

TP numérique

Flûtes et pots d'échappements

Dans ce TP on va résoudre à l'aide du logiciel FreeFem++ l'équation des ondes en régime harmonique, dans un domaine dont l'entrée est un tuyau de section S_{in} .

1 Partie théorique

1.1 Rappel : impédance d'entrée d'un circuit acoustique

On étudie un circuit acoustique (tuyau, pot d'échappement, silencieux ou autre) de section d'entrée S_{in} . Le circuit est forcé en régime harmonique à la pulsation ω , c'est-à-dire qu'en entrée le flux acoustique (débit massique) q et la pression acoustique p' sont de la forme $q = U_{in}e^{-i\omega t}$ et $p' = p_{in}e^{-i\omega t}$. On définit alors l'impédance d'entrée du circuit par

$$Z_{in} = \frac{p_{in}}{U_{in}}.$$

Cette quantité (complexe) a les propriétés suivantes :

- Les minimums de $|Z_{in}|$ correspondent aux fréquences de résonance du circuit forcé en pression,
- Les maximums de $|Z_{in}|$ correspondent aux fréquences de résonance du circuit forcé en vitesse,
- La partie réelle (en général positive) est reliée au flux d'énergie injecté dans le circuit par le forçage en entrée, et la partie imaginaire est reliée au déphasage entre la pression et le débit.
- L'impédance est directement reliée au coefficients de réflexion et de transmission (en intensité acoustique) par :

$$R_i = \left| \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \right|^2; \quad T_i = 1 - R_i.$$

où $Z_0 = \rho c / S_{IN}$ est l'impédance caractéristique d'un tuyau de section égale à la section d'entrée S_{IN} du circuit.

1.2 Résolution numérique par éléments finis

Si le circuit étudié admet une symétrie de révolution, on peut travailler en coordonnées axisymétriques et introduire un potentiel des vitesses de la forme

$$\Phi(r, z, t) = \phi(r, z)e^{-i\omega t}$$

Le problème consiste alors à résoudre l'équation des ondes sous la forme

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad \text{pour } (r, z) \in \Omega \text{ avec } k = \omega/c \quad (1)$$

Couplé à des conditions limites adaptées sur les frontières du domaine (cf. TD).

Le problème est résolu par une méthode d'éléments finis.

L'impédance du circuit est ensuite déduite du potentiel des vitesses par :

$$Z_{in} = \frac{p_{in}}{U_{in}} = \frac{1/S_{in} \int_{\Gamma_i} (i\rho\phi) 2\pi r dr}{\int_{\Gamma_i} (\partial\phi/\partial z) 2\pi r dr}$$

1.3 Installation des programmes

Pour ce TP on fournit deux types de programmes :

- Un ensemble de programmes écrit avec le logiciel d'éléments finis FreeFem++ (fichiers de la forme `###.edp`).

- Des 'drivers' matlab (fichiers de la forme `SF_###.m`) issus du projet collaboratif StabFem, permettant d'utiliser ces programmes dans l'environnement Matlab.

Outre Matlab, vous devrez donc installer et/ou télécharger les logiciels suivants :

- FreeFem++ (installé sur Azteca, à télécharger gratuitement si vous souhaitez utiliser votre ordinateur personnel)

- La suite "StabFem" qui se télécharge en tapant dans une fenêtre terminal la commande suivante : `git clone https://github.com/erbafeidavid/StabFem`

(Cette commande devrait suffire sur un ordinateur linux ou mac, ou windows si vous disposez de l'utilitaire *git* ; dans le cas contraire vous pouvez télécharger le fichier compacté disponible à l'adresse suivante : `https://github.com/erbafeidavid/StabFem/tree/master/ACOUSTICS_PIPES.tgz`)

Vous travaillerez par la suite dans le sous-répertoire `ACOUSTICS_PIPES` .

Si vous n'arrivez pas à installer les drivers StabFem, vous pouvez toutefois utiliser les programmes FreeFem directement en mode terminal (voir ci-dessous).

1.4 Description et utilisation des programmes

1. Les quatre premiers programmes, nommés `Mesh_#.edp` servent à construire un maillage du domaine, dans les 4 cas étudiés.

- En mode terminal, tapez la commande

```
> FreeFem++ ####.edp .
```

- En mode Matlab/StabFem, le driver correspondant est le programme `SF_Init` , a utiliser de la manière suivante :

```
>> bf = SF_Init('Mesh_#.edp')
```

Pour visualisez le maillage, vous pourrez utiliser la commande `plotFF(bf,'mesh')` .

2. Le programme `FF_Acoustic.edp` calcule le potentiel des vitesses pour une valeur de k donnée, en déduit la valeur de l'impédance $Z_{in}(k)$.

- En mode terminal, tapez la commande `> FreeFem++ FF_Acoustic.edp` , puis entrez au clavier la valeur du nombre d'onde k . Le programme affiche le potentiel des vitesses dans le domaine (appuyez sur entrée pour afficher le potentiel à des instants successifs). Le programme génère aussi un fichier de données `Champs_P_U_Axe.txt` contenant les valeurs de P et U sur l'axe de symétrie, ainsi qu'un fichier graphique `Champ_Acoustique.eps` que vous pouvez utiliser par exemple pour illustrer un rapport...

- En mode matlab/StabFem, le driver correspondant s'utilise de la manière suivante (par exemple pour $k = 1$) :

```
>> AC = SF_Acoustic(bf,'k',1)
```

le résultat AC est une "structure matlab" dont les champs peuvent être exploités et tracés avec `plotFF` et `plot` (voir exemples dans le script).

3. Le programme `FF_Acoustic_Impedance.edp` Calcule successivement les valeur de l'impédance $Z_{in}(k)$ dans un intervalle de k compris entre k_{min} et k_{max} , par pas dk .

- En mode terminal, tapez `> FreeFem++ FF_Acoustic_Impedance.edp` puis entrez successivement au clavier k_{min} , k_{max} , dk . Les résultats sont écrits dans un fichier `Impedances.txt` qui peut ensuite être utilisé par un autre programme pour tracer les courbes (Matlab ou autre).

- En mode matlab/StabFem, le driver correspondant s'utilise de la manière suivante (par exemple pour l'intervalle $k \in [0, 1]$) :

```
>> IMP = SF_Acoustic_Impedance(bf,'k',[0:.02:1])
```

le résultat IMP est une "structure matlab" dont les champs IMP.k et IMP.Z sont des vecteurs de même dimension que l'on peut tracer l'un en fonction de l'autre (voir exemples dans le script).

2 Cas étudiés

2.1 Tuyau cylindrique débouchant dans un demi-espace

On considère tout d'abord un tuyau cylindrique de longueur $L = 10$ et rayon $a = 1$, débouchant dans un demi-espace. Le problème est adimensionné en posant $\rho = c = 1$ (on a alors directement $\omega = k$).

Si vous travaillez en mode matlab/StabFem, il vous suffira de faire tourner le programme suivant pour étudier ce cas :

`SCRIPT_DEMO_ACOUSTIQUE.m`

(si vous préférez travailler en mode terminal, vous devrez taper successivement les commandes équivalentes dans la fenêtre terminal.)

1. Observez la structure du champ acoustique pour des basses fréquences (k d'ordre 0.1) et des hautes fréquences (k d'ordre 3). Qu'observe-t-on ?
2. A partir de la courbe de l'impédance calculée, identifiez les valeurs de k correspondant aux deux premiers minimums de Z_{in} . Comparez aux prédictions théoriques de l'exercice 2.4.1.
3. A l'aide du programme `FF_Acoustic.edp` et/ou du driver `SF_Acoustic.m`, étudiez la structure du champ acoustique pour les valeurs de k précédemment identifiées. Que constate-t-on ?
4. Pour ces valeurs de k , observez la courbe donnant la pression $P(x)$ sur l'axe de symétrie. Où se trouvent les noeuds de pression ? Estimez la valeur de la "correction de longueur" Δ (exercice 2.2).
5. Mêmes questions pour les deux premiers maximums de Z_{in} .
6. Tracez, sur la même figure, la valeur de Z_{in} calculée par le logiciel FreeFem++ et celle prédite par la théorie (exercice 2.2).

2.2 Tuyau avec trou latéral

Dans ce second cas on considère un tuyau de longueur $L = 58cm$ et de rayon $a = 1cm$. On prend les caractéristiques de l'air : $\rho = 1.225kg/m^3$ et $c = 34000cm/s$. Le maillage correspondant est généré par le programme `Mesh_2.edp`.

1. Observez la structure du champ acoustique pour différentes valeurs de k à l'aide du programme `FF_Acoustic.edp` et/ou du driver `SF_Acoustic.m`.
2. Tracez Z_{in} en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$ à l'aide du programme `FF_Acoustic_Impedance.e` du driver `SF_Acoustic_Impedance.m`.
3. Comparez avec la théorie (exercice 2.3). Quelles valeurs faut-il prendre pour les corrections de longueur Δ et Δ' ?
4. Quelle est la fréquence fondamentale de ce tuyau dans le cas d'un forçage en pression (flûte) et d'un forçage en vitesse (clarinette) ? A quelles notes ces fréquences correspondent-elles ?

2.3 Pot d'échappement

On considère maintenant le cas d'un pot d'échappement (exercice 2.3.3). Celui-ci est modélisé par un tuyau de rayon a , relié au travers d'une ouverture d'aire A à un résonateur de Helmholtz de volume V .

Le maillage fourni correspond aux valeurs $a = 1$, $A = 6.28$, $V = 388.8$.

(le programme ne permettant de traiter que des géométries axisymétriques, l'ouverture est supposée de forme annulaire et de longueur h , l'aire vaut donc $A = 2\pi ah$)

Le maillage est généré avec le programme `Mesh_3.edp`.

1. Tracez Z_{in} (figure 1) ainsi que T_i (figure 4 (échelle linéaire) et 5 (échelle logarithmique)) à l'aide du driver Matlab `SF_Acoustic_Impedance.m`, pour k dans l'intervalle $[0-0.02]$.
2. Une modélisation simplifiée (exercice 2.3.3) prédit que le coefficient de transmission vaut

$$T_i = \frac{1}{1 + (k/k_c)^2}, \text{ avec } k_c = \frac{2A}{V}.$$

Comparez cette prédiction avec le résultat du programme.

3. Pour des valeurs de k plus grandes, on observe des maximums et minimums de $|Z|$ pour des valeurs précises. Illustrez la structure du champ acoustique dans ces cas (dans le domaine et sur l'axe). Peut-on prédire les valeurs de k correspondantes (cf. exercice 3.1...)

2.4 Chambre d'expansion

On considère finalement le cas d'une chambre d'expansion (exercice 2.3.2).

Le maillage correspondant est généré avec le programme `Mesh_4.edp`.

1. Observez la structure du champ acoustique pour différentes valeurs de k à l'aide du programme `FF_Acoustic.edp` et/ou du driver `SF_Acoustic.m`.
2. Tracez Z_{in} en fonction de k ainsi que T en fonction de k à l'aide du script Matlab `SF_Acoustic_Impedance.m`.
3. Comparez avec les prédictions théoriques (exercices 2.1.2 et 2.3.2).

2.5 Autres cas (bonus...)

En explorant les programmes fournis vous trouverez 5 autres programmes construisant des maillages pour des géométries différentes. N'hésitez pas à jouer avec !

3 Travail demandé

Parmi les cas proposés, vous choisirez deux cas d'étude.

Pour chacun des cas choisis :

- Illustrez à l'aide des résultats du programme le comportement acoustique du circuit au travers d'un choix judicieux de courbes générées par les programmes, qui seront commentées de manière physique en lien avec l'application considérée (instrument de musique ou atténuateur de bruit).
- Comparez avec les éléments de théorie vus en cours et/ou en TD.
- Commentez et expliquez les ressemblances et éventuelles différences.

On précise que seules les figures disposant d'une légende et commentées dans le rapport seront prises en compte dans l'évaluation.