Lec 2. Linear Algebra 2.

강민수 (minsoo.kang0918@gmail.com)

Vector: Summable with together and multipliated by a scalar.

Group: set $\mathbb{K}$에 대해 주어진 연산을 했을 때에 set $\mathbb{K}$에 속하는 $\mathbb{K}$를 Group
(흔히 정해진 연산에 닫혀있는 경우)

ex) vector $V := (\mathcal{V}, +, \cdot)$ ↳ 스칼라곱

- Group의 성질

1. Closure of G under $\otimes$: $\forall x, y \in G : x \otimes y \in G$
2. Associativity : $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$
3. Neutral element (= Identity Element) : $x \otimes e = x$ and $e \otimes x = x$ $\exists e \in G, \forall x \in G$
4. Inverse element : $\forall x \in G\ \exists y \in G : x \otimes y = e$ when e is neutral element
   $y = x^{-1}$

※ if $x \otimes y = y \otimes x$ (commutative), $G := (G, \otimes)$: Abelian Group.

⇒ Vector Space : A real-valued Vector Space $V = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ is a se $\mathcal{V}$ with two operations

$+ : \mathcal{V} + \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

Linear Independence

- Linear Combination: V의 Vector가 선형결합이) V의 Vector Space에 속하는 스칼라곱과 합의 연산.

  $v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in \mathcal{V}$ $\lambda_1 \cdots \lambda_k \in \mathbb{R}$이 vector $x_1 \cdots x_k \in V$의 Linear Combination.

- Linear Independence: $0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ 가 되는 $\lambda_i \neq 0$ 이 하나라도 있으면 Linearly dependence.

  $0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ 가 되는 모든 $\lambda_i = 0$ 일 때, linearly independent

↳ linearly Independent 한 k개의 vectors 중에서
어느한 벡터로 나머지 k-1개의 선형결합으로 구성 불가능.

Generating Set and Span.

- set of Vector A 가 선형결합으로 Vector Space V를 만들때
  A를 Generating Set of V, V를 the span of A

Basis : Minimal Generating Set of V. Maximal linearly independent subset of V.

⇒ 그중에서 크기가 1인 벡터 : Canonical basis. standard basis.

Dimension (= basis 내의 Vector 갯수)

Vector space의 basis 에서 basis Vector의 갯 수 = $\dim(V)$라고 한다.

$\dim(V)$= dimension of V.

- If $U \leq V$ is a subspace of V. $\dim(U) \leq \dim(U)$
  But $\dim(U) = \dim(V)$ only if $U = V$.

※ $U = \text{span}[x_1 \cdots x_m] \subseteq R^n$ 에서 basis 결정법.

① Spanning Vector $x_1 \cdots x_m$을 $A \subseteq R^{m \times n}$ 형태로 만들기

② A의 Row-Echelon Form을 만들기

③ pivot colum들로 구성된 spanning Vector들은 U의 basis가 된다.

Rank $rk(A)$

- The number of linearly independent raws (colums) of a matrix $A \in R^{m \times n}$

- properties

① $rk(A) = rk(A^T)$

② $A \in R^{m \times n}$인 A의 Column (=raw) 의 span 인 Subspace $U \subseteq R^m$ 이 존재할 때,
$\dim(U) = rk(A)$

③ all $A \in R^{n \times n}$에 대해 A가 regular (non-singular) 이면 $rk(A) = n$.

④ Homogeneous System 의 $Ax = 0$의 x집합

⑤ $A \in R^{m \times n}$ 에서 $rk(A) = \min(m, n)$을 만족할 때, 'full rank'라고 함
만족하지 않을 때, 'rank deficient'

Linear Mapping

- Vector Space V, W 에 대해서

  $\Phi: V \to W$: Linear Mapping.

  $\forall x, y \in V \quad \forall \lambda, \psi \in \mathbb{R} \quad : \Phi(\lambda x + \psi y) = \lambda \Phi(x) + \psi \Phi(y)$

Coordinate vector

$x = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ in Vector space V에 basis $B = (b_1 \cdots b_n)$

Scalar $a_1, \cdots, a_n$ 은 B에 관한 coordinates of x

Transformation Matrix.

- Vector Space V, W 의 Basis $B = (b_1 \cdots b_n)$ 과 $C = (c_1 \cdots c_m)$ 일때.

  $\Phi : V \to W$ 에대해 $\Phi(b_j) = \alpha_{1j} c_1 + \cdots + \alpha_{mj} c_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} c_i \quad (j \in 1 \cdots n)$: C에대한 $\Phi(b_j)$의 Unique Representation

  α가 Unique 하고 linear combination도 Unique할 때,

  $m \times n$ Matrix $A_\Phi \Rightarrow A_\Phi(i,j) = \alpha_{ij}$ 인 행렬을 Transformation Matrix.

  ↳ B와 C에 의해 결정됨.

$\hat{x}$가 B에 대한 Cordinate Vector

$\hat{y}$가 $\hat{y} = A_\Phi \hat{x} \in W$를 만족하는 C에 대한 Cordinate Vector] $\Rightarrow \underset{m\times 1}{\hat{y}} = \underset{m\times n}{A_\Phi} \underset{n\times 1}{\hat{x}}$ 을 만족.

Equivalence

$A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 에대해 regular matrix인 $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 에 대해

$\tilde{A} = T^{-1} A S$ 일때 Equivalence

Similar

$A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 에 대해 regular matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 에 대해

$\tilde{A} = S^{-1} A S$ 일 때 Similar

* Similar Matrices는 두개의 다른 basis에 대해서 동일 linear map을 가진다.
* 변환 $A \mapsto S^{-1} A S$ 는 Similarity transformation or Conjugation of the Matrix A 라고 한다.