# الفصل الثاني: المتجهات

# Vectors

## 1-2 الكميات القياسية والكميات المتجهة Scalars and vectors

الكميات الفيزيائية نوعان:

أ- **الكميات القياسية:** هي كميات فيزيائية غير متجهة يتم تعيينها تماماً إذا عرف مقدارها فقط.

ومن أمثلة الكميات القياسية: الكتلة، الزمن، الطول، درجة الحرارة والطاقة.

ب- **الكميات المتجهة:** هي كميات فيزيائية متجهة يتم تعيينها تماماً بمعرفة مقدارها واتجاهها.

يمكن تمييز الكمية المتجهة عن الكمية القياسية وذلك بكتابة المتجه بخط عريض **A** كما هو مستخدم في الكتب أو بوضع إشارة سهم أعلى الرمز A كما هو الحال في الكتابة اليدوية $\vec{A}$ . أما الكمية القياسية أو ما يُعرف بقيمة المتجه **A** مثلا فيعبر عنه بالرمز A أو |**A**| أو $|\vec{A}|$ .

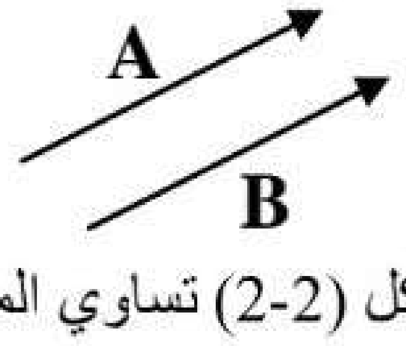
ومن الأمثلة على الكميات المتجهة الإزاحة والسرعة والعجلة والقوة وكمية الحركة. وتستخدم عادةً الطرق الهندسية في تمثيل الكمية المتجهة حيث يمثَل المتجه بيانياً بسهم يتناسب طوله طردياً مع مقدار المتجه واتجاهه يمثل اتجاه المتجه شكل (2-1) .


شكل (2-1) سهم يمثل المتجه

## خواص المتجهات:

- **تساوي المتجهات:**

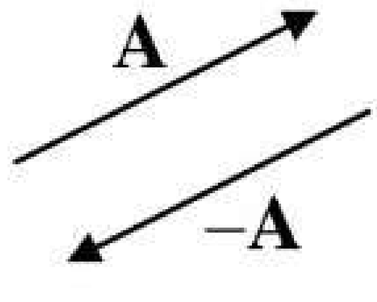
إن المتجهين **A** ، **B** متساويان إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه (ونفس الوحدة إن وجدت) ، أي أن **A** = **B** إذا كان مقدار **A** يساوي مقدار **B** وكان السهم الممثل للمتجه **A** يوازي السهم الممثل للمتجه **B** شكل (2-2) .




شكل (2-2) تساوي المتجهات

- **سالب المتجه:**

إذا أعطينا المتجه **A** فإن **A**– هو متجه مساوٍ له في المقدار ويعاكسه في الاتجاه شكل (2-3) .




شكل (2-3) سالب المتجه

- **جمع المتجهات:**

عند جمع المتجهات يجب أن تكون هذه المتجهات من نفس النوع فلا يمكن مثلا أن نجمع متجه قوة إلى متجه سرعة لاختلافهما في الأبعاد. وذلك ينطبق أيضا عند جمع الكميات القياسية.

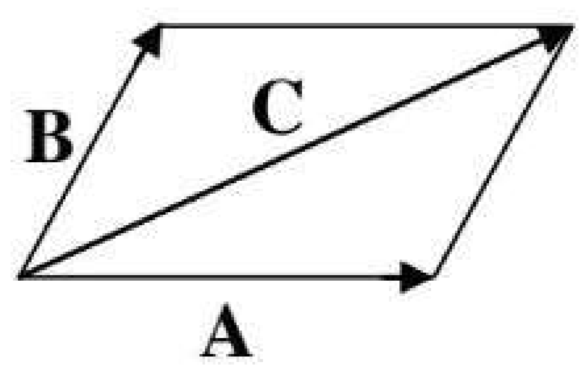
### إيجاد محصلة مجموعة من المتجهات:

**-1** إذا كانت جميعها تعمل على خط واحد فإنها تجمع جبرياً بإشاراتها وذلك بعد اختيار اتجاهاً معيناً يكون موجباً .
وإذا تساوى مقدار متجهين وتضادا اتجاهاً كان محصلتهما تساوي صفر.

-2 إذا لم يكن خط تأثير المتجهات واحداً فإننا نوجد محصلتها بإحدى طريقتين:

**أ- طريقة متوازي الأضلاع:**

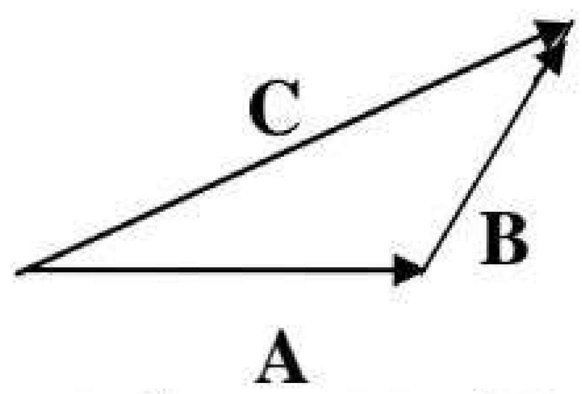
حاصل جمع المتجهين **A** و **B** هو متجه **C**، ويسمى عادةً بالمحصلة (Resultant). ولإجراء عملية الجمع نقوم برسم أحد المتجهين أولاً وليكن **A** بمقياس رسم مناسب ، ثم من بداية المتجه **A** نرسم المتجه **B** بنفس مقياس الرسم ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع فتكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجاوران هما المتجهان **A** و**B**. كما هو موضح في الشكل (2-4).




شكل (2-4) محصلة متجهين بطريقة متوازي الأضلاع

**ب- طريقة المثلث:**

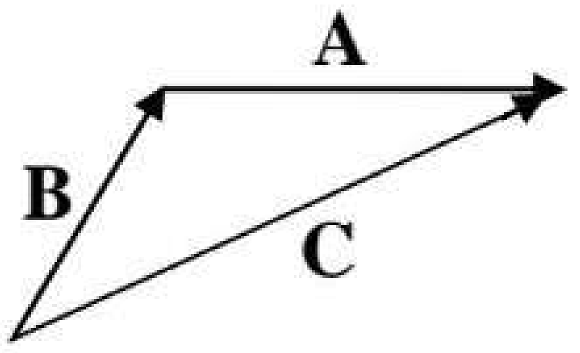
لإجراء عملية الجمع بطريقة المثلث نقوم برسم أحد المتجهين أولاً وليكن **A** بمقياس رسم مناسب، ثم من رأس المتجه **A** ننقل المتجه **B** فتكون المحصلة **C** هي المتجه الذي يبدأ من بداية المتجه **A** وينتهي عند رأس المتجه **B** كما في الشكل (2-5) .




شكل (2-5) محصلة متجهين **A+B** بطريقة المثلث

ويمكن التعبير رياضياً عن عملية الجمع في كلتي الطريقتين بالمعادلة (2-1).

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \qquad (2\text{-}1)$$




شكل (2-6) محصلة متجهين **B+A** بطريقة المثلث

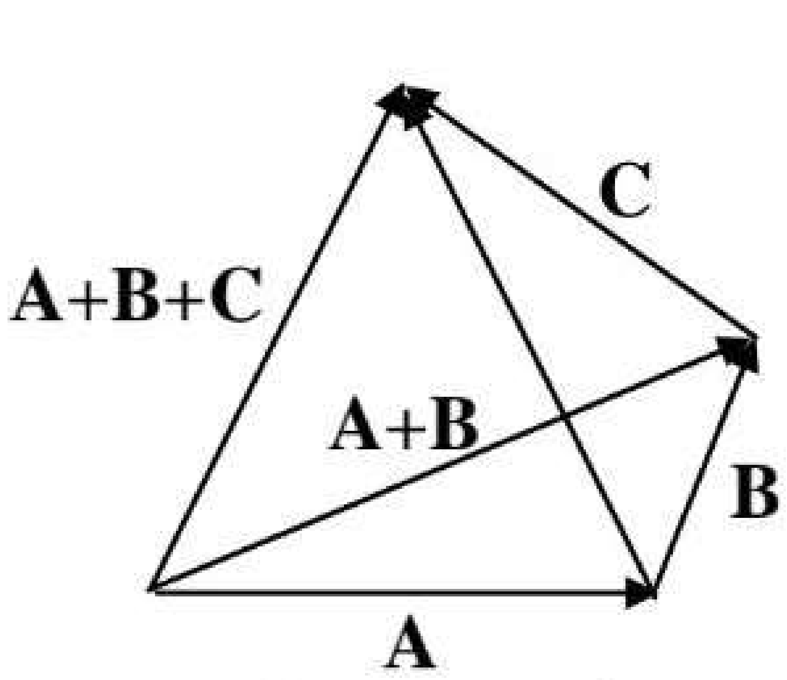
لنفرض أننا بدأنا عملية الجمع بأخذ المتجه **B** أولاً ثم جمعنا إليه المتجه **A** أي قمنا بعملية الجمع **B+A** يتضح من الشكل (2-6) أننا نحصل على نفس المتجه **C** وبذلك نستطيع أن نكتب :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad (2\text{-}2)$$

وتسمي هذه النتيجة **بقانون التبادل للجمع** .

يمكن تطبيق طريقة المثلث لجمع أكثر من متجهين، فمثلاً المتجهات الثلاث **A** و **B** و **C** يمكن جمعها كما هو مبين في الشكل (2-7).

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة رياضياً بالمعادلة



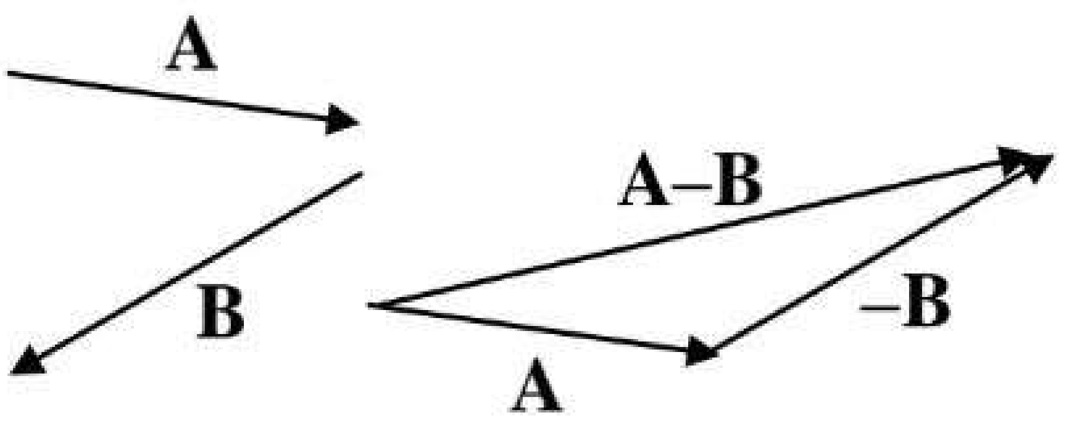

شكل (2-7) محصلة ثلاث متجهات بطريقة المثلث

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (2\text{-}3)$$

وتسمى هذه المعادلة بقانون الترافق للجمع.

- **طرح المتجهات:**

إن عملية طرح المتجهات شبيهة بعملية جمع المتجهات، فمثلاً **A – B** هو متجه جديد **C** ولتحديد المتجه **C** نقوم برسم المتجه **A** أولاً ومن رأس هذا المتجه نرسم سهماً موازياً ومعاكساً في الاتجاه للمتجه **B**. إن هذا السهم يمثل المتجه **B**–، وبذلك تكون المحصلة **C** هي المتجه الذي يبدأ من بداية المتجه **A** وينتهي عند رأس المتجه **B**– شكل (2-9). تمثل هذه العملية رياضياً بالمعادلة (2-5).



شكل (2-9) طرح المتجهات

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B} \qquad (2\text{-}4)$$

- **ضرب المتجهات بكمية قياسية:**

يمكن ضرب المتجه بكمية قياسية فمثلاً $2\mathbf{A}$ تعني متجه جديد مقداره 2A واتجاهه هو نفس اتجاه **A**. وبصورة عامة فإن ضرب المتجه **A** بالكمية القياسية c يعطي المتجه c**A** و اتجاهه هو نفس اتجاه **A** إذا كانت الكمية القياسية c موجبة. وعكس اتجاه **A** إذا كانت الكمية القياسية c سالبة.

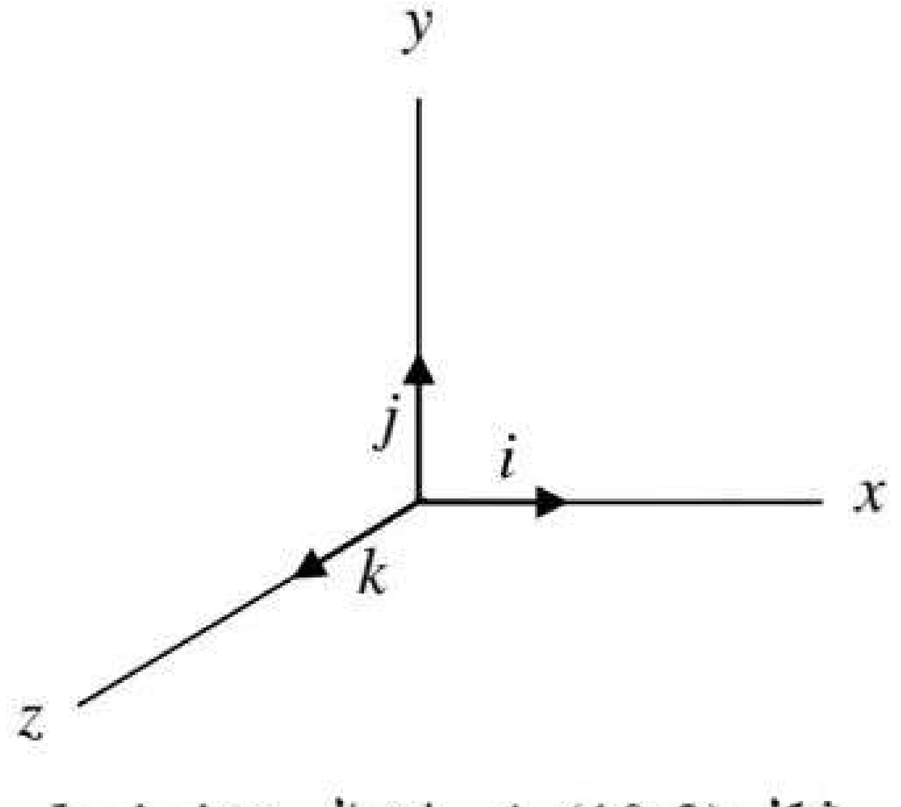
من الأمثلة الفيزيائية على ضرب المتجه بكمية قياسية الزخم الخطي (كمية التحرك الخطية) **P** وهو حاصل ضرب الكتلة $m$ في متجه السرعة **v** ويعطي بالعلاقة (2-6).

$$\mathbf{P}=m\,\mathbf{v} \qquad (2\text{-}5)$$

## 2-2 متجهات الوحدة Unit vectors

متجه الوحدة هو متجه له اتجاه معين وقيمته هي الوحدة (Unity)، وليس له وحدة قياس أو بُعد.

يوجد ثلاث متجهات وحدة في نظام الإحداثيات الكارتيزية (الديكارتية) هي $\boldsymbol{i}$ و $\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{k}$ (يدويا تكتب $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$) حيث أن هذه المتجهات تشير إلى الاتجاه الموجب للمحاور $x$ و $y$ و $z$ على الترتيب كما هو موضح في الشكل (2-10) ، فمثلا إذا كان المتجه **A** يتجه باتجاه $x$ الموجب وقيمته A و **B** يتجه باتجاه $y$ الموجب وقيمته $B$ و **C** باتجاه z الموجب وقيمته $C$ فإن هذا المتجهات تكتب على الترتيب بالصورة الاتجاهية التالية :



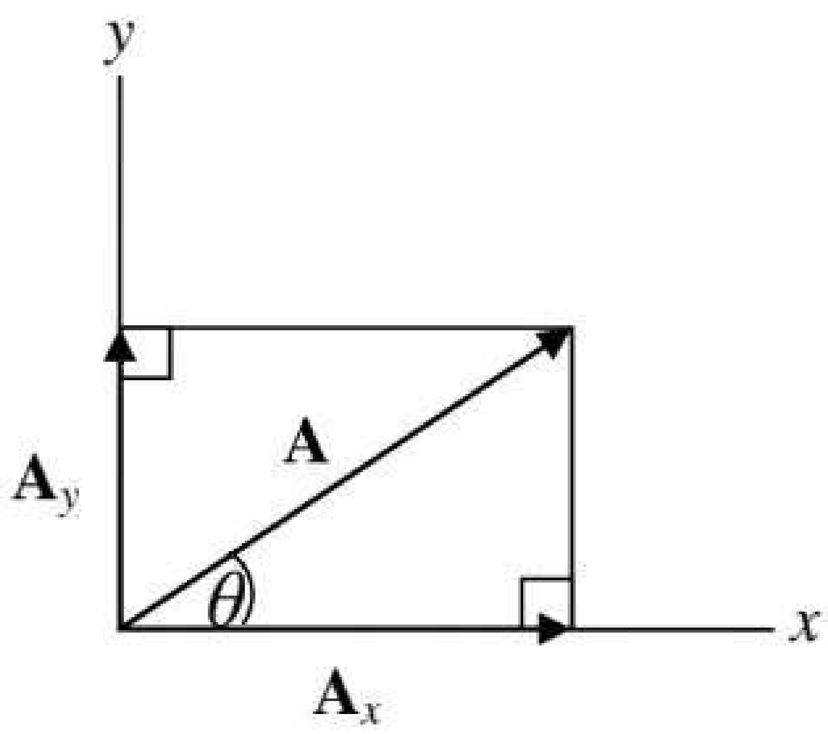
شكل (2-10) متجهات الوحدة $\boldsymbol{i}$ و$\boldsymbol{j}$ و$\boldsymbol{k}$ تتجه في الاتجاه الموجب للمحاور الثلاثة $x$ و$y$ و$z$ على الترتيب

$$\mathbf{A} = A\,\boldsymbol{i}\,,\;\; \mathbf{B} = B\boldsymbol{j}\,,\;\; \mathbf{C} = C\,\boldsymbol{k}$$

**ملاحظة :** وجود الإشارة السالبة أمام أي متجه وحدة يدل على الاتجاه المعاكس فمثلا $-\boldsymbol{i}$ تشير إلى الاتجاه السالب لمحور $x$ .

## 3-2 تحليل المتجهات Analysis of vectors

يمكن تحليل أي متجه $\mathbf{A}$ واقع في المستوى $xy$ إلى متجهين متعامدين ، الأول موازي لمحور $x$ $(\mathbf{A}_x)$ والآخر موازي لمحور $y$ $(\mathbf{A}_y)$ وتكون محصلتهما هي نفس المتجه $\mathbf{A}$ :




شكل (2-11) تحليل المتجه $\mathbf{A}$
إلى مركبتين متعامدتين

$$\boxed{\mathbf{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j}} \qquad (2\text{-}7)$$

فإذا كان المتجه $\mathbf{A}$ يصنع زاوية مقدارها $\theta$ مع الاتجاه الموجب لمحور $x$ كما هو بالشكل (2-11) وأسقطنا من رأس المتجه $\mathbf{A}$ عمودين على المحورين $x$ و $y$ فإن الكميتين $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ هما مركبتا المتجه $\mathbf{A}$ ومن الشكل نجد أن :

$$\boxed{A_x = A\cos\theta\,,\;\; A_y = A\sin\theta} \qquad (2\text{-}8)$$

- إن المركبتين $A_x$ و $A_y$ أرقام يمكن أن تكون موجبه أو سالبه ( أو صفر) و تسمى عملية إيجادهما بتحليل المتجه إلى مركباته .
- إن المركبتين $A_x$ و $A_y$ تشكلان ضلعين من مثلث قائم الزاوية بينما يشكل $A$ وتر هذا المثلث و بتطبيق نظرية فيثاغورث نجد أن قيمة المتجه $\mathbf{A}$ تعطى كما في المعادلة (2-9) :

$$\mathrm{A}^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2$$

$$\boxed{\mathrm{A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \qquad (2\text{-}9)$$


شكل (2-12) إشارة المركبات
حسب الربع الذي يقع فيه المتجه

ومن الشكل (2-11) نجد أن

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad (2\text{-}10)$$

وعند حلها لإيجاد

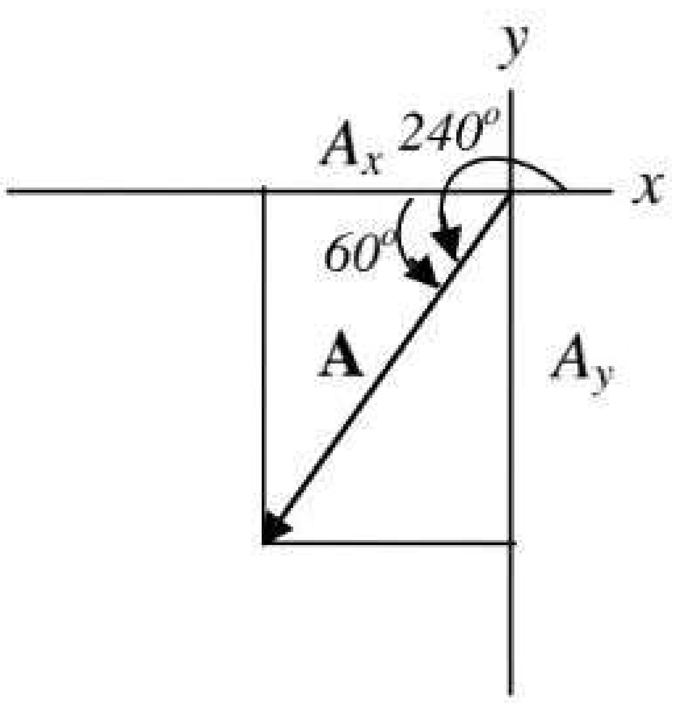
قيمة θ فإننا نكتب
$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}} \qquad (2\text{-}11)$$

المعادلة (2-11) تقرأ θ تساوي الزاوية التي ظلها $\frac{A_y}{A_x}$ ، وتعتبر قيمه $\theta$ المسئولة عن تحديد إشارات المركبات $A_y$ و $A_x$ لأن الزاوية $\theta$ تحدد الربع الذي يقع فيه المتجه **A** . الشكل (2-12) يلخص إشارات المركبات في كل ربع.

**مثال (2-1)**

احسب المركبتين السينية والصادية للمتجهات التالية:

أ- متجه **A** قيمته 6 وحدات ويصنع زاوية مقدارها $240^o$ مع الاتجاه الموجب لمحور $x$




**الحل:**

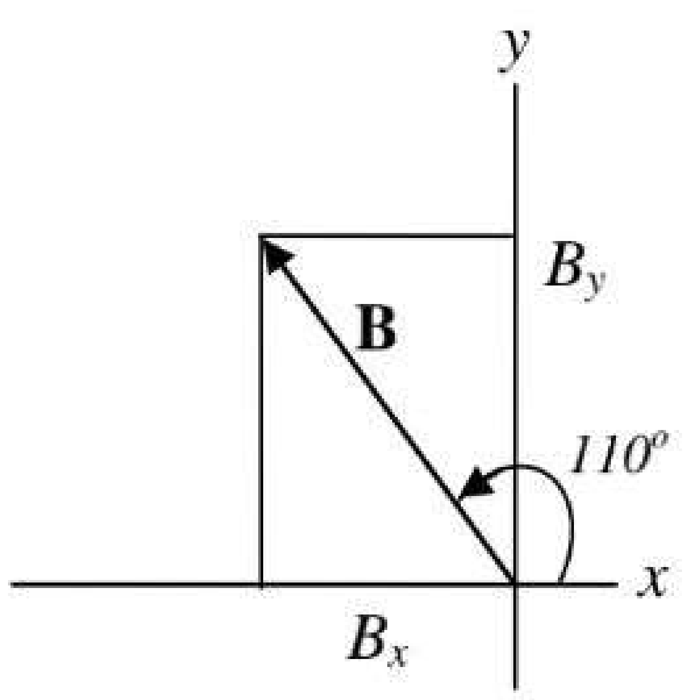
$$A_x = A\cos 240 = 6\times(-1/2) = -3$$
$$A_y = A\sin 240 = 6\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -5.2$$

**حل آخر:**

$$A_x = -A\cos 60 = -6\times(1/2) = -3$$
$$A_y = -A\sin(60) = -5.2 = -6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**ب-** متجه **B** قيمته 5 وحدات و يصنع زاوية مقدارها $110^0$ مع الاتجاه الموجب لمحور $x$

**الحل:**




$$B_x = B\cos 110 = -1.7$$
$$By = B\sin 110 = 4.7$$

## 4-2 محصلة المتجهات Resultant of vectors

تستخدم طريقه تحليل المتجهات لإيجاد محصلة مجموعة منها فإذا فرضنا مثلاً ثلاثة متجهات **A** و **B** و **C** في مستوى واحد و تصنع الزوايا $\theta_1$ ، $\theta_2$ ، $\theta_3$ مع الاتجاه السيني على الترتيب فإن مركبات هذه المتجهات في الاتجاه السيني هي:

$$A_x = A\cos\theta_1 \quad , \quad B_x = B\cos\theta_2 \quad , \quad C_x = C\cos\theta_3$$

وتكون محصله هذه المركبات في الاتجاه السيني هي:

$$R_x = A_x + B_x + C_x = A\cos\theta_1 + B\cos\theta_2 + C\cos\theta_3$$

بالمثل بالنسبة للمركبات العمودية في الاتجاه الصادي تكون محصلتها

$$R_y = A_y + B_y + C_y = A\sin\theta_1 + B\sin\theta_2 + C\sin\theta_3$$

قيمة محصلة مجموعة المتجهات تكون هي نفسها محصله المركبات السينية و الصادية و تعطي بالمعادلة

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}} \qquad (2\text{-}12)$$

ويمكن إيجاد اتجاه المحصلة أي الزاوية θ التي تصنعها مع المحور السيني من المعادلة

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}} \qquad (2\text{-}13)$$

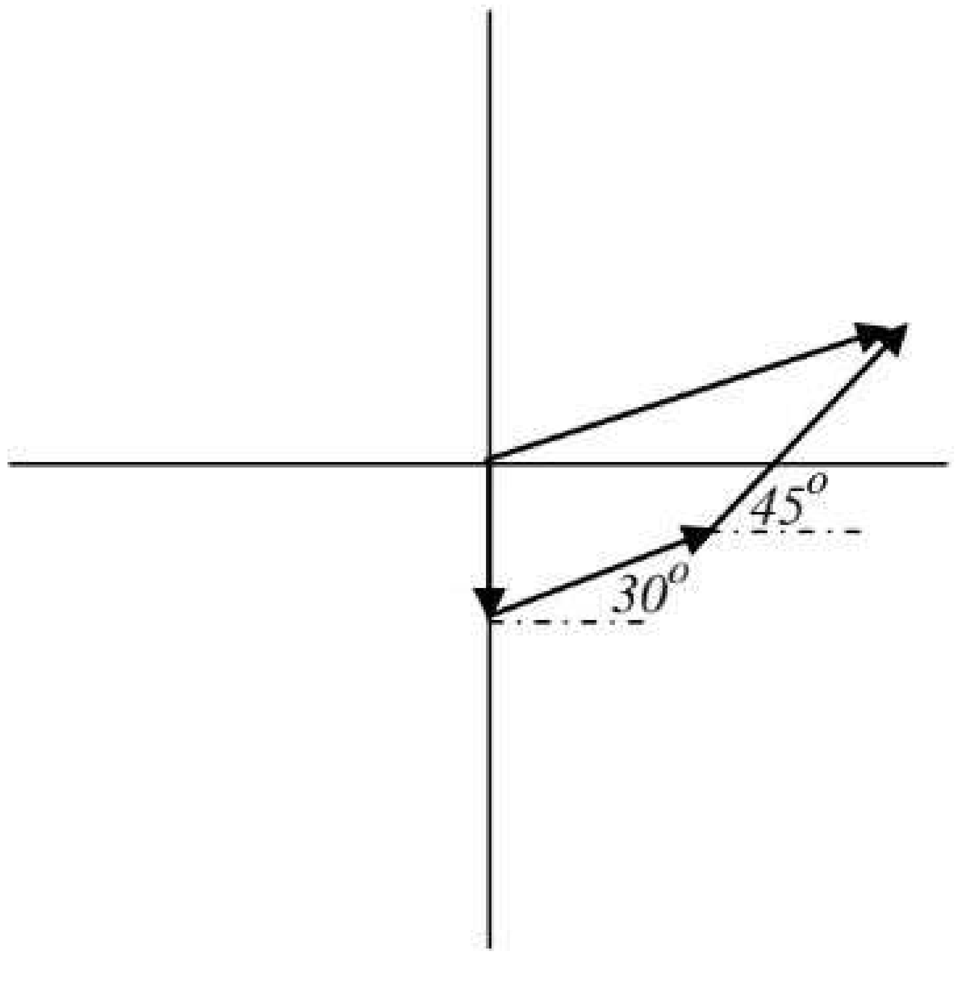
ويمكن كتابة محصلة مجموعة من المتجهات بصورتها الاتجاهية كما يلي:

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (A_x + B_x + C_x)\,\boldsymbol{i} + (A_y + B_y + C_y)\,\boldsymbol{j} + (A_z + B_z + C_z)\,\boldsymbol{k}} \qquad (2\text{-}14)$$

**مثال (2-2)**

يخرج سائح من مدينة صنعاء فيقطع مسافة *10 km* باتجاه الجنوب ، ثم يسير مسافة *15 km* باتجاه يصنع $30^o$ شمال شرق ثم يقطع مسافة *20 km* باتجاه الشمال الشرقي. ما هو موضع السائح بالنسبة لمدينة غزة ؟

**الحل:**




شكل (2-13) مثال (1)

إن المسافات التي يقطعها السائح هي متجهات إزاحة لكل منها مقدار و اتجاه، فالمسألة هي جمع متجهات.

الرسم يوضح الحالات المتعاقبة لسير السائح و يوضح موقعه الحالي من مدينة صنعاء والتي تمثل نقطة الأصل، ولإيجاد قيمة واتجاه المحصلة (الموضع بالنسبة لمدينة غزة) نعمل على تحليل الإزاحات الثلاثة في الاتجاهين السيني والصادي ثم نحسب المحصلة مقدارا واتجاها.

$$R_x = 0 + 15\cos 30 + 20\cos 45 = 15 \times 0.866 + 20 \times 0.707 = 27.13\ Km$$

$$R_y = -10 + 15\sin 30 + 20\sin 45 = -10 + 15 \times 0.5 + 20 \times 0.707 = 11.64\ Km$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(27.13)^2 + (11.64)^2} = \sqrt{736 + 135.5} = \sqrt{871.5} = 29.5 Km$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{11.64}{27.13} = \tan^{-1} 0.429$$

$$\theta = 23.2^o$$

**ملاحظة/** يمكن كتابة المحصلة بصورتها الاتجاهية كما يلي:

$$\mathbf{R} = R_x\,\boldsymbol{i} + R_y\,\boldsymbol{j} = 27.13\,\boldsymbol{i} + 11.64\,\boldsymbol{j}$$

**مثال (2-2)**

Two vectors are given by $\vec{A} = 3i - 2j$ and $\vec{B} = -i - 4j$. Calculate (a) $\vec{A} + \vec{B}$, (b) $\vec{A} - \vec{B}$, (c) $|\vec{A} + \vec{B}|$, (d) $|\vec{A} - \vec{B}|$, and (e) the direction of $\vec{A} + \vec{B}$ and $|\vec{A} - \vec{B}|$.

الحل

(a) $\vec{A} + \vec{B} = (3i - 2j) + (-i - 4j) = 2i - 6j$

(b) $\vec{A} - \vec{B} = (3i - 2j) - (-i - 4j) = 4i + 2j$

(c) $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 6.32$

(d) $|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47$

(e) For $\vec{A} + \vec{B}$, $\theta = \tan^{-1}(-6/2) = -71.6^\circ = 288^\circ$

For $\vec{A} - \vec{B}$, $\theta = \tan^{-1}(2/4) = 26.6^\circ$

## 5-2 ضرب المتجهات Product of vectors

## الضرب العددي للمتجهات Vectors scalar product

القوة والإزاحة كميتين فيزياويتين متجهتين , حاصل ضرب مقداريهما إذا كانا في الإتجاه نفسه ينتج الشغل وهو كمية فيزياوية عددية غير متجهة . أما إذا كانت القوة في إتجاه غير إتجاه الإزاحة فإن الشغل ينتج عن ضرب الإزاحة في مسقط القوة على الإزاحة (مركبة القوة بإتجاه الإزاحة) , أو بالعكس . ويمكن أيضا حساب الشغل بضرب مركبات متجهي القوة والإزاحة المتماثلة .

هذه العملية تسمى " الضرب العددي للمتجهات " والمثال أعلاه هو تطبيق فيزياوي لها . ويرمز لحاصل الضرب العددي للمتجهين A و B ب (B.A) وتقرأ (A dot B) , وتحسب كالآتي :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$$

والعلاقة الاولى يمكن الحصول عليها بعملية ضرب مباشرة بين المركبات المتماثلة للمتجهات . علماً إن :

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$
$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$$

وفي الجدول التالي بعض أهم الأمثلة التطبيقية لعملية الضرب العددي !

| المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ | مقدار $\vec{A}.\vec{B}$ | الزاوية بين متجهين $\theta$ | $\vec{A}.\vec{B} = \lvert A\rvert\lvert B\rvert\cos\theta$ |
|---|---|---|---|
| متوازيان | أكبر ما يمكن | 0 | $\vec{A}.\vec{B} = \lvert A\rvert\lvert B\rvert$ |
| متعاكسان | أصغر ما يمكن | $\pi$ | $\vec{A}.\vec{B} = -\lvert A\rvert\lvert B\rvert$ |
| متعامدان | مساويا للصفر | $\pi/2$ | $\vec{A}.\vec{B} = 0$ |

وبالإمكان أيضا إثبات القواعد الحسابية التالية :

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$
$$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$
$$m(\vec{A}.\vec{B}) = m\vec{A}.\vec{B}$$

أما قانون الجيب تمام Low of cosines $(C^2 = A^2 + 2\text{AB}\cos\theta + B^2)$ فبالإمكان إثباته أيضا , وكالآتي:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{C}.\vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A}.\vec{A} + 2\vec{A}.\vec{B} + \vec{B}.\vec{B}$$
$$C^2 = A^2 + 2AB\cos\theta + B^2$$

مثال 1: إذا علمت أن المتجهان $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ فجد :

a) حاصل الضرب العددي للمتجهين $(\vec{A}.\vec{B})$ ؟

b) الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

<u>الجواب</u>

<u>a</u>

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})\cdot(-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -2\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}}\cdot 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\cdot 2\hat{\mathbf{j}} \\ &= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1) \\ &= -2 + 6 = \boxed{4}\end{aligned}$$

<u>b</u> لحساب الزاوية المحصورة بين متجهين علينا إيجاد مقدار كل من المتجهين .

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8.06} = \boxed{60.2^\circ}$$

مثال 2 : يتحرك جسم في المستوي xy قاطعاً إزاحة $\Delta r = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})\ m$ تحت تأثير قوة $F = (5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\ N$ . فما مقدار الإزاحة والقوة ؟ وما مقدار الشغل المنجز ؟

<u>الجواب</u>

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = \boxed{3.6\,\text{m}}$$

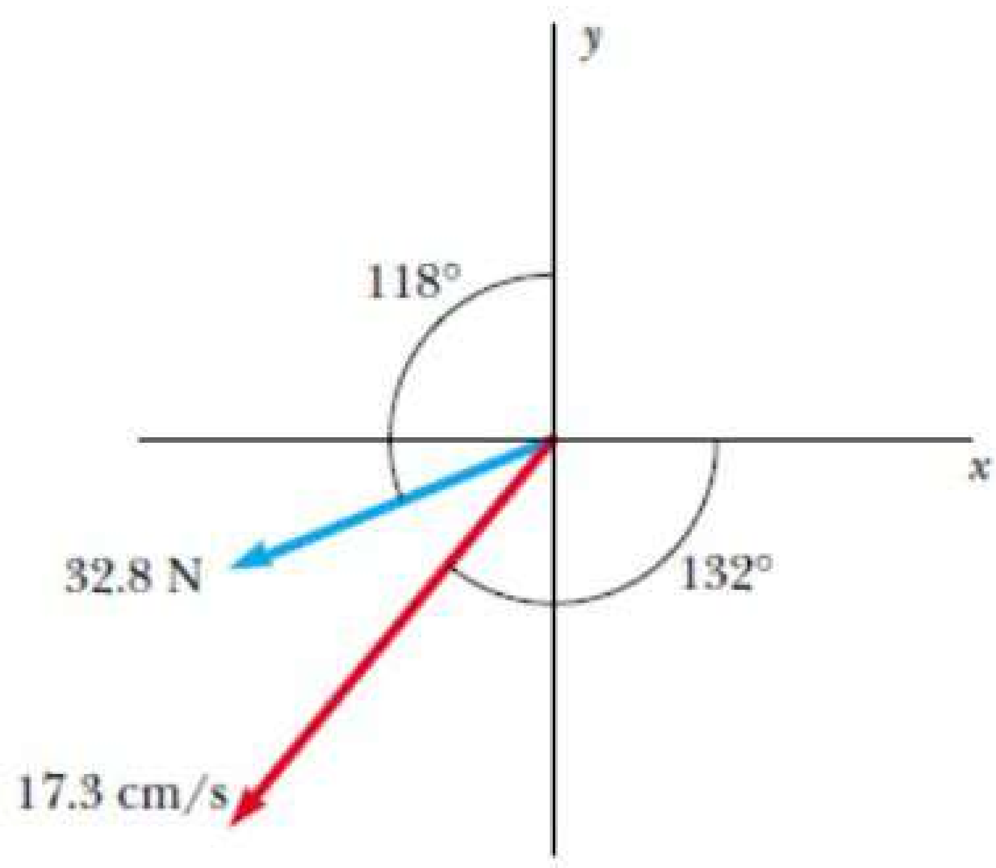
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = \boxed{5.4\,\text{N}}$$

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = [(5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{N}] \cdot [(2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{m}]$$
$$= (5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{N \cdot m}$$
$$= [10 + 0 + 0 + 6]\,\mathrm{N \cdot m} = \boxed{16\,\mathrm{J}}$$

## تمارين

1. القوة $F = (6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})\ N$ تؤثر على جسم , فيتحرك قاطعاً إزاحة $\Delta r = (3\hat{\imath} + \hat{\jmath})\ m$ . جد : (a) الشغل المنجز من قبل القوة على الجسم ؟ (b) الزاوية المحصورة بين متجهي القوة والإزاحة ؟

2. جد حاصل الضرب العددي للمتجهين المرسومين في الشكل أدناه ؟



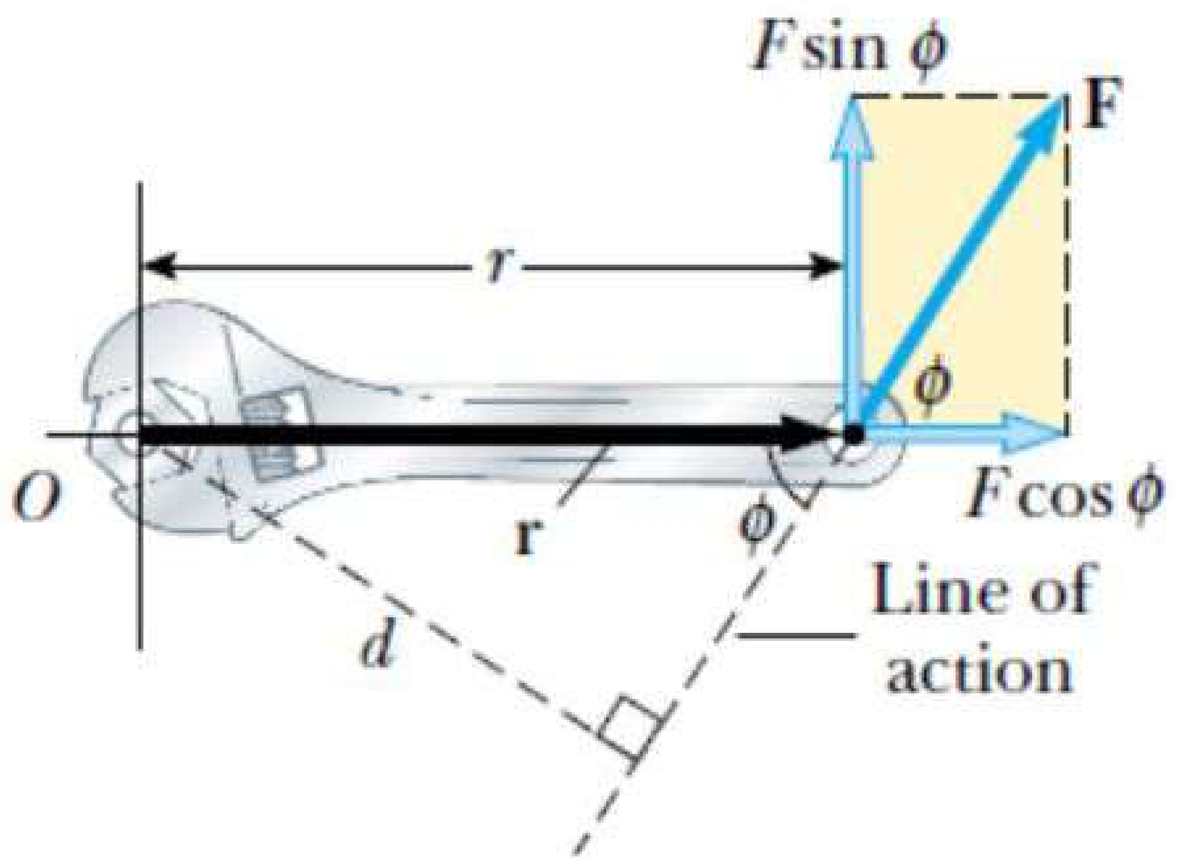

3. بإستخدام قانون الضرب العددي للمتجهات جد الزاوية المحصورة بين المتجهين:

a) $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$
b) $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$
c) $\vec{A} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ و $\vec{B} = 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

4. جد $\vec{C}.(\vec{A} + \vec{C})$ ؟ إذا علمت إنَ : $\vec{A} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ و $\vec{C} = 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ .

## الضرب الإتجاهى The Vector product

من الصعب جداً فتح صامولة برغي باليد إذا كانت محكمة الغلق . لكن يمكن فتحها بسهولة إذا إستخدمنا لذلك مِفَك خاص بها يسلط قوة عمودية على إتجاه البرغي , وتزداد هذه السهولة كلما كبرت عتلة المِفَك . وبصياغة فيزياوية يمكن القول ( يزداد العزم المدور كلما بعدت القوة المدورة عن محور الدوران ) وإن ( إتجاه العزم المدور يكون عموديا على محور الدوران ) . كما موضح في الشكل التالي :



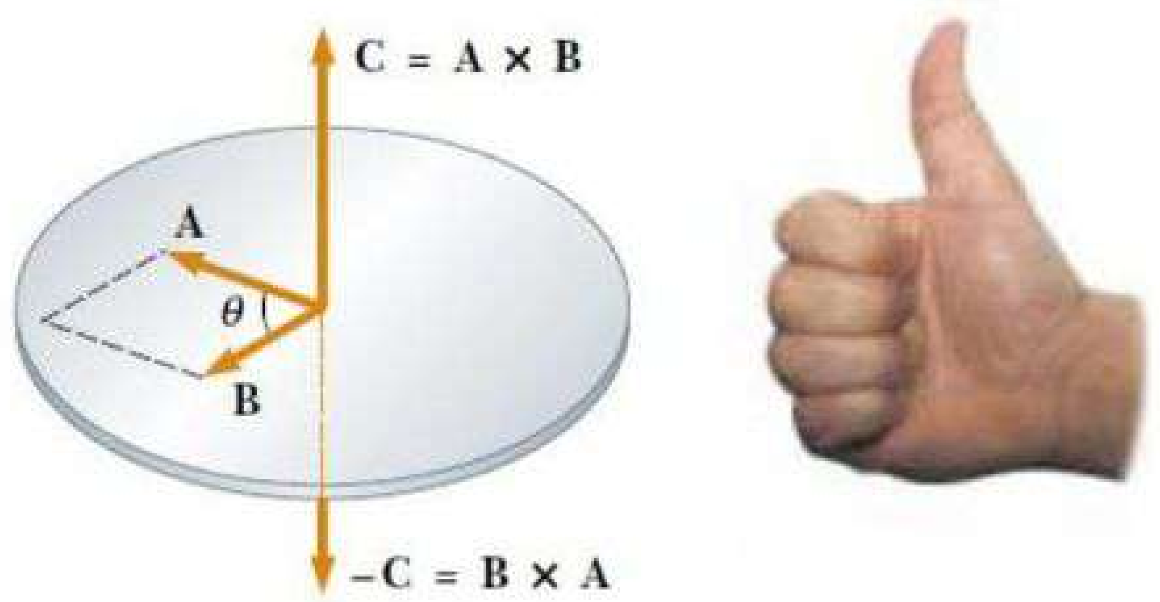

إن حاصل ضرب القوة المدورة في ذراع عتلة التدوير وكلاهما كميتان متجهتان ينتج عنه متجه ثالث عمودي عليهما يسمى العزم . عملية الضرب هذه تختلف عن عملية الضرب العددي للمتجهات إذ ينتج عنها كمية متجهة وليست عددية . هذا النوع من الضرب يسمى " الضرب الإتجاهي " .

يُمَثل الضرب الإتجاهي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمز $\vec{A} \times \vec{B}$ ويقرأ $\vec{A}\ cross\ \vec{B}$ ويمكن حساب مقداره بإستخدام العلاقة التالية :

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = |A||B| \sin \emptyset}$$

حيث إن $\emptyset$ تمثل الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ .

أما إتجاهه فإن أفضل طريقة لتحديده هي " قاعدة اليد اليمنى " إذ نشير بأصابع اليد الأربعة الى إتجاه المتجه $\vec{A}$ ونحركها بإتجاه المتجه $\vec{B}$ عبر الزاوية $\emptyset$ , عند ذلك فإن إتجاه الإبهام سيمثل إتجاه $\vec{A} \times \vec{B}$ .



ويمكن أيضا التعبير عن الضرب الإتجاهي لمتجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بدلالة مركباتهما . وكالآتي :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\mathbf{i}} - (A_xB_z - A_zB_x)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}}$$

إذا علمنا إن الضرب الإتجاهي لوحدات المتجه هو :

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$
$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$
$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

ويمكن إيراد بعض خواص عملية الضرب الإتجاهي وكالآتي :

1. خلافاً لعملية الضرب العددي , فإن عملية الضرب الإتجاهي **غير** إبدالية : $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ .
2. إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ ( $\emptyset = 0°$ أو $180°$ ) فإن : $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ . وعلى هذا فإن : $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ .
3. إذا كان المتجه $\vec{A}$ عموديا على المتجه $\vec{B}$ ( $\emptyset = 90°$ ) فإن : $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$ .
4. يمكن التوزيع في عملية الضرب الإتجاهي : $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ .

مثال3: إذا كان $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ . جد $\vec{A} \times \vec{B}$ وإثبت إن $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ ؟

<u>الجواب</u> :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$
$$= 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) = 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} = 7\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \times (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$$

$$= -\hat{\mathbf{i}} \times 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{i}} = -3\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{k}} = \boxed{-7\hat{\mathbf{k}}}$$

$\therefore \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

مثال4: إذا أثرت قوة $\vec{F} = (2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath})\ N$ على بُعد $\vec{r} = (4.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})\ m$ من محور دوران جسم . فما هو العزم الناتج ؟

الجواب :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\text{ m}] \\
&\quad \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\text{ N}] \\
&= [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \\
&\quad + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} \\
&\quad + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}]\text{ N}\cdot\text{m} \\
&= [12.0\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + 10.0\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}]\text{ N}\cdot\text{m} \\
&= [12.0\hat{\mathbf{k}} - 10.0\hat{\mathbf{k}})\text{ N}\cdot\text{m} \\
&= \boxed{2.0\hat{\mathbf{k}}\text{ N}\cdot\text{m}}
\end{aligned}$$

إن إتجاه العزم يكون بإتجاه المحور $z$ إذا كان كل من المتجهين $F$ و $r$ يقعان في المستوى $xy$ .

## Quick Quiz 2

أي الخيارات التالية يُعد مكافئاً لناتج حاصل ضرب $(\vec{B} \times \vec{A}).(\vec{A} \times \vec{B})$ ؟

a) $(\vec{A}.\vec{B}) + (\vec{B}.\vec{A})$
b) $(\vec{A} \times \vec{A}).(\vec{B} \times \vec{B})$
c) $(\vec{A} \times \vec{B}).(\vec{A} \times \vec{B})$
d) $-(\vec{A} \times \vec{B}).(\vec{A} \times \vec{B})$