Thèses mathématiques

Gaspard Berthelier

Juillet 2021

Théorie des meubles

La théorie des meubles s'inscrit dans la théorie des ensembles. Son intérêt mathématique n'est pas particulièrement profond ni novateur mais le formalisme est amusant à mettre en place.

Definition 1 On se place dans un espace $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Un meuble de dimension $0 < n \leq p$ est une réunion de pavés d'intérieurs disjoints deux à deux, de dimensions n, telle que chaque pavé soit relié au moins à un autre par une intersection non vide de dimension $n-1$ (appelée *reliure*).

Rappel : un pavé de dimension n est un ensemble de points de la forme $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \in \overline{\mathbb{R}}^n$

Une subtilité à noter est que dans cette définition, des meubles de même "forme" mais à des positions différentes ne sont pas les mêmes. Dans $\mathbb{R}^3$ par exemple, $\{x\} \times [a, b] \times [c, d]$ et $\{y\} \times [a, b] \times [c, d]$ sont des meubles différents, pourtant normalement "égaux" à $[a, b] \times [c, d]$. Cette subtilité disparaîtra lorsque nous définirons la position d'un meuble.

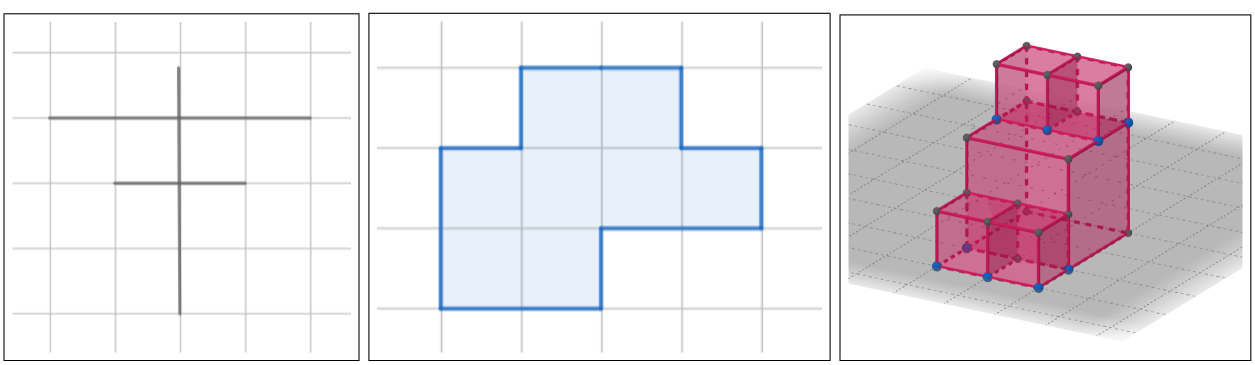
Par ailleurs, la définition des reliures utilise le terme "dimension". Or dans le cas d'intersections finies, il ne s'agit pas d'espace vectoriels. Il faut en fait se référer à la théorie des variétés (un segment est une variété de dimension 1, une surface - même non plane - de dimension 2, etc.)

Par exemple :

• un meuble de dimension 3 - qu'on appelera simplement **meuble usuel** - est une réunion de pavés droits, reliés entre eux par des surfaces.

• Un meuble de dimension 2 est appelé un **tapis**, et est constité de *plaques* (plans ou rectangles) reliés entre eux par des *tiges* (segments ou droites).

• Un meuble de dimension 1, appelé **décoration** sera la réunion de tiges reliées par des points.



Une décoration, un tapis, un meuble usuel

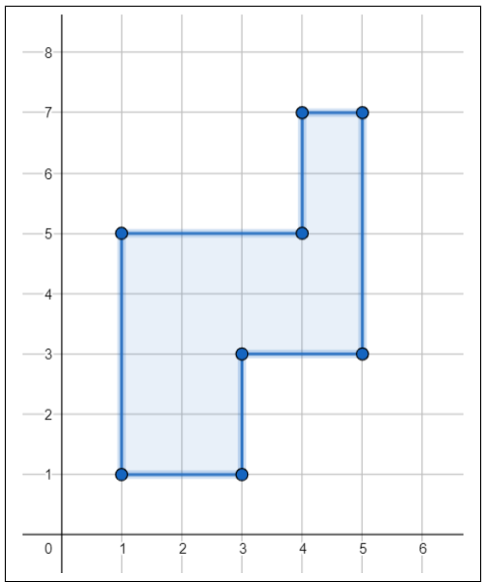
Question ouverte : soit un meuble de dimension 1 dans p = 2n et composé que de k pavés. On impose à chaque reliure de ne relier que deux pavés entre eux (on parle de *meuble séparé*). Quel est le nombre de reliures ? Et si chaque pavé ne peut être relié qu'à deux autres maximum?

Pour la suite de ce cours, on se placera dans $\mathbb{R}^3$ et on considérera des meubles, tapis et décorations finis (c'est à dire que les pavés prennent tous des valeurs finies). De tels ensembles de points seront appelés **meubles finis d'ordre 3**. Les définitions seront néanmoins généralisables à toute dimension.

Definition 2 La complexité C d'un meuble sera égale au minimum de pavés nécessaires pour décrire l'ensemble de ses points.

Definition 3 Le nombre de configurations N d'un meuble sera égal au nombre de façons de construire ce meuble (avec des pavés différents), en n'utilisant que C pavés.

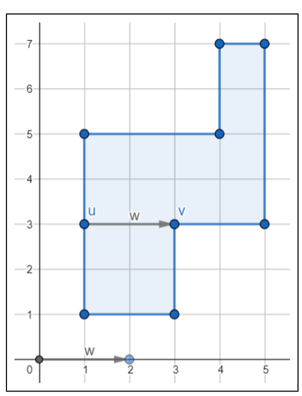
Exercice : Quelle est la complexité C et le nombre de configurations N de l'ébauche de meuble - c'est à dire à reliures gommées - suivante (il s'agit d'un tapis, mais il est possible d'étendre la figure selon l'axe de la feuille pour en faire un meuble usuel, sans que cela ne modifie C ou N - *conjecture*):



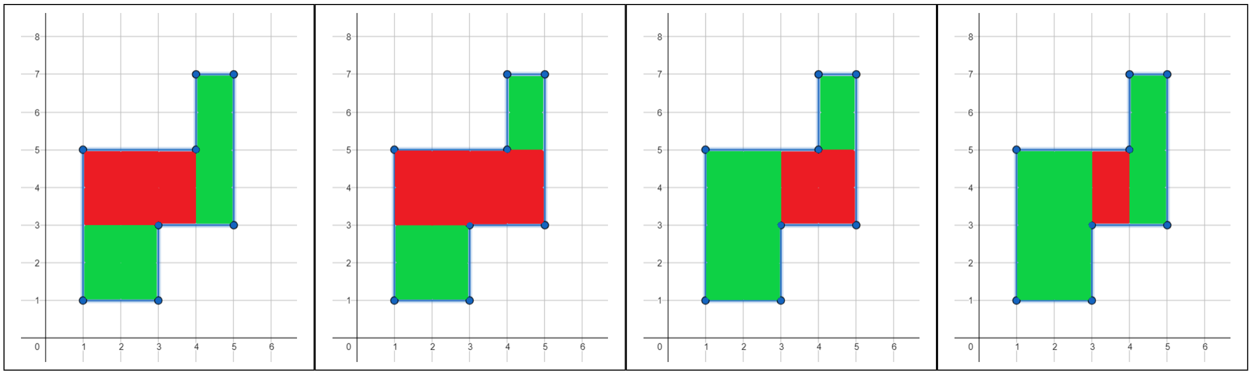
Solution:

Notons M le meuble considéré, C sa complexité et N son nombre de configurations. Il est par exemple possible de construire M à partir des pavés de dimension 2 : $P_1 = [1,3] \times [1,3]$, $P_2 = [1,5] \times [3,5]$ et $P_3 = [4,5] \times [5,7]$. Les intérieurs sont disjoints, les reliures sont non vides et de dimension 1 : $P_1 \cap P_2 = [1,3] \times \{3\}$, $P_2 \cap P_3 = [4,5] \times \{5\}$. Toutes autre construction donne une complexité au moins égale à 3. Ainsi <u>C = 3</u>. (Une démonstration rigoureuse nécessite de prouver qu'on ne peut pas trouver $C = 2$).

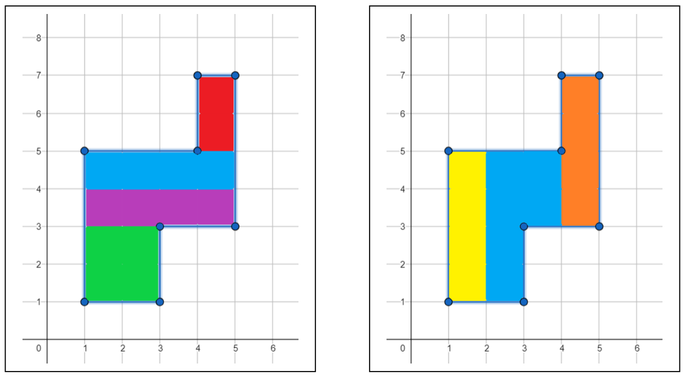
Un mot sur la subtilité au sujet des dimensions des reliures. On peut se placer dans un espace affine, de telle sorte que $\{3\} \cap [3,5]$ *soit "le même segment" que [3,5]. En effet, les points d'un segment* $\vec{uv}$ *(*$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de l'espace, u et v deux points) sont les vecteurs de* $I = \{(1-t)\vec{u} + t\vec{v},\, t \in [0,1]\} = \vec{u} + \{(\vec{v} - \vec{u})t,\, t \in [0,1]\}$. *Si on note* $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, *alors étudier* $\vec{uv}$ *revient à étudier* $\vec{w}$. *Dans notre cas, on peut prendre* $u = (1,3)$ *et* $v = (3,3)$. *Alors* $P_1 \cap P_2 = I$ *et* $dim(I) = dim([0,w]) = 1$ *(par notre considération sur les variétés précédente). Autrement dit :* $dim([a,b] \times c) = dim([a,b]) = 1$.



Il est possible de construire 4 configurations de M, représentées ci-dessous:



En revanche, les suivantes ne le sont pas :



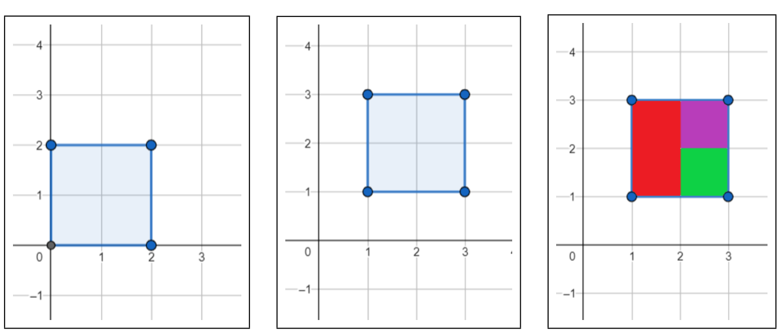
Ci-dessus, la première figure n'est pas une configuration car le nombre de pavés n'est pas égal à $C = 3$, la seconde figure non plus car la forme de couleur bleue n'est pas un pavé.

Definition 4 Deux meubles sont dits semblables lorsque que l'on peut passer de l'un à l'autre par un changement de construction ou bien par une translation dans l'espace. On dit que des meubles semblables ont une unique ébauche.

Sont pris en compte dans le terme "constructions" de la définition précédente les **meubles imparfaits**, c'est à dire ceux construits avec un nombre de pavés D supérieur strictement à C (un **meuble parfait** est tel que $D = C$).

Notez aussi que la mention de la translation n'est pas nécessaire dans le cas d'un espace affine, puisque deux meubles à des positions différentes sont effectivement les mêmes dans l'espace vectoriel de direction. Par ailleurs, avec le vocabulaire supplémentaire maintenant en notre possession, on peut définir un meuble comme un ensemble de la forme $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_D\}$ où les P_i sont les pavés utilisés pour sa construction ($D \geq C$). On construit ensuite une relation d'équivalence de sorte à avoir dans la même classe d'équivalence tous les meubles semblables entre eux. On s'intéressera alors souvent à $\dot{M}$ plutôt que M.

Par exemple, les trois meubles suivants sont semblables. Les deux premiers sont les mêmes, à des "positions" différentes, le troisième étant une autre construction (imparfaite) :



Definition 5 Soit un meuble M dont l'un des points k passe par l'origine. Soit M' un meuble semblable à M. La position (relative à M) de M' correspond au vecteur $\vec{u}$ tel qu'une translation de M' de $-\vec{u}$ (ainsi qu'une éventuelle rotation) renvoie le meuble M, ou bien l'une de ses constructions. Trouver la position revient en fait à déplacer "rigidement" u vers l'origine k. L'ensemble des points qui forment M est l'ébauche de tous les meubles M'.

On ne précisera pas le meuble M et son point v d'origine quand elle sera évidente.

Definition 6 Soit un meuble M de dimension $n > 0$ et de position $\vec{u}$. Le squelette de M est l'ensemble des sommets Q translatés de $-\vec{u}$. On appelle intrication K le cardinal de Q.

Il est possible d'écrire mathématiquement l'ébauche de M sous la forme : $eb(M) = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,D\}} P_i - \vec{u}$

avec $P_i = \times_{k\in\{1,\ldots,n\}} [a_{i,k}, b_{i,k}]$

Alors : $Q = \bigcup_{i,k\in\{1,\ldots,D\}\times\{1,\ldots,n\}} \{a_{i,k}, a_{i,k}\} \cup \{a_{i,k}, b_{i,k}\} \cup \{b_{i,k}, b_{i,k}\} \cup \{b_{i,k}, a_{i,k}\} - \vec{u} \quad et \quad K = \#Q$

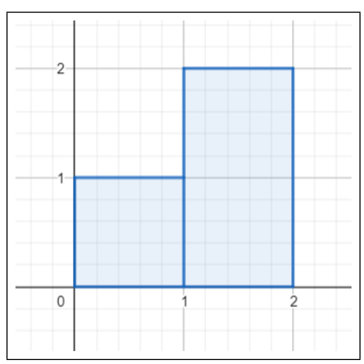
Dans la figure précédente, le second meuble est le même que le premier, mais à une position $\vec{u} = (1, 1)$. Ici, on ne précise pas relativement à quel meuble on fixe la position, dans le mesure où il est évident que l'on prend le premier meuble comme positionnement d'origine. Le squelette correspond aux quatre coins du premier carré (et éventuellement les deux autres coins de l'extension dans l'espace du meuble). L'intrication du troisième tapis est 8 tandis que celle des deux premiers est 4.

Question ouverte : Les configurations d'un meuble ont-elles toujours une intrication minimale et est-ce suffisant pour les caractériser ?

Definition 7 Deux meubles sont dits similaires s'ils ont le même squelette.

Proposition 1 *Deux meubles similaires sont semblables mais deux meubles semblables ne sont pas forcément similaires*

Exercice : Pour l'ébauche du meuble ci-dessous, donner a) la complexité C b) le nombre de configurations N c) l'intrication minimale K d) deux configurations non similaires.



Réponses : C = 2, N = 2, K = 7, $M_1 = ([0,1] \times [0,1], [1,2] \times [0,1], [1,2] \times [1,2])$ et M_2 de l'image.

Definition 8 Un meuble simple est un meuble dont le nombre de pavés est tel que D = C = 1. Un meuble complexe est tel que $D > 1$.

Proposition 2 *Un meuble simple est parfait mais un meuble parfait n'est pas forcément simple.*

Dans le figure pré-précédente, les deux premiers tapis sont simples et le dernier complexe.

Pour aller plus loin

• Trouver une expression de l'intrication minimale en fonction de C

• Formaliser la rotation des meubles dans l'espace

• Formaliser des meubles construits à partir de formes non planes (surfaces courbées par exemple).

• Définir une maison (ensemble de meubles et murs, positions de meubles). Il faut que les meubles puissent rentrer à l'intérieur de la maison sans se superposer.

• Meubles décorés : association de meubles de tailles différentes (exemple une tige sur un tapis)