Introduction to Statistical Inference

Felipe José Bravo Márquez

November 24, 2020

Populations and Samples

- The main goal of statistical inference is investigate properties about a target **population**.
- Example: What is the average height of the Chilean people?
- In order to draw conclusions about a **population**, it is generally not feasible to gather all the data about it.
- We must make reasonable conclusions about a population based on the evidence provided by **sample data**.
- A **sample staticic** or simply **statistic** is a quantitative measure calculated from the data. Examples: the mean, the standard deviation, the minimum, the maximum.
- Our goal in sampling is to determine the value of a statistic for an entire population of interest, using just a small subset of the population.
- We do this primarily to save time and effort.
- Idea: Why go to the trouble of measuring every individual in the population when just a small sample is sufficient to accurately estimate the statistic of interest? [Poldrack, 2019]

Statistical Inference (2)

- The process of drawing conclusions about a population from sample data is known as **statistical inference**.
- In statistical inference we try to **infer** the distribution that generates the observed data.
- Example: Given a sample $X_1, \ldots, X_n \sim F$, how do we infer F?
- However, in most cases we are only interested in inferring some property of F (e.g., its **mean** value).
- Statistical models that assume that the distribution can be modeled with a finite set of parameters $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ are called **parametric models**.
- Example: if we assume that the data comes from a normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$, μ and σ would be the parameters of the model.

Frequentist Aproaches

The satistical methods to be presented is this class are known as **frequentist (or classical)** methods. They are based on the following postulates [Wasserman, 2013]:

- Probability refers to limiting relative frequencies. Probabilities are objective properties of the real world.
- Parameters are fixed, unknown constants. Because they are not fluctuating, no useful probability statements can be made about parameters.
- Statistical procedures should be designed to have well-defined long run frequency properties. For example, a 95 percent confidence interval should trap the true value of the parameter with limiting frequency at least 95 percent.

There is another approach to inference called **Bayesian inference**, which is based on different posulated, to be discussed later in the course.

Point Estimation

- Point estimation is the process of finding the **best guess** for some quantity of interest from a **statistical sample**.
- In a general sence, this quantity of interest could be a parameter in a parametric model, a CDF F, a probability density function f, a regression function r, or a prediction for a future value Y of some random variable.
- In this class we will consider this quantity of interest as a **population parameter** θ.
- By convention, we denote a point estimate of θ by $\hat{\theta}$ or $\hat{\theta}_n$.
- It is important to remark that while θ is an unknown fixed value, $\hat{\theta}$ depends on the data and is therefore a random variable.
- We need to bear in mind that the process of sampling is by definition a random experiment.

Point Estimation

Formal Definition

- Let $X_1, \ldots, X_n$ be n IID data points from some distribution F.
- A point estimator $\hat{\theta}_n$ of a parameter θ is some function of $X_1, \ldots, X_n$:

$$\hat{\theta}_n = g(X_1, \ldots, X_n)$$

- The **bias** of an estimator is defined as:

$$\text{bias}(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta$$

- An estimator is unbiased if $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$ or $\text{bias}(\hat{\theta}_n) = 0$

Sampling Distribution

- If we take multiple samples, the value of our statistical estimate $\hat{\theta}_n$ will also vary from sample to sample.
- We refer to this distribution of our estimator across samples as the **sampling distribution** [Poldrack, 2019].
- The sampling distribution may be considered as the distribution of $\hat{\theta}_n$ for all possible samples from the same population of size n[1].
- The sampling distribution describes the variability of the point estimate around the true population parameter from sample to sample.
- We need to bear in mind this is an imaginary concept, since we can't obtain all possible samples.

[1] https://courses.lumenlearning.com/boundless-statistics/chapter/sampling-distributions/

Standard Error

- The standard deviation of $\hat{\theta}_n$ is called the **standard error** *se*:

$$se(\hat{\theta}_n) = \sqrt{\mathbb{V}(\hat{\theta}_n)}$$

- The standard error tells us about the variability of the estimator between all possible samples of the same size.
- It is a measure of the uncertainty of the point estimate.

The Sample Mean

- Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample of a population of mean μ and variance σ^2
- A sample statistic we can derive from the data is the **sample mean** $\overline{X_n}$

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- The sample mean is a statitical estimate of the mean $\overline{X_n} = \hat{\mu}$.
- The sampling distribution of the sample mean:
- We can show that the sample mean is an unbiased estimator of μ:

$$\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n} \times \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}(n \times \mu) = \mu$$

Point Estimation (4)

- The standard error of the sample mean $se(\overline{X_n}) = \sqrt{\mathbb{V}(\overline{X_n})}$ can be calulated as:

$$\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \mathbb{V}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{n}{n^2}\mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Then, $se(\overline{X_n}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ejemplos de Estimación Puntual (5)

- Por lo general no sabemos σ de la población.
- Cuando queremos estimar la varianza de una población a partir de una muestra hablamos de la **varianza muestral**:
- Existen dos estimadores comunes, una versión sesgada

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n (X_i - \overline{X_n})^2$$

- Una versión sin sesgo

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i^n (X_i - \overline{X_n})^2$$

- Cuando no sabemos la varianza de la población y queremos estimar la media, el error estándar es estimado:

$$\hat{se}(\overline{X_n}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Estimación Puntual (6)

- Sean $X_1, \ldots, X_n \sim$ Bernoulli(p) y sea $\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_i X_i$
- Luego $\mathbb{E}(\hat{p}_n) = \frac{1}{n}\sum_i \mathbb{E}(X_i) = p$, entonces $\hat{p}_n$ es insesgado.
- El error estándar *se* sería

$$se = \sqrt{\mathbb{V}(\hat{p}_n)} = \sqrt{p(1-p)/n}$$

- El error estándar estimado $\hat{se}$:

$$\hat{se} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$$

Estimación Puntual (7)

- Se espera que un buen estimador sea insesgado y de mínima varianza.
- Unbiased ness used to receive much attention but these days is considered less important
- Many of the estimators we will use are biased.
- A reasonable requirement for an estimator is that it should converge to the true parameter value as we collect more and more data.
- Un estimador puntual $\hat{\theta}_n$ de un parámetro θ es **consistente** si converge al valor verdadero cuando el número de datos de la muestra tiende a infinito.
- La calidad de un estimador se puede medir usando el **error cuadrático medio** (MSE)

$$MSE = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n - \theta)^2$$

Estimación Puntual (8)

- Si para un estimador $\hat{\theta}_n$, su *bias* $\rightarrow 0$ y su *se* $\rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de θ.
- Por ejemplo, para la media muestral $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \mu$ lo que implica que el *bias* $= 0$ y $se(\overline{X_n}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $\overline{X_n}$ es un estimador consistente de la media.
- Para el caso del experimento Bernoulli se tiene que $\mathbb{E}(\hat{p}) = p \Rightarrow$ *bias* $= 0$ y $se = \sqrt{p(1-p)/n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $\hat{p}$ es un estimador consistente de p.

Intervalo de Confianza

- Sabemos que el valor de un estimador puntual **varía** entre una muestra y otra
- Es más razonable encontrar un **intervalo** donde sepamos que valor **real del parámetro** se encuentra dentro del intervalo con una cierta **probabilidad**.
- La forma general de un intervalo de confianza en las siguiente:

$$\text{Intervalo de Confianza} = \text{Estadístico Muestral} \pm \text{Margen de Error}$$

- Entre más ancho el intervalo mayor incertidumbre existe sobre el valor del parámetro.

Intervalo de Confianza (2)

Definición

- Un **intervalo de confianza** para un parámetro poblacional desconocido θ con un **nivel de confianza** $1-\alpha$, es un intervalo $C_n = (a, b)$ donde:

$$\mathbb{P}(\theta \in C_n) = 1 - \alpha$$

- Además $a = a(X_1, \ldots, X_n)$ y $b = b(X_1, \ldots, X_n)$ son funciones de los datos
- El valor α se conoce como el nivel de **significancia**, generalmente se toma como 0.05 lo que equivale a trabajar con un nivel de confianza de 95%
- La significancia se puede interpretar como la probabilidad de equivocarnos.

Intervalo de Confianza (3)

Interpretación

- Existe mucha **confusión** de como interpretar un intervalo de confianza
- Una forma de interpretarlos es decir que si repetimos **un mismo experimento** muchas veces, el intervalo contendrá el valor del parámetro el $(1-\alpha)\%$ de las veces.
- Esta interpretación es correcta, pero rara vez repetimos un mismo experimento varias veces.
- Una interpretación mejor: un día recolecto datos creo un intervalo de 95% de confianza para un parámetro θ_1. Luego, en el día 2 hago lo mismo para un parámetro θ_2 y así reiteradamente *n* veces. El 95% de mis intervalos **contendrá** los valores reales de los parámetros.

Intervalo de Confianza (4)

- Se tienen n observaciones independientes $X_1, \ldots, X_n$ IID de distribución $N(\mu, \sigma^2)$
- Supongamos que μ es **desconocido** pero σ^2 es **conocido**.
- Sabemos que $\overline{X_n}$ es un estimador insesgado de μ
- Por la ley de los grandes números sabemos que la distribución de $\overline{X_n}$ se concentra alrededor de μ cuando n es grande.
- Por el CLT sabemos que

$$Z = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

  cuando n es grande
- Despejando, tenemos que $\mu = \overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z$

Intervalo de Confianza (5)

- Queremos encontrar un intervalo intervalo $C_n = (\mu_1, \mu_2)$ con un nivel de confianza $1 - \alpha$:

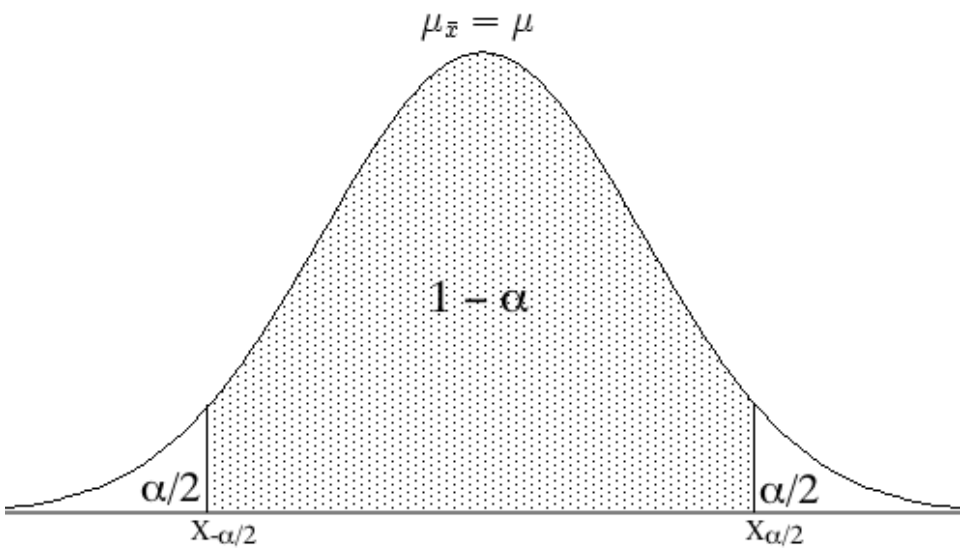
$$\mathbb{P}(\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2) = 1 - \alpha$$

- Sea $z_a = \Phi^{-1}(1 - a)$, con $a \in [0, 1]$ donde Φ^{-1} es la función cuantía de una normal estandarizada
- Esto es equivalente a decir que z_a es el valor tal que $1 - \Phi(z_a) = \mathbb{P}(Z \geq z_a) = a$
- Por simetría de la normal $z_{\alpha/2} = -z_{(1-\alpha/2)}$

Intervalo de Confianza (6)

- Se tiene que

$$\mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



Intervalo de Confianza (7)

- El intervalo de confianza para μ es:

$$C_n = (\overline{X_n} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

- Entonces $z_{\alpha/2}$ nos dice cuantas veces tenemos que multiplicar el **error estándar** en el intervalo.
- Mientras menor sea α mayor será $z_{\alpha/2}$ y por ende más ancho será el intervalo.
- Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mu \in C_n) &= \mathbb{P}(\overline{X_n} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X_n} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \\
&= \mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\alpha/2}) \\
&= \mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) \\
&= 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Intervalo de Confianza (8)

- Como $z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ podemos usar la función cuantía de la normal para calcular intervalos de confianza en R

```
> alpha <- 0.05
> xbar <- 5
> sigma <- 2
> n <- 20
> se <-sigma/sqrt(n)
> error <- qnorm(1-alpha/2)*se
> left <- xbar-error
> right <- xbar+error
> left
[1] 4.123477
> right
[1] 5.876523
>
```

Distribución T

- En la práctica, si no conocemos μ es poco probable que conozcamos σ
- Si estimamos σ usando s, los intervalos de confianza se construyen usando la distribución **T-student**

Distribución T

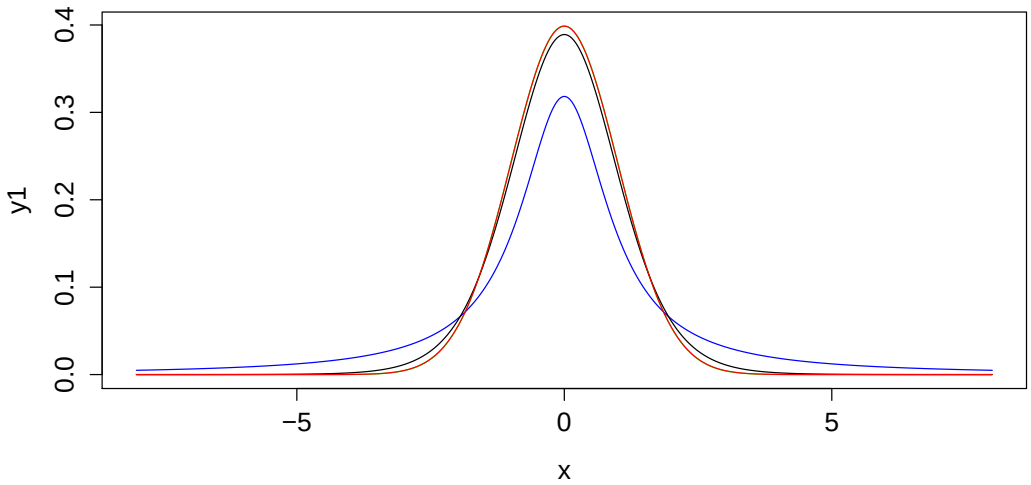
- Una V.A tiene distribución t con k grados de libertad cuando tiene la siguiente PDF:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi}\Gamma(\frac{k}{2})(1+\frac{t^2}{k})^{(k+1)/2}}$$

- Cuando $k = 1$ se le llama distribución de **Cauchy**
- Cuando $k \to \infty$ converge a una distribución normal estandarizada
- La distribución t tiene colas más anchas que la normal cuando tiene pocos grados de libertad

Distribución T (2)

```
x<-seq(-8,8,length=400)
y1<-dnorm(x)
y2<-dt(x=x,df=1)
y3<-dt(x=x,df=10)
y4<-dt(x=x,df=350)
plot(y1~x,type="l",col="green")
lines(y2~x,type="l",col="blue")
lines(y3~x,type="l",col="black")
lines(y4~x,type="l",col="red")
```



Intervalo de Confianza (9)

- Sea $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i^n (X_i - \overline{X_n})^2$ tenemos:

$$T = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

- Sea $t_{n-1,a} = \mathbb{P}(T > a)$, equivalente a la función cuantía qt evaluada en $(1-a)$
- El intervalo de confianza resultante es:

$$C_n = (\overline{X_n} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}})$$

- Como las colas de la distribución t son más anchos cuando n es pequeño, los intervalos de confianza resultantes son más anchos

Intervalo de Confianza (10)

- Calculemos un intervalo de confianza para la media de `Petal.Length` de los datos del **Iris** con 95% de confianza

```
>data(iris)
>alpha<-0.05
>n<-length(iris$Petal.Length)
>xbar<-mean(iris$Petal.Length)
>xbar
[1] 3.758
>s<-sd(iris$Petal.Length)
>se<-s/sqrt(n)
>error<-qt(p=1-alpha/2,df=n-1)*se
>left<-xbar-error
>left
[1] 3.473185
>right<-xbar+error
>right
[1] 4.042815
```

- Otra forma:

```
>test<-t.test(iris$Petal.Length,conf.level=0.95)
>test$conf.int
[1] 3.473185 4.042815
```

Test de Hipótesis

- Cuando queremos probar si alguna **propiedad** asumida sobre una población se contrasta con una muestra estadística usamos un **Test de Hipótesis**
- El test se compone de las siguientes hipótesis:
  - **Hipótesis Nula** H_0: Simboliza la situación actual. Lo que se ha considerado real hasta el presente.
  - **Hipótesis Alternativa** H_a: es el modelo alternativo que queremos considerar.
- La idea es encontrar suficiente **evidencia estadística** para rechazar H_0 y poder concluir H_a
- Si no tenemos suficiente evidencia estadística **fallamos en rechazar** H_0

Test de Hipótesis (2)

Metodología para Realizar un Test de Hipótesis

- Elegir una hipótesis nula H_0 y alternativa H_a
- Fijar un nivel de significancia α del test
- Calcular un estadístico T a partir de los datos
- El estadístico T es generalmente un valor estandarizado que podemos chequear en una tabla de distribución
- Definir un criterio de rechazo para la hipótesis nula. Generalmente es un valor crítico c.

Test de Hipótesis (3)

- Ejemplo: Se sabe que la cantidad de horas promedio de uso de Internet mensual en Chile país es de 30 horas
- Supongamos que queremos demostrar que el promedio es distinto a ese valor.
- Tendríamos que $H_0 : \mu = 30$ y $H_a : \mu \neq 30$
- Fijamos $\alpha = 0.05$ y recolectamos 100 observaciones
- Supongamos que obtenemos $\overline{X_n} = 28$ y $s = 10$
- Una forma de hacer el test es construir un intervalo de confianza para μ y ver si H_0 está en el intervalo.

```
> 28-qt(p=0.975,99)*10/sqrt(100)
[1] 26.01578
> 28+qt(p=0.975,99)*10/sqrt(100)
[1] 29.98422
```

- El intervalo sería la zona de aceptación de H_0 y todo lo que esté fuera de éste será mi región de rechazo.
- Como 30 está en la región de rechazo, rechazo mi hipótesis nula con un 5% de confianza.

Test de Hipótesis (4)

- Otra forma de realizar el test es calcular el estadístico $T = \frac{\overline{X_n} - \mu_o}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
- En este caso sería

$$T = \frac{28 - 30}{\frac{10}{\sqrt{100}}} = -2$$

- Como $H_a : \mu \neq 30$, tenemos un test de dos lados, donde la región de aceptación es

$$t_{n-1,1-\alpha/2} < T < t_{n-1,\alpha/2}$$

```
 > qt(0.025,99)
[1] -1.984217
> qt(0.975,99)
[1] 1.984217
```

- Como T está en la región de rechazo, rechazamos la hipótesis nula.

Test de Hipótesis (5)

- Generalmente, además de saber si rechazamos o fallamos en rechazar una hipótesis nula queremos saber la evidencia que tenemos en contra de ella.
- Se define un **p-valor** como la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como el observado en los datos dado que la hipótesis nula es verdadera.
- "Extremo" significa lejos de la hipótesis nula.
- Si el **p-valor** es menor que el nivel de significancia α, rechazamos H_0
- Ejemplo:

```
> data(iris)
> mu<-3 # La hipótesis nula
> alpha<-0.05
> n<-length(iris$Petal.Length)
> xbar<-mean(iris$Petal.Length)
> s<-sd(iris$Petal.Length)
> se<-s/sqrt(n)
> t<-(xbar-mu)/(s/sqrt(n))
> pvalue<-2*pt(-abs(t),df=n-1)
> pvalue
[1] 4.94568e-07 # es menor que 0.05 entonces rechazamos H0
```

Test de Hipótesis (6)

- La forma elegante de hacerlo en R:

```
> t.test(x=iris$Petal.Length,mu=3)

One Sample t-test

data:  iris$Petal.Length
t = 5.2589, df = 149, p-value = 4.946e-07
alternative hypothesis: true mean is not equal to 3
95 percent confidence interval:
 3.473185 4.042815
sample estimates:
mean of x
    3.758
```

Test de Hipótesis (7)

- Tenemos dos tipos de errores cuando realizamos un test de hipótesis
- Error tipo I: es cuando rechazamos la hipótesis nula cuando ésta es cierta.
- Este error es equivalente al nivel de significancia α
- Error tipo II: es cuando la hipótesis nula es falsa pero no tenemos evidencia estadística para rechazarla.
- Para mitigar los errores tipo I generalmente usamos valores de α más pequeños.
- Para mitigar los errores tipo II generalmente trabajamos con muestras más grandes.
- Existe un trade-off entre los errores tipo I y tipo II.

	Retener H_0	Rechazar H_0
H_0 es verdadera	✓	error tipo I
H_1 es verdadera	error tipo II	✓

Statistical Power

Critics to Hypothesis Testing

Maximum Likelihood Estimation

FOUR CARDINAL RULES OF STATISTICS by Daniela Witten

- ONE: CORRELATION DOES NOT IMPLY CAUSATION. Yes, I know you know this, but it's so easy to forget! Yeah, YOU OVER THERE, you with the p-value of 0.0000001 — yes, YOU!! That's not causation.
- No matter how small the p-value for a regression of IQ onto shoe size is, that doesn't mean that big feet cause smarts!! It just means that grown-ups tend to have bigger feet and higher IQs than kids.
- So, unless you can design your study to uncover causation (very hard to do in most practical settings — the field of causal inference is devoted to understanding the settings in which it is possible), the best you can do is to discover correlations. Sad but true.
- TWO: A P-VALUE IS JUST A TEST OF SAMPLE SIZE. Read that again — I mean what I said! If your null hypothesis doesn't hold (and null hypotheses never hold IRL) then the larger your sample size, the smaller your p-value will tend to be.
- If you're testing whether mean=0 and actually the truth is that mean=0.000000001, and if you have a large enough sample size, then YOU WILL GET A TINY P-VALUE.
- Why does this matter? In many contemporary settings (think: the internet), sample sizes are so huge that we can get TINY p-values even when the deviation from the null hypothesis is negligible. In other words, we can have STATISTICAL significance w/o PRACTICAL significance.

FOUR CARDINAL RULES OF STATISTICS by Daniela Witten

- Often, people focus on that tiny p-value, and the fact that the effect is of **literally no practical relevance** is totally lost.
- This also means that with a large enough sample size we can reject basically ANY null hypothesis (since the null hypothesis never exactly holds IRL, but it might be “close enough” that the violation of the null hypothesis is not important).
- Want to write a paper saying Lucky Charms consumption is correlated w/blood type? W/a large enough sample size, you can get a small p-value. (Provided there’s some super convoluted mechanism with some teeny effect size. . . which there probably is, b/c IRL null never holds)
- THREE: SEEK AND YOU SHALL FIND. If you look at your data for long enough, you will find something interesting, even if only by chance! In principle, we know that we need to perform a correction for multiple testing if we conduct a bunch of tests.
- But in practice, what if we decide what test(s) to conduct AFTER we look at data? Our p-value will be misleadingly small because we peeked at the data. Pre-specifying our analysis plan in advance keeps us honest. . . but in reality, it’s hard to do!!!
- Everyone is asking me about the mysterious and much-anticipated fourth rule of statistics. The answer is simple: we haven’t figured it out yet.... that’s the reason we need to do research in statistics

References I


Poldrack, R. A. (2019).
Statistical Thinking for the 21st Century.


Wasserman, L. (2013).
All of statistics: a concise course in statistical inference.
Springer Science & Business Media.