

要将除去线段 $[1, 2]$ 的单位圆盘外部映射到上半平面，可以通过以下步骤构造单叶全纯映射：

步骤解析

1. 将线段 $[1, 2]$ 映射到负实轴：

使用分式线性变换 $f_1(z) = \frac{z-2}{z-1}$ 。当 $z \in [1, 2]$ 时， $f_1(z)$ 的值为负实数，因此线段 $[1, 2]$ 被映射到负实轴 $(-\infty, 0]$ 。

2. 应用平方根函数打开负实轴：

选择平方根的分支使得复平面去掉负实轴 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 映射到右半平面 $\{\operatorname{Re}(w) > 0\}$ 。因此， $f_2(w) = \sqrt{w}$ 。

3. 将右半平面旋转到上半平面：

通过乘以 i ，将右半平面旋转为上半平面，即 $f_3(\zeta) = i\zeta$ 。

复合映射

最终的映射为上述步骤的复合：

$$f(z) = i \cdot \sqrt{\frac{z-2}{z-1}}.$$

分支选择

- 当 z 在单位圆外部 ($|z| > 1$) 且不在 $[1, 2]$ 时， $\frac{z-2}{z-1}$ 不在负实轴上。选择平方根分支使得 $\sqrt{\frac{z-2}{z-1}}$ 的幅角在 $(-\pi/2, \pi/2)$ ，即结果位于右半平面。
- 乘以 i 后，右半平面被旋转为上半平面 $\operatorname{Im}(w) > 0$ 。

验证

- 单叶性**：每一步变换（分式线性、平方根、旋转）均为单叶映射，复合后保持单叶性。
- 像集覆盖**：原区域 $|z| > 1 \setminus [1, 2]$ 的像覆盖整个上半平面。

最终答案

所求的单叶全纯映射为：

$$f(z) = i \sqrt{\frac{z-2}{z-1}}$$

其中平方根分支选择使得结果位于上半平面。