

Ρομποτική II

Ευφυή και Επιδέξια Ρομποτικά Συστήματα

Κων/νος Τζαφέστας

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου & Ρομποτικής
Σχολή Ηλεκτρ. Μηχ/κών & Μηχ/κών Υπολ., Ε.Μ.Π.

Τηλ.: 210 772-3687, (Κτήριο Ηλεκτρ., Γραφείο 21.36)

Email: ktzaf@softlab.ntua.gr

Web: <http://www.softlab.ntua.gr/~ktzaf/>



Περιεχόμενα Μαθήματος

- ΕΝΟΤΗΤΑ-1: Επιδέξιος Ρομποτικός Χειρισμός
 - Έλεγχος Ρομπότ με πλεονάζοντες β.ε. (redundant robots)
 - Έλεγχος Δύναμης / Μηχανικής Αντίστασης
 - Μοντελοποίηση και έλεγχος επιδέξιου χειρισμού (Συνεργαζόμενα ρομπότ, Ρομποτικά χέρια)
- ΕΝΟΤΗΤΑ-2: Κινούμενα Ρομπότ
 - Αρχιτεκτονικές Ελέγχου Κινούμενων Ρομπότ
 - Σχεδιασμός δρόμου – Αποφυγή εμποδίων
 - Σύνθεση αισθητηρίων πληροφοριών
- Σύνθετοι ρομποτικοί χειριστές - Εφαρμογές



ΕΝΟΤΗΤΑ 1:

Επιδέξιος Ρομποτικός Χειρισμός

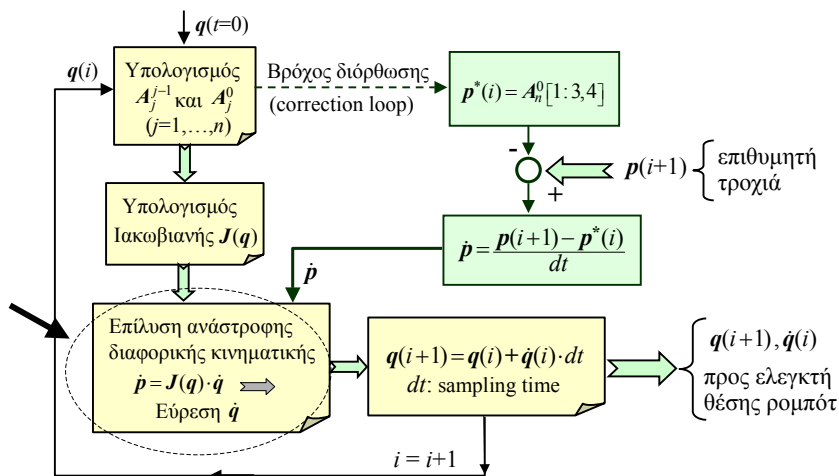


Επιδέξια Ρομπότ - Εισαγωγή

- **Επιδεξιότητα:** η ικανότητα στον έλεγχο με «ακρίβεια» πολλών βαθμών ελευθερίας για την εκτέλεση «λεπτών» και «σύνθετων» εργασιών (συνήθως εργασιών χειρισμού)
- **Επιδέξια Ρομποτικά Συστήματα** (dextrous robots)
 - Ρομποτικοί Χειριστές με Πλεονάζοντες Βαθμούς Ελευθερίας (robot manipulators with kinematic and/or actuator **redundancies**)
 - Συνεργαζόμενοι ρομποτικοί χειριστές (**cooperating** manipulators)
 - Ρομποτικά χέρια (**robot hands**)
- **Θέματα προς μελέτη:**
 - Κινηματική/Στατική Ανάλυση – Μέτρα Δεξιότητας / Ικανότητα χειρισμού
 - Σχεδιασμός δράσης (task planning)
 - Έλεγχος συμμόρφωσης (force/impedance compliance control)



Κινηματικός Έλεγχος Ρομπότ



Σχήμα ελέγχου επιλυμένης ταχύτητας (Resolved motion-rate control)



Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Εισαγωγή

Βασικές αρχές

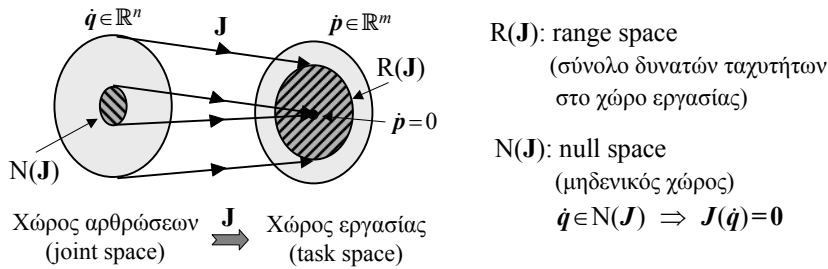
- 6 β.ε. για θέση/προσανατολισμό στο χώρο
- Πλεονάζοντες β.ε. εισάγουν τη δυνατότητα *απειρίας εφικτών κινήσεων* στις αρθρώσεις για δοσμένη επιθυμητή κίνηση στο τελικό στοιχείο δράσης
 \rightarrow μηδενικός χώρος ρομποτικών αρθρώσεων (*null space*)
 \rightarrow πλεονάζοντες β.ε. για ικανοποίηση επιπρόσθετων κινηματικών περιορισμών (βελτιστοποίηση κριτηρίων για επιλογή κατάλληλης κίνησης στους πλεονάζοντες β.ε.)



Παράδειγμα ρομποτικού βραχίονα με πλεονάζοντες β.ε. (DLR lightweight 7dof robot)



Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Κινηματική (1)



Όταν $n > m$, και $\text{rank}(J) = m$ (δηλαδή, J : πλήρους τάξης) \rightarrow τότε έχουμε $(n-m)$ πλεονάζοντες (redundant) βαθμούς ελευθερίας

$$\dim N(J) = n - m \quad \dim N(J) + \dim R(J) = n$$



Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Κινηματική (2)

Βέλτιστη λύση της διαφορικής κινηματικής εξίσωσης για πλεονάζοντα ρομπότ (redundant robots)

Διαφορική κινηματική εξίσωση: $J \cdot \dot{q} = \dot{p}$ $J: m \times n, \text{rank}(J) = m$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης κόστους: $F(\dot{q}) = (1/2) \|\dot{q}\|^2 = (1/2) \dot{q}^T \dot{q}$

Μέθοδος Lagrange: $F'(\dot{q}, \lambda) = (1/2) \dot{q}^T \cdot \dot{q} - \lambda^T \cdot (J\dot{q} - \dot{p}) \rightarrow \min$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\dot{q}} F'(\dot{q}, \lambda) = 0 \\ \nabla_{\lambda} F'(\dot{q}, \lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} - J^T \lambda = 0 \\ J\dot{q} - \dot{p} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = J^T \lambda \\ \dot{p} = J\dot{q} = (JJ^T) \lambda \end{array} \right.$$

$$\dot{q} = J^+ \cdot \dot{p}$$

όπου J^+ : ψευδοαντίστροφη της Ιακωβιανής

$$J^+ = J^T \cdot (J \cdot J^T)^{-1} \quad (\text{Moore-Penrose pseudoinverse})$$



Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Κινηματική (3)

Γενική βέλτιστη λύση της διαφορικής κινηματικής εξίσωσης για πλεονάζοντα ρομπότ (redundant robots)

Διαφορική κινηματική εξίσωση: $J \cdot \dot{q} = \dot{p}$ $J: m \times n$, $\text{rank}(J) = m$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης κόστους: $F(\dot{q}) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\dot{q} - k)^T \cdot Q \cdot (\dot{q} - k)$
(Q : symmetric, positive definite $n \times n$, $k \in \mathbb{R}^n$)

Μέθοδος Lagrange: $F'(\dot{q}, \lambda) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\dot{q} - k)^T \cdot Q \cdot (\dot{q} - k) - \lambda^T \cdot (J\dot{q} - \dot{p}) \rightarrow \min$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\dot{q}} F'(\dot{q}, \lambda) = 0 \\ \nabla_{\lambda} F'(\dot{q}, \lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(\dot{q} - k) - J^T \lambda = 0 \\ J\dot{q} - \dot{p} = 0 \end{array} \right.$$

$$\dot{q} = J_Q^\# \cdot \dot{p} + \underbrace{(I_n - J_Q^\# \cdot J)}_{\in N(J)} \cdot k$$

(I_n : μοναδιαία μήτρα $n \times n$)

όπου $J_Q^\#$ weighted pseudoinverse of the Jacobian matrix

$$J_Q^\# = Q^{-1} \cdot J^T \cdot (J \cdot Q^{-1} \cdot J^T)^{-1}$$



Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Κινηματική (4)

Γενική βέλτιστη λύση της διαφορικής κινηματικής εξίσωσης : **Απόδειξη**

$$\left. \begin{array}{l} Q(\dot{q} - k) - J^T \lambda = 0 \quad (1) \\ J\dot{q} - \dot{p} = 0 \quad (2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = Q^{-1} J^T \lambda + k \\ J\dot{q} - \dot{p} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = Q^{-1} J^T \lambda + k \\ (JQ^{-1} J^T) \lambda + Jk = \dot{p} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{rank}(J)=m} \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = Q^{-1} J^T \lambda + k \\ \lambda = (JQ^{-1} J^T)^{-1} (\dot{p} - Jk) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \underbrace{Q^{-1} J^T (JQ^{-1} J^T)^{-1}}_{J_Q^\#} \dot{p} + \underbrace{(I - Q^{-1} J^T (JQ^{-1} J^T)^{-1} J)}_{J_Q^\#} k$$



Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ

Μεθοδολογία Διάσπασης Ρομποτικής Εργασίας

- Διάσπαση σύνθετων ρομποτικών εργασιών σε *υπο-εργασίες με σειρά προτεραιότητας* (task-decomposition) (π.χ. έλεγχος θέσης ή δύναμης, αποφυγή εμποδίων ή ιδιομορφιών κλπ.)
- Περιγραφή ρομποτικών υποεργασιών με βάση:
 - **επιθυμητή τροχιά** του ρομπότ στο χώρο εργασίας (ή γενικότερα επιθυμητή «συμπεριφορά», π.χ. μηχανική αντίσταση, κλπ.)
 - **κριτήρια** στο χώρο διάταξης των αρθρώσεων (configuration space) → *βελτιστοποίηση*



Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (1)

Βασικές Σχέσεις (διάσπαση σε δύο ρομποτικές υπο-εργασίες)

Έστω $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$: διάταξη των αρθρώσεων (configuration)

- Πρώτη υπο-εργασία: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{q})$, \mathbf{p}_1 : $m_1 \times 1$ διάνυσμα
→ επιθυμητή τροχιά $\mathbf{p}_{1d}(t)$
- Δεύτερη υπο-εργασία:
 - Περίπτωση – 1: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{q})$, \mathbf{p}_2 : $m_2 \times 1$ διάνυσμα
→ επιθυμητή τροχιά $\mathbf{p}_{2d}(t)$
 - Περίπτωση – 2: Συνάρτηση κριτηρίου: $c = V(\mathbf{q})$
→ μεγιστοποίηση
⇔ πρόβλημα βελτίστου ελέγχου



Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (2)

- Πρώτη υπο-εργασία: $\dot{p}_1 = J_1 \cdot \dot{q}$ ($p_1 = f_1(q) = [f_{11}(q) \ f_{12}(q) \dots \ f_{1m_1}(q)]^T$)

(T1)

$$\text{όπου: } J_1 = \partial f_1 / \partial q \Rightarrow J_1 = \begin{bmatrix} \partial f_{11} / \partial q_1 & \partial f_{11} / \partial q_2 & \dots & \partial f_{11} / \partial q_n \\ \partial f_{12} / \partial q_1 & \partial f_{12} / \partial q_2 & \dots & \partial f_{12} / \partial q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_{1m_1} / \partial q_1 & \partial f_{1m_1} / \partial q_2 & \dots & \partial f_{1m_1} / \partial q_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{q} = \underbrace{J_1^+ \dot{p}_{1d}}_{\substack{\in N(J_1) \\ \text{μηδενικός χώρος} \\ \text{«εσωτερικές κινήσεις»}}} + \underbrace{(I_n - J_1^+ J_1) k_1}_{\substack{\text{Εκτέλεση 1ης υποεργασίας} \\ \text{«εξωτερική κίνηση»}}} \quad (1), \text{ όπου } k_1: \text{ τυχαίο διάνυσμα } n \times 1$$

$$J_1^+ = J_1^T (J_1 J_1^T)^{-1} : \text{ ψευδοαντίστροφη της μήτρας } J_1$$

$$\left. \begin{matrix} J_1: m_1 \times n \\ J_1^+: n \times m_1 \end{matrix} \right\} J_1 J_1^+ = I_{m_1}$$



Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (3)

- Δεύτερη υπο-εργασία

$$\text{- 1η Περίπτωση: } \dot{p}_2 = J_2 \cdot \dot{q} \quad (p_2 = f_2(q) = [f_{21}(q) \ f_{22}(q) \dots \ f_{2m_2}(q)]^T)$$

$$(T2a) \quad \hookrightarrow \dot{p}_{2d} \quad \text{όπου: } J_2 = \partial f_2 / \partial q \quad (m_2 \times n)$$

$$(1) \wedge (T2a) \Rightarrow \dot{p}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{p}_{1d} = J_2 (I_n - J_1^+ J_1) k_1$$

$$\text{Θέτουμε: } \tilde{J}_2 = J_2 (I_n - J_1^+ J_1)$$

$$\Rightarrow k_1 = \tilde{J}_2^+ (\dot{p}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{p}_{1d}) + (I_n - \tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2) k_2 \quad (2)$$

όπου k_2 : τυχαίο διάνυσμα $n \times 1$

$$\text{Τελικά: } \dot{q}_d = \underbrace{J_1^+ \dot{p}_{1d}}_{\text{1η υποεργασία}} + \underbrace{\tilde{J}_2^+ (\dot{p}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{p}_{1d})}_{\text{2η υποεργασία}} + \underbrace{(I_n - \tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2) k_2}_{\text{υπολείποντες πλεονάζοντες β.ε.}} \quad (3)$$

$$\left[\text{Σημείωση: χρησιμοποιήθηκε η σχέση } (I_n - J_1^+ J_1) \tilde{J}_2^+ = \tilde{J}_2^+ \right]$$



Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (3β)

$$\tilde{\mathbf{J}}_2 = \mathbf{J}_2 \mathbf{N}_1 \quad (1) \quad \text{όπου} \quad \mathbf{N}_1 = (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \quad \text{Ισχύει} \quad \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_1 \quad (2\alpha)$$

$$\text{και} \quad (\mathbf{N}_1)^T = \mathbf{N}_1 \quad (2\beta)$$

Πρόταση: Για τις παραπάνω μήτρες ισχύει:

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \tilde{\mathbf{J}}_2^+ = \tilde{\mathbf{J}}_2^+ \quad \text{δηλαδή:} \quad \boxed{\tilde{\mathbf{J}}_2^+ = \mathbf{N}_1 \cdot \tilde{\mathbf{J}}_2^+}$$

Απόδειξη:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{J}}_2^+ \tilde{\mathbf{J}}_2 \tilde{\mathbf{J}}_2^+ = \tilde{\mathbf{J}}_2^+ \quad \leftarrow \quad (\mathbf{N}_1 \cdot \tilde{\mathbf{J}}_2^+) \tilde{\mathbf{J}}_2 (\mathbf{N}_1 \cdot \tilde{\mathbf{J}}_2^+) \stackrel{(1) \wedge (2\alpha)}{=} \mathbf{N}_1 \cdot \tilde{\mathbf{J}}_2^+ \tilde{\mathbf{J}}_2 \tilde{\mathbf{J}}_2^+ = \mathbf{N}_1 \cdot \tilde{\mathbf{J}}_2^+ \\ \tilde{\mathbf{J}}_2 \tilde{\mathbf{J}}_2^+ \tilde{\mathbf{J}}_2 = \tilde{\mathbf{J}}_2 \quad \dots \\ (\tilde{\mathbf{J}}_2^+ \tilde{\mathbf{J}}_2)^T = \tilde{\mathbf{J}}_2^+ \tilde{\mathbf{J}}_2 \\ (\tilde{\mathbf{J}}_2 \tilde{\mathbf{J}}_2^+)^T = \tilde{\mathbf{J}}_2 \tilde{\mathbf{J}}_2^+ \end{array} \right.$$



Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (4)

- Δεύτερη υπο-εργασία / 1η Περίπτωση (συνέχεια)

Απλοποιημένη περίπτωση (2η υποεργασία εκφρασμένη απ' ευθείας ως επιθυμητή κίνηση στο χώρο των ρομποτικών αρθρώσεων)

$$\text{Εάν } \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}, \text{ δηλαδή } \mathbf{J}_2 = \mathbf{I}, \text{ τότε: } \tilde{\mathbf{J}}_2 = (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1)$$

$$\text{οπότε: } \tilde{\mathbf{J}}_2^+ = (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1)^+ = (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1)$$

$$\text{Τελικά δηλαδή παίρνουμε:} \quad \dot{\mathbf{q}}_d = \underbrace{\mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{p}}_{1d}}_{1\text{η υποεργασία}} + \underbrace{(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \dot{\mathbf{p}}_{2d}}_{2\text{η υποεργασία}} \quad (4)$$

από τη σχέση (3)

Αντί για $\dot{\mathbf{p}}_{2d}$ στις σχέσεις (3) και (4), χρησιμοποιείται συχνά η σχέση:

$$\dot{\mathbf{p}}_{2d}^* = \dot{\mathbf{p}}_{2d} + \mathbf{H}_2(\mathbf{p}_{2d} - \mathbf{p}_2) \quad \text{οπότε η (4) π.χ. γράφεται τελικά:}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{p}}_{1d} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) [\dot{\mathbf{p}}_{2d} + \mathbf{H}_2(\mathbf{p}_{2d} - \mathbf{p}_2)]} \quad (4)'$$



Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (5)

- Δεύτερη υπο-εργασία

- 2η Περίπτωση : «Συνάρτηση κριτηρίου» $c = V(q) \rightarrow \max$
(T2b)

Έστω: $k_1 = k_c \cdot \xi$ όπου: $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ ($\xi_j = \partial V / \partial q_j$)
 k_c : θετική σταθερά

ξ : διάνυσμα κλίσης της συνάρτησης κριτηρίου $c = V(q)$
(gradient vector $\nabla_q [V(q)]$)

ορθογώνια προβολή του k_1 στο $N(J_1)$

$$(1) \Rightarrow \dot{q}_d = \underbrace{J_1^+ \dot{p}_{1d}}_{1\text{η υποεργασία}} + \underbrace{k_c (I_n - J_1^+ J_1) \cdot \xi}_{2\text{η υποεργασία}} \quad (5)$$

Έχουμε: $\dot{c} = \xi^T J_1^+ \dot{p}_{1d} + \underbrace{\xi^T \cdot (I_n - J_1^+ J_1) \cdot \xi}_{>0} \cdot k_c > 0 \Rightarrow c(q) \uparrow$



Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ

Εφαρμογές – Παραδείγματα:

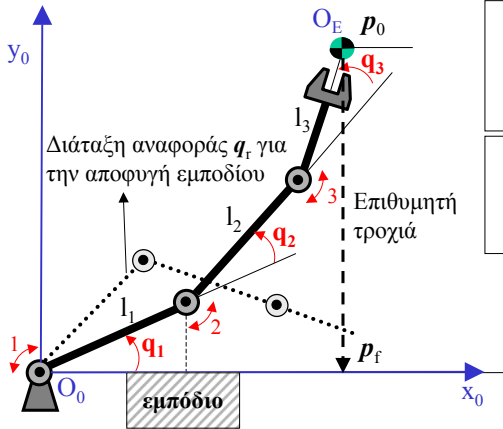
1. Αποφυγή Εμποδίων
(obstacle avoidance)

2. Αποφυγή Ιδιόμορφων Διατάξεων
(avoiding singularities)



Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Εμποδίων (1)

➡ Redundant Robot Manipulators: Avoiding Obstacles



- Υποεργασία 1:
Εκτέλεση επιθυμητής τροχιάς
 $p_{1d}(t) : p_0(t=0) \rightarrow p_f(t=t_f)$

- Υποεργασία 2:
Αποφυγή εμποδίου
 $p_{2d}(t) = q_r$

Παράδειγμα:

$$l_1=1, l_2=1, l_3=0.3$$

$$q_0=[20^\circ, 30^\circ, 20^\circ]^T$$

$$p_0=[x_0, y_0]^T \rightarrow p_f=[x_0, 0]^T$$

$$q_r=[45^\circ, -70^\circ, 0^\circ]^T \quad (t_f=1)$$



Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Εμποδίων (2)

- Υποεργασία 1η (p_{1d}): Εκτέλεση επιθυμητής τροχιάς $p_0(t=0) \rightarrow p_f(t=t_f)$

✓ Ορθό Γεωμετρικό μοντέλο

$$\begin{cases} p_{1x} = l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ p_{1y} = l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ \theta = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

όπου :

$$c_1 = \cos(q_1)$$

$$c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$$

$$c_{123} = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$s_1 = \sin(q_1)$$

$$s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$$

$$s_{123} = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

✓ Ορθό διαφορικό κινηματικό μοντέλο:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & (l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & l_3 c_{123} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{1x} \\ \dot{p}_{1y} \end{bmatrix} = J_1(q_1, q_2, q_3) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Έστω π.χ. επιθυμητή τροχιά (1η υποεργασία):

$$p_{1d}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 - (3-2t)t^2 y_0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

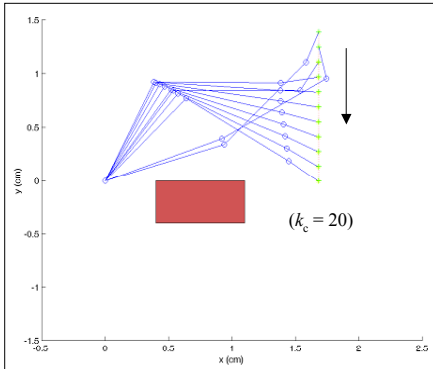
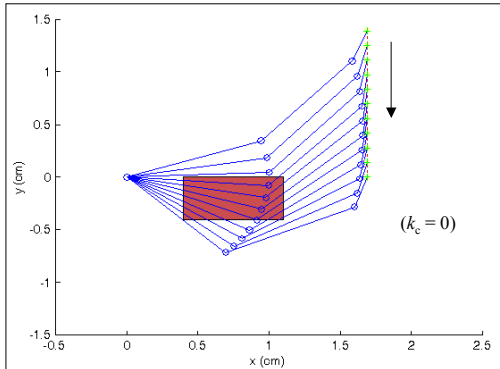
- Υποεργασία 2η: $p_2 = q$ και $p_{2d} = q_r$ (διάταξη αναφοράς)



Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Εμποδίων (3)

➤ Παράδειγμα προσομοίωσης (3 β.ε. → τοποθέτηση στο επίπεδο)
(εφαρμογή της παραπάνω σχέσης (4)')

$$\dot{q}_d = \mathbf{J}_1^+ \dot{p}_{1d} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \mathbf{H}_2 (\dot{p}_{2d} - \dot{p}_2)$$



Χωρίς τον έλεγχο πλεοναζόντων β.ε. ($\mathbf{H}_2 = \mathbf{0}$)

Με έλεγχο των πλεοναζόντων β.ε. ($\mathbf{H}_2 = k_c \mathbf{I}$)



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή ΗΜ&ΜΥ. Μάθημα: Ρομποτική ΙΙ

21

Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Ιδιομορφιών (1)

➡ **Redundant Robot Manipulators: Avoiding Singularities**

- Υποεργασία 1η (\mathbf{p}_{1d}): Εκτέλεση επιθυμητής τροχιάς $\mathbf{p}_0 (t=0) \rightarrow \mathbf{p}_f (t=t_f)$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & (l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & l_3 c_{123} \end{bmatrix} \quad \text{δηλ.: } \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \underline{J}_{11} \\ \underline{J}_{12} \end{bmatrix}$$

- Υποεργασία 2η: Μεγιστοποίηση συνάρτησης κριτηρίου $c = V(\mathbf{q})$

$$c = V(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T)} \quad : \text{δείκτης ικανότητας χειρισμού (manipulability)} \\ (\text{μέτρο «απόστασης» από ιδιόμορφες διατάξεις})$$

$$\mathbf{J}_1: 2 \times 3 \Rightarrow \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T: 2 \times 2 \quad \text{και} \quad \det(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T) = 0 \quad \text{στις ιδιόμορφες διατάξεις}$$



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή ΗΜ&ΜΥ. Μάθημα: Ρομποτική ΙΙ

22

Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Ιδιομορφιών (2)

Επίλυση του προβλήματος αποφυγής ιδιομορφων διατάξεων με έλεγχο των πλεοναζόντων β.ε.

➤ Εφαρμογή της παραπάνω σχέσης (5): $\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{p}}_{1d} + k_c (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \cdot \boldsymbol{\xi}$

όπου: k_c : θετική σταθερά, και $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ ($\boldsymbol{\xi} = \partial V / \partial \mathbf{q}$)

Έχουμε:

$$\xi_l = \partial V / \partial q_l = \partial \left(\sqrt{\det(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T)} \right) / \partial q_l = \frac{\sqrt{\det(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T)}}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij} \left(\frac{\partial (J_{1i})}{\partial q_l} J_{1j}^T + \frac{\partial (J_{1j})}{\partial q_l} J_{1i}^T \right)$$

όπου α_{ij} : το (i,j) στοιχείο του $\text{inverse}(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T)$

και J_{1i} : το i-διάνυσμα γραμμής του πίνακα \mathbf{J}_1



Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Ιδιομορφιών (3)

Απόδειξη της παραπάνω σχέσης για το ξ_l

Έστω: $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1$ και $\mathbf{B} = \mathbf{J} \mathbf{J}^T = [\beta_{ij}]$, οπότε: $\beta_{ij} = J_i \cdot J_j^T$

Είναι: $\Delta = \det(\mathbf{J} \mathbf{J}^T) = \det(\mathbf{B}) = \beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12} \beta_{21}$

και: $\frac{\partial \Delta}{\partial q_l} = \frac{\partial \beta_{11}}{\partial q_l} \beta_{22} + \beta_{11} \frac{\partial \beta_{22}}{\partial q_l} - \frac{\partial \beta_{12}}{\partial q_l} \beta_{21} - \beta_{12} \frac{\partial \beta_{21}}{\partial q_l}$

όπου: $\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial J_i}{\partial q_l} J_j^T + J_i \frac{\partial J_j^T}{\partial q_l} = \frac{\partial J_i}{\partial q_l} J_j^T + \frac{\partial J_j}{\partial q_l} J_i^T$

Παίρνουμε τελικά: $\xi_l = \partial V / \partial q_l = \partial(\sqrt{\Delta}) / \partial q_l = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial q_l} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \cdot \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij} \left(\frac{\partial J_i}{\partial q_l} J_j^T + \frac{\partial J_j}{\partial q_l} J_i^T \right)$

όπου: $\alpha'_{11} = \beta_{22}, \alpha'_{22} = \beta_{11}, \alpha'_{12} = -\beta_{12}, \alpha'_{21} = -\beta_{21}$

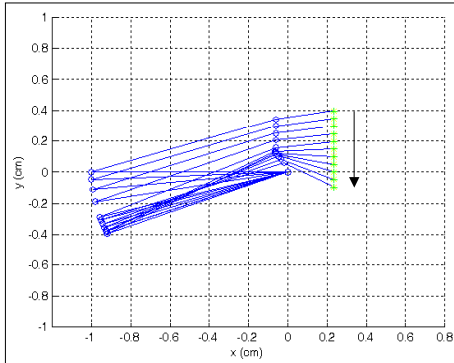
...



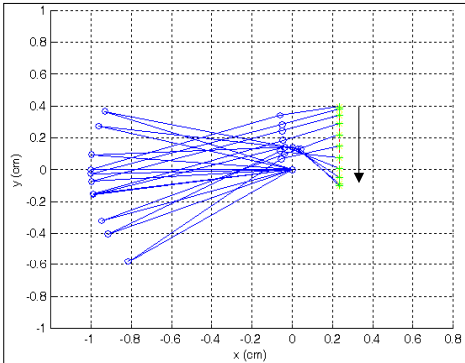
Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Ιδιομορφιών (4)

➤ Παράδειγμα προσομοίωσης (3 β.ε. → τοποθέτηση στο επίπεδο)
(εφαρμογή της παραπάνω σχέσης (5))

$$\dot{q}_d = J_1^+ \dot{p}_{1d} + k_c (\mathbf{I}_n - J_1^+ J_1) \cdot \xi$$



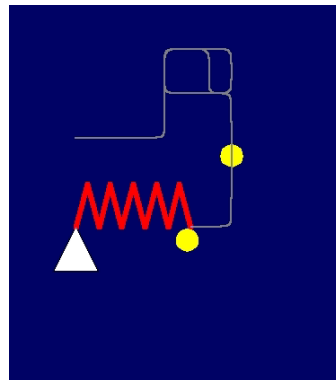
Χωρίς τον έλεγχο πλεοναζόντων β.ε. ($k_c=0$)



Με έλεγχο των πλεοναζόντων β.ε. ($k_c=200$)



Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές - Παραδείγματα



Αποφυγή εμποδίων σε πραγματικό χρόνο με κινηματικό έλεγχο των πλεοναζόντων βαθμών ελευθερίας του ρομποτικού χειριστή



Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Συμπεράσματα

- Πλεονάζοντες β.ε. εισάγουν τη δυνατότητα «απειρίας εφικτών κινήσεων» στις αρθρώσεις για δοσμένη επιθυμητή κίνηση στο τελικό στοιχείο δράσης (μηδενικός χώρος ρομποτικών αρθρώσεων)

Πλεονάζοντες βαθμοί ελευθερίας → «Απειρία» λύσεων για το ανάστροφο κινηματικό πρόβλημα → Βελτιστοποίηση

- Κινηματικός έλεγχος πλεοναζόντων βαθμών ελευθερίας –

Μεθοδολογία διάσπασης ρομποτικής εργασίας: Διάσπαση σύνθετων ρομποτικών εργασιών σε υπο-εργασίες με σειρά προτεραιότητας (task-decomposition)

Περιγραφή ρομποτικών υποεργασιών με βάση:

- επιθυμητή τροχιά ή γενικότερα επιθυμητή «συμπεριφορά» (π.χ. μηχανική αντίσταση) του ρομπότ στο χώρο εργασίας (task space)
- κριτήρια στο χώρο διάταξης των αρθρώσεων (configuration space) → βελτιστοποίηση



Ρομποτική Ικανότητα Χειρισμού / Δείκτες Ρομποτικής Δεξιότητας (Robotic manipulability – Dexterity measures)



Ρομποτική ικανότητα χειρισμού (*manipulability*) - Εισαγωγή

Έστω ρομποτικός χειριστής με n β.ε.

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}_p(\mathbf{q}) \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_p(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

Ρομποτική ικανότητα χειρισμού (robotic manipulability)

Το σύνολο: $\mathcal{M} = \{\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} : \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1\} \triangleq$ «Ελλειψοειδές ικανότητας χειρισμού»
(ellipsoid in the m -dimensional Euclidean space) **(3)**

Δηλαδή, το σύνολο των δυνατών ταχυτήτων \mathbf{v} του τελικού στοιχείου δράσης που μπορούν να επιτευχθούν από ταχύτητες στις αρθρώσεις: $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$

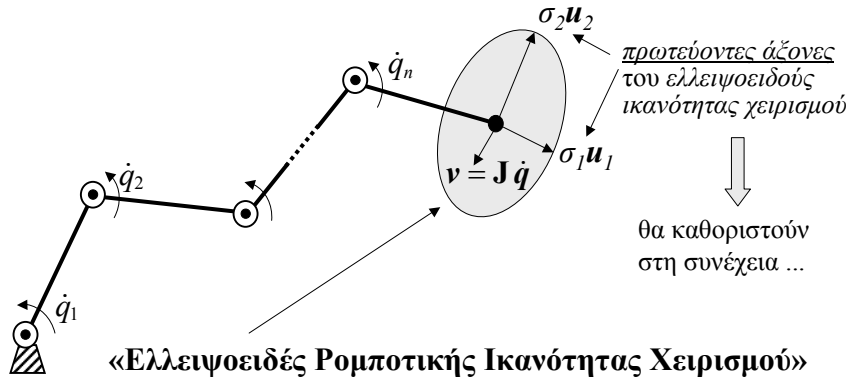
Αποδεικνύεται ότι: $\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{J}^+)^T \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{v} \leq 1 \right\} \quad (4)$

όπου: $\mathbf{v} \in R(\mathbf{J})$ (range space of \mathbf{J} , δηλαδή το σύνολο των δυνατών ταχυτήτων στο χώρο δράσης)

και: \mathbf{J}^+ (ψευδοαντίστροφη της \mathbf{J})



Ελλειψοειδές ρομποτικής ικανότητας χειρισμού – Σχηματική Παράσταση



Ελλειψοειδές ρομποτικής ικανότητας χειρισμού – Απόδειξη

✓ Απόδειξη της σχέσης (4)

Ισχύει: $\dot{q} = J^+ \cdot v + (I - J^+ J) \cdot k$

$$(3) \Rightarrow 1 \geq \|\dot{q}\|^2 = \dot{q}^T \dot{q} = v^T (J^+)^T J^+ v + k^T (I - J^+ J)^T (I - J^+ J) k + 2k^T (I - J^+ J)^T J^+ \cdot v \quad (\alpha)$$

$$\text{Αλλά: } (I - J^+ J)^T \cdot J^+ = 0$$

$$\text{Άρα, } (\alpha) \Rightarrow 1 \geq \|\dot{q}\|^2 = v^T (J^+)^T J^+ v + \underbrace{k^T (I - J^+ J)^T (I - J^+ J) k}_{\geq 0} \geq v^T (J^+)^T J^+ v$$

$$\text{Δηλαδή, παίρνουμε τελικά: } \|\dot{q}\| \leq 1 \Rightarrow v^T \cdot (J^+)^T \cdot J^+ \cdot v \leq 1$$



Ψευδο-αντίστροφες Μήτρες

Ορισμός (Moore-Penrose pseudoinverse)

Για κάθε μήτρα \mathbf{A} ($m \times n$) υπάρχει μια μοναδική $n \times m$ μήτρα \mathbf{A}^+ για την οποία:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^+ \\ (\mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{A} \end{array} \right.$$

Η $n \times m$ μήτρα \mathbf{A}^+ ονομάζεται *ψευδοαντίστροφη* της \mathbf{A}



Ψευδο-αντίστροφες (συνέχεια)

Ιδιότητες (ψευδοαντίστροφης \mathbf{A}^+ , της ($m \times n$) μήτρας \mathbf{A}) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad (\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A} \\ \text{(ii)} \quad (\mathbf{A}^T)^+ = (\mathbf{A}^+)^T \quad \text{και} \quad (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^+ = (\mathbf{A}^+)^T \mathbf{A}^+ \\ \text{(iii)} \quad \text{Εαν } \text{rank}(\mathbf{A})=m, \quad \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad \text{και} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{I}_{m \times m} \\ \text{(iv)} \quad \text{Εαν } \text{rank}(\mathbf{A})=n, \quad \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad \text{και} \quad \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{I}_{n \times n} \end{array} \right.$$



Ελλειψοειδές ρομποτικής ικανότητας χειρισμού – Διάσπαση Ιδιοτιμής (1)

✓ **Διάσπαση Ιδιοτιμής** (singular value decomposition)

Μήτρα \mathbf{J} ($m \times n$) $\rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T$ Matlab function *svd*:
(έστω $m < n$) $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{J});$

\mathbf{U} : $m \times m$ και \mathbf{V} : $n \times n$ ορθοκανονικές μήτρες

$$\mathbf{\Sigma} = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_m & \\ \hline & & & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \mathbf{\Sigma}: m \times n \text{ μήτρα} \\ \sigma_i: \text{ιδιόμορφες τιμές (singular values)} \\ (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0) \end{array}$$

Ισχύει: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, n$

όπου λ_i ($i=1, \dots, m$) οι m μεγαλύτερες ιδιοτιμές της μήτρας $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$



Ελλειψοειδές ρομποτικής ικανότητας χειρισμού – Διάσπαση Ιδιοτιμής (2)

Η ορθοκανονική μήτρα $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m]$ ορίζει ένα πλαίσιο αναφοράς του οποίου οι πρωτεύοντες άξονες καθορίζονται από τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$



Μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα $\sigma_i \mathbf{u}_i$ ($i=1, \dots, m$) καθορίζουν τους πρωτεύοντες άξονες του ελλειψοειδούς ικανότητας χειρισμού

Ελλειψοειδές ικανότητας χειρισμού (σχέση (4)): $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1 \Rightarrow \mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{J}^+)^T \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{v} \leq 1$

Είναι: $\mathbf{J}^+ = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^+ \cdot \mathbf{U}^T$ όπου: $\mathbf{\Sigma}^+ = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^{-1} & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_m^{-1} & \\ \hline & & & \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \end{array} \right]$

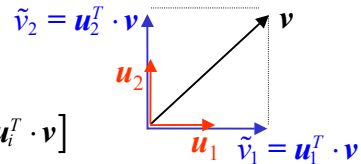


Ελλειψοειδές ρομποτικής ικανότητας χειρισμού – Διάσπαση Ιδιοτιμής (3)

Διάσπαση ιδιοτιμής της μήτρας $\mathbf{J} \rightarrow$ καθορισμός πρωτευόντων αξόνων του ελλειψοειδούς ικανότητας χειρισμού

Έχουμε: $\mathbf{J}^+ \mathbf{v} = \mathbf{V} \cdot \Sigma^+ \cdot \mathbf{U}^T \mathbf{v}$

Έστω: $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{U}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{u}_2^T \cdot \mathbf{v} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} = \text{col}[\tilde{v}_i = \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{v}]$



(δηλαδή: $\tilde{\mathbf{v}}$ το διάνυσμα συντεταγμένων του \mathbf{v} στο πλαίσιο που ορίζει η \mathbf{U})
 $(\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^{(U)} = \mathbf{U}^T \mathbf{v}^{(0)} \text{ αφού } \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{U} \mathbf{v}^{(U)})$

Έχουμε επομένως:

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{J}^+)^T \mathbf{J}^+ \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{U} (\Sigma^+)^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} \Sigma^+ \mathbf{U}^T \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}^T [(\Sigma^+)^T (\Sigma^+)] \tilde{\mathbf{v}} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \tilde{v}_i^2 \right) \leq 1 \Rightarrow \text{πρωτεύοντες άξονες του ελλειψοειδούς: } \{ \sigma_1 \mathbf{u}_1, \sigma_2 \mathbf{u}_2, \dots, \sigma_m \mathbf{u}_m \}$$



Μέτρα (δείκτες) Ρομποτικής Ικανότητας Χειρισμού / Μέτρα Δεξιότητας

Μέτρο ικανότητας χειρισμού:

$w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$: ανάλογο του όγκου του ελλειψοειδούς

Το μέτρο ικανότητας χειρισμού w έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $w = \sqrt{\det(\mathbf{J}(q) \mathbf{J}^T(q))}$

(ii) Όταν $m=n$, $w = |\det(\mathbf{J}(q))|$

(iii) Γενικά $w \geq 0$, και $w=0$ όταν $\text{rank}(\mathbf{J}) < m$ (singular configurations)

Δηλαδή, $w=0$ όταν ο ρομποτικής χειριστής βρίσκεται σε ιδιόμορφες διατάξεις, και το $w \geq 0$ αποτελεί ένα μέτρο της «απόστασης» από τις ιδιόμορφες διατάξεις



Ελλειψοειδές Δύναμης Ρομποτικού Χειρισμού

Έστω ρομποτικός χειριστής με n β.ε.:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{J}: \text{Ιακωβιανή μήτρα } m \times n)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{F} \quad (\text{στατικό μοντέλο ρομποτικού χειριστή})$$

Ρομποτική ικανότητα άσκησης δύναμης χειρισμού

Το σύνολο: $\mathcal{M}_F = \{\mathbf{F} : \|\boldsymbol{\tau}\| \leq 1\} \triangleq \text{«Ελλειψοειδές δύναμης χειρισμού»}$
(ellipsoid in the m -dimensional Euclidean space) **(3)**

Δηλαδή, το σύνολο των δυνάμεων \mathbf{F} που μπορεί να ασκήσει το τελικό στοιχείο δράσης, μέσω ροτών $\boldsymbol{\tau}$ στις αρθρώσεις, για τις οποίες: $\|\boldsymbol{\tau}\| \leq 1$

Ελλειψοειδές δύναμης χειρισμού: $\mathbf{F}^T \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{q})] \cdot \mathbf{F} \leq 1$

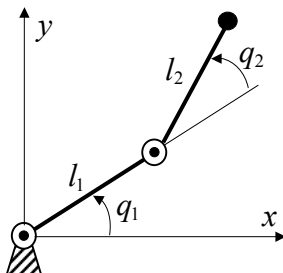
Πρωτεύοντες άξονες ελλειψοειδούς δύναμης χειρισμού: $\mathbf{u}_1/\sigma_1, \mathbf{u}_2/\sigma_2, \dots, \mathbf{u}_m/\sigma_m$



Βέλτιστοι ρομποτικοί σχηματισμοί με βάση τα μέτρα ικανότητας χειρισμού

Βέλτιστες διατάξεις ρομποτικών χειριστών (με βάση το μέτρο w) (optimal configurations)

Α. Ρομπότ 2 συνδέσμων



$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Μέτρο ικανότητας χειρισμού:
 $w = |\det(\mathbf{J})| = l_1 l_2 |s_2|$

$$w = 0, \text{ όταν } q_2 = 0, \pm\pi$$

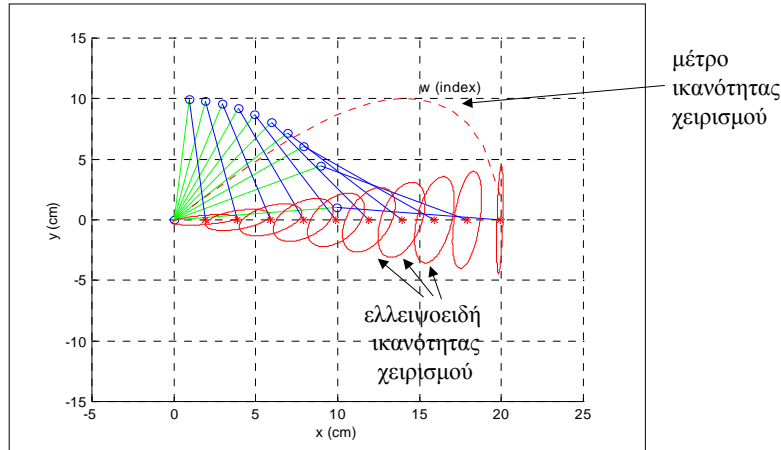
$$w = \max, \text{ όταν } q_2 = \pm\pi/2$$

$$\text{Επιπλέον, εάν } l_1 + l_2 = \text{σταθ. τότε } w = \max, \text{ όταν } l_1 = l_2$$



Ελλειψοειδές ικανότητας χειρισμού: Παράδειγμα ρομπότ 2 συνδέσμων

Παράδειγμα Α. Ρομπότ 2 συνδέσμων (συνέχεια)



Άλλοι Δείκτες Ρομποτικής Ικανότητας Χειρισμού / Μέτρα Δεξιότητας

1. Μέτρο ικανότητας χειρισμού:

$w_1 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$: ανάλογο του όγκου του ελλειψοειδούς

2. Μέτρο τοπικής δεξιότητας (local dexterity measure):

$w_2 = \sigma_m / \sigma_1 \rightarrow 0$: singularity, 1 : isotropy (ελλειψοειδές \rightarrow σφαίρα)

3. Δείκτης $w_3 = \sigma_m$ (ελάχιστη ακτίνα ελλειψοειδούς)

4. Δείκτης $w_4 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m)^{1/m}$

\rightarrow γεωμετρικός μέσος των ακτινών $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ του ελλειψοειδούς
(ακτίνα σφαίρας που έχει τον ίδιο όγκο με το ελλειψοειδές ικανότητας χειρισμού)

