

# La formule d'Itô

Lucas Lejeune, BA3-MATH-I

28 novembre 2023

- ➊ Option Call
- ➋ Mouvement brownien et processus stochastique
- ➌ Modèle de Black-Scholes
- ➍ Retour au problème
- ➎ Intégrale d'Itô
- ➏ Formule d'Itô
- ➐ Résolution de l'équation de Black-Scholes

# Option Call

# Option Call

## Definition

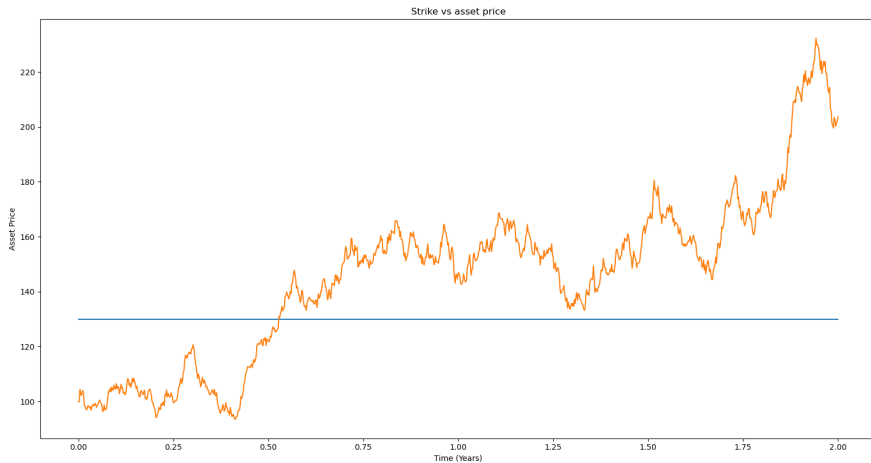
Une **option call** est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) d'acheter une quantité donnée d'un actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance (ce prix est appelé le **strike**)  
(source : wikipedia.org)

## Definition

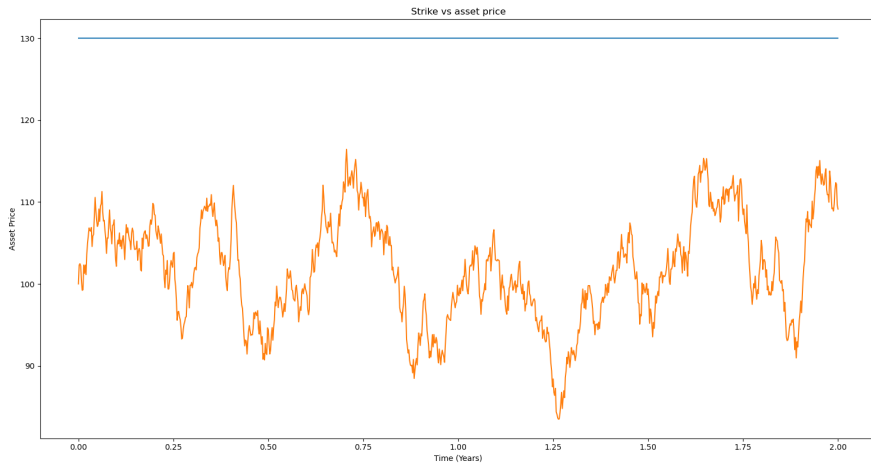
Une **option call** est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) d'acheter une quantité donnée d'un actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance (ce prix est appelé le **strike**)  
(source : wikipedia.org)

- On ne s'intéressera ici qu'aux options ayant une date d'échéance donnée, et où il n'est possible de les utiliser que le jour de la date d'échéance.
- Dans la suite, on notera  $K$  le **strike**.
- Enfin, on définit le **payoff** comme étant le rendement intrinsèque d'une option
- Une option call ne donne pas l'obligation à l'acheteur de faire valoir son option.

# Option Call



# Option Call



# Option Call

## Formule du pricing

### Théorème fondamental du Pricing

Si  $X_T$  représente le prix de l'actif sous-jacent au temps  $T$ , et si  $r$  représente le taux d'intérêt, on voit bien que la valeur de l'option call sera de

$$\underbrace{e^{-Tr}}_{\text{fact. d'actualisation}} \mathbb{E} [\max(X_T - K; 0)] \quad (1)$$



# Option Call

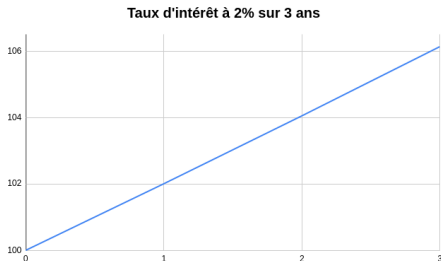
## Actualisation

Mettons nous dans une situation où j'achète une option effective dans 3 ans à 100€ et imaginons que l'on ne prenne pas en compte l'actualisation et donnons nous un taux d'intérêt à 2% par an

# Option Call

## Actualisation

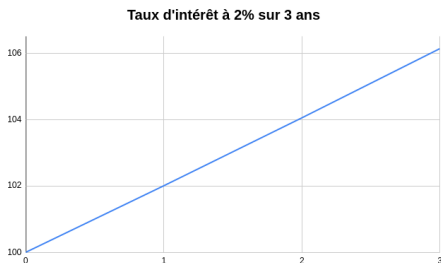
Mettons nous dans une situation où j'achète une option effective dans 3 ans à 100€ et imaginons que l'on ne prenne pas en compte l'actualisation et donnons nous un taux d'intérêt à 2% par an



# Option Call

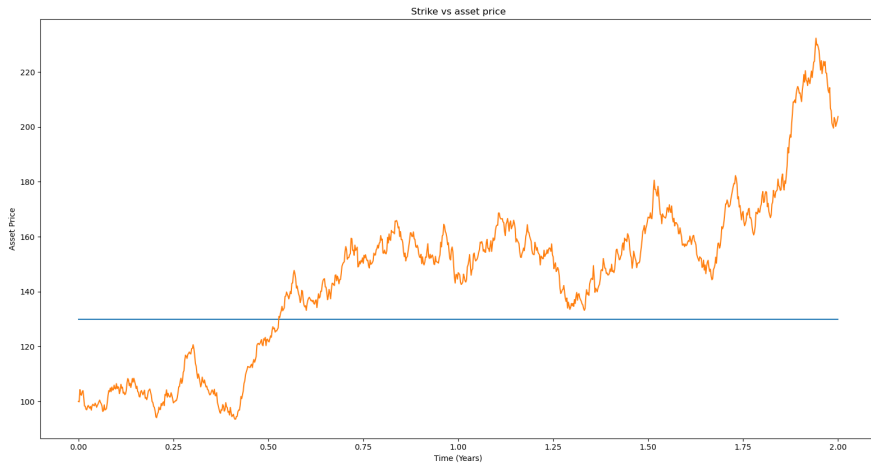
## Actualisation

Mettons nous dans une situation où j'achète une option effective dans 3 ans à 100€ et imaginons que l'on ne prenne pas en compte l'actualisation et donnons nous un taux d'intérêt à 2% par an



La banque gagne donc environ 6€ sur mon achat

# Option Call



# Processus stochastiques et mouvement brownien

## Définition

Soit  $T \subseteq \mathbb{R}^+$  et soit  $\mathcal{F}$  une  $\sigma$ -algèbre,  $\mathbb{F}$  est une **filtration** de  $\mathcal{F}$  si  $\mathbb{F}$  est une famille de  $\sigma$ -algèbres de la forme  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  telles que

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \quad \forall s \leq t$$

## Définition

On appelle processus stochastique adapté la donnée

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P}) \quad (2)$$

où  $\Omega$  est un ensemble,  $\mathcal{F}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$ ,  $\mathbb{P}$  est une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $\mathbb{F}$  est une filtration et  $T \subset \mathbb{R}^+$  représente le temps. Enfin,  $(X_t)_{t \in T}$  est une famille de variables aléatoires indexées par  $T$ .

## Définition

Un processus  $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  à valeurs réelles est un mouvement brownien si

$$B_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s \quad (3a)$$

$$\forall s \in [0, t], \quad B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \quad (3b)$$

$$\forall s \in [0, t], \quad B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad (3c)$$

Le mouvement brownien est donc un type particulier de *marche aléatoire*.

# Modèle de Black-Scholes



# Modèle de Black-Scholes

## Mouvement Brownien Arithmétique

### Définition

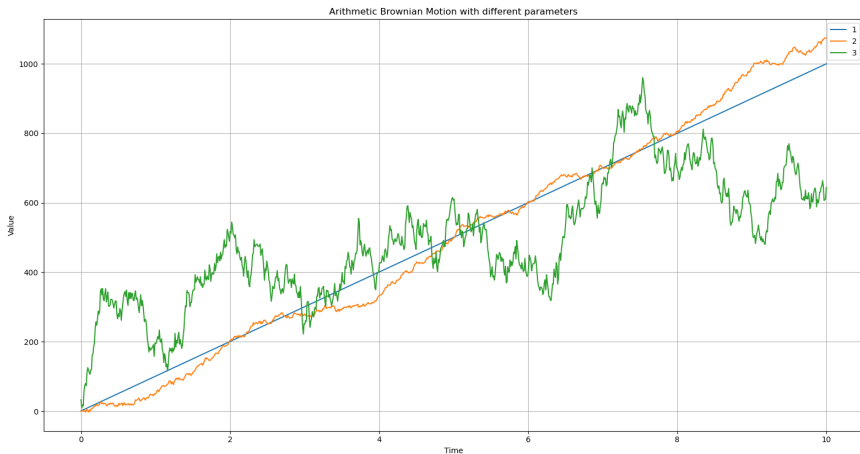
Un processus brownien arithmétique est un processus de la forme

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t \quad (4)$$

où  $\mu$  représente le drift et  $\sigma$  représente la variance.

# Modèle de Black-Scholes

Influence des différents paramètres dans le mouvement brownien arithmétique



## Définition

On va choisir de modéliser le prix d'un actif sur le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour  $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = M \end{cases} \quad (5)$$

est l'équation de Black-Scholes.

## Définition

On va choisir de modéliser le prix d'un actif sur le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour  $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = M \end{cases} \quad (5)$$

est l'équation de Black-Scholes.

Le but va donc être de comprendre ce processus de manière plus globale, il nous faut donc une intégrale de la forme

$$X_T - X_0 = \int_0^T \mu X_t dt + \int_0^T \sigma X_t dB_t$$

## Définition

On va choisir de modéliser le prix d'un actif sur le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour  $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = M \end{cases} \quad (5)$$

est l'équation de Black-Scholes.

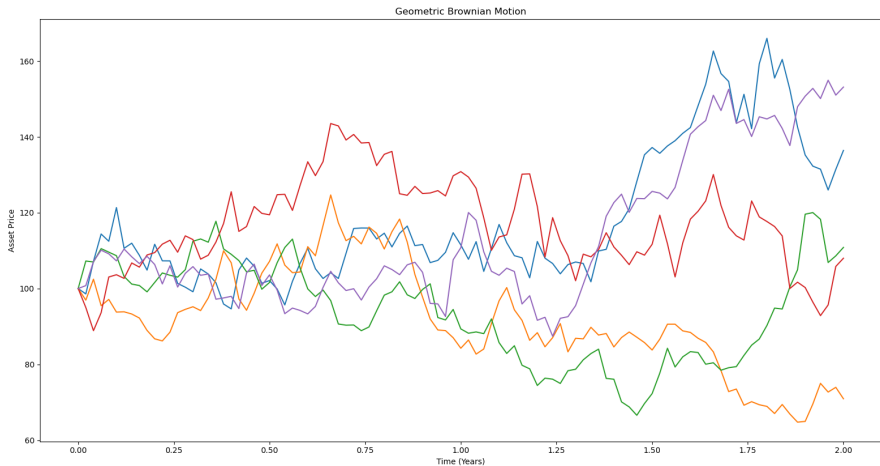
Le but va donc être de comprendre ce processus de manière plus globale, il nous faut donc une intégrale de la forme

$$X_T - X_0 = \int_0^T \mu X_t dt + \int_0^T \sigma X_t dB_t$$

Le but va donc maintenant être de définir cette intégrale

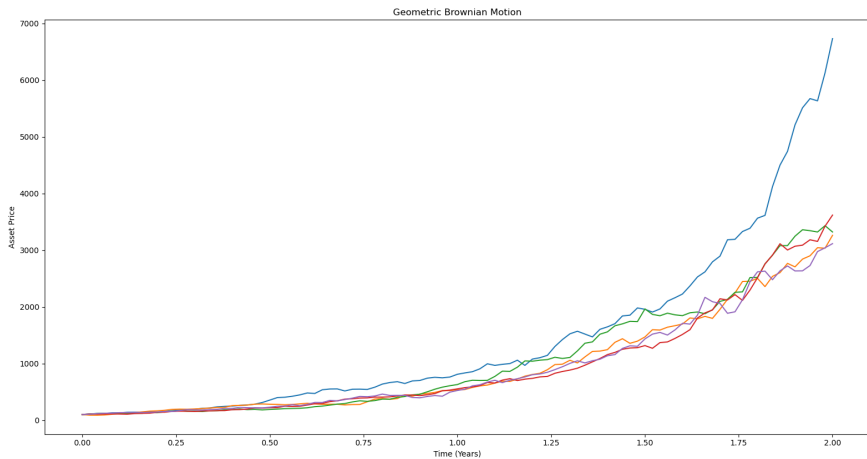
# Représentation de cinq $X_t$ résolvant Black-Scholes

$\mu = 0.1, \sigma = 0.3$



# Représentation de cinq $X_t$ résolvant Black-Scholes

$$\mu = 2, \sigma = 0.3$$



# Construction de l'intégrale d'Itô



# Construction de l'intégrale d'Itô

## Définition

Soit  $T \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $\mathcal{B}$  les boréliens de  $[0; T]$  et  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  une filtration naturelle de  $B_T$ . On définit  $\mathcal{H}^2$  comme étant l'espace des fonctions mesurables sur  $F_T \otimes \mathcal{B}$ , telles que pour tout  $t \in [0; T]$ ,  $\omega \mapsto f(\omega, t)$  est mesurable sur  $\mathcal{F}_t$  et respectant la condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T f^2(\omega, t) dt \right] < \infty$$

## Propriétés de base de l'intégrale

Notre intégrale devrait être définie sur  $\mathcal{H}^2$ , celle-ci devrait être un opérateur linéaire, de plus si  $f(\omega, t) = \mathbb{1}_{[a; b]}$  on aimerait

$$I(f)(\omega) = \int_a^b f(\omega, t) dB_t = B_b - B_a$$

# Construction de l'intégrale d'Itô

Définition de l'intégrale d'Itô sur  $\mathcal{H}_0^2$

## Définition

On définit maintenant  $\mathcal{H}_0^2$  comme le sous-ensemble des fonctions dans  $\mathcal{H}^2$  telles que celles-ci soient de la forme

$$\forall \omega \in [0; T], \quad f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i; t_{i+1}]}]$$

# Construction de l'intégrale d'Itô

Définition de l'intégrale d'Itô sur  $\mathcal{H}_0^2$

## Définition

On définit maintenant  $\mathcal{H}_0^2$  comme le sous-ensemble des fonctions dans  $\mathcal{H}^2$  telles que celles-ci soient de la forme

$$\forall \omega \in [0; T], \quad f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i; t_{i+1}]}$$

## Définition

Soit  $f \in \mathcal{H}_0^2$  on va définir l'intégrale d'Itô comme étant

$$\forall \omega \in [0; T], \quad I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

# Construction de l'intégrale d'Itô

## Lemme d'Isométrie d'Itô

### Lemme d'isométrie d'Itô

Soit  $f \in \mathcal{H}_0^2$ , alors on a

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \|f\|_{L^2(dP \times dt)}$$

# Construction de l'intégrale d'Itô

## Preuve du lemme d'isométrie

### Preuve

On calcule d'abord le membre de droite de l'équation, remarquons donc que

$$f^2(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \mathbb{1}_{(t_i; t_{i+1}]}$$

et donc

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T f^2(\omega, t) dt \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} [a_i^2] (t_{i+1} - t_i)$$

Pour le membre de gauche de l'équation

$$\mathbb{E} [I(f)^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E [a_i^2] (t_{i+1} - t_i)$$

Ceci conclut la preuve

# Lemme d'Itô

# Lemme d'Itô

Cas simple

## Lemme d'Itô

Avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \quad (6)$$

# Lemme d'Itô

## Cas simple

### Lemme d'Itô

Avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \quad (6)$$

On note la similarité entre cette équation et le théorème fondamental de l'analyse, à ceci près qu'une intégrale de la dérivée seconde de  $f$  s'invite dans l'équation

### Lemme d'Itô, avec plusieurs variables

Soit  $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ , on a

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds \quad (7)$$



## Lemme d'Itô (notation)

Soit  $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ , et  $X_t = f(t, B_t)$  un processus stochastique, on écrira

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)dt \quad (8)$$

# Lemme d'Itô

## Box-Calculus

### Box-Calculus

| $\cdot$ | $dt$ | $dB_t$ |
|---------|------|--------|
| $dt$    | 0    | 0      |
| $dB_t$  | 0    | $dt$   |

# Lemme d'Itô

## Application à Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique de Black-Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_s \quad (9)$$

# Lemme d'Itô

## Application à Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique de Black-Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (9)$$

et on s'intéresse à  $d \ln X_t$  en y appliquant la formule d'Itô

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \frac{1}{2X_t^2} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t)$$

# Lemme d'Itô

## Application à Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique de Black-Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (9)$$

et on s'intéresse à  $d \ln X_t$  en y appliquant la formule d'Itô

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \frac{1}{2X_t^2} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t)$$

ensuite, en appliquant le Box-Calculus, on voit qu'il est possible de simplifier cette dernière expression

$$d \ln X_t = \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt \quad (10)$$

# Lemme d'Itô

## Application à Black-Scholes (suite)

$$d \ln X_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

# Lemme d'Itô

## Application à Black-Scholes (suite)

$$d \ln X_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

On intègre ensuite de chaque côté de l'équation avec l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T d \ln (X_t) = \int_0^T \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

# Lemme d'Itô

## Application à Black-Scholes (suite)

$$d \ln X_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

On intègre ensuite de chaque côté de l'équation avec l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T d \ln (X_t) = \int_0^T \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

$$\ln \left( \frac{X_T}{X_0} \right) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T$$



# Lemme d'Itô

## Application à Black-Scholes (suite)

$$d \ln X_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

On intègre ensuite de chaque côté de l'équation avec l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T d \ln (X_t) = \int_0^T \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

$$\ln \left( \frac{X_T}{X_0} \right) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T$$

$$X_T = \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T \right) \quad (11)$$

# Lemme d'Itô

## Déduction de la formule de Black-Scholes

### Définition

Soit  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , et soient  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , alors la variable définie par  $X = e^{\mu + \sigma Z}$  suit une loi log-normale.

On reprend donc 11 pour voir que  $X_T \sim \log \mathcal{N} \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T; \sigma \sqrt{T} \right)$

# Lemme d'Itô

## Déduction de la formule de Black-Scholes

### Définition

Soit  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , et soient  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , alors la variable définie par  $X = e^{\mu + \sigma Z}$  suit une loi log-normale.

On reprend donc 11 pour voir que  $X_T \sim \log \mathcal{N} \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T; \sigma \sqrt{T} \right)$   
Tout ce qu'il reste à faire est alors de calculer  $\mathbb{E}[\max(X_t - K; 0)e^{-tr}]$  où  $X_t$  suit une log-normale.

# Formule de Black-Scholes

Nos calculs précédents nous donnent finalement la formule de Black-Scholes telle qu'étudiée en actuariat

## Théorème

Dans le modèle de Black-Scholes, la valeur d'une option call est donné par la formule

$$X_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \quad (12)$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{X_0}{K} \right) + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

# Merci !

Geometric Brownian Motion

