Chapter 4. Matrix Decomposition.

- Matrix를 대표하는 예를 들어 실수로 나타내는 방법 : Determinant, trace, eigenvalue, eigenvector
- Matrix를 곱의 형태로 표현 ⇒ matrix가 가지고 있는 특성을 잘 이해할 수 있음.

  ex) Cholesky decomposition, Matrix diagonalization, singular value decomposition

  (singular matrix에서만 적용) (모든 matrix에서 적용)

- Determinant.
  - Square matrix 에서만 적용. ⇒ (Matrix $A \xrightarrow{\text{mapping}}$ 실수.)
  - $\det(A)$ or $|A|$
  - A는 invertible $\longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ $\longleftrightarrow$ $rk(A) = n$ $\quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n})$
  - Triangular matrix (A) ⇒ $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} T_{ii}$ (diagonal element를 다 곱한 값)
  - Properties
    ① $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
    ② $\det(A) = \det(A^T)$
    ③ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
    ④ Similarity ⇒ $B = PAP^{-1}$: $\det(B) = \det(A)$
    ⑤ $\det(\lambda A) = \det(A) \times \lambda^n$
    ⑤ row or column에서 2개 줄을 바꿀 때 $\det(A)$의 부호가 바뀐다.

- Trace
  - square matrix 에서만 적용.
  - $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (diagonal element를 다 더한 값)
  - properties
    ① $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
    ② $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$
    ③ $tr(I_n) = n$
    ④ $tr(AB) = tr(BA)$

- Characteristic polynomial

  $\lambda \in \mathbb{R}$, square matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

  $$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
  $$= c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 \cdots c_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n$$

  $$\begin{cases} c_0 = \det(A) \\ c_{n-1} = (-1)^{n-1}\, tr(A) \end{cases}$$

- Eigenvalue and Eigenvector

$Ax = \lambda x$ (A: square matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$: eigenvalue of A, $x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$: eigenvalue.)

$\Rightarrow \underbrace{(A - \lambda I)}\, x = 0$

↳ free variable이 존재해야함. ⇒ solution에 0 (zero vector) 이외에 존재해야한다

$\Rightarrow rk(A - \lambda I) \neq n \iff \det \underbrace{(A - \lambda I)}_{P_A(\lambda)} = 0.$

- Eigenspace and eigenspectrum

Eigenspace : A의 모든 Eigenvector들이 span하여, Eigenvector들로 만들어지는 subspace

Eigenspectrum : A의 모든 eigenvalue 들의 집합.

- Algebraic multiplicity : $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

$= (\lambda - \lambda_1)^{2} (\lambda - \lambda_3) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

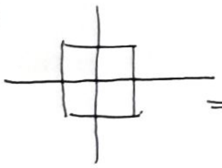
↳ 몇중근인가 나타냄.

- Geometric multiplicity : Dimensionality of the eigenspace.

- Geometric Intuition using linear mapping in $\mathbb{R}^2$ of Eigenvalue and Eigenvector

Eigenvector

ex



$\Rightarrow$

$\lambda_1 = 0.5$

$\lambda_2 = 1.5$

$\det(A) = 0.75$

$\Rightarrow$

$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

넓이는 0.75배됨! / Eigenvector에 따라 모양 바뀜.

- Spectral theorem

A: symmetric → A의 eigenvector들로 구성되는 orthonormal basis 존재.

→ eigenvalue : Real (실수)

- determinant → eigenvalue의 곱.

trace → eigenvalue의 합.

- cholesky decomposition.
  - symmetric, positive definite matrices 에 적용
    ($x^T A x > 0$ $x \neq 0$)
  - $A = LL^T$, L: cholesky factor (각 matrix에 unique함)

- Eigendecomposition and Diagonalization.

similarity ⇒ $B = P^{-1} A P$.

→ Diagonalizability : A: diagonalizable ← diagonal matrix와 similar.

동일한 linear mapping을 서로 다른 basis에 대해 표현 = similar : $D = P^{-1} A P$.

A, D가 similar ⟷ A, D 동일한 linear mapping을 표현하는 matrix but basis가 다른것.

P : eigenvector들이 들어가있음 (n개의 vector들이 모두 linearly independent 해야한다)
D : eigenvalue가 들어가 있음.

° Singular Vale Decomposition.

모든 matrix에 적용가능하다.

$A = U\Sigma V^T \quad (A \in R^{m \times n})$ (Σ에 σ_{ij}들 singular Value가 모음)

→ rank의 개수만큼 존재

→ 순서대로 놓을 때 Unique.

° Construction SVD.

$A \rightarrow A^T A \in R^{n \times n}$, positive semidefinite matrix

$(x^T A^T A x \geq 0.$ for $x \neq 0)$

$A^T A = PDP^T$

$= (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) = V\Sigma^T \Sigma V^T$ $\therefore V^T = P^T$

위의 과정을 AA^T에 했을때 $U = S$.