머신러닝 정리.

- Vector : objects that can be added together and multiplied by a scalar.
- Group : $G \otimes G \to G$ 가 되는 G의 set.

  4가지 조건. ① closure

  ② Associativity. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

  ③ Neutral element $e \otimes x = x$. (항등법칙)

  ④ Inverse element $x \otimes y = e$

  if $x \otimes y = y \otimes x$

  ⇒ Abelian group.

- Vector space : A real-valued vector space $V = (V, +, \cdot)$ is a set V with two operation

  (inner operation, outer operation)

  ① Distributivity $\lambda \cdot (x+y) = \lambda x + \lambda y$.

  ② Associativity. $\lambda \cdot (\psi \cdot x) = (\lambda \psi) x$

  ③ Neutral element → 1. (outer operation), 0 (inner operation).

  모든 Vector space는 자기 자신과 zero vector를 가짐.

- Vector subspace : V (vector space) $U \subseteq V$, $U \neq \phi$, U : (inner / outer) operation 의 closure.

  ex) Homogeneous system ($Ax=0$) ⇒ solution set : solution이 무수히 많다. = R^n의 subspace.

  (null space)

  inhomogeneous system ($Ax=b$) ⇒ Not subspace of R^n

- Linear independence.

  $\sum_{j=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$. ⟶ 적어도 하나가 0이 아니어도 합쳤을 때 0 ⟶ linearly dependent.

  다 0이어야 한다 → linearly independent.

  ex) $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$. ⇒ $x_2 = 2x_1 + 5x_3$ (linearly dependent)

  ↘ 위와 같은 방식으로 표현이 되지 않는다 (linearly independent)

  linear independence를 check하는 방법. : Gaussian elimination.

  ↳ Vector들을 붙여서 Matrix를 만든후 G.E 실행.

  모든 column이 pivot column = linear independence.

- Generating set (spanning set) and span.

  Vector space V가 V의 subset인 $A = \{x_1, x_2, \cdots x_k\}$

  A의 element를 이용해서 linear combination을 한다 ⇒ 이것으로 Vector space V가 표현된다.

  ⇒ A는 generating set (spanning set). $V = \text{span}[A]$

◦ Basis.

Basis of V (vector space) ≡ minimal generating set of V ≡ Maximal linearly independent subset of V.

$x = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{K} \psi b_i \rightarrow \lambda_i = \psi_i, \ i = 1 \dots K.$

$b = \{b_1 \cdots b_K\}$

basis가 정해지면 vector space에 있는 임의의 vector를 basis를 통한 linear combination으로 unique 하게 표현할 수 있음.

모든 vector space는 basis를 소유 그러나 유일하지않음

(한 vector space에 여러 Basis가 있을 수 있음).

Basis vector의 개수 = Dim(V).

◦ Rank : Matrix에서 linearly independent한 column의 개수. ($rk(A)$ 라고 표현).

특성 ① $rk(A) = rk(A^T)$

⋮

full rank × ⇒ A^{-1} 존재하지 않는다. ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

◦ linear mapping : vector space V 에서 vector space W 로 mapping 하는것.

$\Phi(v) = w \ (v \in V, w \in W)$

◦ Coordinate vector.

Vector space V 에서.

$\begin{cases} \text{ordered basis } B = (b_1, b_2 \cdots b_n) \\ x \in V \end{cases}$

$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \cdots \alpha_n b_n$

⇒ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 을 vector로 묶은것을

(basis를 통해 vector space에 있는 vector를 linear combination으로 나타내는 계수들은 unique)

$\Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

◦ Matrix representation of a linear mapping.

basis : B, C ($B \in V$, $C \in W$) $\quad \Phi b_j = a_{1j} c_1 \cdots a_{mj} c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$

⇒ transformation matrix를 곱하여 다른 vector space에 있는 basis로 바꾼다.

⇒ 이관계는 $x \in V$ 에서 x의 coordinate vector $\hat{x}$
$y \in W$ 에서 y의 〃 〃 $\hat{y}$] 에서도 성립. $\hat{y} = A_\Phi \hat{x}$

∘ Equivalent.

$$A, \tilde{A} : \text{equivalent} \Rightarrow \tilde{A} = T^{-1} A S \quad (S \in R^{n \times n}, T \in R^{m \times m})$$

$$\Uparrow$$

$$R^{m \times n}$$

Similar → Equivalent (충분조건과 필요조건관계)

∘ Similar

$$A, \tilde{A} \in R^{n \times n} \Rightarrow \tilde{A} = S^{-1} A S \quad (S \in R^{n \times n})$$