Lec.5

Analytic Geometry

- Orthonormal basis (ONB)

  n차원 vector space V에서 basis $\{b_1 \cdots b_n\}$이 V에 속할 때,

  $i \neq j$일 때, $\langle b_i, b_j \rangle = 0$

  $i = j$일 때, $\langle b_i, b_j \rangle = 1$

- Orthogonal Complement

  D차원 Vector Space 의 M차원 $U \subseteq V$인 Subspace U의 D-M 차원의 $U^\perp \subseteq V$인 Subspace가 존재할 때, $U \cap U^\perp = \{0\}$인 관계의 $U^\perp$를 Orthogonal Complement

  $U^\perp$에 존재하는 $\hat{\omega}$가 $\mathrm{span}(\hat{\omega}) = U^\perp$이고, U와 orthogonal : Normal Vector (법선벡터)

- Orthogonal Projection

  1) High dimensional Vector Space → Low dimensional Feature Space로 투사.

  2) linear Mapping π에 대해 $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$인 Mapping

2차원에서 : $\| x - \pi_U(x) \|$ is minimal, $\langle \pi_U(x) - x, b \rangle = 0$

$\pi_U(x) = \lambda b \Rightarrow \pi_U(x) \in U$

$\langle x - \pi_U(x), b \rangle = 0 \Longrightarrow \langle x - \lambda b, b \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, b \rangle - \lambda \langle b, b \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle b, x \rangle}{\|b\|^2}$

$\therefore \pi_U(x) = \lambda b = \dfrac{b^T x}{\|b\|^2} b \Longrightarrow \dfrac{b b^T}{\|b\|^2} x$

다차원에서 : projection $\pi_U(x)$
general

$(b_1 \cdots b_m)$이 U의 basis 일 때, U로 projection 되는 $\pi_U(x)$가 존재하면

$\pi_U(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ (linear Combination)

↳ $B = [b_1 \cdots b_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_m]^T \in \mathbb{R}^m$

⇒ minimum distance를 위해 직교하므로 $\langle b_i, x - \pi_U(x) \rangle = 0$. ⇒ 확장 $B^T (x - B\lambda) = 0$

$B^T x = B^T B \lambda$

∵ B가 linearly independent (basis조건 가정) ⇒ $B^T B$는 regular matrix. ⇒ $\lambda = (B^T B)^{-1} B^T x$

pseudo-inverse

$(B^TB)^{-1}B^T$ 에서 B가 basis로 구성된 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vector ┬ $B^TB \in \mathbb{R}^{m \times m}$, positive define.
└ B is full rank.

다차원에서 Orthogonal Projection

위에서 $\lambda = (B^TB)^{-1}B^Tx$,

$\pi_U(x) = B\lambda = \lambda B$ 이므로

$\therefore \pi_U(x) = B(B^TB)^{-1}B^Tx$ if basis is ONB

$P_\pi = B(B^TB)^{-1}B^T \Longrightarrow \pi_U(x) = BB^Tx \quad \because B^TB = I$

$\lambda = B^Tx$

Gram - Schmidt orthogonalization process

- orthogonal basis를 iteratively하게 찾는 method.

basis $(b_1, b_2 \cdots b_m)$이 V에 속하여 orthogonal basis $(u_1 \cdots u_m)$을 구하자.

↳ 서로끼리 직교하는 basis.

$u_1 := b_1$ 으로 두고

$u_k := b_k - \pi_{span[u_1 \dots u_{k-1}]}(b_k)$

Projection onto Affine Space.

어떤 vector x를 Affine space L로 projection 시킬때,

support vector x_0 에 의해 중심점이 옮겨짐.

$\therefore \pi_U(x - x_0) + x_0 = \pi_L(x) \Leftarrow U = L - x_0$

Projection 후 평행이동.

Rotation

plane을 origin 대비 angle θ만큼 이동.

어떤 두 vector $\hat{v}, \hat{w} \in \mathbb{R}^{m \times m}$일 때, 서로간의 distance와 angle이 유지됨.

rotation 시키는 matrix는 orthogonal함.

Matrix Decomposition

Determinant

- Square Matrix를 real number로 mapping시키는 함수 중 하나 $\det(A)$, $|A|$

↳ by Laplace Extension

1) along column j $\qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \det(A_{k,j}) \qquad A_{k,j}, A_{j,k} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$$

2) along row j

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{jk} \det(A_{j,k})$$

- Relationship with determinant, rank, invertibility, and triangular matrix.
  1) $\det(A) \neq 0$ 일 때, A는 invertible
  2) $\det(A) \neq 0$ 일 때, $rk(A) = n$

  ] ⇐ 반대도 성립.

  3) triangular matrix 의 determinant는 대각성분의 곱 : $\det(T) = \prod_{i=1}^{n} T_{ii}$

- Properties.
  1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
  2) $\det(A) = \det(A^T)$
  3) if A is regular, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
  4) $B = P^{-1}AP$ 에서 A와 B가 similar matrix ⇒ $\det(B) = \det(A)$
  5) 각 row나 column에 요소 덧셈은 determinant 값에 변화X.
  6) 각 row나 column에 요소 곱셈은 determinant 값에 곱한 값만큼 변함.
     (+) 전체에 λ곱은 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 일 때, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
  7) Swapping with two rows or columns 는 determinant 에 변화X,

Trace

- sum of diagonal of A 를 real number로 mapping 시키는 함수.

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Properties
  1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
  2) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A) \quad \alpha \in \mathbb{R}$
  3) $tr(I_n) = n$
  4) $tr(AB) = tr(BA)$

Characteristic Polynomial

$\lambda \in \mathbb{R}$과 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$인 square matrix에 대해서

$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$인 다항식.

$= c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$

c_0는 $\det(A)$

$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)$

Eigen Value and Eigen Vector

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$을 만족하고, $x \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}$인 eigen vector와 $\lambda \in \mathbb{R}$의 eigen value가

$Ax = \lambda x$를 만족해야 한다.

$(A - I\lambda)x = 0$에서 nontrivial solution x를 가질 때의 λ를 eigen value.

$\Leftarrow rk(A - I\lambda) \neq n \Leftrightarrow \det(A - I\lambda) = 0$

Eigen value와 Characteristic Polynomial.

λ가 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$에서 $P_A(\lambda)$의 근이 존재할 때, λ는 eigen value.

Eigen Space.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$에서의 모든 eigen vector의 set이 span하여 형성하는 subspace.

Eigen Spectrum.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$에서의 모든 eigen value의 집합.

Algebraic Multiplicity. λ_i

- characteristic polynomial의 근중에서 λ_i가 중복으로 나타나는 근의 횟수.

Geometric Multiplicity.

- Characteristic polynomial의 근중에서 λ_i와 관련된 linearly independent eigen vector의 수.

$\Leftrightarrow$ λ_i의 eigen space의 dimension.