因

數

與

倍

數

姓名：

年齡：

**因數**

我們先來想想這個問題。12 個蘋果，若干個裝一盒，裝成幾盒可以剛好全部裝完，沒有剩下？

先寫出你的答案。

如果想不出來的話，先從裝一盒開始。

裝成1盒，每盒有【 12 】個，（可以，不可以）（圈出正確選項）全部裝完，沒有剩下。

裝成2盒，每盒有【 6 】個，（可以，不可以）全部裝完，沒有剩下。

裝成3盒，每盒有【 4 】個，（可以，不可以）全部裝完，沒有剩下。

裝成4盒，每盒有【 3 】個，（可以，不可以）全部裝完，沒有剩下。

以上面的程序一路推下去，我們發現裝成1、2、3、4 、【 6 】、【 12 】盒，都可以全部裝完，沒有剩下。

而以上這些過程，我們可以寫成一個12 ÷某數的算式，如果結果沒有餘數，就可以裝盒。我們稱這種全部分完，沒有餘數的除法，為**「整除」**。而這些可以把12除盡，沒有餘數（整除）的數，就為12的**因數**。

練習：

1. 請由因數的定義，找出所有18的因數
2. 請找出13的所有因數
3. 請找出21的所有因數

除了用整除的概念來定義因數，我們還有另一種方法。考慮如果你有12個正方形紙片，全部用完，沒有剩下，你可以排出幾種長方形？請在下面畫畫看，並寫出對應的「長方形面積＝長×寬」的算式：

1. 第一種：1×【 12 】＝ 12
2. 第二種：【 2 】×【 6 】＝ 12
3. 第三種：【 3 】×【 4 】＝ 12

我們發現：

12＝1×12

12＝2×6

12＝3×4

12可以寫出以上三種**整數**相乘的式子，而每個構成的整數，也都為12的因數。這是以乘法來定義因數的方式。只要一個整數，能寫成另外兩個或兩個以上整數的乘積，則稱這些整數為這個整數的因數。一定有人會覺得12＝2.4×5，為什麼2.4與5不是12的因數？那是因為我們定義因數與之後的倍數，只限於整數，小數和分數是不討論因數與倍數的。

練習：請利用整數相乘的式子，寫出54的所有因數。

從「整除」的概念來定義因數，或是由分解成整數乘積的方式來定義因數，各有其好處，也有其限制，我們可以視狀況選擇適當的方式。

**公因數**

我們想想下面這個問題：

阿花在自己的果園中，採了24個蘋果，18個梨子，想要將兩種水果裝成禮盒，每個禮盒都有相同數量的蘋果，也有相同數量的梨子，並且要全部裝完，請問可以裝成幾個禮盒？

我們可以這樣想：

24個蘋果，裝成1、2、【 3 】、【 4 】、【 6 】、【 8 】、【 12 】、24盒，可以全部裝完，沒有剩下。

18個梨子，裝成1 、2、【 】、【 】、【 】、18盒，可以全部裝完，沒有剩下。

兩個一樣可以裝成1、2、【 】、【 】盒，全部裝完，沒有剩下。

在這個問題中，24的因數為1、2、3、4、6、8、12、24，而18的因數為1、2、3、6、9、18，兩者有相同的因數

【 1, 2, 3, 6 】，這些因數我們就稱它們為24與18的**「公因數」** ，代表兩個或是兩個以上整數共同的因數。這些公因數中，最大的是【 】，則稱6為24與18的**「最大公因數」。**我們在之後的單元，還會教最大公因數的其他求法。

練習：

1. 請求出28與42的公因數與最大公因數

2. 有一個長方形，長16公分，寬28公分，要剪成整數公分的小正方形，全部用完，沒有剩下任何的紙張，則可以剪出一邊長為幾公分的小正方形。

3. 有男生16人，女生24人，想要分組做活動，每組要有一樣多的女生與一樣多的男生。請問最多可以分成幾組？每組有幾個男生？幾個女生？

1. 請找出下面有因數3 的數，用○標示。再找出有因數5的數，用🛆標示。

24， 15，82，72，45，42，55，10，30，29

請問那些數又有因數3，又有因數5？

**倍數**

高鐵的接駁車每隔15分鐘發一班車。小華到的時候，剛好接駁車開走了，他必須等【 】分鐘，下一班車才會來。而第二班車要【 】分鐘後來會來。

我們可以把等候的班次與時間列表：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 班次 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 時間 | 15 |  |  |  |  |  |

請完成上表。

我們可以注意到，表中的各數，都是15的整數倍，則我們稱15的整數倍為15的**倍數**。跟因數一樣，倍數的討論只限於整數倍。

練習：

1. 從12開始，請依序寫出5個12 的倍數。
2. 請問1-100之間，有幾個2 的倍數？有幾個3 的倍數？

**因倍數之間的關係**

我們在學習因數的時候，曾經定義過，如果一個數a，能夠寫成兩個或是兩個以上整數相乘的形式，則這些整數都為a的因數。

如：98＝7×14，則7與14皆為98的【 】。同時我們可以看到98為14的整數倍，或是7的整數倍，所以反過來說98是它的因數7的【 】，或是因數14的倍數。

若a＝b×c，則我們稱b, c 為a的因數，a為b, c的【 】。

**因倍數的判別法**

如果我們觀察倍數表，我們會發現有些數的倍數有些規則可尋，這些規則可以幫助我們快速找到一個數的因數（倍數）。這對未來學習質因數分解的技巧有很大的幫助。

🕊**2的倍數判別**

2的倍數又稱為偶數，請從2 開始，寫出2的倍數，直到30…

請問你發現2的倍數的規律嗎？所有2的倍數，其個位數字都是2、4、【 】、【 】、0

在這邊，我們可以給個簡單的證明。

任何一個數n，我們都可以寫成n = a × 10＋b，其中b為個位數。因為a × 10＝（a × 5） × 2 一定為2 的倍數，所以只要檢查b是否為偶數既可。

🕊**5的倍數判別法**

請從5開始，依序寫出10個5的倍數：

請問你發現了什麼規律？

我們可以發現，5的倍數的尾數也只有【 】與【 】。

請模仿2的倍數的證明法，證明尾數為5與0的，皆為5的倍數。

🕊**3的倍數判別法**

當我們寫一個十進位的數字，如1377，並不是單純的由1、3、7、7四個數字的大小構成的，實際上1377＝1×1000＋3×100＋7×10＋7，我們發現1000＝999＋1，100＝【 】＋1，10＝【 】＋1，10，100，1000，10000…等十進位的單位，剛好都能寫做999…＋1的形式，而9，99，999，9999…很明顯的為3的倍數。因此1377可以改寫成

1377＝1×（999＋1）＋3 ×（99＋1）＋7×（9＋1）＋7再使用分配律，

1377＝1×999＋1＋3×【 】＋3＋7×9＋【 】＋7，而其中的1×999＋3×99＋7×9為3的倍數，所以我們只要檢查剩下的1＋3＋7＋7是否為3的倍數即可，而1＋3＋7＋7恰好為各位數字的總和，因此3的倍數的判斷除了以3來除，我們還可以使將各位數字加起來，看看是否為3的倍數，就不需要再以3 除，可以省時省力。

練習：

1. 請圈出3的倍數

124，5291，3384，10089，10523，20513456，14421

1. 如果35⬜12為3的倍數，請問⬜可以填入什麼數字？
2. 請問9的倍數該如何判別？有沒有和3的倍數一樣簡便的方法？

**🕊11的倍數判別法**

11的倍數與3的倍數一樣有個簡易的判別法。我們一樣將一個數字以十進位的表示法來表示，如4125。請寫出4125的十進位表示法：

4125＝

我們發現10＝11－1，100＝99＋1，1000＝1001－1，其中11，99，1001都為11的倍數。所以：

4125＝4×（1001－1）＋1×（99＋1）＋2×（11－1）＋5

＝4×1001－【 】＋1×99＋1＋2×【 】－2＋5

＝4×1001＋1×99＋2×11－4＋1－2＋5

其中4×1001＋1×99＋2×11為11的倍數，因此只要最後的－4＋1－2＋5為11的倍數或為0就可以了。－4＋1－2＋5＝0，所以4125為11的倍數。請用除法再檢驗一次。

有個好記的方法

－4＋1－2＋5＝－（4＋2）＋（1＋5）

4 1 2 5， 4＋2＝6，1＋5＝6，

剛好可以看成把每偶數位的數字相加，再把奇數位的數字相加，兩個結果相減，如果等於0或其他11的倍數，就為11的倍數。

練習：

請圈出11的倍數：

7124、1342、1298、35574、9876、84327

**質數的定義**

請依序寫出1-10各數的因數

1的因數有：

2的因數有：

3的因數有：

4的因數有：

5的因數有：

6的因數有：

7的因數有：

8的因數有：

9的因數有：

10的因數有：

請問那幾個數的因數個數只有2個？

請問那幾個數的因數個數超過2個？

像2、3 、5、7這四個數的因數，只有1與自己，這樣的數我們就稱為質數。而4、6、8、9、10的因數除了1與自己外，還有其他的因數，這樣的數我們稱為「合數」。另外，1的因數只有它自己，但是我們不會把1看成質數，也不會把它看為合數，理由等到我們講質因數分解時，再另外詳述。

人類一向覺得質數有其魔力，因為如果我們繼續寫上去，會發現質數的數目愈來愈少。所以人類覺得質數是特別的，像有名的連鎖超商7-eleven，7與11都是質數，13號黑色星期五，13與5也都是【 】。

質數的重要性，我們會再下個單元「質因數分解」詳述之。在這邊介紹一個簡單的方法，利用倍數關係，來找尋1-100間所有質數的方法。

步驟一：在下表中把1畫掉

步驟二：把2圈起來，把2的倍數依序畫掉

步驟三：把3 圈起來，把3的倍數依序畫掉

步驟四：重複步驟二，每次都圈出質數，然後畫掉質數的倍數，最後留下來的沒畫掉的數，就為1-100的質數。電腦也是以此種方式建立質數表，只不過電腦的運算速度快，可以找出更多、更大的質數。

請寫出1-100的所有質數：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**質因數分解**

在上面的單元，我們學到了質數，發現質數不能分解成其他數的乘積，只能分解為1和自己，只有2個因數。以這個觀點來看，世界上所有的整數除了1外，都可以分做質數與以質數用乘法組合出的數，也就是合數，這兩類數。因此質數有點像是建構整數世界的基本元素。如果我們可以把一個數分解，知道它是由那些質數組合而來的，我們就能夠寫出它們所以的因數，並且做後續的比較動作。我們現在就來試試看質因數分解法。

1. 寫出18的質因數分解

我們知道18＝3 × 6，3是質數，而6不是，我們可以進一步把6分解為2 × 3，因此：18＝3 × 2 × 3，使用次方的記號系統，我們可以記的更簡明 18＝2 × ，我們可以看出18是由1個2和兩個3以乘法組合出來的數，這樣的組合方法也只有一種，沒有其他種了。

上面的思考過程，可以以下面的圖示法來表示：

18

所以18＝3 × 2 × 3＝2 ×

3 × 6

2 × 3

練

練習：請模仿例題1，寫出下列各數的質因數分解：

1. 24 b. 30 c. 36

我們可以看著質因數分解的式子，寫出數的所有因數，這個方法比我們之前用列舉法來得有效率，而且有意義。如 18＝2 ×

這個式子告訴我們，18是由1 個2和2 個3組成的。如果我們不選2也不選3，就得到1，選一個的方法有兩種：選2或是選【 】，選兩個的方法有2 種：選一個2與一個3，得到【2 × 3＝6 】，或是2個都選3，得到 【 】。3個數都選，則可以得到【 】。

練習：請看著上面練習做出來的3 個數的質因數分解，寫出這3個數所有的質因數，並且只需要以質因數分解來表示，不需要計算出來。

**以短除法做質因數分解**

上面講的拆解方式，還可以使用另一種形式，叫做短除法。短除法的好處是在大數字時，可以以比較有系統的方式，將數拆解成質因數乘積。我們之前教的因倍數判別法，在做短除法時就十分有幫助了。

例題：質因數分解 2772

你認為2772有那些質因數？【 】

很明顯有2，所以就從2開始，以2除2772，把商數寫在2772的下面，再以2 除之前得到的商1386，等於693，再將693寫在1386寫…一路除下去，直到最後得到無法分解的質數。

231

2772

7

3

3

693

2

1386

2

77

11

因此2772＝ 7 11

由於符號有點像除法的直式符號倒過來，又以比較小的除一路除下來，因此就稱這樣的方法為短除法。

請模仿上面的方法，以質因數分解式（不用乘開），寫出2772的所有因數。

**練習：**

一、以短除法求出以下各數的質因數分解式：

1. 1001
2. 2800
3. 5733
4. 10000
5. 4257

二、你能不能從質因數分解的式子中，找出所有4257的兩位數因數？並且能不能找出計算4257因數數目的方法？

三、有一個計算機魔術：請先打一個3位數（如154），再重複打這三個數字（變成154154），然後按「÷」7，「÷」11，「÷」13，結果又會變成154。請解釋原因（提示：請看第一大題中，1001的質因數分解式）

**以質因數分解法求出二數的公因數與最大公因數**

我們求兩數的公因數，除了用列表的方式，還可以從質因數分解的結果，來做比較。因為我們可以從質因數分解式中，把一個數的所有因數寫出來。比較這些因數的式子，我們就能夠找出公因數與最大公因數。

1. 求出12與18的最大公因數

請寫出12的質因數分解式：12＝

請寫出18的質因數分解式：18＝

請以質因數分解的方式，把12的所有因數有系統地寫出：

-沒有2也沒有3的情況：1

-由一個質因數組成：2、【 】

-由二個質因數組成： 、【 】

-由三個質因數組成： ×【 】

請仿照上面，寫出18的因數

-沒有2、沒有3 ：【 】

-由一個質因數組成：【 】、【 】

-由二個質因數組成：【 】、【 】

-由三個質因數組成：【 】

比較上面的結果，我們發現12與18的公因數共有1 、【 】、【 】與2 × 3 這四個公因數，其中最大的公因數與2 × 3，而其他的因數皆為2 × 3的因數。

如果我們把12和18兩個數的質因數分解式並列，我們會發現：

12＝2 × 2 × 3

18＝2 × 3 × 3

圈起來的部份為12與13共有的因數，共有的最大乘積，就為兩者的最大公因數。

例二 以質因數分解法，求出84、112、98的最小公倍數

一 先寫出84與112的質因數分解

84 ＝

112＝

98＝

圈出三者共有的最大部份

因此兩數的最大公因數為【 】

**另一種形式記錄：短除法**

我們可以合併兩個數或是兩個以上的數的質因數分解式，以短除法的方式，來求得最大公因數。

例三 以短除法求12與18的最大公因數

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 短除法算式 | | 解說 |
| 2 | 12 | 18 | 12＝2 × 6，18＝ 2 × 9 |
| 3 | 6 | 9 | 6＝ 3 × 2，9＝3 × 3 |
|  | 2 | 3 | 最後的2與3找不到1以外的公因數 |

所以最大公因數即為右邊找出來共同因數2與3的乘積：2 × 3＝ 6

例二 求84，112，98的最大公因數

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 短除法算式 | | | 解說 |
| 2 | 84 | 112 | 98 | 84＝2 × 42，112＝ 2 × 56，98＝2×49 |
| 7 | 42 | 56 | 49 | 42＝ 7 × 6，56＝7 × 8，49＝7×7 |
|  | 6 | 8 | 7 | 最後的6、8、7找不到1以外的公因數 |

所以84，112，98的最大公因數為【 】

**練習**

**一、求出下列各組數的最大公因數，我們通常用小括號（ ）來代表最大公因數**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. （144，256）＝ | 2.（198, 231, 264）＝ |
| 3.（7，12，39）＝ | 4. （65，143，117）＝ |
| 5.（294，420）＝ | 6. （45，135，360） |

二、阿花有一張長方形的紙，長180公分，寬105公分，想要剪出正方形的紙，又不想浪費紙，請問他可以剪出的正方形，邊長為幾公分？

三、有一塊長方形的木頭，長308公分、寬196公分、高252公分，小傑想要鋸出一塊塊正方形的積木，不想浪費材料，請問他最大可以鋸出邊長為多少公分的積木？共可以鋸出幾塊？

如果他的積木的邊長，要介於10-20公分之間，不想浪費材料，請問他可以鋸出幾公分的積木？

四、阿寶有一塊長方形的地，長60公尺，寬72公尺，他想要在週圍種樹，四個頂點都要種，每棵樹之間的距離相等，請問如果兩棵樹間的間距要最大的話，他必須每隔多少公尺種一棵？這樣種需要幾棵樹？