

La formule d'Itô

Lucas Lejeune, BA3-MATH-I

27 novembre 2023

- ➊ Option Call
- ➋ Mouvement brownien et processus stochastique
- ➌ Modèle de Black-Scholes
- ➍ Retour au problème
- ➎ Intégrale d'Itô
- ➏ Formule d'Itô
- ➐ Résolution de l'équation de Black-Scholes

Option Call

Option Call

Definition

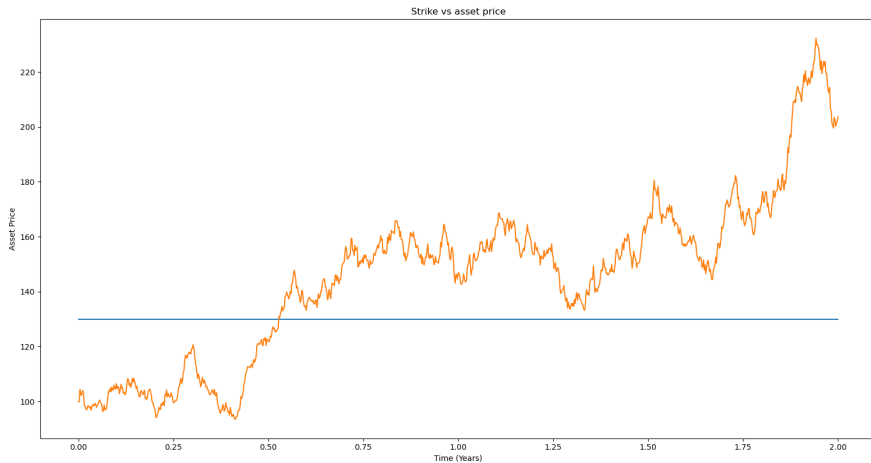
Une **option call** est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) d'acheter une quantité donnée d'un actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance (ce prix est appelé le **strike**)
(source : wikipedia.org)

Definition

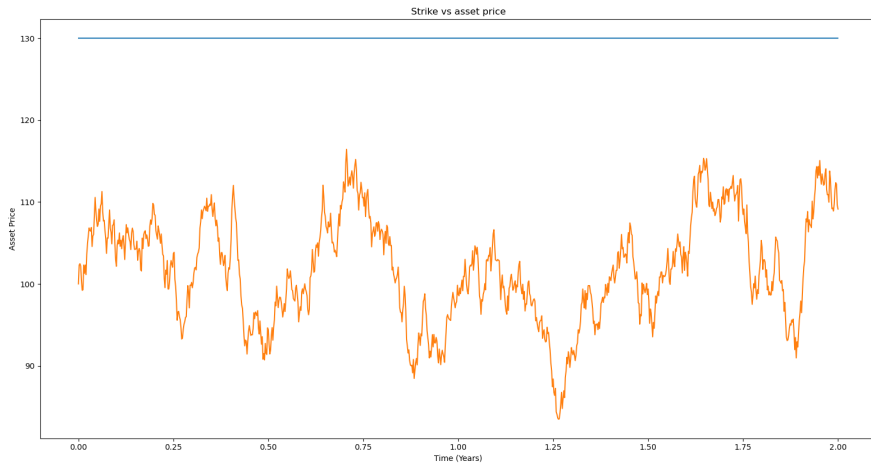
Une **option call** est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) d'acheter une quantité donnée d'un actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance (ce prix est appelé le **strike**)
(source : wikipedia.org)

- On ne s'intéressera ici qu'aux options ayant une date d'échéance donnée, et où il n'est possible de les utiliser que le jour de la date d'échéance.
- Dans la suite, on notera K le **strike**.
- Enfin, on définit le **payoff** comme étant le rendement intrinsèque d'une option
- Une option call ne donne pas l'obligation à l'acheteur de faire valoir son option.

Option Call



Option Call



Option Call

Formule du pricing

Théorème fondamental du Pricing

Si X_T représente le prix de l'actif sous-jacent au temps T , et si r représente le taux d'intérêt, on voit bien que la valeur de l'option call sera de

$$\underbrace{e^{-Tr}}_{\text{fact. d'actualisation}} \mathbb{E} [\max(X_T - K; 0)] \quad (1)$$

Option Call

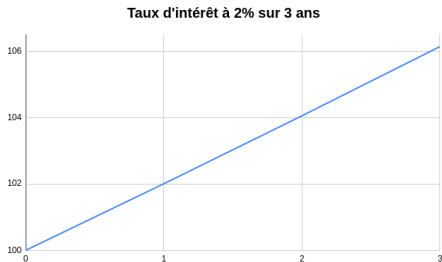
Actualisation

Mettons nous dans une situation où j'achète une option effective dans 3 ans à 100€ et imaginons que l'on ne prenne pas en compte l'actualisation et donnons nous un taux d'intérêt à 2% par an

Option Call

Actualisation

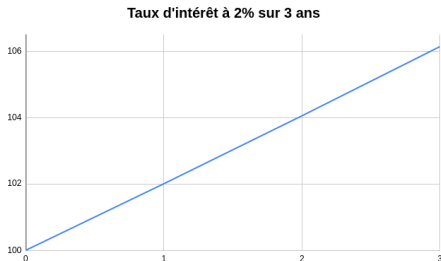
Mettons nous dans une situation où j'achète une option effective dans 3 ans à 100€ et imaginons que l'on ne prenne pas en compte l'actualisation et donnons nous un taux d'intérêt à 2% par an



Option Call

Actualisation

Mettons nous dans une situation où j'achète une option effective dans 3 ans à 100€ et imaginons que l'on ne prenne pas en compte l'actualisation et donnons nous un taux d'intérêt à 2% par an



La banque gagne donc environ 6€ sur mon achat

Processus stochastiques et mouvement brownien

Définition

On appelle processus stochastique la donnée

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P}) \quad (2)$$

où Ω est un ensemble, \mathcal{F} est une σ -algèbre sur Ω , \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) et $T \subset \mathbb{R}^+$ (représente le temps). Enfin, $(X_t)_{t \in T}$ est une famille de variable aléatoire indexée par T .

Définition

Un processus $B = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est un mouvement brownien si

$$B_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s \quad (3a)$$

$$\forall s \in [0, t], \quad B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \quad (3b)$$

$$\forall s \in [0, t], \quad B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad (3c)$$

Le mouvement brownien est donc un type particulier de *marche aléatoire*.

Le modèle de Black-Scholes

Définition

On va choisir de modéliser le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_s \\ X_0 = M \end{cases} \quad (4)$$

est l'équation de Black-Scholes.

Le modèle de Black-Scholes

Définition

On va choisir de modéliser le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = M \end{cases} \quad (4)$$

est l'équation de Black-Scholes.

Le but va donc être de comprendre ce processus de manière plus globale, il nous faut donc une intégrale de la forme

$$\int_0^T dX_t = \int_0^T \mu X_t dt + \int_0^T \sigma X_t dB_t$$

Le modèle de Black-Scholes

Définition

On va choisir de modéliser le marché en utilisant le processus stochastique satisfaisant l'équation stochastique suivante pour $M > 0$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_s \\ X_0 = M \end{cases} \quad (4)$$

est l'équation de Black-Scholes.

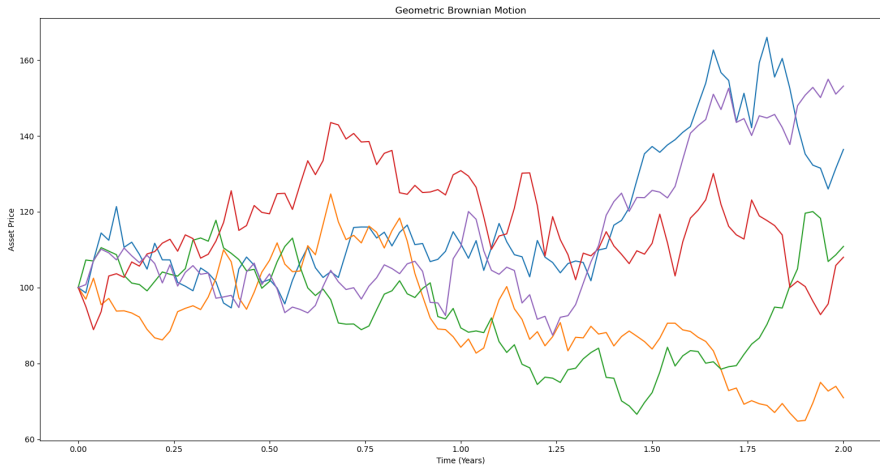
Le but va donc être de comprendre ce processus de manière plus globale, il nous faut donc une intégrale de la forme

$$\int_0^T dX_t = \int_0^T \mu X_t dt + \int_0^T \sigma X_t dB_t$$

Le but va donc maintenant être de définir cette intégrale

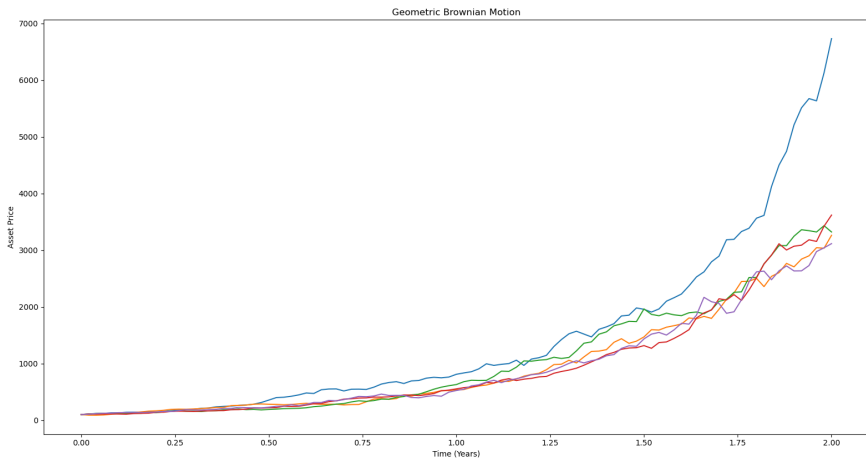
Représentation de cinq X_t résolvant Black-Scholes

$\mu = 0.1, \sigma = 0.3$



Représentation de cinq X_t résolvant Black-Scholes

$$\mu = 2, \sigma = 0.3$$



Construction de l'intégrale d'Itô

Construction de l'intégrale d'Itô

Définition

On définit \mathcal{H}^2 comme étant l'espace des fonctions mesurables et adaptées respectant la condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f^2(\omega, t) dt \right] < \infty$$

Propriétés de base de l'intégrale

Notre intégrale devrait être définie sur \mathcal{H}^2 , celle-ci devrait être un opérateur linéaire, de plus si $f(\omega, t) = \mathbb{1}_{[a; b]}$ on aimerait

$$I(f)(\omega) = \int_a^b f(\omega, t) dB_t = B_b - B_a$$

Définition de l'intégrale d'Itô sur \mathcal{H}_0^2

Définition

On définit maintenant \mathcal{H}_0^2 comme le sous-ensemble des fonctions dans \mathcal{H}^2 telles que celles-ci soient de la forme

$$f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i; t_{i+1}]}$$

Définition de l'intégrale d'Itô sur \mathcal{H}_0^2

Définition

On définit maintenant \mathcal{H}_0^2 comme le sous-ensemble des fonctions dans \mathcal{H}^2 telles que celles-ci soient de la forme

$$f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i; t_{i+1}]}$$

Définition

Soit $f \in \mathcal{H}_0^2$ on va définir l'intégrale d'Itô comme étant

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

En fait, comme \mathcal{H}_0^2 est dense dans \mathcal{H}^2 , on peut définir l'intégrale sur tout \mathcal{H}^2

Lemme d'Itô

Lemme d'Itô

Cas simple

Lemme d'Itô

Avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , on a

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \quad (5)$$

Lemme d'Itô

Cas simple

Lemme d'Itô

Avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , on a

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \quad (5)$$

On note la similarité entre cette équation et le théorème fondamental de l'analyse, à ceci près qu'une intégrale de la dérivée seconde de f s'invite dans l'équation

Lemme d'Itô, avec plusieurs variables

Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, on a

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds \quad (6)$$

Lemme d'Itô (notation)

Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, et $X_t = f(t, B_t)$ un processus stochastique, on écrira

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)dt \quad (7)$$

Lemme d'Itô

Box-Calculus

Box-Calculus

\cdot	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Lemme d'Itô

Application à Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique de Black-Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_s \quad (8)$$

Lemme d'Itô

Application à Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique de Black-Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (8)$$

et on s'intéresse à $d \ln X_t$ en y appliquant la formule d'Itô

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \frac{1}{2X_t^2} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t)$$

Lemme d'Itô

Application à Black-Scholes

On reprend notre équation stochastique de Black-Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (8)$$

et on s'intéresse à $d \ln X_t$ en y appliquant la formule d'Itô

$$d \ln X_t = \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \frac{1}{2X_t^2} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t)$$

ensuite, en appliquant le Box-Calculus, on voit qu'il est possible de simplifier cette dernière expression

$$d \ln X_t = \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt \quad (9)$$

Lemme d'Itô

Application à Black-Scholes (suite)

$$d \ln X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

Lemme d'Itô

Application à Black-Scholes (suite)

$$d \ln X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

On intègre ensuite de chaque côté de l'équation avec l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T d \ln (X_t) = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

Lemme d'Itô

Application à Black-Scholes (suite)

$$d \ln X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

On intègre ensuite de chaque côté de l'équation avec l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T d \ln (X_t) = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

$$\ln \left(\frac{X_T}{X_0} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T$$

Lemme d'Itô

Application à Black-Scholes (suite)

$$d \ln X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

On intègre ensuite de chaque côté de l'équation avec l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T d \ln (X_t) = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

$$\ln \left(\frac{X_T}{X_0} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T$$

$$X_T = \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T \right) \quad (10)$$

Lemme d'Itô

Déduction de la formule de Black-Scholes

Définition

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$, alors la variable définie par $X = e^{\mu + \sigma Z}$ suit une loi log-normale.

On reprend donc 10 pour voir que $X_T \sim \log \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T; \sigma \sqrt{T} \right)$

Lemme d'Itô

Déduction de la formule de Black-Scholes

Définition

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$, alors la variable définie par $X = e^{\mu + \sigma Z}$ suit une loi log-normale.

On reprend donc 10 pour voir que $X_T \sim \log \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T; \sigma \sqrt{T} \right)$
Tout ce qu'il reste à faire est alors de calculer $\mathbb{E}[\max(X_t - K; 0)e^{-tr}]$ où X_t suit une log-normale.

Formule de Black-Scholes

Nos calculs précédents nous donnent finalement la formule de Black-Scholes telle qu'étudiée en actuariat

Théorème

Dans le modèle de Black-Scholes, la valeur d'une option call est donné par la formule

$$X_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \quad (11)$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln \left(\frac{X_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Merci !

Geometric Brownian Motion

