Tenseurs

gaspard.berthelier

April 2021

Contents

1 Coordonées covariantes et contravariantes

Pour un espace euclidien E de dimension n et de base $(e_i)_i$, un vecteur de E s'écrit en convention d'Einstein de la forme :

$$v = v^i e_i = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

Les v^i sont appelées **coordonnées contravariantes**. Remarquez la position des indices pour les coordonnées et les vecteurs.

On peut aussi écrire une forme linéaire du dual E^* sous la forme :

$$\forall x \in E,\, v^*(x) = (v, x)$$

$$v^* = v_{*i} e^{*i} = \begin{pmatrix} v_{*1} & v_{*2} & v_{*3} \end{pmatrix}$$

Ici, $(e^{*i})_i$ est la base de E^* définie telle que $e^{*i}(e_j) = \delta_{ij}$. Puisque ce sont des formes linéaires, cela suffit pour les caractériser (cf cours sur les fonctions linéaires). Les v_i sont appelées **coordonnées covariantes**.

Le produit scalaire complexe s'écrit de façon générale :

$$\boxed{(x,y) = \overline{x^i} y^j (e_i, e_j)}$$

Attention point crucial : $(e_i, e_j) \neq e^{*i}(e_j)$, car si la base n'est pas orthonormée, nous n'avons pas $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. On a bien en revanche selon le théorème de Riesz :

$$(e_i, e_j) = e_i^*(e_j)$$

Par ailleurs :

$$(x,y) = x^*(y) = x_{*i} e^{*i}(y^j e_j) = x_{*i} y^j e^{*i}(e_j) = x_{*i} y^i$$

$$(y,x) = y^*(x) = y_{*j} e^{*j}(x^i e_i) = y_{*j} x^i e^{*j}(e_i) = y_{*i} x^i$$

On a donc pour toute base quelconque et tout produit scalaire complexe :

$$\overline{x^i} y^j (e_i, e_j) = x_{*i} y^i = \overline{y_{*i} x^i} = \overline{y_{*i}}\, \overline{x}^i$$

Les termes (e_i, e_j) ne disparaissent que si la base est orthonormée.

Quand ce n'est pas le cas :

$$(e_j, v) = e_j^*(v) = v^i e_j^*(e_i) \, (\neq v^j = v^i e^{*j}(e_i)\,)$$

$$(v, e_j) = v^*(e_j) = v_{*i} e^{*i}(e_j) = v_{*j}$$

Donc finalement :

$\boxed{v = (e_j, v) e_j}$ n'est vrai que si BON mais $\boxed{v^* = (v, e_j) e^{*j}}$ est vrai tout le temps

Par propriété du produit scalaire hermitien :

$$(e_j, v) = \overline{(v, e_j)} \quad \text{donc si on a une BON} \quad \boxed{v_{*j} = \overline{v^j}}$$

On retiendra donc pour la suite :

$$\boxed{v = v^i e_i \quad \text{et} \quad v_{*j} = (v, e_j) = \overline{v^i}(e_i, e_j)}$$

Par définition, un vecteur est invariant par changement de base. On comprend que si on multiplie e_i par 2, alors v^i est divisé par 2. En revanche, v_{*j} ne change pas car le changement de v^i annule le changement de e_i dans son expression. Cela explique les noms donné aux deux coordonnées. Pour la suite, on se placera dans le cas de BON et on se passera des étoiles pour les notations :

$$v^* = v_j e^j \quad \text{où} \quad v_j = \overline{v^j} \quad \text{et} \quad e^j(v) = (e_j, v)$$

2 Tenseur

Un tenseur est la généralisation des matrices à des "dimensions supérieures", dans le sens où un vecteur colonne est de dimension 1 et une matrice de dimension 2. La dimension correspond au nombre d'indices nécessaires pour caractériser le tenseur.

On note $E^p = E \times E \times \dots E$ le produit cartésien de p fois E, respectivement E^{*q} pour le dual. Un tenseur est une forme multilinéaire sur $E^p \times E^{*q}$.

Ainsi en dimension 3 sur $E \times E \times E^*$, un tenseur est de la forme :

$$T(x^i e_i, y^j e_j, z_k e^k) = x^i y^i z_k \, T(e_i, e_j, e^k) = x^i y^i z_k \, T_{ij}^k$$

Tout comme les application linéaires usuelles, on peut caractériser un tenseur par ses valeurs T_{ij}^k. L'ensemble des tenseurs sur E^p est noté $\otimes^p E$, et est de dimension n^p. Notez que $\otimes^0 E = K$ (scalaire qui ne dépend pas d'une base) et $\otimes^1 E = E$ (vecteurs).

3 Produit tensoriel

Pour la suite, nous considérerons à titre illustratif un tenseur P de E^3 et un tenseur Q de E^2.

Le produit tensoriel de deux tenseurs renvoie un nouveau tenseur dont la dimension est la somme des deux autres :

$$P \otimes Q : \begin{array}{ll} \otimes^p E \times \otimes^q E & \longrightarrow \otimes^{p+q} E \\ (x, y, a, b, c) & \longmapsto P(x, y) Q(a, b, c) \end{array}$$

Le produit tensoriel à plusieurs termes se comprend alors par récurrence. On comprend donc mieux la notation de $\otimes^p E$ qui est en fait l'espace vectoriel engendré par la base de tenseurs de dimension p : $(e^i \otimes e^j \otimes \cdots \otimes e^k)_{1 \leq i,j,k \leq p}$

Par exemple, en dimension deux :

$$T(x, y) = 3x_1 y_2 = 3.e^1(x) e^2(y) = 3.e^1 \otimes e^2(x, y) \leftrightarrow T = 3.e^1 \otimes e^2$$

4 Produit contracté

Cette opérations met en commun deux indices des tenseurs :

$$P \overline{\otimes} Q : \ \otimes^p E \times \otimes^q E \quad \longrightarrow \otimes^{p+q-2} E$$

Par exemple :

$$(P \overline{\otimes} Q)_{ijm} = P_{ijk} Q_{km}$$

Entre autres, on reconnaît en dimension 1 et 2 les produits usuels auxquels on a déjà l'habitude :

$$a\overline{\otimes}b = a_k b_k = (a,b)$$

$$(A\overline{\otimes}b)_i = A_{ik}b_k = (Ab)_i$$

$$(A\overline{\otimes}B)_{ij} = A_{ik}B_{kj} = (AB)_{ij}$$

5 Produit de Kronecker

Un exemple de produit tensoriel dans le cas de matrices est le produit de Kronecker. Pour A et B de taille quelconque, obtenir $A \otimes B$ revient à multiplier chaque coefficient de A par la matrice B. Visuellement, chaque coefficient de A est donc remplacé par un élément de la dimension de B. La dimension de la matrice $A \otimes B$ est bien le produit des dimensions :

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,m}B \\ a_{2,1}B & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & \cdots & a_{n,m}B \end{pmatrix}$$

Développons simplement le cas de matrices 2x2 :

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} & a_{1,2}\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \\ a_{2,1}\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} & a_{2,2}\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, notez la différence entre les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$$

On peut entre autres se demander en quoi une matrice est un tenseur. Il suffit en fait de considerer les formes multilinéaires différentes :

$$A(x) = Ax$$

$$A(x,y) = x^T Ay$$

Montrons ensuite une propriété intéressante quand on prend le produit de kronecker comme produit tensoriel. On note $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(x) = ax_1 + bx_2$$

$$P(x,y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(x)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(y) = (ax_1+bx_2)(cy_1+dy_2) = acx_1y_1+adx_1y_2+bcx_2y_1+bdx_2y_2$$

$$= \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = P(x \otimes y)$$

On a donc $P(x,y) = P(x \otimes y)$

5.1 Propriétés

On a avec ce produit tensoriel les propriétés suivantes :

- $(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax \otimes By)$
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
- $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$
- $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$
- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
- $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$