Thèses mathématiques

Gaspard Berthelier

Juillet 2021

Fonctions toboggans

Les fonctions toboggans n'ont pas d'utilité particulière et ne sont pas forcément source d'exercices intéressants, mais le formalisme est amusant à mettre en place.

Definition 1 Une fonction toboggan est une fonction f de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que :

- $f(0) > 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- Pour tous x_{p_1} et x_{p_2} maximums locaux de f tels que $p_1 < p_2$, on a $f(0) \geq f(p1) \geq f(p2)$

Dans la définition précédente, notez que la dérivée n'est définie qu'à droite en 0. De plus, on acceptera dans la définition les fonctions qui, translatées vers le haut par une constante, satisfont toutes les conditions. On crée en fait une relation d'équivalence entre toutes les fonctions égales après translation verticale.

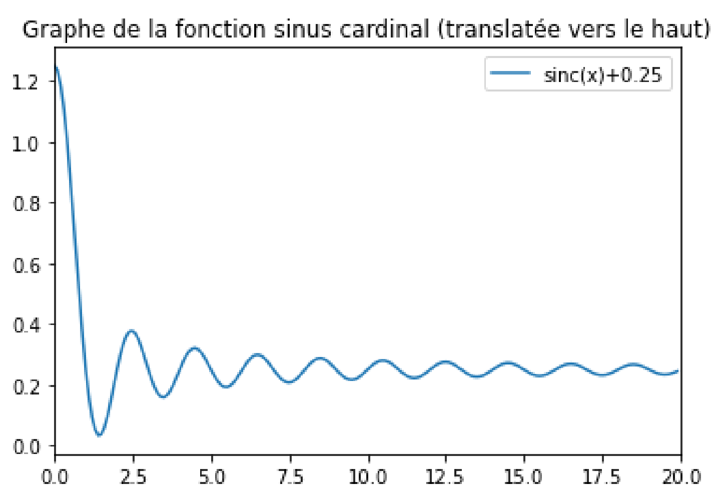
De plus, on considère deux types de toboggans particuliers :

Toboggans dénombrables : toboggans dont l'ensembles des maximums locaux stricts et l'ensemble des "plats" de f sont dénombrable. On notera alors cet ensemble $M = (x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, où en cas de plat x_p est le réel le plus petit du plat.

Toboggans finis : toboggans tels qu'il existe un point x_m où $\forall x \geq x_m$, $f'(x_m) = 0$.

Un toboggan fini n'est pas forcément dénombrable et réciproquement.

On définit la *position* d'un toboggan f, le réel u tel que f-u soit effectivement un tobbogan. Notez que si le tobbogan est fini, $u = 0$ ne signifie pas nécessairement que sa limite à l'infinie vaut 0. Exemple ci-dessous.



exemple de fonction toboggan dénombrable mais non fini

Exercice : montrer que la fonction précédente est a) un toboggan b) dénombrable c) non fini.

Solution :

a) Notons f la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}_+$: $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \text{sinc}(x) + 2.5$

- f est bien à valeurs dans R_+, sa position semble d'ailleurs être à 0, mais à vérifier ($\text{pos}(f) = \min f$)

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = \frac{sin(x)}{x} + 2.5$, cette fonction est continue par somme et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On a par ailleurs $f(0) = 2.5$ puisque $\text{sinc}(0) = 0$ par définition. Et on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2.5$ par limite du taux d'accroissement de la fonction sinus en 0 qui vaut 0. Donc f est continue.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{xcos(x) - sin(x)}{x^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x}{3} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème de la limite de la dérivée, f est dans $C^1(R_+)$

- Ailleurs que $x = 0$, les maximums sont de dérivée nulle.

Pour $x > 0$, $f'(x) = 0 \iff \cos(x) = \text{sinc}(x)$. On pose $g(x) = \cos(x) - \text{sinc}(x)$. Trop chiant à étudier en fait. Plutôt, partons du fait que sinc est développable en série entière sur $\mathbf{R}$: $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + 2.5$

Alors : $f'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} x^{2n-1}$ Ouais nan trop chiant à étudier.

Definition 2 On nomme squelette primaire la fonction escalier construite à partir des maximums locaux du toboggan. Le squelette secondaire comprend aussi les minimums.

Definition 3 Deux toboggans sont similaires s'ils ont le même squelette primaires, et semblables s'ils ont le même squelette secondaire.

Deux toboggans semblables sont donc similaires mais la réciproque est fausse

Definition 4 Dans le cas de toboggans dénombrables, la *dimension* n sera le nombre de maximums ($n \in \mathbf{N}$ si le toboggan est fini).

Pour un toboggan fini dénombrable, il y a 2n extremums

Un creux est l'association de deux maximums x_1 et x_2, et d'un minimum x_u.
La pente arrière du creux est $p_1 = f(x_1) - f(x_u) \geq 0$, la pente avant $p_2 = f(x_2) - f(x_u) \geq 0$
On parle de pente relative $pr_i = \frac{p_i}{\Delta x}$ et de descente d :

$$d = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_u)}{x_u - x_1}\frac{x_u - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_u)}{x_2 - x_u}\frac{x_u - x_2}{x_2 - x_1} = pr_1\Delta r_1 - pr_2\Delta r_2$$

La descente étant toujours positive, on a : $\frac{pr_1}{pr_2} \geq \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2}$ avec égalité seulement en cas de descente nulle.

La *pente critique* p_c sera la pente arrière la plus élevée du toboggan. C'est à dire $p_c = \max\{pr_{k,1}\Delta x_{k,1}\}$. Quand on veut limiter la pente, on essaye d'avoir une pente critique faible et donc d'avoir un compromis constant entre pr et Δ_x. On parle aussi de mur critique pour la pente avant.

Definition 5 En cas de toboggan fini, on appelle *longueur* d'un toboggan le réel x_m. Si le toboggan n'est pas fini, on pose $x_m = +\infty$.

On parle de zone de descente quand $f' < 0$, zone de montée quand $f' > 0$ et zone de plat quand $f' = 0$ sur un intervalle non réduit à un seul point. On appelle *parc* un ensemble fini de toboggans finis (sinon on parle de *parc imaginaire*), sa taille T étant le nombre de toboggans. La dangerosité du parc est sa pente critique la plus élevée (on imagine des seuils maximums autorisés). La durée d'un parc est la somme des longueurs.

Propriété 1 : un parc est imaginaire si et seulement sa durée est infinie.

Thèses basées sur des idées que j'ai eu pendant le stage ouvrier en juillet 2021. Pdf LaTeXcommencé fin juillet 2021, repris et terminé le 31/10/21 (MaJ : légères modifications le 14/11/22).