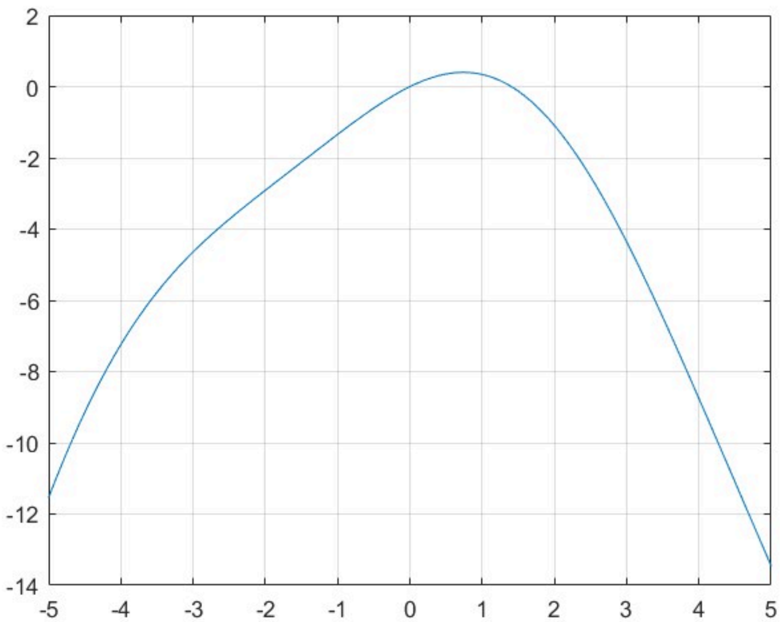
第六次作业

6.5.1

由 sin（x）的有界性，易知零点只会在 x=0 附近，先作图找大概范围。零点只会在0附近和区间[1,2]。为了找出收敛域，我们取初值的步长为0.01



fzero: 零点x=0的收敛域为 $[-5, 0.73]$,迭代次数在7到12之间；零点x=1.404的收敛域为 $[0.73, 14.79]$,迭代次数在4到13之间

```
fzero: 初值 -5.030 发散
fzero: 初值 -5.020 发散
fzero: 初值 -5.010 → 根 0.000000 ,迭代次数: 12
 fzero: 初值 -5.000 → 根 0.000000 ,迭代次数: 12
```

```
fzero: 初值 0.700 → 根 0.000000 ,迭代次数: 7
fzero: 初值 0.710 → 根 -0.000000 ,迭代次数: 7
fzero: 初值 0.720 → 根 0.000000 ,迭代次数: 8
fzero: 初值 0.730 → 根 0.000000 ,迭代次数: 8
fzero: 初值 0.740 → 根 1.404415 ,迭代次数: 5
fzero: 初值 0.750 → 根 1.404415 ,迭代次数: 6
```

```
 fzero: 初值 14.780 → 根 1.404415 ,迭代次数: 4
 fzero: 初值 14.790 → 根 1.404415 ,迭代次数: 4
 fzero: 初值 14.800 发散
fzero: 初值 14.810 发散
fzero: 初值 14.820 发散
```

fsolve: 零点x=0的收敛域为 $[-\infty, 0.73]$,迭代次数在4到任意大（取决于初值绝对值有多大）；零点x=1.404的收敛域为 $[0.73, +\infty)$,迭代次数可从6到任意大（取决于初值有多大）

```
fsolve: 初值 -445.050 → 根 -0.000000 ,迭代次数: 17
fsolve: 初值 -445.040 → 根 -0.000000 ,迭代次数: 17
fsolve: 初值 -445.030 → 根 -0.000000 ,迭代次数: 17
```

```
fsolve: 初值 0.730 → 根 -0.000000 ,迭代次数: 4
fsolve: 初值 0.740 → 根 1.404415 ,迭代次数: 6
fsolve: 初值 0.750 → 根 1.404415 ,迭代次数: 6
```

```
fsolve: 初值 999.970 → 根 1.404415 ,迭代次数: 19
fsolve: 初值 999.980 → 根 1.404415 ,迭代次数: 19
fsolve: 初值 999.990 → 根 1.404415 ,迭代次数: 19
fsolve: 初值 1000.000 → 根 1.404415 ,迭代次数: 19
```

fcustom: 不会收敛到零点x=0；零点x=1.404的收敛域为 $[-\infty, +\infty]$,迭代次数可从12到任意大

```
fcustom: 初值 -759.310 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
fcustom: 初值 -759.300 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
fcustom: 初值 -759.290 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
fcustom: 初值 -759.280 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
fcustom: 初值 -759.270 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
```

```
fcustom: 初值 -0.090 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 -0.080 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 -0.070 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 -0.060 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 -0.050 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 -0.040 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 -0.030 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 -0.020 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 -0.010 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 0.000 → 根 0.000000 ,迭代次数: 1
fcustom: 初值 0.010 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 0.020 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 0.030 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 0.040 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 0.050 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 0.060 → 根 1.404415 ,迭代次数: 15
fcustom: 初值 0.070 → 根 1.404415 ,迭代次数: 14
fcustom: 初值 0.080 → 根 1.404415 ,迭代次数: 14
fcustom: 初值 0.090 → 根 1.404415 ,迭代次数: 14
```

```
fcustom: 初值 999.960 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
fcustom: 初值 999.970 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
fcustom: 初值 999.980 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
fcustom: 初值 999.990 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
fcustom: 初值 1000.000 → 根 1.404415 ,迭代次数: 12
```

newton: 零点x=0的收敛域为 $[-\infty, 0.73]$,迭代次数可从10到任意大；零点x=1.404的收敛域为 $[0.73, +\infty]$,迭代次数可从9到任意大

```
newton: 初值 -703.620 → 根 0.000000 ,迭代次数: 16
newton: 初值 -703.610 → 根 0.000000 ,迭代次数: 16
newton: 初值 -703.600 → 根 0.000000 ,迭代次数: 16
newton: 初值 -703.590 → 根 0.000000 ,迭代次数: 16
newton: 初值 -703.580 → 根 0.000000 ,迭代次数: 16
newton: 初值 -703.570 → 根 0.000000 ,迭代次数: 16
```

```
newton: 初值 0.710 → 根 0.000000 ,迭代次数: 10
newton: 初值 0.720 → 根 0.000000 ,迭代次数: 11
newton: 初值 0.730 → 根 0.000000 ,迭代次数: 12
newton: 初值 0.740 → 根 1.404415 ,迭代次数: 14
newton: 初值 0.750 → 根 1.404415 ,迭代次数: 10
newton: 初值 0.760 → 根 1.404415 ,迭代次数: 9
newton: 初值 0.770 → 根 1.404415 ,迭代次数: 9
```

```
newton: 初值 499.970 → 根 1.404415 ,迭代次数: 14
newton: 初值 499.980 → 根 1.404415 ,迭代次数: 14
newton: 初值 499.990 → 根 1.404415 ,迭代次数: 14
newton: 初值 500.000 → 根 1.404415 ,迭代次数: 14
```

主程序 code:

```
% 作图
x = -5:0.01:5;
f = @(x) sin(x) - x.^2 /2
ff = @(x) sqrt(2*sin(x));
df = @(x) cos(x) - x;
y = f(x);
plot(x,y),grid


% 求解
opt = optimset('TolX', 1e-8, 'Display', 'off');
x1 = -10:0.01:500;

% fzero
for x0 = x1
    [root1, fv1, ef1, out1] = fzero(f, x0, opt);
    if ef1> 0 % 收敛
        fprintf('fzero: 初值 %.3f → 根 %.6f ,迭代次数: %d\n ', x0, root1, out1.iterations);
    else
        fprintf('fzero: 初值 %.3f 发散\n', x0);
    end
end

% fsolve
for x0 = x1
    [root2, fv2, ef2, out2] = fsolve(f, x0, opt);
    if ef2> 0 % 收敛1
        fprintf('fsolve: 初值 %.3f → 根 %.6f ,迭代次数: %d\n ', x0, root2, out2.iterations);
    else
        fprintf('fsolve: 初值 %.3f 发散\n', x0);
    end
end

% fcustom
for x0 = x1
    [root2, ef2, iter] = fcustom(ff, x0);
    if ef2> 0 % 收敛1
        fprintf('fcustom: 初值 %.3f → 根 %.6f ,迭代次数: %d\n ', x0, root2, iter);
    else
        fprintf('fcustom: 初值 %.3f 发散\n', x0);
    end
end

% newton
for x0 = x1
    [root2, ef2, iter] = newton1(f, df, x0);
    if ef2> 0 % 收敛1
        fprintf('newton: 初值 %.3f → 根 %.6f ,迭代次数: %d\n ', x0, root2, iter);
    else
        fprintf('newton: 初值 %.3f 发散\n', x0);
    end
```

```
end
```

迭代函数$=\sqrt{2sin(x)}$ 函数 code:

```
function [root, ef, iterations] = fcustom(f, x0)
    tol = 1e-10;
    it_max = 100;
    x = zeros(1, it_max+1);
    x(1) = x0;
    i = 1;
    dx = Inf;
    ef = -1;
    while (abs(dx) > tol*x(i))
        x(i+1) = f(x(i));
        dx = x(i+1) - x(i);
        i = i + 1;
        if i < it_max
            ef = 1;
        else
            error('Reached max iteration number');
            break;
    end
    root = x(i);
    iterations = i - 1;
end
```

newton迭代函数 code:

```
function [root, ef, iterations] = newton1(f, df, x0)
    tol = 1e-10;
    it_max = 100;
    x = zeros(1, it_max+1);
    x(1) = x0;
    i = 1;
    dx = Inf;
    ef = -1;
    while (abs(dx) > tol*x(i))
        x(i+1) = x(i) - f(x(i)) / df(x(i));
        dx = x(i+1) - x(i);
        i = i + 1;
        if i < it_max
            ef = 1;
        else
            error('Reached max iteration number');
            break;
    end
    root = x(i);
    iterations = i - 1;
end
```

6.5.3

（1）模型建立：设：贷款本金为 P，月利率为 r（年利率 R 除以 12，即 $r=\frac{R}{12}$），还款期数为 n 个月，每月还款额为 M

第 1 个月:

- 月初欠款：P
- 月末还款 M 后，剩余本金：

$$P_1 = P(1+r) - M$$

第 2 个月:

- 月初欠款：P_1
- 月末还款 M 后，剩余本金：

$$P_2 = P_1(1+r) - M = [P(1+r) - M](1+r) - M = P(1+r)^2 - M(1+r) - M$$

第 3 个月:

- 月初欠款：P_2
- 月末还款 M 后，剩余本金：

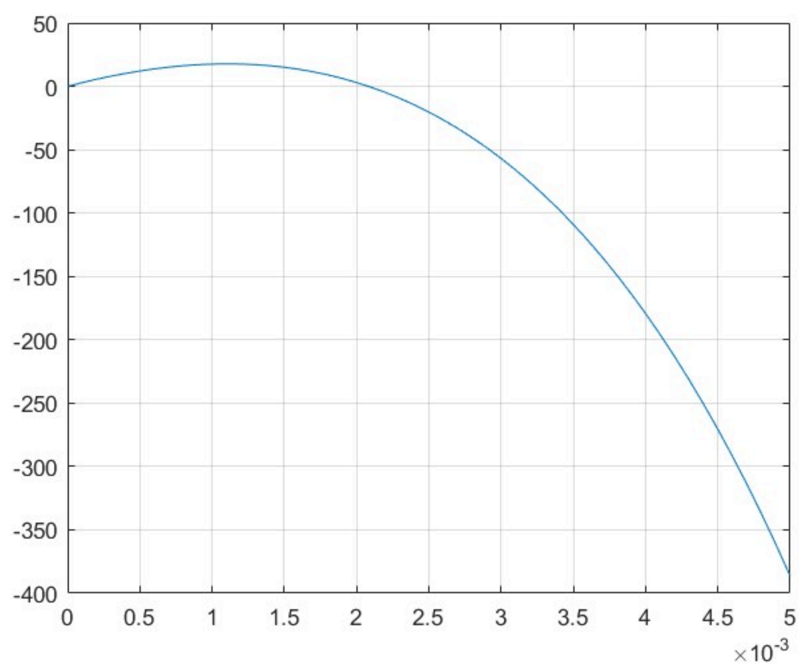
$$P_3 = P_2(1+r) - M = P(1+r)^3 - M(1+r)^2 - M(1+r) - M$$

。。。。。。

第 n 个月:

$$P_n = P(1+r)^n - M\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) + 1\right] \equiv 0$$
$$M[(1+r)^n - 1] = P \cdot r \cdot (1+r)^n$$

带入数据，先作图估计零点在 2×10^{-3} 附近，然后用fzero解方程得月利率0.21%，年利率2.5%



code:

```
% 作图
P = 15e+4;
M =1e+3;
n = 15*12;

r = 0:0.0001:0.005;
f = @(r) M * ((1 + r) .^ n - 1) -P * r .* (1 + r) .^ n
y = f(r);
plot(r,y),grid


% 求解
opt = optimset('TolX', 1e-8, 'Display', 'off');
r0 = fzero(f, 8e-3, opt)
R0 = 12*r0
```

（2）模型大致同（1）n_1, n_2 以及 M_1, M_2稍有不同，详见代码。以年利率做比较，$R_1 = 0.0702, R_2 = 0.0639$，故而第二家较为优惠

code:

```
% 作图
P = 50e+4;
M1 =4500;
n1 = 15*12;
M2 = 45000;
n2 = 20;
f = @(r,M,n) M * ((1 + r) .^ n - 1) -P * r .* (1 + r) .^ n

opt = optimset('TolX', 1e-8, 'Display', 'off');
r1 = fzero(f, 8e-3, opt,M1,n1)
R1 = 12*r1
R2 = fzero(f,12*4e-3,opt,M2,n2)
```

6.5.9

解方程，不动点为 $x^* = 0$， $x^* = ln(a)/b$ 。而不动点稳定的条件是 |f'(x*)| < 1。

$$f'(x) = a(1 - bx)\exp(-bx)$$

对于x* = 0：

$$f'(0) = a$$

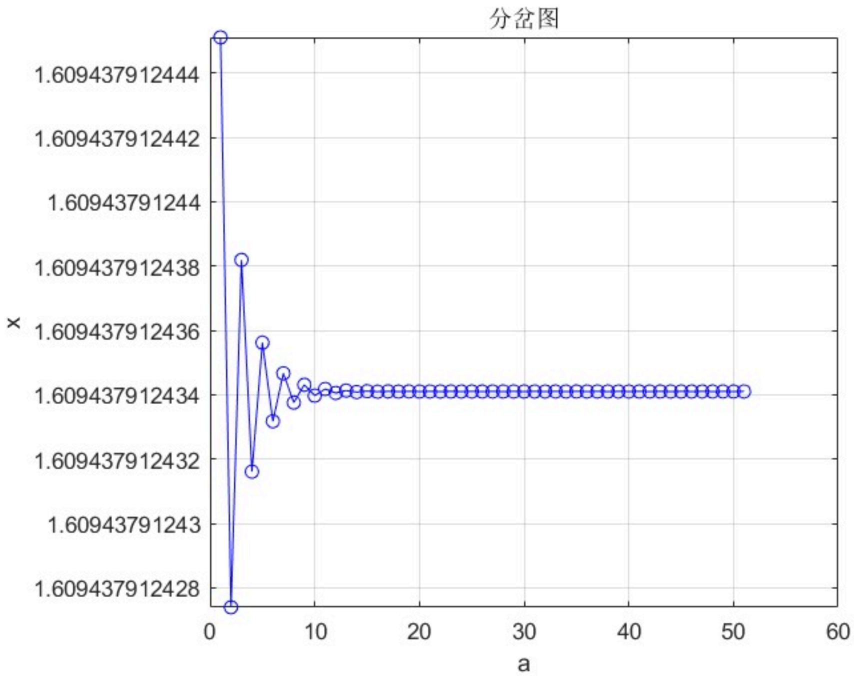
当a < 1时稳定

对于x* = ln(a)/b：

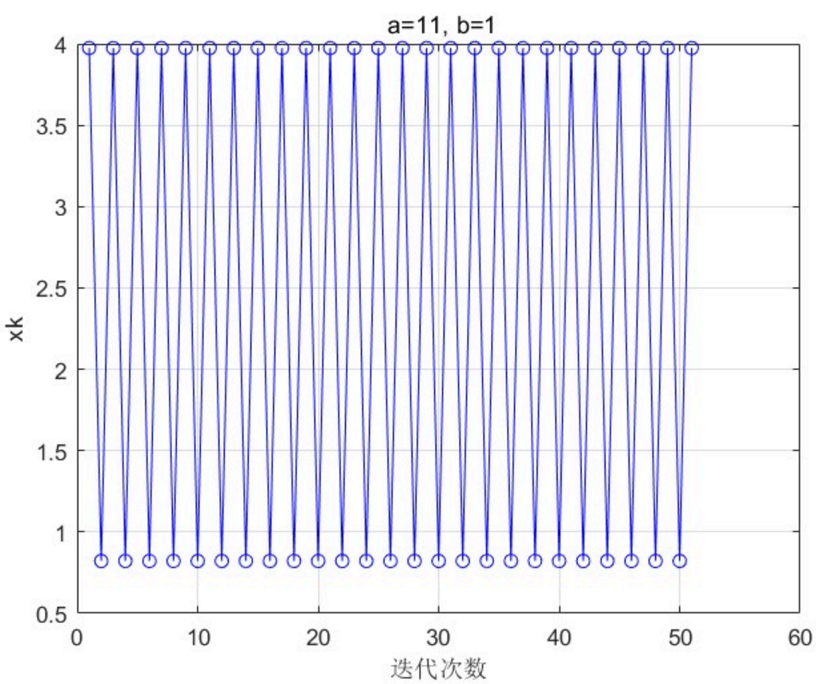
$$f'(x^*) = 1 - ln(a)$$

稳定条件：|1 - ln(a)| < 1 ⇒ 0 < ln(a) < 2 ⇒ 1 < a < e^2 ≈ 7.389

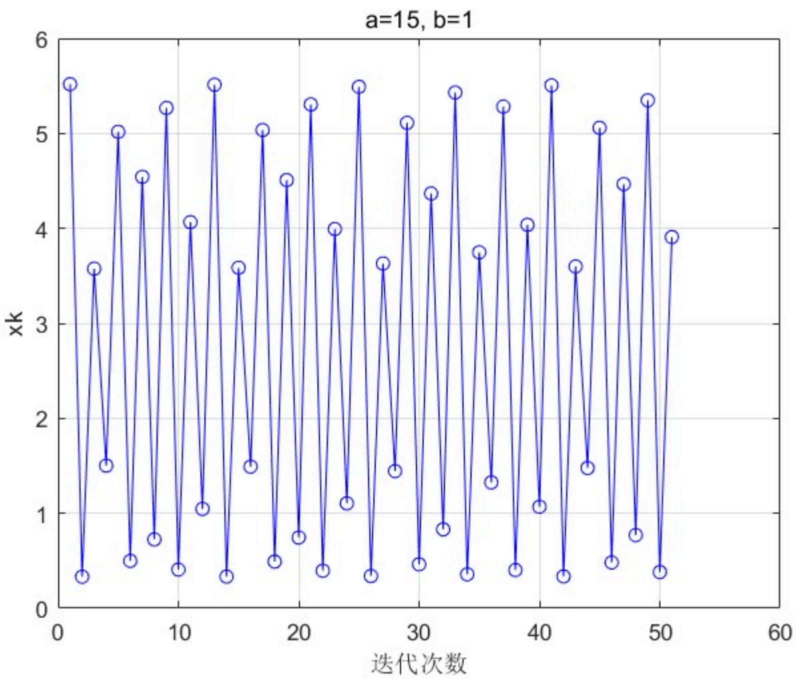
于是 $a=5$ 时收敛于不动点 $x*=ln(a)/b$



$a=10$时 周期2收敛



$a=15$ 时有混沌现象



分岔图如下