Lec 3. Linear Algebra - Linear Mapping

minsoo.kang0918@gmail.com.

Kernel: $\Phi: V \to W$ 에서 Linear Mapping의 결과물이 Vector space W의 0 Vector로 가는 Vector Space (V의 Subspace)

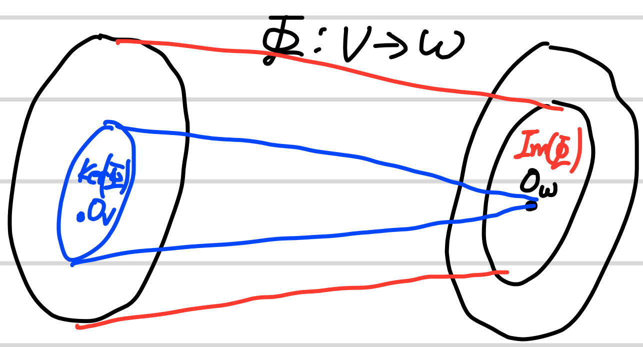
$Ker(\Phi) : \Phi^{-1}(0_W) = \{ v \in V : \Phi(v) = 0_W \}$

- ① Kernel 또는 Vectorspace V에 대한 Subspace
- ② Linear한 변환 Φ를 거쳐 0 Vector로 가므로 Vector space V의 0벡터를 원소로 가짐.
- ③ Addition과 Scalar Multiplication에 대해 닫혀있다.

Image: $\Phi: V \to W$ 에서 모든 V ($\exists v \in V$) 에대해 Linear Mapping의 결과물인 space. (W의 subspace)

$Im(\Phi) := \Phi(V) = \{ w \in W \mid \exists v \in V : \Phi(v) = w \}$

이 때, V와 W를 Φ의 domain (V) 과 Codomain (W) 이라고 한다.



Column Space:

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Linear Mapping $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax = \Phi x$ 인 Coordinat vector x 에서

$Im(\Phi) = \{ Ax : x \in \mathbb{R}^n \} = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i : x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \}$ a_i는 ith Column of A.

$= span[a_1, \cdots, a_n] \subseteq \mathbb{R}^m$ 인

$span[a_1, \cdots, a_n]$을 Column Space라고 한다.

즉, $Im(\Phi)$를 Column Space 라고한다

- $rk(A) = dim(Im(\Phi))$

rank(A): linearly Independent 한 raw나 column 의 갯수.

$dim(Im(\Phi))$: $Im(\Phi)$ space의 basis vector의 갯수

Kernel Space는 $Ax=0$인 x의 General Solution이므로 $Ax=0$인 equation 의 System이 Homogeneous System 이며, $0 \in \mathbb{R}^m$을 만드는 $\mathbb{R}^n$의 linear Combination이다.

Rank-Nullity Theorem

- V, W에 대해서 $\Phi: V \to W$인 Linear Mapping이 존재하면

$$\underset{n-rk(A)}{\dim(\ker(\Phi))} + \underset{rk(A)}{\dim(Im(\Phi))} = \underset{n}{\dim(V)}$$

↳ Linearly dependent한 요소 ↳ Linearly Independent 요소.

Affine Mapping

Linear Mapping $\Phi: V \to W$ 에 대해 $a \in W$ 일때

$\phi: V \to W$ $\quad$ a: Translation vector of affine mapping ϕ

$x \mapsto a + \Phi(x)$

- Affine Mapping $\phi: V \to W$에 대해서

linear mapping $\Phi: V \to W$, translation $\tau: W \to W$에 대해

$\phi = \tau \circ \Phi$가 성립한다. 이 때, Φ와 τ는 ϕ에 대해 유일하게 결정된다.

- Affine Mapping은 ① $\phi \circ \phi'$의 composition로 $\phi: V \to W$, $\phi': W' \to X$ 에서 affine.

② geometric structure가 affine mapping 후에도 invariant.

↳ 벡터의 이동 not 기하학적변화.

Lec 4. Analytic Geometry

Norm: vector space V의 vector x를 길이 $\|x\| \in R$로 보내는 함수.

$\|\cdot\| : V \to R$

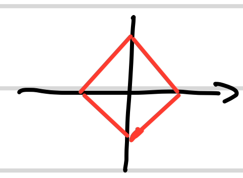
$x \mapsto \|x\|$

- Norm is absolutely homogeneous $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- Norm is triangle inequality $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$
- Norm is positive define $\|x\| \ge 0$ and $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Norm 종류.

-1) Manhattan Norm (1st order Norm)

$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ - $\ell 1$ norm



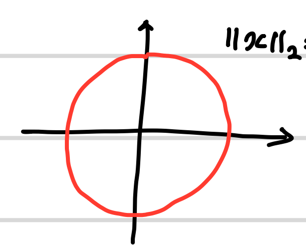
$\|x\|_1 = 1$

-2) Euclidean Norm (2nd order Norm)

$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x}$ ← x의 transpose와 x의 곱

- $\ell 2$ norm.

$\|x\|_2 = 1$



Bilinear Mapping Ω

$x, y, z \in V$, $\lambda, \psi \in R$ 에 대해서 $\begin{cases} \Omega(\lambda x + \psi y, z) = \lambda \Omega(x, z) + \psi \Omega(y, z) \\ \Omega(x, \lambda y + \psi z) = \lambda \Omega(x, y) + \psi \Omega(x, z) \end{cases}$

mapping with two arguments, and it is linear in each argument

- About Bilinear Mapping.

$\Omega : V \times V \Rightarrow \mathbb{R}$: Bilinear Mapping that maps onto a real number

① $\Omega(x, y) = \Omega(y, x)$: Symmetric. for all $x, y \in V$.

② $\forall x \in V \setminus \{0\}$: $\Omega(x, x) > 0$, $\Omega(0, 0) = 0$ 이면 Positive Definite.

↳ 0을 제외한 어떤 x에 대해

Inner Product

- positive definite, symmetric bilinear mapping $\Omega : V \times V \to R$: Inner Product.

$\langle x, y \rangle$ = positive definite, symmetric bilinear mapping $\Omega(x, y)$

- Inner Product Space : $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
(= Vector Space with Inner Product)

Vector Space $\xrightarrow[\text{extend}]{\text{Inner Product}}$ Inner Product Space
Vector Space with Inner Product.

ex) Scalar / dot product in $\mathbb{R}^n$

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Inner Product로 부터 Symmetric Positive Definite Matrix 유도.

① n-dimensional vector space V에 대해서
$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to R$ 와 ordered Basis B of V

② $x, y \in V$는 B의 linear combination으로 구성되며 각 $x = \sum_{i=1}^{n} \psi_i b_i \in V$, $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V$

coordinate vector

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \psi_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \psi_i \langle b_i, b_j \rangle \lambda_j = \hat{x}^T \underset{n \times n}{A} \hat{y}$$

$A_{ij} := \langle b_i, b_j \rangle$ $\quad$ $\hat{x}, \hat{y}$은 Basis B에 대한 x와 y의 coordinate vector.
$\hat{x}, \hat{y}$ are the coordinates of x and y with respect to the basis B.

$\Downarrow$

① Inner Product $\langle \cdot, \cdot \rangle$는 A에 의해 유일하게 결정된다.
② Symmetric of Inner Product는 A가 Symmetric하다는 것이다 $\Rightarrow \langle b_1, b_2 \rangle = \langle b_2, b_1 \rangle$
③ Positive definitiveness of Inner Product는 $\forall x \in V \setminus \{0\}$ $\hat{x}^T A \hat{x} > 0$

Symmetric Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

① $\forall x \in V \setminus \{0\} : \hat{x}^T A \hat{x} > 0$ 을 만족하면 Symmetric Positive Definite

② $\forall x \in V \setminus \{0\} : \hat{x}^T A \hat{x} \geq 0$ 을 만족하면 Positive Semidefinite

↳ Positive Definite, Symmetric 으로 Inner Product 정의

- Real-valued, finite dimensional Vector space V 와 ordered basis B of V Positive definite하고, Symmetric 인 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 이 존재할 때,

$$\langle x, y \rangle = \hat{x}^T A \hat{y}$$

⇓

성질

① kernel of A 는 all $x \neq 0$ 인 $x^T A x > 0$ 이므로 0벡터로만 존재한다.

② diagonal elements a_{ii} of A 는 Positive 이다.

↳ $a_{ii} = e_i^T A e_i > 0$ 이기 때문 e_i 는 ith vector of the standard basis in $\mathbb{R}^n$

Relationship with Norm and Inner product.

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$: Inner Product Induced Norm.

- Any Inner Product induces a norm.
- But not every norm is induced by inner product (ex: Manhattan Norm)

Cauchy-Schwarz Inequality.

- for an inner product space $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Induced norm $\| \cdot \|$ 은 다음 부등식을 만족한다

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

↳ Euclidean Distance.

⇓

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 \cdots| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 \cdots}$$

Distance and Metric.

Distance

- Inner Product Space $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 에 대해 $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Mapping} \\ d: V \times V \Rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto d(x, y)\end{array}}$: Metric

  $d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$

$\Rightarrow$ Inner Product 로서 dot product를 사용하면 Euclidean Distance이다.

Metric

- Vector space V 에 대해 $x, y \in V$ 에서 distance $d(x, y) \in \mathbb{R}$ 로의 Mapping

↳ Metric의 특징.

1. d is positive definite $d(x, y) \geq 0$ for all $x, y \in V$, $d(x, y) = 0$ 일 때 $x = y$
2. d is symmetric $d(x, y) = d(y, x)$ for all $x, y \in V$
3. Triangle Inequality: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ for all $x, y, z \in V$.

Angle

$\omega \in [0, \pi]$ between two vectors

- $\cos\omega = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$

  $= \dfrac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}} = \dfrac{x^T y}{\sqrt{x^T x \, y^T y}}$ $\Leftarrow$ use dot product as inner product.

Orthogonality

$\langle x, y \rangle = 0$ 일 때, 두 Vector가 orthogonal $x \perp y$

Orthonormal

if vector $x, y \in V$, $\langle x, y \rangle = 0$ 일 때 $\|x\| = \|y\| = 1$ 이면 Orthonormal

Orthogonal Matrix: Square matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 에서

A의 column은 orthonormal할 때 A는 orthogonal matrix

$A^T A = I$를 만족.

↳ A_{ii}를 제외한 나머지 요소는 orthonormal하므로 0

A_{ii}는 1

So, I가 됨.

$\therefore A^T = A^{-1}$

$\Downarrow$

A Transformation by an orthogonal matrix preserves
① length of a Vector
② inner product of two vectors

1) $\|Ax\|^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T A^T A x = x^T I x = x^T x = \|x\|^2$

2) $\cos\omega = \dfrac{(Ax)^T(Ay)}{\|Ax\|\,\|Ay\|} = \dfrac{x^T y}{\sqrt{x^T x \; y^T y}} = \dfrac{x^T y}{\|x\|\,\|y\|}$

⇒ x의 길이가 Transformation 한 Ax의 길이가 같다.
x와 y가 이루는 각의 transformation한 후의 각이 같다.

⇒ Orthogonal Matrix는 Rotation Transformation.