第一章 線形代数

線形代数学(行列)

スカラー

·いわゆる普通の数
·＋－×÷の演算が可能·ベクトルに対する係数になれる

ベクトル

·「大きさ」と「向き」を持つ
·矢印で図示される
·スカラーのセットで表示される

行列

·スカラーを表にしたもの
·ベクトルを並べたもの（ベクトルのベクトル）
→何に使うのか？ベクトルの変換！

行列とベクトルの積 及び 行列の積

左行列(ベクトル)の列数と右行列(ベクトル)の行数が一致しない場合計算不可。
※実装時は転置する等の配慮が必要。

単位行列と逆行列

単位行列･･･かけても、かけられても相手が変化しない、「1」のような行列
逆行列･･･行列の「逆数」のようなもの

逆行列の求め方→掃き出し法
逆行列が存在しない条件：行列式＝0

行列式

行列式：ある行列が2つの横ベクトルの組み合わせだと考えたとき、各ベクトルがなす平行四辺形の面積。
「面積」を$abcd=\vec{v}0\vec{v}1$と表し行列式と呼ぶ

★行列式の特徴

1.同じ行ベクトルが含まれていると行列式はゼロ

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = 0$$

2.1つのベクトルがλ倍されると行列式はλ倍される

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \lambda\vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

3.他の成分が全部同じでi番目のベクトルだけが違った場合(ベクトルa ベクトルbの形)･･･行列式の足し合わせになる

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i + \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

4. 行を入れ替えると符号が変わる

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_t \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_s \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

行列式の求め方

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

固有値と固有ベクトル

固有ベクトル：ある行列Aをかけると方向を変えず、大きさだけが変わるような、ベクトル。

固有値・固有ベクトルの求め方

$$\mathrm{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{x} \neq \vec{0} \text{ より}$$
$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 3 \text{ or } 2 \text{ or } 1$$

固有値分解

固有値を対角線上に並べた行列（それ以外の成分は0）

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

それに対応する固有ベクトルを並べた行列

$$V = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{pmatrix} \qquad AV = V\Lambda$$

$$A = V\Lambda \mathrm{V}^{-1}$$

正方形の行列を上述の様な3つの行列の積に変換することを固有値分解という

例）

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

特異値分解

正方行列以外は固有値分解できないの？→似たことは出来る。

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$

$$M^\top\vec{u} = \sigma\vec{v}$$

このような特殊な単位ベクトルがあるならば特異値分解できる

$$M = USV^{-1}$$

※Sは「ラージσ」で表現されることもある。
※ただし、UやVは直行行列(複素数を要素に持つ場合は、ユニタリ行列)

直行行列:転置行列と逆行列が等しくなる正方行列のこと。

○次の4条件は互いに同値（必要かつ十分）であることを示すことができる．したがって，いずれか1つを直交行列（*orthogonal matrix*）の定義とすれば他は直交行列の性質となる．（*は性質としたときの記述）

［前提］　直交行列は，各成分が実数である正方行列に対して定義される．

行列 P を，各成分が実数であるような n 次の正方行列とするとき，次の4条件は同値（必要かつ十分）になる．

(I)　${}^tP\,P=P\,{}^tP=E$　すなわち $P^{-1}={}^tP$
[* 直交行列の逆行列は転置行列に等しい]

(II)　$P\vec{a}\cdot P\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$
[* 直交行列（で表される一次変換）はベクトルの内積を変えない]

(III)　$|P\vec{a}|=|\vec{a}|$
[* 直交行列（で表される一次変換）はベクトルの大きさを変えない]

(IV)　行列 P の各列を表す列ベクトル $\vec{p_i}$　（$i=1\sim n$）は互いに垂直で，各々の大きさは 1 である．
[* 直交行列の列ベクトルは正規直交基底をなす]

（その他）　[* 直交行列（で表される一次変換）は2つのベクトルのなす角を変えない］ことも示される．

行列Aのランク(rank(A))とは:「行列Aの行ベクトル(または列ベクトル)のうち、1次独立なものの数」
ベクトルの1次独立とは:他のベクトルを定数倍したり足し合わせたりして表すことができないベクトルの組を意味する。

特異値の求め方 (1-4-1)

$$MV = US \qquad M^\top U = VS^\top$$

$$M = USV^{-1} \qquad M^\top = VS^\top U^{-1}$$

これらの積は

$$MM^\top = USV^{-1}VS^\top U^{-1} = USS^\top U^{-1}$$

$SS^\top$ 部分が特異値の2乗となる。
UU^{-1} で挟まれる形式が固有値分解の形式に相当。

つまり $MM^\top$ を固有値分解すれば，その左特異ベクトル（ただし単位ベクトルから作らなければならないことに注意）と特異値の2乗が求められることがわかる。

固有値分解・特異値分解の用途
画像の不可逆圧縮など