La formule d'Itô

Lucas Lejeune, BA3-MATH-I

13 décembre 2023

Table des matières

Option Call

Option Call

Mise en situation

Option Call

Definition

Une **option call** est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) d'acheter une quantité donnée d'un actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance (ce prix est appelé le **strike**) (source : wikipedia.org)

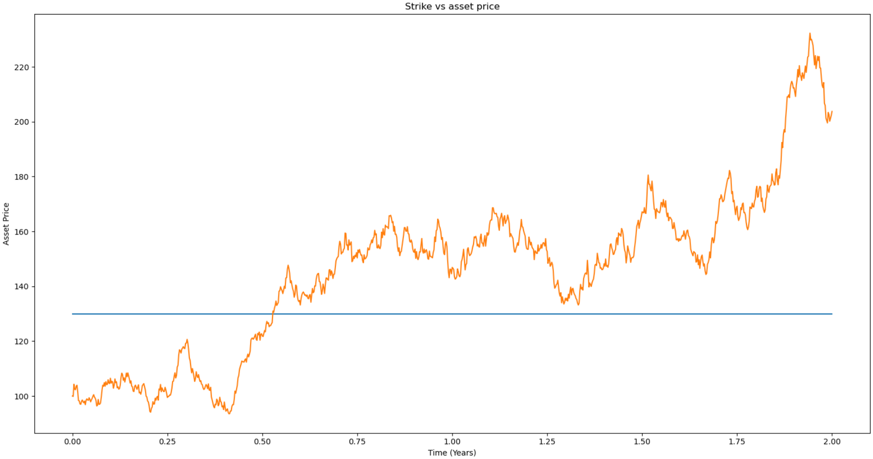
Option Call

Definition

Une **option call** est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) d'acheter une quantité donnée d'un actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance (ce prix est appelé le **strike**) (source : wikipedia.org)

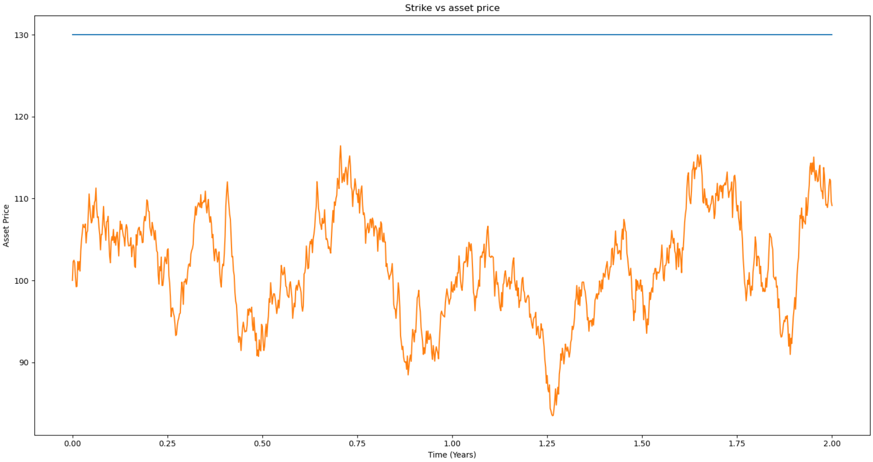
- L'option n'est utilisable que le jour de sa date d'expiration
- On note K le **strike**.
- Le **payoff** est le rendement intrinsèque d'une option
- Une option call ne donne pas l'obligation à l'acheteur de faire valoir son option.

Option Call



Strike vs asset price
Asset Price
Time (Years)
220
200
180
160
140
120
100
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Option Call

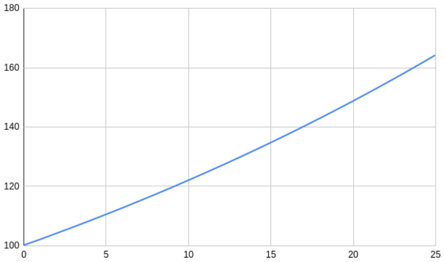

Strike vs asset price
Asset Price
Time (Years)
130
120
110
100
90
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Quelle serait la valeur de l'option ?

Option Call
Actualisation

Mettons nous dans une situation où j'achète une option effective dans 25 ans à 100€ et imaginons que l'on ne prenne pas en compte l'actualisation et donnons nous un taux d'intérêt à 2% par an

Mettons nous dans une situation où j'achète une option effective dans 25 ans à 100€ et imaginons que l'on ne prenne pas en compte l'actualisation et donnons nous un taux d'intêrêt à 2% par an



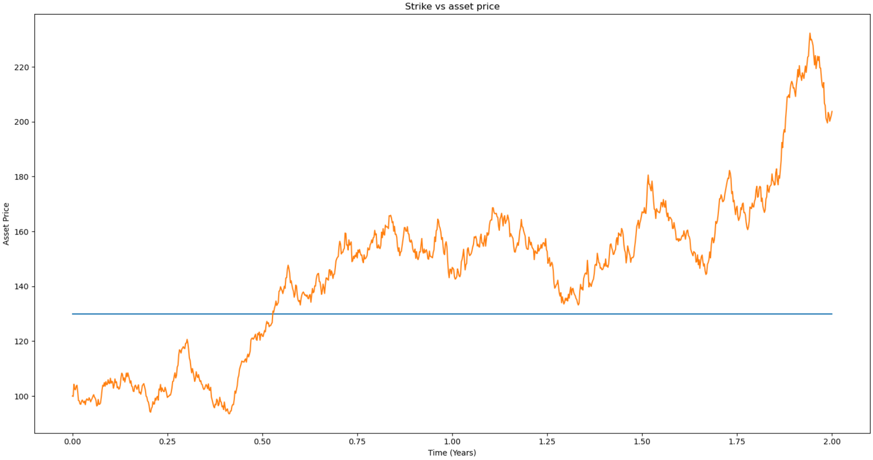
La banque gagne donc environ 64€ sur mon achat

Théorème fondamental du Pricing

Si r représente le taux d'intérêt et T représente le temps, la valeur de l'obligation sera de

$$\underbrace{e^{-Tr}}_{\text{fact. d'actualisation}} \quad \mathbb{E}\left[\text{Payoff}\right] \tag{1}$$

Option Call


Strike vs asset price
Asset Price
100
120
140
160
180
200
220
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Time (Years)

Théorème fondamental du Pricing appliqué aux options call

Si X_T représente le prix de l'actif sous-jacent au temps T, et si r représente le taux d'intérêt, la valeur de l'option sera

$$\underbrace{e^{-Tr}}_{\text{fact. d'actualisation}} \mathbb{E}\left[\max\left(X_T - K; 0\right)\right] \tag{2}$$

Processus stochastiques et mouvement brownien

Processus Stochastique

Définition

Soit $T \subseteq \mathbb{R}^+$ et soit $\mathcal{F}$ une σ-algèbre, $\mathbb{F}$ est une **filtration** de $\mathcal{F}$ si $\mathbb{F}$ est une famille de σ-algèbres de la forme $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ telles que

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \qquad \forall s \leq t$$

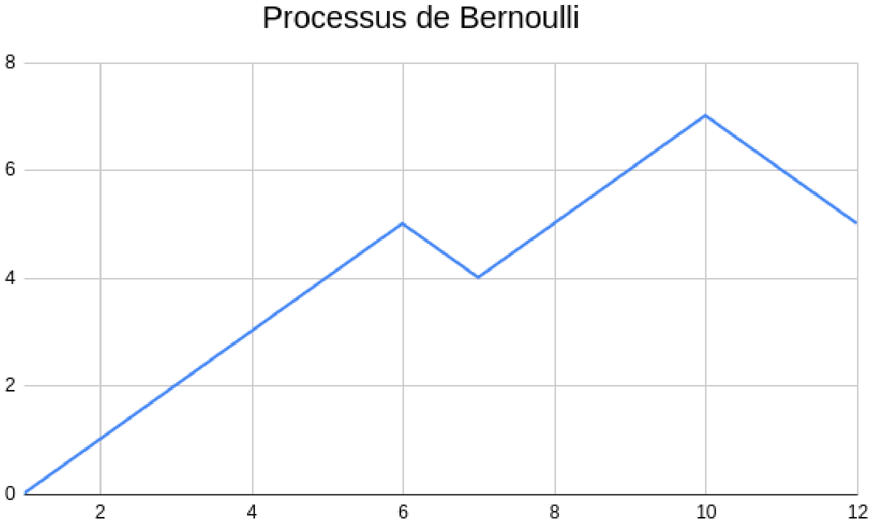
Définition

On appelle processus stochastique adapté la donnée

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P}) \tag{3}$$

où Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre sur Ω, $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathbb{F}$ est une filtration et $T \subset \mathbb{R}^+$ représente le temps. Enfin, $(X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires indexées par T.

Exemple de processus stochastique



Mouvement Brownien

Définition

Un processus $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (B_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est un mouvement brownien si

$$B_0 = 0 \qquad \mathbb{P} - p.s \tag{4a}$$

$$\forall s \in [0, t], \qquad B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \tag{4b}$$

$$\forall s \in [0, t], \qquad B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \tag{4c}$$

Le mouvement brownien est donc un type particulier de *marche aléatoire*.

Modèle de Black-Scholes

Définition

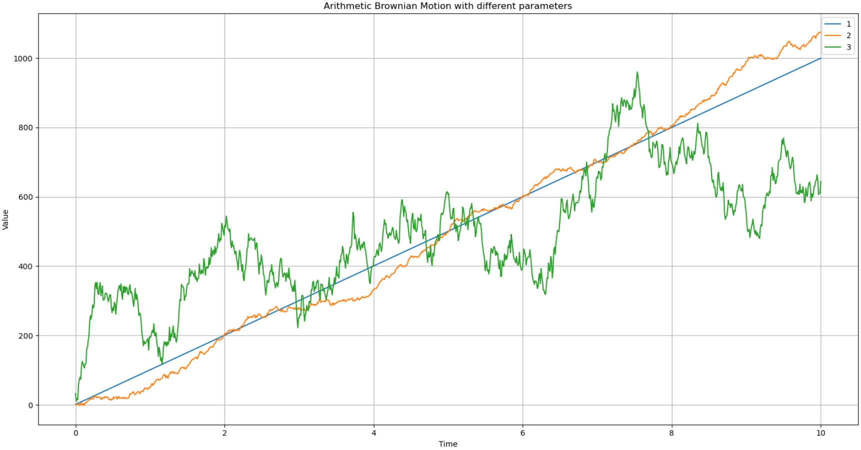
Un processus brownien arithmétique est un processus de la forme

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t \tag{5}$$

où μ représente le drift et σ représente la volatilitéé.

Modèle de Black-Scholes

Influence des différents paramètres dans le mouvement brownien arithmétique



Modèle de Black-Scholes

Définition

On va choisir de modéliser le prix d'un actif sur le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = M \end{cases} \tag{6}$$

est l'équation du prix d'un actif dans le modèle de Black-Scholes.

Modèle de Black-Scholes

Définition

On va choisir de modéliser le prix d'un actif sur le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = M \end{cases} \tag{6}$$

est l'équation du prix d'un actif dans le modèle de Black-Scholes.

Le but va donc être de comprendre ce processus de manière plus globale, il nous faut donc une intégrale de la forme

$$X_T - X_0 = \int_0^T \mu X_t dt + \int_0^T \sigma X_t dB_t$$

Modèle de Black-Scholes

Définition

On va choisir de modéliser le prix d'un actif sur le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = M \end{cases} \tag{6}$$

est l'équation du prix d'un actif dans le modèle de Black-Scholes.

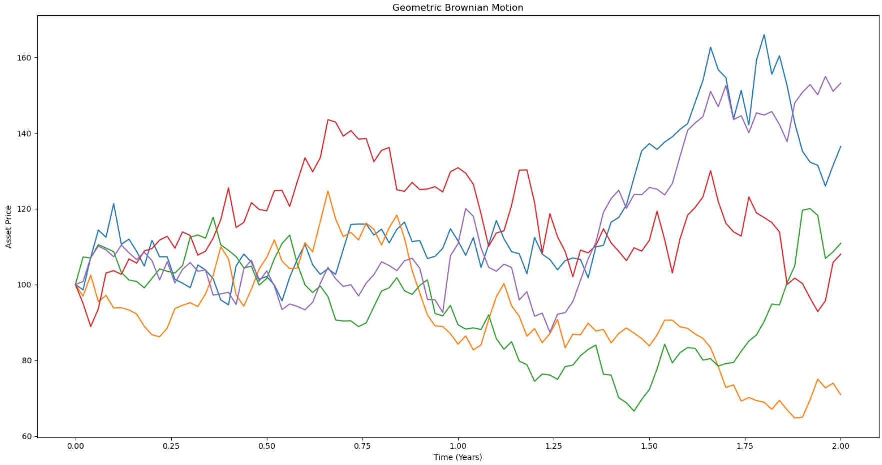
Le but va donc être de comprendre ce processus de manière plus globale, il nous faut donc une intégrale de la forme

$$X_T - X_0 = \int_0^T \mu X_t dt + \int_0^T \sigma X_t dB_t$$

Le but va donc maintenant être de définir cette intégrale

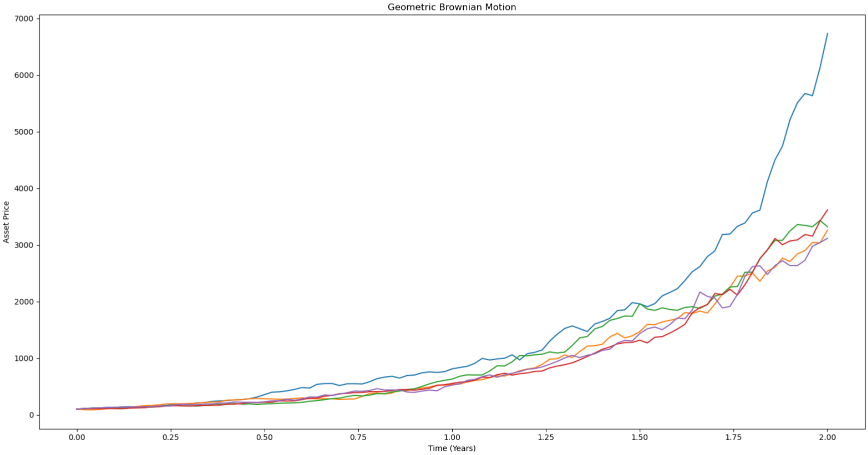
Représentation de cinq X_t

$\mu = 0.1, \sigma = 0.3$



Représentation de cinq X_t

$\mu = 2, \sigma = 0.3$



Construction de l'intégrale d'Itô

Construction de l'intégrale d'Itô

Définition

Soit $T \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{B}$ les boréliens de $[0; T]$, et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration du mouvement brownien. On définit $\mathcal{H}_0^2$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ telles que celles-ci soient de la forme

$$\forall \omega \in [0; T], \qquad f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i; t_{i+1}]}$$

avec $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$, $\mathbb{E}\left[a_i^2\right] < \infty$ et $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$

Propriétés de base de l'intégrale

Notre intégrale devrait être définie sur $\mathcal{H}_0^2$, celle-ci devrait être un opérateur linéaire, de plus si $f(\omega, t) = \mathbb{1}_{]a;b]}$ on aimerait

$$I(f)(\omega) = \int_a^b f(\omega, t) dB_t = B_b - B_a$$

Propriétés de base de l'intégrale

Notre intégrale devrait être définie sur $\mathcal{H}_0^2$, celle-ci devrait être un opérateur linéaire, de plus si $f(\omega, t) = \mathbb{1}_{]a;b]}$ on aimerait

$$I(f)(\omega) = \int_a^b f(\omega, t) dB_t = B_b - B_a$$

Définition

Soit $f \in \mathcal{H}_0^2$ on va définir l'intégrale d'Itô comme étant

$$\forall \omega \in [0; T], \qquad I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

Lemme d'isométrie d'Itô

Soit $f \in \mathcal{H}_0^2$, alors on a

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \|f\|_{L^2(dP \times dt)}$$

On calcule d'abord le membre de droite de l'équation, remarquons donc que

$$f^2(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \mathbb{1}_{(t_i;t_{i+1}]}$$

On calcule d'abord le membre de droite de l'équation, remarquons donc que

$$f^2(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \mathbb{1}_{(t_i;t_{i+1}]}$$

et donc

$$\|f\|_{L^2(dP\times dt)} = \mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega, t)dt\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2\right](t_{i+1} - t_i)$$

Suite preuve

On calcule maintenant le membre de gauche de cette équation

Suite preuve

On calcule maintenant le membre de gauche de cette équation

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \mathbb{E}\left[I(f)^2\right]$$

Suite preuve

On calcule maintenant le membre de gauche de cette équation

$$\begin{aligned}\|I(f)\|_{L^2(dP)} &= \mathbb{E}\left[I(f)^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right]\end{aligned}$$

Suite preuve

On calcule maintenant le membre de gauche de cette équation

$$\begin{aligned}
\|I(f)\|_{L^2(dP)} &= \mathbb{E}\left[I(f)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2 \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2\right] (t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}$$

Suite preuve

On calcule maintenant le membre de gauche de cette équation

$$
\begin{aligned}
\|I(f)\|_{L^2(dP)} &= \mathbb{E}\left[I(f)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2\right](t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}
$$

On conclut la preuve en remarquant que $\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \|f\|_{L^2(dP\times dt)}$.

Construction de l'intégrale d'Itô

Définition

Soit $T \in \mathbb{R}_0^+$, $\mathcal{B}$ les boréliens de $[0; T]$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ une filtration naturelle de B_T. On définit $\mathcal{H}^2$ comme étant l'espace des fonctions mesurables sur $F_T \otimes \mathcal{B}$, telles que pour tout $t \in [0; T]\,, \omega \mapsto f(\omega, t)$ est mesurable sur $\mathcal{F}_t$ et respectant la condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega, t)dt\right] < \infty$$

Construction de l'intégrale d'Itô

Définition

Soit $T \in \mathbb{R}_0^+$, $\mathcal{B}$ les boréliens de $[0; T]$ et $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ une filtration naturelle de B_T. On définit $\mathcal{H}^2$ comme étant l'espace des fonctions mesurables sur $F_T \otimes \mathcal{B}$, telles que pour tout $t \in [0; T]$, $\omega \mapsto f(\omega, t)$ est mesurable sur $\mathcal{F}_t$ et respectant la condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega, t)dt\right] < \infty$$

Théorème

$\mathcal{H}_0^2$ est dense dans $\mathcal{H}^2$, et on peut donc prolonger la définition de I par continuité sur tout $\mathcal{H}^2$.

Lemme d'Itô

Lemme d'Itô

Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_S)dB_S + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds \tag{7}$$

Lemme d'Itô
Application

Calculons $\int_0^t B_s dB_s$.

Calculons $\int_0^t B_s dB_s$. Posons

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{2}$$

Calculons $\int_0^t B_s dB_s$. Posons

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{2}$$

appliquer le lemme d'Itô à f donne pour $t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^t f'(B_s)dB_s = f(0) - f(B_t) + \int_0^t f''(B_s)ds \tag{8}$$

$$= -\frac{B_t^2}{2} + t \tag{9}$$

Calculons $\int_0^t B_s dB_s$. Posons

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{2}$$

appliquer le lemme d'Itô à f donne pour $t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^t f'(B_s) dB_s = f(0) - f(B_t) + \int_0^t f''(B_s) ds \tag{8}$$

$$= -\frac{B_t^2}{2} + t \tag{9}$$

Et donc

$$\int_0^t B_s dB_s = -\frac{B_t^2}{2} + t$$

Lemme d'Itô, avec plusieurs variables

Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, on a

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds \tag{10}$$

Lemme d'Itô, avec plusieurs variables

Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, on a

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds \tag{10}$$

Lemme d'Itô (notation)

Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, et $X_t = f(t, B_t)$ un processus stochastique, on écrira

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t) dt \tag{11}$$

Résolution du problème de départ

Résolution du problème de Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique modélisant le prix des actifs

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{12}$$

Résolution du problème de Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique modélisant le prix des actifs

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{12}$$

et on s'intéresse à $d \ln X_t$ en y appliquant la formule d'Itô

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} dX_t \cdot dX_t$$

Résolution du problème de Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique modélisant le prix des actifs

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{12}$$

et on s'intéresse à $d \ln X_t$ en y appliquant la formule d'Itô

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} dX_t \cdot dX_t$$

En développant dX_t on trouve

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \frac{1}{2X_t^2} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t)$$

Box-Calculus

$\cdot$	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Résolution du problème de départ

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t}\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right) - \frac{1}{2X_t^2}\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right)\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right)$$

Résolution du problème de départ

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t}\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right) - \frac{1}{2X_t^2}\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right)\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right)$$

En appliquant le Box-Calculus, on simplifie notre dernière expression

$$d \ln X_t = \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt$$

$$d \ln X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t$$

Résolution du problème de départ

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t}\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right) - \frac{1}{2X_t^2}\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right)\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right)$$

En appliquant le Box-Calculus, on simplifie notre dernière expression

$$d \ln X_t = \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt$$

$$d \ln X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t$$

On intègre ensuite de chaque côté de l'équation avec l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T d \ln\left(X_t\right) = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

Résolution du problème de départ

$$d\ln X_t = \frac{1}{X_t}\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right) - \frac{1}{2X_t^2}\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right)\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\right)$$

En appliquant le Box-Calculus, on simplifie notre dernière expression

$$d\ln X_t = \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt$$

$$d\ln X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t$$

On intègre ensuite de chaque côté de l'équation avec l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T d\ln\left(X_t\right) = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

$$\ln\left(\frac{X_T}{X_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T$$

Déduction de la formule de Black-Scholes

$$X_T = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T\right) \tag{13}$$

Déduction de la formule de Black-Scholes

$$X_T = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B_T\right) \tag{13}$$

Définition

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, et soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$, alors la variable définie par $X = e^{\mu+\sigma Z}$ suit une loi log-normale.

On reprend donc 13 pour voir que
$X_T \sim \log \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln X_0; \sigma\sqrt{T}\right)$

Déduction de la formule de Black-Scholes

$$X_T = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T\right) \tag{13}$$

Définition

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, et soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$, alors la variable définie par $X = e^{\mu + \sigma Z}$ suit une loi log-normale.

On reprend donc 13 pour voir que
$X_T \sim \log \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \ln X_0 ; \sigma\sqrt{T}\right)$
Tout ce qu'il reste à faire est alors de calculer $\mathbb{E}\left[\max(X_t - K; 0)e^{-tr}\right]$ où X_t suit une log-normale.

Formule de Black-Scholes

Nos calculs précédents nous donnent finalement la formule de Black-Scholes telle qu'étudiée en actuariat

Théorème

Dans le modèle de Black-Scholes, la valeur d'une option call est donné par la formule

$$X_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \tag{14}$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{X_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right)$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Application à la situation de départ

On analyse le marché, et on trouve $\sigma = 0.3$ ainsi que $\mu = 0$, de plus le taux d'intérêt sans risque est à $r = 0.02$ appliquer Black-Scholes nous donne finalement que l'option a une valeur de 8.91€

Limites du modèle

Limites du modèle

1. Le modèle est trop théorique

Limites du modèle

1. Le modèle est trop théorique
2. Sous-estimation des événements extrêmes

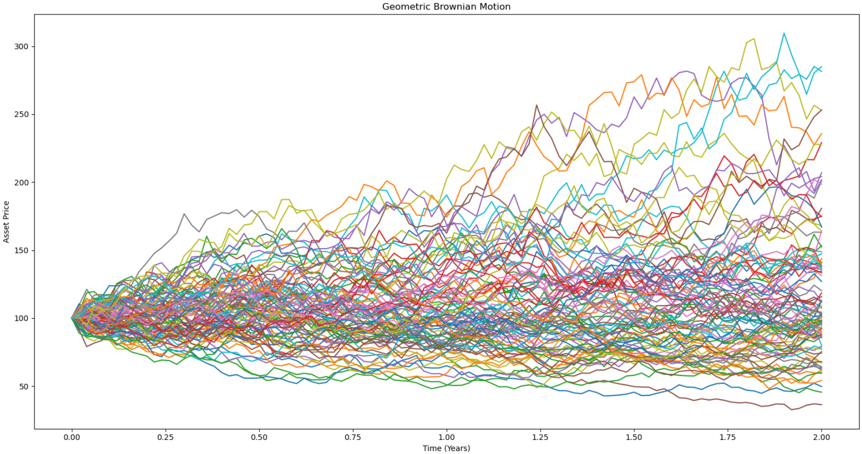
Limites du modèle

1. Le modèle est trop théorique
2. Sous-estimation des événements extrêmes
3. Beaucoup de suppositions non-vérifiées empriquement afin de rendre le modèle simple

Limites du modèle

1. Le modèle est trop théorique
2. Sous-estimation des événements extrêmes
3. Beaucoup de suppositions non-vérifiées empriquement afin de rendre le modèle simple
4. etc.

Merci !



Geometric Brownian Motion
Asset Price
Time (Years)
300
250
200
150
100
50
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00