Lec 6. Matrix Decomposition.

Eigen Value와 Eigen Vector의 기하학적 의미.

ex) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2.0 \\ \lambda_2 = 0.5 \end{matrix} \rightarrow$ 각 Eigen Vector의 배율.

$det(A) = 1.0 \Rightarrow$ A변환 후 크기의 Scaling.

Spectral Theorem.

- A가 Symmetric 이면, A의 eigenvector로 구성되는 vector space V의 orthonormal basis가 존재함.

Determinant / Trace와 Eigenvalue 사이의 관계

- $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ when λ_i is eigenvalue of A : A의 determinant는 A의 eigenvalue들의 곱과 같다.

- $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ when λ_i is eigenvalue of A: A의 trace는 A의 eigenvalue들의 합과 같다.

Cholesky Decomposition / factorization.

- Symmetric, positive definite matrices A에서 $A = LL^T$로 factorized 되는 것을 말함.
  이때 L은 lower triangular matrix 이고, Cholesky factor of A, unique.

Eigen decomposition

$A \in R^{n \times n}$이 factor 되어 $A = PDP^{-1}$ when D is diagonal matrix.
(entries가 모두 A의 eigen value 이다.

- P의 column은 A의 n개의 eigen vector로 구성됨. = A의 eigen vector들이 R^n의 basis 형성 해야한다)
- Symmetric matrix는 orthogonal matrix인 P로 diagonalize 될 수 있다.
  $P^{-1} = P^T$ ∵ spectral theorem

Geometric Intuition behind Eigendecomposition.

$A = PDP^{-1}$에 의한 변환 : eigenvalue에 의한 scaling은 eigen vector의 방향으로 진행.

$Ax = PDP^{-1}x$라 할때

P^{-1} 변환: Basis를 eigenbasis로 부터 standard basis로 변환 $[p_1, p_2] \rightarrow [e_1, e_2]$

D 변환: Scaling by eigen value

P변환: Basis를 standard basis에서 eigenbasis로 변환

Singular Value Decomposition. (Eigendecomposition 이나 Cholesky 와 달리 모든 matrix에서 사용 가능)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 에서 rank $r \in [0, \min(m,n)]$ 일 때,

$A = U \Sigma V^T$

$U \in \mathbb{R}^{m \times m}$인 orthogonal matrix u_i는 U의 column vector

$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$인 orthogonal matrix v_i는 V의 column vector.

$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 이고, $\Sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$ 이고 $\Sigma_{ij} = 0, i \neq j$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$

Geometric Intuition behind SVD

$A = U \Sigma V^T$에 의한 변환 : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $n \to m$ 차원

V^T: Basis change in $\mathbb{R}^n$ to standard basis.

Σ: Scaling by singular values σ_i and Mapping from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$

U: Basis change in $\mathbb{R}^m$ from standard basis to $\{u_1, u_2, u_3 \dots u_m\}$ basis.

Construction of the SVD

① V^T: symmetric, positive definite 한 행렬 $A^TA \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$을 만든다.

A^TA를 diagonalize 하여 $A^TA = PDP^T$ 로 만듦.

↳ A의 SVD가 존재한다고 가정, ($A = U\Sigma V^T$)

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\underbrace{\Sigma^T\Sigma}_{\sigma_i^2\text{를 diagonal element로 갖는 diagonal matrix}} V^T \quad (\because U\text{는 orthogonal matrix})$$

↳ $V^T = P^T$, $\sigma_i^2 = \lambda_i$

② U: Symmetric positive definite 한 행렬 $AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$을 만든다.

AA^T를 diagonalize하여 $AA^T = SDS^T$

↳ A의 SVD가 존재한다고 가정, ($A = U\Sigma V^T$)

$$AA^T = U\Sigma V^T (U\Sigma V^T)^T = U\underbrace{\Sigma\Sigma^T}_{\sigma_i^2\text{을 diagonal element로 갖는 diagonal matrix}} U^T \quad (\because V\text{는 orthogonal matrix.}$$

↳ $U = S$, $\sigma_i^2 = \lambda_i$

①, ②의 다른 방식

$A = U\Sigma V^T$

$AV = U\Sigma$ $\because V$는 orthogonal matrix

$Av_i = \sigma_i u_i$

Matrix Approximation.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ using SVD

$A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ ($A_i := u_i v_i^T$, rank-1 matrix)

($\sigma_i = 0$, $i > r$ 인 경우)

$\Downarrow$

Rank Approximation.

$\hat{A}(k) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i$ $\Rightarrow$ Matrix Norm에서 A와 $\hat{A}(k)$간의 error 사용.

Matrix 정리.

Real Matrix $\in \mathbb{R}^{m \times n}$

- pseudo-inverse : $(B^T B)^{-1} B^T$ — $\mathbb{R}^{n \times m}$ — Nonsquare.
- SVD : $A = U \Sigma V^T$

$\mathbb{R}^{n \times n}$

Square Matrix. $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

- determinant : $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ (A_{ik}는 i행과 k열을 뺀 행렬)
- trace : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$\det(A) = 0$ — Singular.

$\det(A) \neq 0$ — **Regular**

- A^{-1} = Inversematrix.

Orthogonal

$A^T = A^{-1}$: Columns are orthogonal eigenvector.

Rotation

Defective

no basis of eigenvector

basis of eigenvector — **Non-defective**

diagonalizable

$A^T A = A A^T$ — **Normal**

$A^T A \neq A A^T$ — **Non-normal**

Normal $\rightarrow$ Orthogonal: if $A^T A = A A^T = I$.

Normal $\downarrow$

Symmetric

eigenvalue $\in \mathbb{R}$

Diagonal $\Leftarrow$ Symmetric

Diagonal $\downarrow$ IdentityMatrix

Symmetric $\searrow$ **Positive definite**

Cholesky

eigenvalues > 0