才是二次型的矩阵表达式，上面第③种写法是按“规矩”写的. 再看两个例子.

【注例】写出三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$ 的二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【分析】

六、线性变换的定义

对于 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若令

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n, \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$，则可写为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

上式称为从 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**线性变换**. 若线性变换的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，即 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$，则称为**可逆线性变换**. 现给出 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，则

$$f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}.$$

记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{y}).$$

此时，二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 通过线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 得到一个新二次型 $g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$.

【例】［取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P86，B 组 116（数学二 P79，B 组 139；数学三 P79，B 组 154）］

已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3.$$

(1)写出二次型 f 的矩阵表达式；

(2)用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

【分析】

主讲老师：张宇

概率论与数理统计

第一讲　随机事件与概率

一、基本概念

1. 随机试验

我们称一个试验为**随机试验**，如果它满足以下三个条件：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）试验所有可能结果是明确可知道的，并且不止一个；

（3）每一次试验会出现哪一个结果，事先不能确定.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的，为方便起见，将随机试验简称为**试验**，并用字母 E 或 $E_1,E_2,\cdots$ 表示.

【注】 在不少情况下，我们不能确切知道某一随机试验的全部可能结果，但可以知道它不超出某个范围. 这时，也可以用这个范围来作为该试验的全部可能结果. 例如，我们需要记录某个城市一天的交通事故数量，则试验结果将是非负数 x. 我们无法确定 x 的可能取值的确切范围，但可以把这范围取为 $[0,+\infty)$，它总能包含一切可能的试验结果，尽管我们明知某些结果，如 $x>10\,000$ 是不会出现的. 我们甚至可以把这范围取为 $(-\infty,+\infty)$ 也无妨. 这里就有了一定的数学抽象，它可以带来很大的方便.

2. 随机事件

在一次试验中可能出现，也可能不出现的结果称为**随机事件**，简称为**事件**，并用大写字母 A,B,C 等表示. 为讨论需要，将每次试验一定发生的事件称为**必然事件**，记为 Ω. 每次试验一定不发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$.

【注】 随机事件在一次试验中是否发生虽然不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生呈现出一定的规律性，这门学问正是要研究这种规律性，读者应在研究这门课程后，对此有较为深刻的认识.

3. 样本空间

随机试验每一个最简单、最基本的结果称为**基本事件**（或**样本点**），记为 ω. 基本事件

（或样本点）的全体称为**基本事件空间**（或**样本空间**），记为Ω，即$\Omega=\{\omega\}$. 随机事件A总是由若干个基本事件组成，即A是Ω的子集，$A\subset\Omega$. 事件A发生等价于构成A的基本事件有一个发生.

4. 事件的关系与运算

（1）如果事件A发生必导致事件B发生，则称事件B**包含**事件A（或A被B包含），记为$A\subset B$.

（2）如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与B**相等**，记为$A=B$. A与B相等，事实上也就是说，A与B由完全同样的一些试验结果构成，它不过是同一事件表面上看来不同的两个说法而已.

（3）称"事件A与B同时发生"的事件为事件A与B的**交(或积)**，记为$A\cap B$或AB.

【注】 称"有限个（或可列个）事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$同时发生"的事件为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$的交（或积），记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$（或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$）.

（4）若$AB\neq\varnothing$，则称事件"A和B**相容**"；若$AB=\varnothing$，则称"事件A与B**互不相容**"，也叫**互斥**. 如果一些事件中任意两个事件都互斥，则称这些事件是**两两互斥**的，或简称**互斥**的.

（5）称"事件A与B至少有一个发生"的事件为事件A与B的**并(或和)**，记为$A\cup B$.

【注】 称"有限个（或可列个）事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$至少有一个发生"的事件为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$的并（或和），记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$（或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$）.

（6）称"事件A发生而事件B不发生"的事件为事件A与B的**差**，记为$A-B$；称"事件A不发生"的事件为事件A的**逆事件**或**对立事件**，记为$\overline{A}$.

由定义易知 $A-B=A-AB=A\overline{B}$，$B=\overline{A}\Leftrightarrow AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$.

（7）称有限个（或可列个）事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$构成**一个完备事件组**，如果$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$（或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$）$=\Omega$，$A_iA_j=\varnothing$（对一切$i\neq j$）.

事件的关系和运算法则：

（1）吸收律 若$A\subset B$，则$A\cup B=B$，$A\cap B=A$；

（2）交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（3）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（4）分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$；

（5）对偶律（德摩根律） $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【注】 ① 事件运算顺序约定为先进行逆运算，而后交运算，最后并或差运算.

② 事件的关系、运算与集合的关系、运算相当，且具有相同的运算法则，所以我们可以对比着理解记忆，并要学会用集合关系去思考事件关系.

二、用古典概型求概率

1. 定义

称随机试验(随机现象)的概率模型为**古典概型**，如果其基本事件空间(样本空间)满足：

(1) 只有有限个基本事件(样本点)；

(2) 每个基本事件(样本点)发生的可能性都一样.

如果古典概型的基本事件总数为 n，事件 A 包含 k 个基本事件，也叫作有利于 A 的基本事件为 k 个，则 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的**古典概率**.

2. 方法与例题

计数方法：

(1) 穷举法：个数不多时，直接数数即可.

(2) 集合对应法：

① 加法原理——完成一件事有 n 类方法，第一类方法中有 m_1 种办法，第二类方法中有 m_2 种方法，…，第 n 类方法中有 m_n 种办法，则完成此事共有 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ 种办法.

② 乘法原理 —— 完成一件事有 n 个步骤.

第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种办法，则完成此事共有 $\prod\limits_{i=1}^{n} m_i$ 种办法.

③ 排列——从 n 个不同的元素中取出 $m(\leqslant n)$ 个元素，并按照一定顺序排成一列，叫排列. 所有排列的个数叫排列数. 记作 $\mathrm{P}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$

当 $m=n$ 时，$\mathrm{P}_n^n=\frac{n!}{0!}=n!$ 叫全排列.

④ 组合——从 n 个不同的元素中取出 $m(\leqslant n)$ 个元素，并成一组，叫组合. 所有组合

的个数叫组合数.记作

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!}$$

(3) 对立事件思想 —— 若研究 A 复杂,则转而研究 $\overline{A}$,用 $n - n_{\overline{A}} = n_A$(总数一易算出).

【例 1】袋中 5 球,3 白 2 黑

(1) 从袋中先后有放回取 2 球.

(2) 先后无放回取 2 球.

(3) 任取 2 球.

求 $P(A) = P\{$至少一白$\}$.

【分析】

【例 2】袋中 100 个球,40 个白 60 黑.

① 先后无放回取 20 个,求 $P\{15$ 白 5 黑$\}$;

② 先后无放回取 20 个,求 $P\{$第 20 次取到白$\}$;

③ 先后有放回取 20 个,求 $P\{15$ 白 5 黑$\}$;

④ 先后有放回取 20 个,求 $P\{$第 20 次取到白$\}$.

【分析】

三、用几何概型求概率

1. 引例与定义

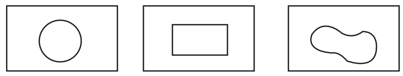
假设明天早上 9:00,天上会掉一个馅饼(当作质点)到你所在学校的操场上,请你用食堂的饭盆去接(如下图).

两个问题:一是你站在哪里接呢?二是你要带多大的饭盆和什么形状的饭盆呢?认真思考后,不难得出如下结论.

第一个问题的答案是:站在何处去接馅饼都可以. 这里就要求读者懂得一个重要思想 —— **等可能性思想 —— 我们没有任何理由认为这个馅饼更有可能落在操场区域中的某个位置,只好认为它落在此区域中的任何位置都具有相等的可能性**. 这个思想在很多问题中都有重要应用,比如说:一个袋子中有 10 个同质球,其中有 1 个白球,9 个黑球,现在请你从该袋子中随机取出一球,问取出的球是白球的概率. 我们会毫不犹豫地回答:十分之一. 这里用到的就是这个思想:由于球是同质的,我们没有任何理由认为取到某一个球更具有可能性,只好认为取到 10 个球中任何一球都具有等可能性,所以取到白球的概率自然是十分之一.

第二个问题的答案是:你所带的饭盆大小至关重要,但是饭盆是什么形状却无关紧要. 为什么?因为馅饼落在操场区域的任何位置都具有等可能性,于是,读者容易想到,如果饭盆的面积是操场面积的千分之一,那么你接到馅饼的概率就是千分之一;如果饭盆的面积是操场面积的二分之一,那么你接到馅饼的概率也就是二分之一;如果,我是说如果,你的饭盆面积和操场面积一样大,那么毫无疑问,馅饼就是你的了. 至于你是用圆形、还是矩形、甚至是奇形怪状的(如下图),真是随你了(这里要注意一点:如果你的饭盆面积和操场面积一样大,你的饭盆和操场形状自然是一样的,这是特殊情况). 这里又可以

把第一个问题所述的等可能性等价地，或者说更加专业地描述为：**馅饼落到操场区域的任意子区域上的概率与该子区域的面积大小成正比.**



以上所述涉及**求概率的几何概型**这一重要知识点.

于是，在本书中你会看到如下定义与公式.

称随机试验(随机现象)的概率模型为**几何概型**，如果：

(1) 样本空间(基本事件空间)Ω 是一个可度量的几何区域；

(2) 每个样本点(基本事件)发生的可能性都一样，即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 S 的可能性大小与 S 的几何度量成正比，而与 S 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中，如果 S_A 是样本空间 Ω 的一个可度量的子区域，则事件 $A=\{$样本点落入区域 $S_A\}$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{S_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的**几何概率.**

需要指出的是，上述问题是考研重点，是命题人手里的“香饽饽”.

2. 方法

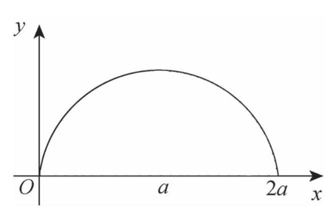
几何概型的特点是总样本数和事件所含样本的点数不能如古典概型那样可以数数，而具有几何特性，如长度、面积或体积等，解题时应将数量关系用几何直观图形表现出来，其概率通常是事件所含样本数和总样本数对应区域大小之比. 前言中对此有详细叙述，可参考之.

3. 例题

【例】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P15$，例 1.18]

随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}\ (a>0)$ 内投掷一点，点均匀落在半圆内任何一个区域，求该点和原点连线同 x 轴夹角 $\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 的概率.

【分析】



四、用重要公式求概率

1. 重要公式

(1) 逆事件概率公式

对于任一事件 A,有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(2) 加法公式

对于任意两个事件 A,B,有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

【注】 上式还能推广到多个事件的情况.

① 设 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件,则有

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$.

② 对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,可以用数学归纳法证得

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$.

(3) 减法公式

$P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A\overline{B})$.

(4) 条件概率公式

设 A,B 为任意两个事件,若 $P(A) > 0$,我们称在已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率为**条件概率**,记为 $P(B \mid A)$,并定义

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

【注】 ① 条件概率 $P(\cdot \mid A)$ 是概率,概率的一切性质和重要结果对条件概率都适用.

例如:

$$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A),$$
$$P(B - C \mid A) = P(B \mid A) - P(BC \mid A)$$

等等.

② 条件概率就是在附加了一定的条件之下所计算的概率.当说到“条件概率”时,总是指另外附加的条件,其形式可归结为“已知某事件发生了”.

(5) 乘法公式

如果 $P(A) > 0$,则 $P(AB) = P(A)P(B \mid A)$.

一般地,如果 $P(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$,则 $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid$

$A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1\cdots A_{n-1})$.

(6) 全概率公式

如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_iA_j = \varnothing(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots,n), P(A_i) > 0$,则对任一事件 B,有

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_iB,\quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

(7) 贝叶斯公式(又称逆概公式)

如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_iA_j = \varnothing(i \neq j), P(A_i) > 0$,则对任一事件 B,只要 $P(B) > 0$,就有

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}(i,j = 1,2,\cdots,n).$$

【注】 ① 要注意 $P(B)$ 与 $P(B \mid A)$ 的区别与联系,虽然二者都是计算事件 B 的概率,但前者 $P(B)$ 实际上是指在样本空间 Ω 下计算的,后者 $P(B \mid A)$ 则是在 A 已经发生的条件下(即样本空间现在缩减至 A) 计算的.

② 全概率公式是用于计算某个"结果"B 发生的可能性大小. 如果一个结果 B 的发生总是与某些前提条件(或原因、因素或前一阶段结果)A_i 相联系,那么在计算 $P(B)$ 时,我们总是用 A_i 对 B 作分解:

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_iB,$$

应用全概率公式计算 $P(B)$,我们常称这种方法为**全集分解法**. 如果在 B 发生的条件下探求导致这一结果的各种"原因"A_i 发生的可能性大小 $P(A_i \mid B)$,则要应用贝叶斯公式.

(8) 关于事件的独立性

① **描述性定义(直观性定义)** 设 A,B 为两个事件,如果其中任何一个事件发生的概率不受另外一个事件发生与否的影响,则称事件 A 与 B **相互独立**. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,如果其中任何一个或几个事件发生的概率都不受其余的某一个或几个事件发生与否的影响,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

② **数学定义** 设 A,B 为事件,如果 $P(AB) = P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B **相互独立**,简称为 A 与 B **独立**.

【注】 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 个事件,如果对其中任意有限个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(k \geqslant 2)$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

考研中常考的是 $n=3$ 的情形.细致说来,设 A_1,A_2,A_3 为 3 个事件,若

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2), \tag{1.1}$$

$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3), \tag{1.2}$$

$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3), \tag{1.3}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3), \tag{1.4}$$

则称 A_1,A_2,A_3 **相互独立**.当去掉上述(1.4)式后,称只满足(1.1)(1.2)(1.3)的 A_1,A_2,A_3 **两两独立**.

2. 例题

【例 1】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》P10,例 1.9]

(1)设事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.3,且 $P(A)+P(B)=0.5$.求 A,B 至少有一个不发生的概率;

(2)设 X,Y 为随机变量,且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\dfrac{3}{7}$,$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\dfrac{4}{7}$.试求下列事件的概率:

$A=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}$;　$B=\{\max\{X,Y\}<0,\min\{X,Y\}<0\}$;　$C=\{\max\{X,Y\}\geqslant 0,\min\{X,Y\}<0\}$.

【分析】

【例 2】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P17$,例 1.26]

设有两箱同种零件,第一箱内装 50 件,其中 10 件一等品;第二箱内装 30 件,其中 18 件一等品.先从两箱中随机挑出一箱,然后从该箱中先后随机取出两个零件(取出的零件均不放回).试求:

(1) 先取出的零件是一等品的概率 p;

(2) 在先取出的是一等品的条件下,后取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

【分析】

【例 3】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P21$,例 1.27]

设有两批数量相同的零件,已知有一批产品全部合格,另一批产品有 25% 不合格.从两批产品中任取 1 只,经检验是正品,放回原处,并在原所在批次再取 1 只,试求这只产品是次品的概率.

【分析】

第二讲　一维随机变量及其分布

一、基本概念

1. 随机变量的概念

随机变量就是“其值会随机而定”的变量. 设随机试验E的样本空间为$\Omega=\{w\}$，如果对每一个$w\in\Omega$，都有唯一的实数$X(w)$与之对应，并且对任意实数x，$\{w\,|\,X(w)\leqslant x, w\in\Omega\}$是随机事件，则称定义在$\Omega$上的实单值函数$X(w)$为**随机变量**. 简记为随机变量$X$. 一般用大写字母$X,Y,Z,\cdots$或希腊字母$\xi,\eta,\zeta,\cdots$来表示随机变量.

【注】 (1) 随机事件是从静态的观点来研究随机现象，而随机变量则是一种动态的观点，一如高等数学中常量与变量的区别与联系.

(2) 随机变量的实质是“实单值函数”，这个定义不同于高等数学中函数的定义（其“定义域”一定是实数集），它的“定义域”不一定是实数集，这点需要读者注意.

2. 分布函数的概念及性质

(1) **概念**

设X是随机变量，x是任意实数，称函数$F(x)=P\{X\leqslant x\}(x\in\mathbf{R})$为随机变量$X$的分布函数，或称$X$服从分布$F(x)$，记为$X\sim F(x)$.

【注】 分布函数完整地描述了随机变量的概率规律性.

(2) **性质(也是充要条件)**

①$F(x)$是x的单调不减函数，即对任意$x_1<x_2$，有$F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

②$F(x)$是x的右连续函数，即对任意$x_0\in\mathbf{R}$，有$\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0+0)=F(x_0)$；

③$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

【注】 (1) 务必记住分布函数是事件的概率，由此知$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，即$F(x)$是有界函数.

(2) 满足以上三条性质的函数$F(x)$必是某个随机变量的分布函数，所以，这三条性质也是判断某一函数$F(x)$是否为某一随机变量X的分布函数的充要条件.

二、常见的两类随机变量 —— 离散型随机变量和连续型随机变量

1. 离散型随机变量及其概率分布

如果随机变量 X 只可能取有限个或可列个值 $x_1,x_2,\cdots$，则称 X 为**离散型随机变量**，称

$$p_i = P\{X = x_i\}, i = 1,2,\cdots$$

为 X 的**分布列**、**分布律**或**概率分布**，记为 $X \sim p_i$，概率分布常常用表格形式或矩阵形式表示，即

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

或 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$.

数列$\{p_i\}$是离散型随机变量的概率分布的充要条件是：$p_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots)$，且$\sum\limits_i p_i = 1$.

设离散型随机变量 X 的概率分布为 $p_i = P\{X = x_i\}$，则 X 的分布函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{x_i \leqslant x} P\{X = x_i\},$$

$$p_i = P\{X = x_i\} = P\{X \leqslant x_i\} - P\{X < x_i\} = F(x_i) - F(x_i - 0),$$

并且对实数轴上的任一集合 B 有

$$P\{X \in B\} = \sum_{x_i \in B} P\{X = x_i\}.$$

特别是 $$P\{a < X \leqslant b\} = P\{X \leqslant b\} - P\{X \leqslant a\} = F(b) - F(a).$$

2. 连续型随机变量及其概率密度

对这种变量的概率分布，不能用像离散型变量那种方法去描述. 原因在于，这种变量的取值充满一个区间，无法一一排出，若指定一个值 a，则变量 X 恰好是 a 一丝不差，事实上不可能. 如在称量误差的例中，如果你认定天平上的读数（刻度）是“无限精细”，则“误差正好为 $\pi - 3$” 虽原则上不能排除，但可能性也极微，以至于只能取为 0；如在靶面上指定一个几何意义下的点（即只有位置而无任何向度），则“射击时正好命中该点” 的概率也只能取为 0.

那么，该如何刻画连续型随机变量呢？

如果随机变量 X 的分布函数可以表示为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t(x \in \mathbf{R}),$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数，则称 X 为**连续型随机变量**，称 $f(x)$ 为 X 的**概率密度函数**，简

称为**概率密度**或**密度函数**,记为 $X \sim f(x)$.

$f(x)$ 为某一随机变量 X 的概率密度的充分必要条件是:$f(x) \geqslant 0$,且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$(由此可知,改变$f(x)$ 有限个点的值后,$f(x)$ 仍然是概率密度).

设 X 为连续型随机变量,$X \sim f(x)$,则对任意实数 c 有 $P\{X = c\} = 0$;对实数轴上任一集合 B 有

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\mathrm{d}x.$$

特别是

$P\{a < X < b\} = P\{a \leqslant X < b\} = P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

【注】 (1)"概率密度"这名词的由来可解释如下:取定一个点 x,则按分布函数的定义,事件$\{x < X \leqslant x+h\}$ 的概率($h > 0$,为常数),应为 $F(x+h) - F(x)$,所以,比值$[F(x+h) - F(x)]/h$ 可以解释为在x 点附近h 这么长的区间$(x, x+h]$ 内,单位长所占有的概率. 令 $h \to 0$,则这个比的极限,即 $F'(x) = f(x)$,也就是在 x 点处(无穷小区间段内)单位长的概率,或者说,它反映了概率在 x 点处的"密集程度". 你可以设想一条极细的无穷长的金属杆,总质量为 1,概率密度相当于杆上各点的质量密度.

(2)$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 意味着X 落入某一区间的概率等于该区间之上、概率密度之下曲边梯形的面积,应用概率的这种几何意义,常常有助于问题的分析与求解.

(3) 设 $X \sim f(x)$,则 X 的分布函数$F(x)$ 是 x 的连续函数;在 $f(x)$ 的连续点 x_0 处有 $F'(x_0) = f(x_0)$;如果 $F(x)$ 是连续函数,除有限个点外,$F'(x)$ 存在且连续,则 X 为连续型随机变量,且 $f(x) = F'(x)$(在 $F'(x)$ 不存在的地方可以令 $f(x) = 0$ 或取其他值).

三、常见的随机变量分布类型

1. 离散型

(1)0-1 分布 $B(1,p)$

如果 X 的概率分布为$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$,即 $P\{X = 1\} = p, P\{X = 0\} = 1 - p$,则称 X 服从参数为 p 的**0-1 分布**,记为 $X \sim B(1,p)(0 < p < 1)$.

(2) 二项分布 $B(n,p)$

如果 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 0,1,\cdots,n; 0 < p < 1)$,则称 X

服从参数为(n,p)的**二项分布**,记为$X\sim B(n,p)$.

【注】 如果X是n重伯努利试验中事件A发生的次数,则$X\sim B(n,p)$,其中$p=P(A)$.这个结论在解题中我们会经常用到.

(3)泊松分布$P(\lambda)$

如果X的概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,\cdots;\lambda>0)$,则称$X$服从参数为$\lambda$的**泊松分布**,记为$X\sim P(\lambda)$.

(4)几何分布$G(p)$

如果X的概率分布为$P\{X=k\}=q^{k-1}p\ (k=1,2,\cdots;0<p<1;q=1-p)$,则称$X$服从参数为$p$的**几何分布**,记为$X\sim G(p)$.

【注】 设X表示伯努利试验中事件A首次发生所需做的试验次数,则$X\sim G(p)$,其中$p=P(A)$,2015年数学一、数学三的第(22)题中求数学期望,就是在对这个背景做深入的考查.

(5)超几何分布$H(n,N,M)$

如果X的概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\ (k=0,1,\cdots,\min\{M,n\};M,N,n$为正整数且$M\leqslant N,n\leqslant N)$,则称$X$服从参数为$(n,N,M)$的**超几何分布**,记为$X\sim H(n,N,M)$.

2. 连续型

(1)均匀分布$U(a,b)$

如果X的概率密度或分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其他,\end{cases}\ 或\ F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b,\end{cases}$$

则称X在区间(a,b)上服从**均匀分布**,记为$X\sim U(a,b)$.

【注】 区间(a,b)可以是闭区间$[a,b]$;几何概型是均匀分布的实际背景,用几何概率计算事件概率时已假设点在区域内服从均匀分布;几何概率可以用均匀分布计算.

(2)指数分布$E(\lambda)$

如果X的概率密度或分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}\ 或\ F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}(\lambda>0),$$

则称X服从参数为λ的**指数分布**,记为$X\sim E(\lambda)$.

(3) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

如果 X 的概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ (-\infty<x<+\infty),$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$,则称 X 服从参数为 (μ,σ^2) 的**正态分布**或称 X 为**正态变量**,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 此时 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=\mu$ 对称,即 $f(\mu-x)=f(\mu+x)$,并在 $x=\mu$ 处有唯一最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

称 $\mu=0,\sigma=1$ 时的正态分布 $N(0,1)$ 为**标准正态分布**,通常记标准正态分布的概率密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$,分布函数为 $\Phi(x)$. 显然 $\varphi(x)$ 为偶函数,$\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$,$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

若 $X\sim N(0,1)$,$P\{X\geqslant\mu_\alpha\}=\alpha$,则称 μ_α 为标准正态分布的**上侧 α 分位数.**

如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$F(\mu-x)+F(\mu+x)=1,$$

$$P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

$$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)\,(a\neq0).$$

四、例题

【例 1】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》P36,例 2.6]

设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度,$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度,若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad(a>0,b>0)$$

为概率密度,则 a,b 应满足(　　).

(A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$　　(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=2$

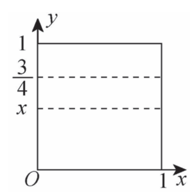
【分析】

【例 2】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P48$,例 2.29]

一电路装有三个同种电气元件,其工作状态相互独立,且无故障工作时间服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布.当三个元件都无故障工作时,线路工作状态正常,试求电路正常工作时间 T 的概率分布.

【分析】

【例 3】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P50$,例 2.32]



一水渠出口闸门挡板是边长为 1(单位)的正方形.已知初始水面高为 $\frac{3}{4}$(单位),现发现挡板某一部位出现一个小孔(小孔等可能出现在挡板的任一位置),水经过小孔流出,求剩余液面高度 X 的分布函数 $F(x)$.

【分析】

五、随机变量函数的分布

1. 概念及分布

(1) 概念

设 X 为随机变量,函数 $y=g(x)$,则以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y=g(X)$ 也是随机变量,称之为**随机变量 X 的函数**. 例如:$Y=aX^2+bX+c$,$Y=|X-a|$,$Y=\begin{cases}X, & X\leqslant 1,\\ 1, & X>1\end{cases}$ 等等.

(2) 随机变量函数的分布

1) 离散型

设 X 为离散型随机变量,其概率分布为 $p_i=P\{X=x_i\}(i=1,2,\cdots)$,则 X 的函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量,其概率分布为 $P\{Y=g(x_i)\}=p_i$,即

$$Y\sim\begin{pmatrix}g(x_1) & g(x_2) & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots\end{pmatrix}.$$

如果有若干个 $g(x_k)$ 相同,则合并诸项为一项 $g(x_k)$,并将相应概率相加作为 Y 取 $g(x_k)$ 值的概率.

2) 连续型

设 X 为连续型随机变量,其分布函数、概率密度分别为 $F_X(x)$ 与 $f_X(x)$,随机变量 $Y=g(X)$ 是 X 的函数,则 Y 的分布函数或概率密度可用下面两种方法求得:

定义法(分布函数法)

直接由定义求 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(x)\leqslant y}f(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $F_Y(y)$ 连续,且除有限个点外,$F'_Y(y)$ 存在且连续,则 Y 的概率密度 $f_Y(y)=F'_Y(y)$.

2. 例题

【例 1】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》P57,例 3.1]

设 X 是仅可能取 6 个值的离散型随机变量,其分布如下:

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.05	0.15	0.20	0.25	0.20	0.15

求 $Y=2X+1, Z=X^2$ 的概率分布.

【分析】

【例 2】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P58$,例 3.5]

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{k}{1+x^2}\ (x\in\mathbf{R})$. 求:

(1) 常数 k;

(2) 随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

【分析】

第三讲　多维随机变量及其分布

一、基本概念

① 二维 $r.v.(X,Y)$；

② 联合分布函数 $F(x,y) \overset{\Delta}{=} P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$；

③ 边缘分布函数，若$(X,Y) \sim F(x,y)$，则

$F_X(x) \overset{\Delta}{=} P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, Y < +\infty\} = F(x,+\infty) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y)$；

$F_Y(y) \overset{\Delta}{=} P\{Y \leqslant y\} = P\{X < +\infty, Y \leqslant y\} = F(+\infty, y) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x,y)$；

④ 独立性$(X,Y) \sim F(x,y)$，

若 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \Leftrightarrow$ 则 X,Y 互相独立；

⑤ 离散型$(X,Y) \sim P_{ij}$ 联合分布律

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}		$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

其中：$P(X = x_i) = P_{i\cdot}$，$P(Y = y_j) = P_{\cdot j}$，且 $P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j} = P_{ij}$，$\forall\, i,j \Leftrightarrow X,Y$ 独立.

【注】借鉴 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$，引入“条件分布律”：

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}};$$

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{i\cdot}}.$$

⑥ 连续型 $r.v.(X,Y)\sim f(x,y)$ 联合概率密度

$$\text{边缘}\begin{cases} f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x \end{cases}$$

独立性：$f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)\Leftrightarrow X,Y$ 独立.

条件概率密度：$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}(f_Y(y)>0)f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}(f_X(x)>0)$.

二、例题

【例 1】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P73$，例 4.1]

设 X 与 Y 相互独立，下表是随机变量 X 与 Y 的联合分布律以及两个边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$			1

【分析】

【例 2】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P78$，例 4.9]

已知二维随机变量(X,Y)在G上服从均匀分布，G由直线$x-y=0$，$x+y=2$与$y=0$围成，求：

(1) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

(2) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$.

【分析】

第四讲　数字特征

一、基本概念

1. 数学期望

①$X\sim p_i\Rightarrow EX=\sum\limits_i x_i p_i$

如 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$,则 $EX=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{6}$,

$X\sim p_i$,且 $Y=g(X)\rightarrow EY=\sum\limits_i g(x_i)p_i$;

②$X\sim f(x)\Rightarrow EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$,

$X\sim f(x)$,且 $Y=g(X)\Rightarrow EY=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$.

2. 方差

$DX\xlongequal{\Delta}E(X-EX)^2$.

(1) 定义法:$Y=(X-数)^2=g(X)$,

$$\begin{cases}1)X\sim p_i\Rightarrow DX=E(X-EX)^2=EY=\sum\limits_i(x_i-EX)^2p_i;\\ 2)X\sim f(x)\Rightarrow DX=E(X-EX)^2=EY=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)dx.\end{cases}$$

(2) 公式法

$$\begin{aligned}DX&=E(X-EX)^2=E[X^2-2X\cdot EX+(EX)^2]\\&=EX^2+E[-2X\cdot EX]+E[(EX)^2]\\&=EX^2+(-2EX)\cdot EX+(EX)^2=EX^2-(EX)^2.\end{aligned}$$

3. 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$

设 $DX,DY>0$，称 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$ 为协方差.

（若 $X=Y$，$\mathrm{Cov}(X,X)=E(X-EX)(X-EX)=DX$）

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY-X\cdot EY-Y\cdot EX+EXEY)=E(XY)-EX\cdot EY.$

4. 相关系数

称 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\ \sqrt{DY}}$ 为相关系数. 描述 X,Y 之间线性相关程度.

二、例题

【例 1】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》P132，例 6.20]

设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$.

令 $$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生},\end{cases}$$

求：(1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(2) X,Y 的相关系数 ρ_{XY}；

(3) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

【分析】

第五讲　数理统计初步

一、基本概念

1. 总体与样本

(1) 总体:研究对象的某个指标的全体 $X \sim F$;

(2) 样本:简单随机样本 $X_i \overset{iid}{\sim} F$.

2. 估计方法

(1) 矩估计　$EX \xlongequal[\text{令}]{\text{人为}} \overline{X}$.

【例 1】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P187$,例 9.1]

设来自总体 X 的简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,总体 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2\theta & \theta & 1-3\theta \end{pmatrix},$$

其中 $0 < \theta < \dfrac{1}{3}$. 试求未知参数 θ 的矩估计量.

【分析】

【例 2】[取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P187$，例 9.2]

已知总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

【分析】

（2）最大似然估计

方法

【例 3】［取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》$P188$，例 9.5］

设来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，总体 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix},$$

其中 $0<\theta<1$. 分别以 ν_1,ν_2 表示 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中 1，2 出现的次数，试求

（1）未知参数 θ 的最大似然估计量；

（2）未知参数 θ 的矩估计量；

（3）当样本值为 1，1，2，1，3，2 时的最大似然估计值和矩估计值.