平面图在信息学中的应用

海南省海南中学 刘才良

引言

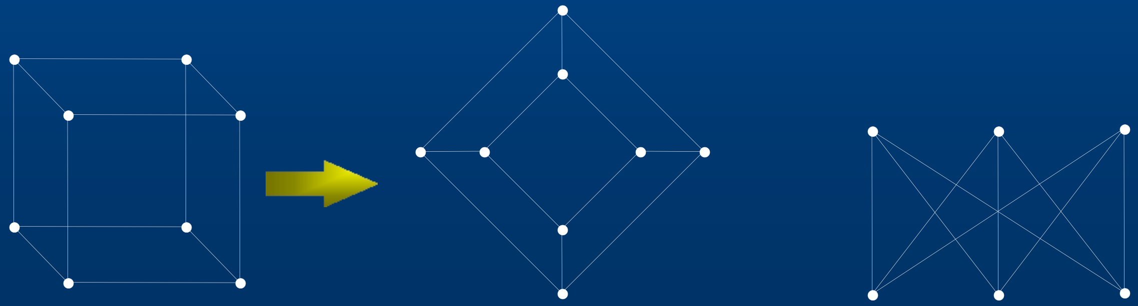
- 平面图是图论中一类重要的图，在实际生产中应用非常广泛。比如集成电路的设计就用到平面图理论。在信息学中，虽然有关平面图的题目并不多见，但对于某些题目，如果通过建模转化，应用平面图的性质，将大大提高算法的效率。因此，掌握一些平面图理论会对我们有很大的帮助。

相关定义、定理及推论

- 平面图

  一个无向图$G=<V，E>$，如果能把它画在平面上，且除V中的节点外，任意两条边均不相交，则称该图G为平面图。

例如：图(a)经变动后成为(b)，故图(a)为平面图。而图(c)无论如何变动，总出现边相交，图(c)为非平面图。



(a)　　(b)　　(c)

相关定义、定理及推论

- 面

设G为一平面图，若由G的一条或多条边所界定的区域内不含图G的节点和边，这样的区域称为G的一个面，记为f。包围这个区域的各条边所构成的圈，称为该面f的边界，其圈的长度，称为该面f的度，记为$d(f)$。为强调平面图G中含有面这个元素，把平面图表示为$G=<V，E，F>$，其中F是G中所有面的集合。

相关定义、定理及推论

- **定理1：若G=<V，E，F>是连通平面图，则$\sum_{f\in F}d(f)=2|E|$.**
- **定理2：若G=<V，E，F>是连通平面图，则$|V|-|E|+|F|=2$.**

证明：

首先假定G是树，则$|E|=|V|-1$，G只有一个无限面，

因此$|V|-|E|+|F|=|V|-(|V|-1)+1=2$.

现在假设G不是树，由于G是连通的，故G中至少存在一个基本圈C，于是G必有一个有限面f，而f的边界是由基本圈C及可能连同计算两次的一些边组成.如果从G中删去基本圈C上的一条边后得到的平面图G_1=<V_1，E_1，F_1>，则$|V_1|=|V|$，$|E_1|=|E|-1$，$|F_1|=|F|-1$，故$|V_1|-|E_1|+|F_1|=|V|-|E|+|F|$，仿此做下去，最终得到$G$的一棵生成树$T_0$=<$V_0$，$E_0$，$F_0$>，于是$|V|-|E|+|F|=|V_0|-|E_0|+|F_0|=2$.

相关定义、定理及推论

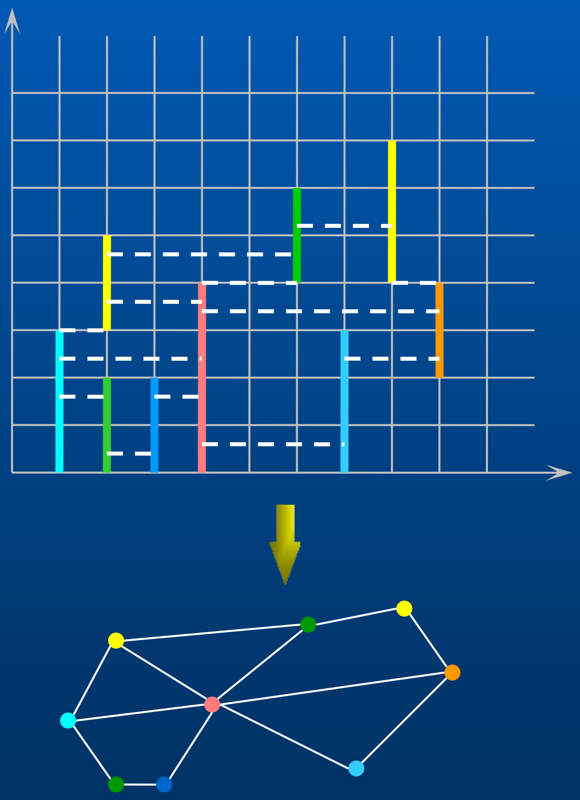
- 推论1：给定连通简单平面图G=<V，E，F>，若$|V|\geqslant 3$，则$|E|\leqslant 3|V|-6$且$|F|\leqslant 2|V|-4$.
- 推论2：设G=<V，E，F>是连通简单平面图，若$|V|\geqslant 3$，则存在$v\in V$，使得$d(v)\leqslant 5$.

推论1：$|E|=O(|V|)$ → 邻接表、散列表结构$O(|V|)$ VS 邻接矩阵结构$O(|V|^2)$

应用-例1:水平可见线段(CEPC2001)

平面上有N(N<=8000)条互不相连的竖直线段。如果两条线段可以被一条不经过第三条竖直线段的水平线段连接，则这两条竖直线段被称为“水平可见”的。三条两两“水平可见”的线段构成一个“三元组”。求给定输入中“三元组”的数目。（坐标值为0到8000的整数）

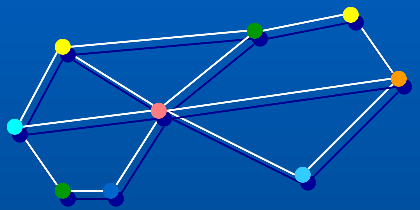
应用-例1:水平可见线段(CEPC2001)



分析

- 把线段看成点
- 若两条线段水平可见，则在对应两点之间连一条边，建立无向图G
- 统计G中的三角形的数目

应用-例1:水平可见线段(CEPC2001)



如何建立图*G*?

- 算法一

  设数组C[I]（I=0..2Y_{max}），C[2*y*]表示覆盖*y*点的最后一条线段，C[2y+1]表示覆盖区间(y,y+1)的最后一条线段

  把线段按从左到右的顺序排序

  依次检查每一条线段*L*(*L*=[*y*′，*y*″])

    检查*L*覆盖的所有整点和单位区间（C[*u*]，*u*=2*y*′..2*y*″）

    若C[*u*]≠0，则G.AddEdge(C[*u*]，*L*)

    C[*u*]←*L*

时间性能分析

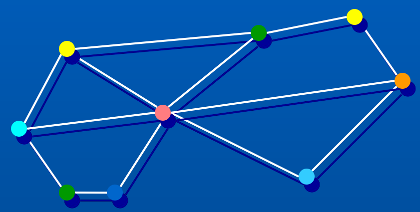
⇦O(*N*log*N*)

⇦O(*N*)

⇦O(Y_{max})

总计：O(NY_{max})

应用-例1:水平可见线段(CEPC2001)



如何建立图*G*?

- 算法二

定义线段树T：

设节点N描述区间[*a*,*b*]的覆盖情况

	0	(无线段覆盖[*a*,*b*])
则N.Cover=	L	(线段L完全覆盖[*a*,*b*])
	-1	(其他情形)

线段树的存储：

使用完全二叉树的数组结构，可以免去复杂的指针运算和不必要的空间浪费。

时间性能分析

排序：O($N\log N$)

检索：O($N\log Y_{max}$)

插入：O($N\log Y_{max}$)

总计：O($N\log Y_{max}$)

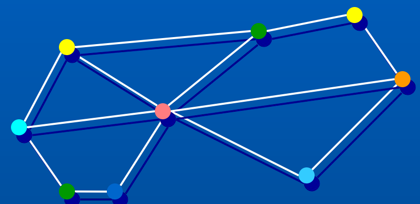
空间性能分析

线段：O(N)

线段树：O(Y_{max})

边表：O(N)

应用-例1:水平可见线段(CEPC2001)



统计图*G*中三角形的数目

- **算法一**

  枚举所有的三元组，判断三个顶点是否两两相邻。由于总共有C_n^3个三元组，因此时间复杂度为O(N^3)

- **算法二**

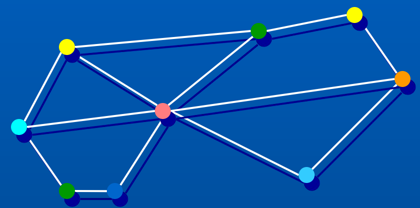
  枚举一条边，再枚举第三个顶点，判断是否与边上的两个端点相邻。根据水平可见的定义可知*G*为平面图，*G*中的边数为O(N)，故算法二的复杂度为O(N^2)

- **算法一与算法二**的比较

  算法一只是单纯的枚举，没有注意到问题的实际情况，而实际上三角形的数目是很少的，算法一作了许多无用的枚举，因此效率很低。

  算法二从边出发，枚举第三个顶点，这正好符合了问题的实际情况，避免了许多不必要的枚举，所以算法二比算法一更加高效。

应用-例1:水平可见线段(CEPC2001)



有没有更好的办法?

- **算法三**—换个角度，从点出发
  每次选取度最小的点v，由推论2知$d(v)\leqslant 5$，只需花常数时间就可以计算含点v的三角形的数目.
  应用二叉堆可以提高寻找和删除点v的效率，总的时间复杂度仅为$O(N\log N)$
- **算法二与算法三的比较**
  算法二是以边作为出发点的，从整体上看，平面图中三角形的个数只是$O(N)$级的，而算法二的复杂度却是$O(N^2)$，这种浪费是判断条件过于复杂造成的。算法三从点出发，则只需要判断某两点是否相邻即可。

应用-例2:洞穴(CEOI97)

在同一水平面上有N(N<=500)个洞穴，洞穴之间有通道相连，且每个洞穴恰好连着三个通道。通道与通道不相交，每个通道都有一个难度值，现从1号洞穴开始遍历所有的洞穴刚好一次并回到洞穴1，求通过通道难度值之和的最小值。(给定所有通道的信息和在外圈上的洞穴)

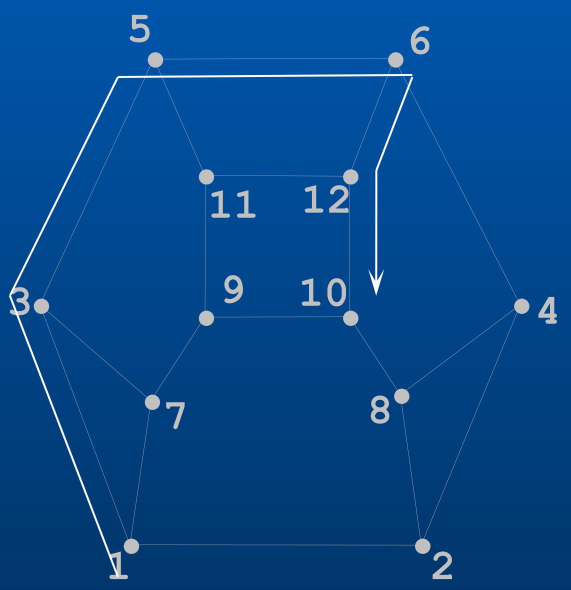
应用-例2:洞穴(CEOI97)

分析

- 本题求的是最优路径，但最优路径具备什么性质并不明显，故考虑深度优先搜索。
- *N*最大达到500，考虑剪枝以提高效率。
- 基本剪枝条件：若当前路径的难度值的总和比当前最优值大则放弃当前路径。
- 为了找到强剪枝条件，考虑问题所具有的特性
  - 所有点的度数为3
  - 所给的图是平面图
  - 外圈上的点已知

应用-例2:洞穴(CEOI97)

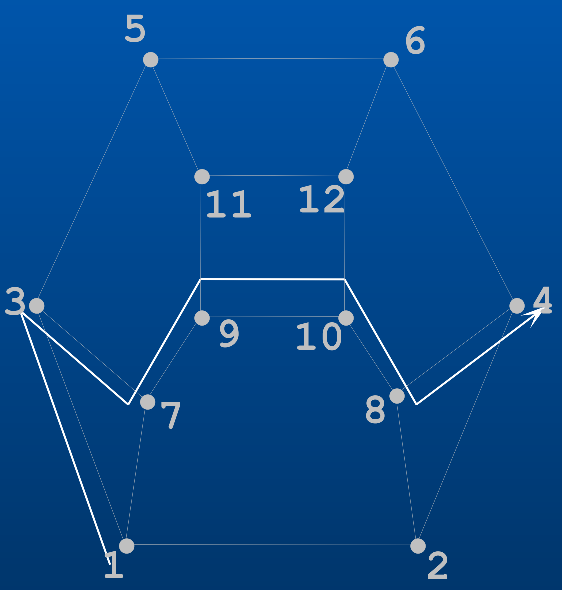
- **情形一**
  考虑路径1-3-5-6-12-10，由于每个洞穴必须被访问到，而11号洞穴只有一条可用通道9-11，访问11后不能再回到1，故该路径不可能遍历所有点。



- **剪枝条件一**
  在所有未访问的洞穴中，与其相邻的已访问过的洞穴（第1个与当前访问的最后一个除外）的个数小于等于1。

应用-例2:洞穴(CEOI97)

- **情形二**
  路径1-3-7-9-10-8-4把图分成两部分，而且两部分中都有未访问过的点。由于图是平面图，其中必有一部分点不能被访问到。
- **剪枝条件二**
  设外圈上的点按连接顺序为$1,a_2,\ldots,a_k$，则访问的顺序只能为：
  $1,\ldots,a_2,\ldots,a_3,\ldots,\ldots,\ldots,a_k,\ldots,1.$



应用-例3:地图着色(ACM Shanghai 2000)

给定一地图，要求用不超过5种颜色涂每一个区域，使得相邻区域的颜色不同。（区域数<=500）

分析：

把每个区域看成点，相邻区域之间连一条边，则问题转化为对每个点着色并使得相邻点颜色不同。

根据地图的平面性可知：转化后的图是平面图。

对于任意平面图*G*，是否都能用不超过5种颜色着色？

应用-例3:地图着色(ACM Shanghai 2000)

定理：对于任意平面图G，都能用不超过5种颜色着色.

证明：只需考虑G是连通简单平面图的情形.

若$|V|\leqslant 5$，则命题显然成立.

假设对所有的平面图$G=<V, E>$，当$|V|\leqslant k$时命题成立.现在考虑图$G_1=<V_1, E>$，$|V_1|=k+1$的情形.由推论2可知：存在$v_0\in V_1$，使得$d(v_0)\leqslant 5$.在图G_1中删去v_0，得图G_1-v_0.由归纳，图G_1-v_0可用5种颜色着色.

若邻接结点使用颜色数不超过4，则可对v_0着色，得到一个最多是五色的图G_1.

应用-例3:地图着色(ACM Shanghai 2000)

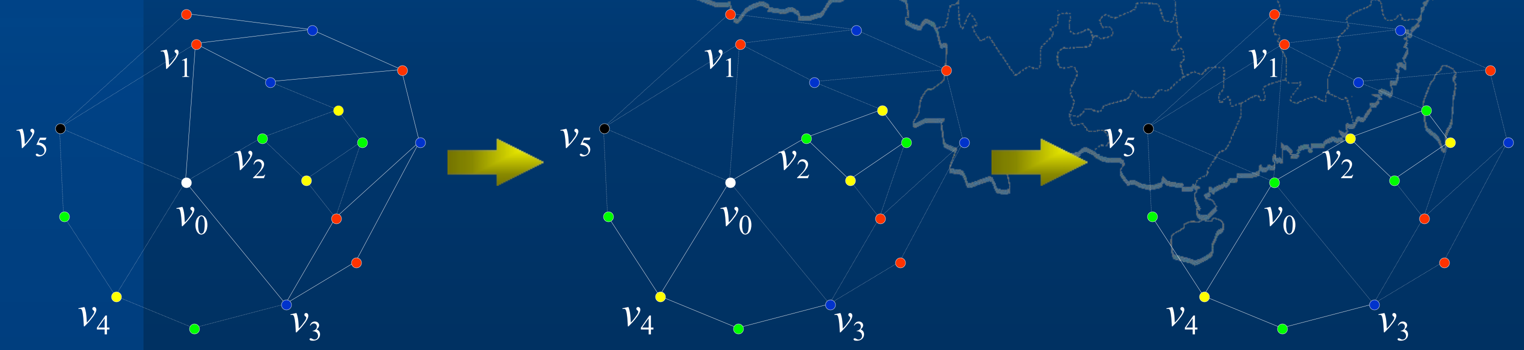
若$d(v_0)$=5且各邻接点分别着不同的颜色，则设与之相邻的点的按顺时针排列为v_1,v_2,v_3,v_4,v_5.它们分别着不同的颜色c_1,c_2,c_3,c_4,c_5.

考虑点集$V_{c1,c3}=\{v|v\in V(G_1-v_0)\wedge\alpha(v)=c_1$或$c_3\}$所诱导的$G_1$-$v_0$的子图<$V_{c1,c3}$>.若$v_1,v_3$属于<$V_{c1,c3}$>的不同的分图，则在$v_1$所在的分图中，调换颜色$c_1$与$c_3$后，$v_1,v_2,v_3,v_4,v_5$五个点是四着色的，再令$v_0$着$c_1$色，得到$G_1$的一种五着色.

应用-例3:地图着色(ACM Shanghai 2000)

若v_1,v_3属于$<V_{c1,c3}>$的同一的分图，则点集$V_{c1,c3}\cup\{v_0\}$所诱导的G_1的子图中含有一个圈C，而v_2,v_4不能同时在圈的内部或外部，即v_2,v_4不是邻接点，于是考虑$V_{c2,c4}=\{v|v\in V(G_1-v_0)\wedge\alpha(v)=c_2$或$c_4\}$所诱导的子图$<V_{c2,c4}>$，$v_2,v_4$必属于$<V_{c2,c4}>$的不同的分图.做与上面类似的调整，又可得到$G_1$的一种五着色.

故对任何连通简单平面图G，G是五着色的.



应用-例3:地图着色(ACM Shanghai 2000)

算法：

procedure Paint(G:Graph);

- 找出度最小的点v_0
- Paint(G-v_0)
- 考虑图G，若无法对v_0着色，则对v_0的相邻点，枚举所有点对,直到找到属于不同分图的点对，对其进行调整.
- 任选剩下的一种颜色，对v_0着色

时间复杂度：O(N^2)

空间复杂度：O(N)

总结

以上例子分别论述了平面图理论在几类信息学问题中的应用。我们研究平面图就是为了更深刻地认识平面图，提高算法效率，但有时候单独应用平面图理论还不够，还需要和其它理论知识综合起来应用。然而要达到理想的效果并非一朝一夕的事情，它还需要我们平时多积累、多思考，遇到问题时才能运用自如。相信随着对平面图的研究不断深入，平面图的应用一定会更加广阔。

谢谢!