УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Вычислительная математика

Малышева Татьяна Алексеевна, доцент, к.т.н.

Санкт-Петербург, 2022

Численное интегрирование
Постановка задачи

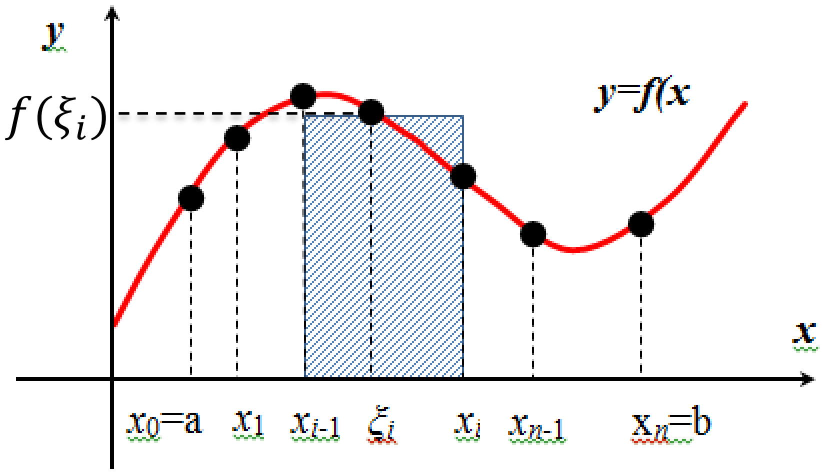
Пусть на отрезке [a,b] задана функция y=f(x) .

1. Разобьем отрезок [a,b] на *n* элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, (i=1,2,…n) причем $x_0=a$, $x_n=b$.
2. На каждом их этих отрезков выберем произвольную точку ξ_i
3. Найдем : $s_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i$ $\qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

4. Составим сумму всех таких произведений:

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

\- интегральная сумма

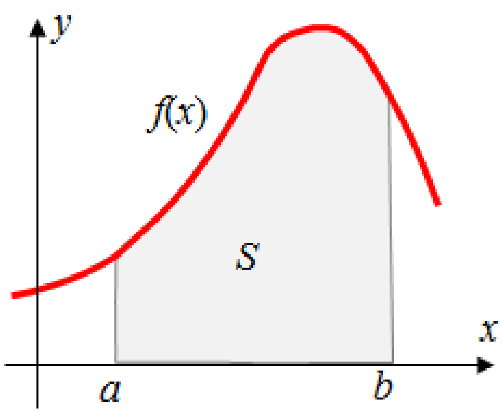


Постановка задачи

Определенным интегралом от функции *f(x)* на отрезке [*a, b*] называется предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения; при этом длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

<u>Теорема существования определенного интеграла</u>. Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*], то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка [*a, b*], ни от выбора точек ξ_i.



Геометрический смысл интеграла:

если f(x)≥0 на отрезке [a,b], то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции f(x), отрезком оси абсцисс, ординатами a и b.

Вычисление интеграла равносильно вычислению площади криволинейной трапеции.

Аналитическая функция

Если функция $f(x)$ задана аналитически (формулой) и ее первообразная $F(x)$ является элементарной функцией, то определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона –Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F(x) \text{ – первообразная, } F'(x) = f(x)$$

Например, подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически, но интеграл н е б е р у щ и й с я , т. е. не выражается в конечном виде через элементарные функции. Тогда можно использовать разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора, а затем применить формулу Ньютона –Лейбница. Например, для вычисления интеграла:

$$I = \int_0^1 e^{x^{-2}} dx$$

Разложение в ряд: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ Заменим x на x^{-2}, получим:

$$I = \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots \approx$$
$0{,}7468$

Численное интегрирование

Когда формулой Ньютона –Лейбница невозможно или затруднительно воспользоваться: :

- подынтегральная функция представлена в виде таблицы значений или задана графически, тогда первообразная $F(x)$ не существует;
- подынтегральная функции имеет сложное аналитическое выражение или/и её первообразная не выражается через элементарные функции или слишком громоздка.

Тогда применяют численное (приближенное) интегрирование . Для этого $f(x)$ заменяют другой, близкой к ней функцией, которая легко интегрируется.

Численное интегрирование

Формулы численного интегрирования называются **квадратурными формулами.**

При этом определенный интеграл заменяется конечной (интегральной) суммой:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

где α_i – числовые (квадратурные) коэффициенты, выбор которых зависит от используемого метода численного интегрирования.

Правая часть – квадратурная сумма. В зависимости от способа вычисления суммы получены разные методы интегрирования.

Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

и зависит от выбора коэффициентов и от расположения узлов x_i .

Формула Ньютона - Котеса

В качестве «близкой» к $f(x)$ возьмем интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$, совпадающий с $f(x)$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Полином Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_n^i(x), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

где $L_n^i(x)$ - коэффициенты Лагранжа (полиномы степени *n*):

$$L_n^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Если полином Лагранжа «близок» к $f(x)$, то интегралы от них тоже должны быть «близки»:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_n^i(x)dx$$

Формула Ньютона - Котеса

Коэффициенты Котеса: $c_n^i = \int_a^b L_n^i(x)dx$

Формула Ньютона-Котеса порядка n:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i$$

Пример: Вычислить коэффициенты Котеса $c_1^0 = c_1^1$

Пусть значения функции $f(x)$ заданы в двух узлах: $x_0 = a$, $x_1 = b$

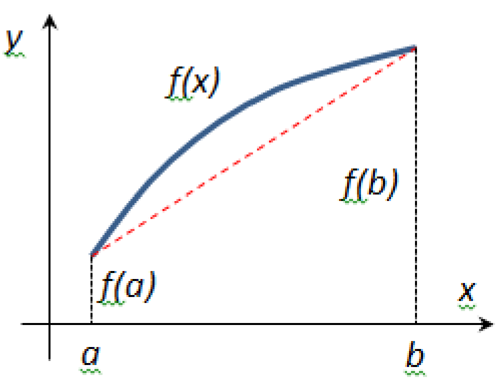
Аппроксимируем функцию полиномом Лагранжа первой степени:

$$f(x) \approx L_1(x) = f(x_0)L_1^0(x) + f(x_1)L_1^1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= f(a)\frac{x - b}{a - b} + f(b)\frac{x - a}{b - a}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)}{a - b}\int_a^b (x - b)dx + \frac{f(b)}{b - a}\int_a^b (x - a)dx =$$

$$f(a)\frac{b - a}{2} + f(b)\frac{b - a}{2}$$



Тогда коэффициенты Котеса $c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$

Коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов

n	Коэффициенты Котеса c_n^i			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$,	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$,	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$,	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{16(b-a)}{45}$,	$c_4^2 = \frac{2(b-a)}{15}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$,	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{25(b-a)}{96}$,	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{25(b-a)}{144}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$,	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{9(b-a)}{35}$,	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{9(b-a)}{280}$,	$c_6^3 = \frac{34(b-a)}{105}$

Формула Ньютона - Котеса

Как пользоваться этой таблицей?

Пусть функция $\boldsymbol{f(x)}$ задана в т р е х точках: a, b и в точке $n = \frac{a+b}{2}$.

Интерполяционный полином Лагранжа степени $\boldsymbol{n}$ **= 2** в формуле Ньютона – Котеса используется, если на отрезке интегрирования есть **три** равноудаленных узлов.

В таком случае, выбирая из строки n = 2 коэффициенты Котеса c_2^0, c_2^1, c_2^2 запишем определенный интеграл в виде:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx} \approx c_2^0 f(a) + c_2^1 f(n) + c_2^2 f(b) = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f(n) + \frac{b-a}{6} f(b)$$

Численное интегрирование

Для решения поставленной задачи подынтегральную функцию *f(x)* ***необходимо заменить приближенной функцией***, которая может быть проинтегрирована в аналитическим виде.

В качестве такой функции обычно используют полином *P(x)* с узлами интерполяции в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

В этих точках значения функции и интерполяционного полинома полностью совпадают $\boldsymbol{f(x_i) = P(x_i)}$.

Для получения простых формул интегрирования используют полиномы ***нулевой, первой и второй степени*** и соответственно получают формулы численного интегрирования: прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Метод прямоугольников

Использует непосредственную замену определенного интеграла интегральной суммой.

На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс. Различают метод левых, правых и средних прямоугольников.

Площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из *n*- прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы *n*- элементарных прямоугольников.

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

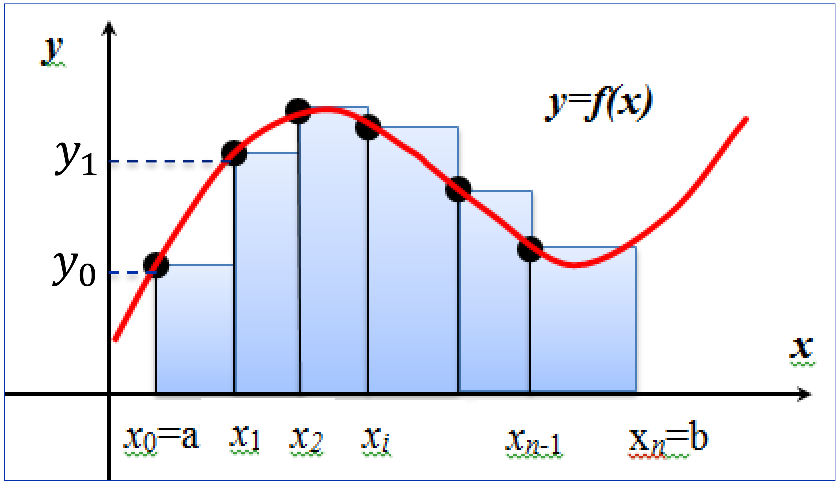
В качестве точек ξ_i могут выбираться левые ($\xi_i = x_{i-1}$) или правые ($\xi_i = x_i$) границы отрезков, получим формулы левых и правых прямоугольников.

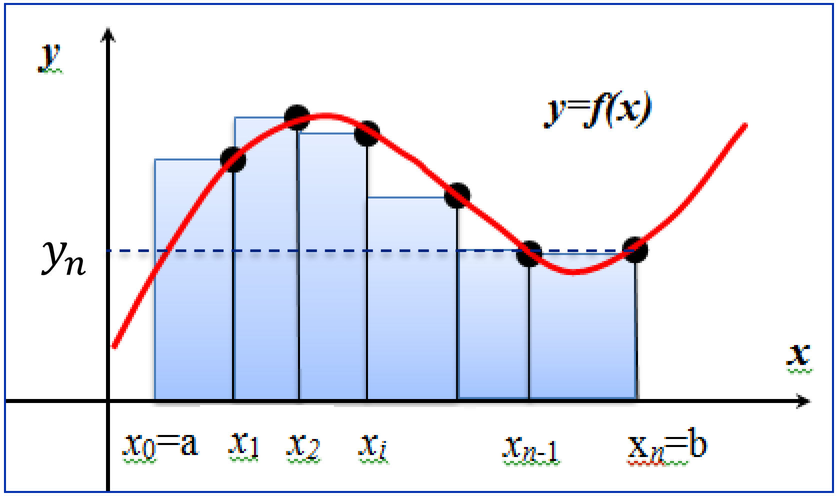
Метод прямоугольников

Обозначим:

$$f(x_i) = y_i \ , \ f(a) = y_0, \ \ f(b) = y_n$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h_i$$





Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \cdots + h_n y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} h_i\, y_{i-1}$ - левые прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \cdots + h_n y_n = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i$ - правые прямоугольники

При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

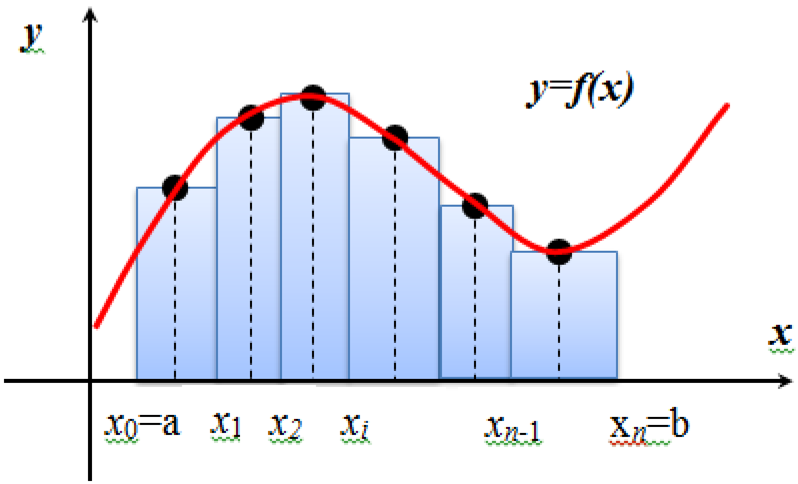
$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

Метод прямоугольников

Пример 1. Найти значение интеграла методами прямоугольников:

$$I = \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \approx 2{,}33 \ldots$$

Разобьем отрезок интегрирования на 5 равных частей: $\mathrm{n} = 5,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}2.$

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$I_{\text{прав}} = h\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}64$ $I_{\text{лев}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = 2{,}040$ $I_{\text{сред}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} = 2{,}3300$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = 2{,}3333 - 2{,}3300 = 0{,}0033\ (\approx 0{,}14\%)$$

$$\Delta I_{\text{лев}} = I - I_{\text{лев}} = 2{,}3333 - 2{,}040 = 0{,}2933\ (\approx 12{,}5\%)$$

$$\Delta I_{\text{прав}} = I - I_{\text{прав}} = 2{,}3333 - 2{,}64 = 0{,}3067(\approx 13{,}1\%)$$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4
$x_{i-1/2}$		1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
$y_{i-1/2}$		1,21	1,69	2,25	2,89	3,61

Метод прямоугольников

Пример 2. Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей:

$\mathrm{n} = 10,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1.$

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$I_{\text{прав}} = h\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}485$ $\qquad I_{\text{лев}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = 2{,}185$

$$I_{\text{сред}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} = 2{,}3325$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = 2{,}3333 - 2{,}3325 = 0{,}0008\ (\approx 0{,}034\%)$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4
$x_{i-1/2}$		1,05	1,15	1,25	1,35	1,45	1,55	1,65	1,75	1,85	1,95
$y_{i-1/2}$		1,1025	1,3225	1,5625	1,8225	2,1025	2,4025	2,7225	3,0625	3,4225	3,8025

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

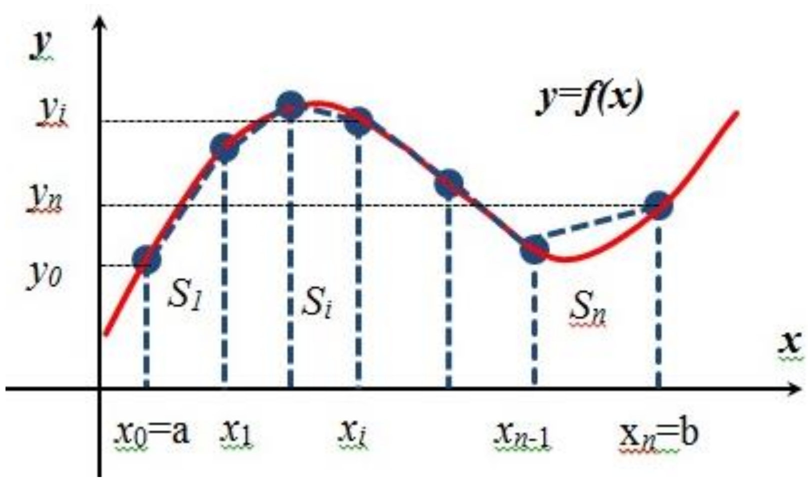
Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$

$$y_0 = f(a), \qquad y_n = f(b), \qquad y_i = f(x_i), \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i)$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$ формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод трапеций

Пример 3. Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей: $n = 10,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1.$

$$I_{\text{трап}} = \int_1^2 x^2 dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) = 0{,}1 \cdot \left(\frac{1+4}{2} + (1{,}21 + 1{,}44 + \cdots + 3{,}61) \right) = 2{,}3350$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I = I - I_{\text{трап}} = 2{,}3333 - 2{,}3350 = 0{,}0017\ (\approx 0{,}073\%).$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

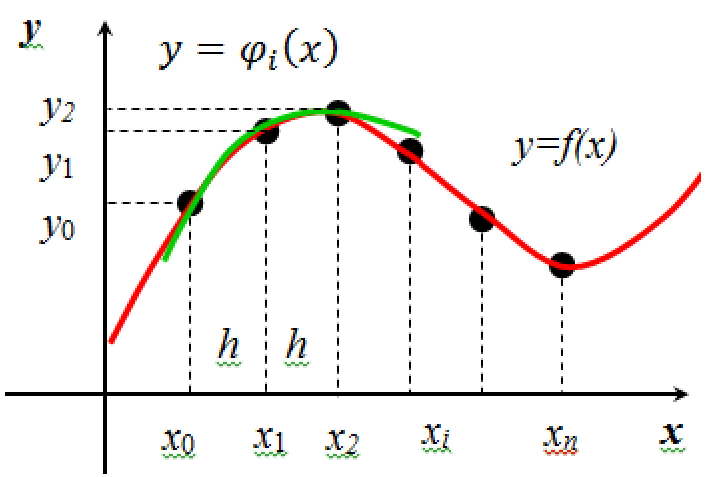
Метод Симпсона (**Симпсон Томас**(20.8.1710–14.5.1751) – английский математик)

Разобьем отрезок интегрирования [*a, b*] на четное число *n* равных частей с шагом *h.* На каждом отрезке $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …, $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, … , $[x_{n-2}, x_n]$ подынтегральную функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$$

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена и подынтегральной функции в узловых точках.

В качестве $\varphi_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$.



Метод Симпсона

Для точек x_0, x_1, x_2:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

При $x_0=0$; $x_1=h$; $x_2=2h$, получим:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{h \cdot 2h} y_0 + \frac{x(x-2h)}{-h \cdot h} y_1 + \frac{x(x-h)}{2h \cdot h} y_2 = \frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2} y_0 + \frac{x^2 - 2h \cdot x}{-h^2} y_1 + \frac{x^2 - h \cdot x}{2h^2} y_2$$

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_0+2h} \varphi_1(x) dx = \int_0^{2h} \left(\frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2} y_0 + \frac{x^2 - 2h \cdot x}{-h^2} y_1 + \frac{x^2 - h \cdot x}{2h^2} y_2 \right) dx =$$

$$= \frac{y_0}{2h^2} \left(\frac{x^3}{3} - 3h\frac{x^2}{2} + 2h^2 x \right) \Bigg|_0^{2h} - \frac{y_1}{h^2} \left(\frac{x^3}{3} - 2h\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2h} + \frac{y_2}{2h^2} \left(\frac{x^3}{3} - h\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2h} = \frac{y_0 h}{3} + \frac{4y_1 h}{3} + \frac{y_2 h}{3}$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Для каждого элементарного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$: $S_i = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$

$$S_{общ} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + 2y_n)$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)\right]$$

Пример 4. Найти значение интеграла методом Симпсона: $I = \int_1^2 x^2 dx \approx 2{,}33$

При $\mathrm{n} = 4$, $\quad h = 0{,}25$.

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	1	1,5625	2,25	3,0625	4

$$I = \frac{0,25}{3}\left[(1 + 4(1,5625 + 3,0625) + 2 \cdot 2,25)) + 4)\right] = 2,3333$$

Погрешность численного интегрирования

Выше рассмотренные методы объединяет общая идея: интегрируемая функция интерполируется на отрезке интегрирования многочленом Лагранжа. Семейство методов, основанных на замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа называется **методами Ньютона-Котеса**. Точность решения растет с увеличением степени интерполяционного многочлена.

Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

где $f(x_i)$ – значения функции в узлах интерполяции; α_i – числовые коэффициенты, выбор которых зависит от используемого метода численного интегрирования.

Для оценки погрешности R приближенного интегрирования:

1) Формулы средних прямоугольников: $|R| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2}$: второй порядок точности $O(h^2)$
2) Формула трапеций: $|R| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$: $O(h^2)$
3) Формула Симпсона: $|R| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f''''(x)| \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4}$: $O(h^4)$

Примеры приближенного вычисления определенных интегралов

В основном встречаются две разновидности заданий:

- либо вычислить определенный интеграл численным методом для заданного числа разбиения отрезка *n* (см. примеры 1,2,3,4)
- либо найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью.

Пример 4. Вычислите определенный интеграл $\int_1^2 (\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7)dx$ методом трапеций с точностью до *0.01*.

Решение: найдем количество точек разбиения отрезка интегрирования *n*, используя неравенство для оценки абсолютной погрешности $|R| \leq \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

$$f'(x) = (\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7)' = \frac{4}{10}x^3 + \frac{2}{5}x, \quad f''(x) = (\frac{4}{10}x^3 + \frac{2}{5}x)'' = 1{,}2x^2 + 0{,}4$$

$$\max_{x \in [a,b]} |f''(2)| = 1{,}2 \cdot 4 + 0{,}4 = 5{,}2$$

Подставим полученное значение в неравенство $\max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \geq 0{,}01 \to 5{,}2\frac{(2-1)^3}{12n^2} \geq 0{,}01$

Тогда $n^2 \geq \frac{520}{12} \to |n| \geq 6{,}58$. Возьмем *n=8*

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{8} = 0{,}125$$

Занесем в таблицу результаты расчетов:

Примеры приближенного вычисления определенных интегралов

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,875	2
$f(x_i)$	-6,7	-6,58669	-6,44336	-6,26443	-6,04375	-5,77458	-5,44961	-5,06091	-4,6

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{10}x^4+\frac{1}{5}x^2-7\right)dx \approx h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 0{,}125(-5{,}65-41{,}6233) = -5{,}9092$$

Найдем интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{10}x^4+\frac{1}{5}x^2-7\right)dx = \left(\frac{x^5}{50}+\frac{x^3}{15}-7x\right)\Bigg|_1^2 = -12{,}8267+6{,}9133 = -5{,}9134$$

$|R| = |I - I_{\text{тр}}| = 0{,}0042,$ точность достигнута.

Погрешность численного интегрирования

Т.к. нахождение *n* из неравенства для оценки абсолютной погрешности для подынтегральных функций сложного вида является не очень простой процедурой, используется правило Рунге.

Правило Рунге - это эмпирический способ оценки погрешности, основанный на сравнении результатов вычислений, проводимых с разными шагами *h:*

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$$

I – точное значение интеграла;

$I_{h/2}, I_h$ - приближенные значения интеграла, вычисленные с различными шагами *h;*

k - порядок точности квадратурной формулы,

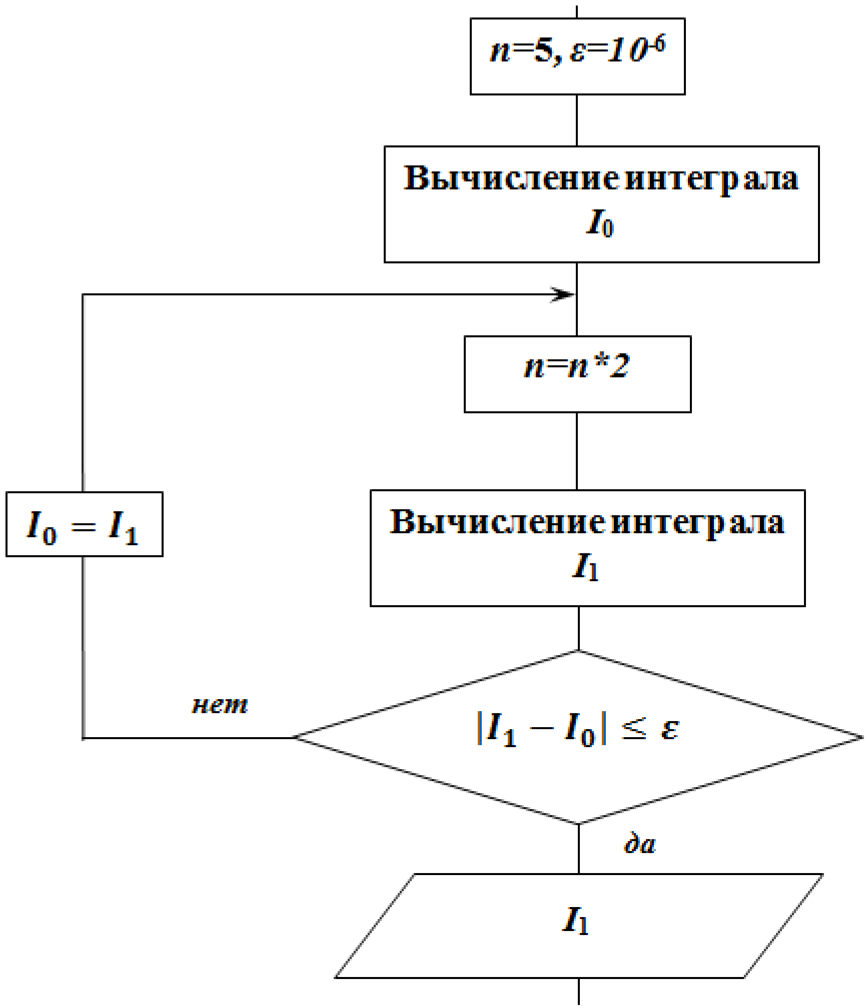
(k=2 - для формул средних прямоугольников и трапеций, k=4 - для формулы Симпсона).

Алгоритм приближенного вычисления определенных интегралов

Имеет смысл прибегнуть к следующему алгоритму:

1. Выбираем произвольно число *n*, например, *n = 5*.
2. Вычисляем по итерационной формуле интеграл для *n = 5* (I_0).
3. Вычисляем интеграл для удвоенного числа узлов: *n = 10* (I_1).
4. Находим абсолютную величину разности двух полученных приближенных значений ($|R| = |I_1 - I_0|$.
5. Если она меньше требуемой точности , то прекращаем вычисления и в качестве приближенного значения определенного интеграла берем значение , предварительно округлив его до требуемого порядка точности. В противном случае удваиваем количество узлов (берем *n = 20*) и повторяем действия.

Алгоритм вычисления интеграла



Погрешность численного интегрирования

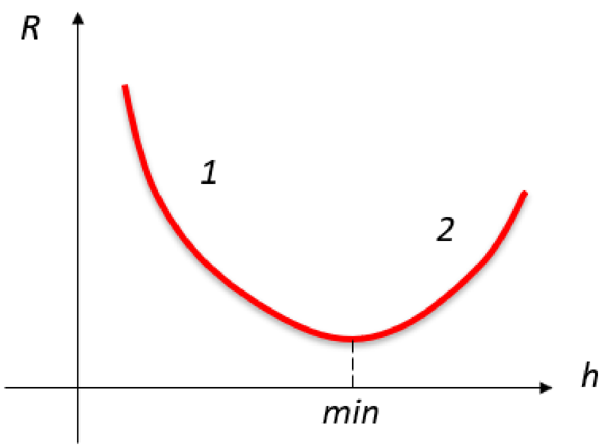
Какой же метод применять при численном интегрировании?

Точность метода Симпсона выше точности метода прямоугольников и трапеций для заданного *n* (это видно из оценки абсолютной погрешности), так что его использование предпочтительнее.

ВОПРОС: Зачем анализировать разные методы интегрирования, если погрешность численного интегрирования определяется шагом разбиения. Уменьшая этот шаг, можно добиться большей точности.

На участке (1) погрешность уменьшается в связи с уменьшением шага h.

На участке (2) при больших *n* начинает доминировать вычислительная погрешность, накапливающаяся в результате многочисленных в результате многочисленных арифметических действий.



Это может отдалить приближенное значение от точного.

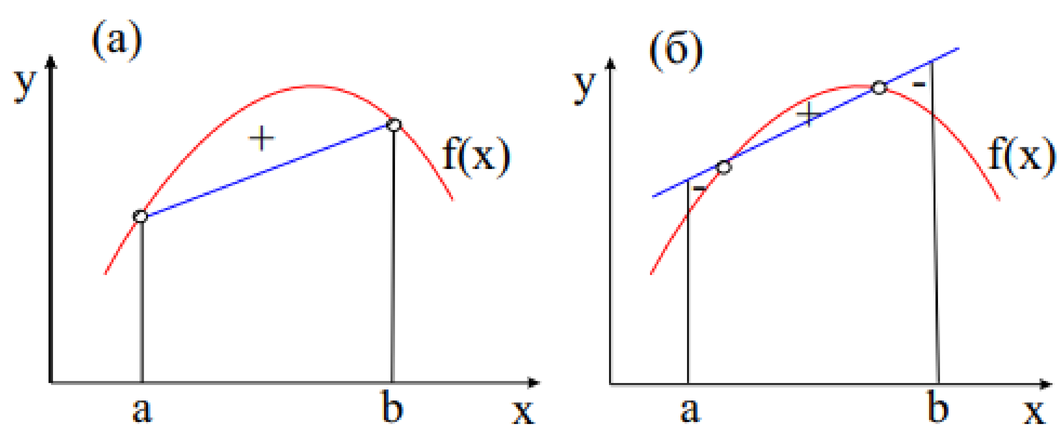
Квадратурная формула Гаусса

Метод Гаусса позволяет повысить порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования. Используется для неравномерной сетки.

Погрешности аппроксимации (отмечены + и -) могут быть скомпенсированы за счет выбора оптимальных узлов.

Рис.а – метод трапеций

Рис.в – метод Гаусса



Квадратурная формула Гаусса

Расчет интеграла в данном методе осуществляется в два этапа:

1. интеграл с пределами интегрирования [a,b] сводится к интегралу с пределами [-1,1]
2. полученный интеграл рассчитывается как сумма значений подынтегральной функции в специальных точках, умноженных на весовые коэффициенты.

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i)A_i$$

$$x_i \in [a, b]$$

A_i – квадратурные (или весовые) коэффициенты, t_i – специальные узлы функции $f(x)$, корни многочлена Лежандра.

Квадратурная формула Гаусса

Для изменения пределов интегрирования делается замена переменных:

$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \qquad \boldsymbol{x_i} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \qquad \boldsymbol{t_i} \in [-\mathbf{1}, \mathbf{1}],$

Получаем квадратуру Гаусса-Лежандра для произвольного интервала интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)A_i$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$

$\boldsymbol{t_i}$ и $\boldsymbol{A_i}$ уже вычислены и сведены в таблицу

Квадратурная формула Гаусса

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1;2	±0.57735027	1
3	1;3	±0.77459667	0.55555556
	2	0	0.88888889
4	1;4	±0.86113631	0.34785484
	2;3	±0.33998104	0.65214516
5	1;5	±0.90617985	0.23692688
	2;4	±0.53846931	0.47862868
	3	0	0.56888889

6	1;6	±0.93246951	0.17132450
	2;5	±0.66120939	0.36076158
	3;4	±0.23861919	0.46791394
7	1;7	±0.94910791	0.12948496
	2;6	±0.74153119	0.27970540
	3;5	±0.40584515	0.38183006
	4	0	0.41795918
8	1;8	±0.96028986	0.10122854
	2;7	±0.79666648	0.22238104
	3;6	±0.52553242	0.31370664
	4;5	±0.183434464	0.36268378

Квадратурная формула Гаусса

Пример: вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при n=3 и n=4)

$$\int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right| = 2,6666667$$

Замена переменной: $x = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}t = 1 + t$

$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{3} f(x_i)A_i = \frac{b-a}{2}[A_1(1+t_1)^2) + A_2(1+t_2)^2 + A_3(1+t_3)^2]$=0,55555556(1-0,77459667)^2+ 0,55555556(1+0,77459667)^2+0,88888889(1-0)^2=2,6666668

$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{4} f(x_i)A_i = \frac{b-a}{2}[A_1(1+t_1)^2) + A_2(1+t_2)^2 + A_3(1+t_3)^2 + A_4(1+t_4)^2]$=0,34785484(1-0,86113631)^2+ 0,34785484(1+0,86113631)^2+0,65214516(1-0,33998104)^2+0,65214516(1+0,33998104)^2=2,66666665