Licence III Mécanique, juillet 2018

Examen de seconde session de mécanique des fluides. Durée : 3h

Documents autorisés : 1 page de notes manuscrites, recto-verso.
Calculatrices autorisées (smartphones interdits).

1 Questions de Cours

1. Donnez la définition d'un *fluide incompressible*.

2. Donnez la définition d'un *écoulement incompressible (ou isovolume)*. Quel lien y a-t-il entre cette notion et la précédente ?

3. Démontrez l'équation de Navier-Stokes gouvernant l'évolution d'un fluide incompressible de masse volumique ρ uniforme.

4. On s'intéresse à l'écoulement stationnaire autour d'un objet de taille caractéristique L plongé dans un écoulement de vitesse caractéristique U_0. Estimez l'ordre de grandeur des différents termes apparaissant dans l'équation de Navier-Stokes. Comment les équations se simplifient-elles dans les cas respectifs $Re \ll 1$ et $Re \gg 1$?

5. Qu'appelle-t-on la vorticité ? (définition mathématique et signification physique). Dans quels types d'écoulement et/ou dans quelles régions d'un écoulement rencontre-t-on habituellement de la vorticité ?

6. Comment appelle-t-on les écoulements dans lesquels la vorticité est nulle ? Quel concept mathématique et quel(s) théorème(s) peut-on utiliser pour simplifier l'étude de ce type d'écoulements ?

7. Quels sont les 3 régimes d'écoulement possibles pour un fluide incompressible dans une conduite cylindrique de section constante ? Quel(s) critère(s) permet(tent) de savoir dans quel régime on se trouve ?

8. Tracez l'allure du diagramme de Moody donnant le coefficient de perte de charge Λ en fonction du nombre de Reynolds Re et du paramètre de rugosité $\epsilon = k/D$. Donnez un exemple d'utilisation pratique de ce diagramme.

2 Estimation de la traînée d'un cylindre

On étudie l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe de rayon a et de longueur H dans la direction z. (supposée grande devant le rayon a, de manière à ce qu'on puisse considérer l'écoulement comme bidimensionnel).

Le fluide est considéré comme un liquide incompressible de masse volumique ρ constante et de viscosité ν. On note g l'accélération de la pesanteur (dirigée selon l'axe $-y$).

Loin du cylindre, l'écoulement est supposé uniforme, de direction $\vec{e}_x$ et de norme U_0. On note P_0 la pression de référence dans l'écoulement uniforme en amont du cylindre, à l'altitude de l'axe du cylindre ($y = 0$).

On cherche a estimer la force de traînée $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x$ exercée par le fluide sur le cylindre.

A. Analyse dimensionnelle

1. Listez tous les paramètres physiques apparaissant dans le problème et donnez leur dimension physique.

2. Par les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la force de portance peut être exprimée, dans le cas général, par une expression de la forme suivante :

$$F_x = \rho U_0^2 a^2 \mathcal{F}(Re, Fr, Eu, H/a) \tag{1}$$

Avec

$$Re = \frac{U_0 a}{\nu}; \quad Fr = \frac{U_0^2}{ga}; \quad Eu = \frac{\rho U_0^2}{P_0}. \tag{2}$$

3. Expliquez la signification physique des quatre nombres sans dimensions apparaissant dans cette expression.

4. Justifiez pourquoi, au vu des hypothèses formulées, la force de traînée ne dépend pas de la pression de référence ni de la gravité, et est de plus proportionnelle à la longueur L du cylindre.

5. En déduire qu'au final la force de traînée peut être exprimée sous la forme suivante :

$$F_x = \frac{\rho U_0^2 a H}{2} C_x(Re) \tag{3}$$

B. Calcul direct de la traînée

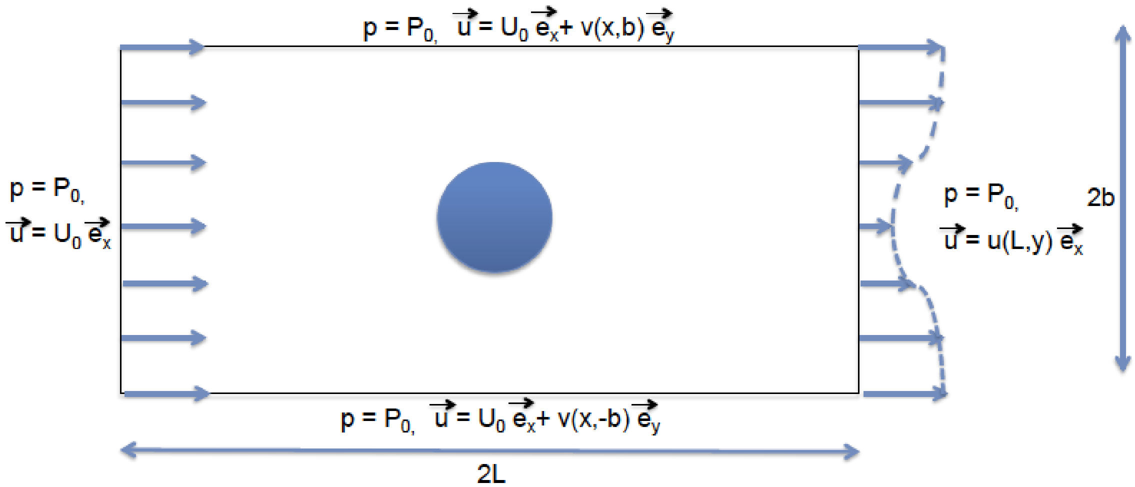
On note Γ la surface du cylindre (qui correspond au cercle de rayon a et de centre O).

6. Donnez une expression de la force de traînée F_x exercée sur le cylindre sous forme d'une intégrale le long de la surface Γ. Expliquez la signification de chacun des termes apparaissant dans cette formule.

7. On suppose $Re \gg 1$. Estimez l'ordre de grandeur de la contribution de la pression et de celle de des frottements visqueux à la force totale.

8. En déduire que dans le régime inertiel, il est raisonnable de supposer que le coefficient C_x ne dépend pas de Re.

C. Estimation à l'aide d'un bilan intégral



Dans cette partie on néglige la gravité ($g = 0$).

On cherche maintenant à estimer la force de traînée par un bilan intégral, a partir de la loi de vitesse observée dans le sillage du cylindre à une distance L [illegible]lui-ci.

On considère pour cela un volume de contrôle Ω entourant le cylindre, comme représenté sur la figure. La section dans le plan (xy) du volume de contrôle correspond à un rectangle de largeur $2b$ et de longueur $2L$, auquel on a retranché le disque de rayon a (correspondant au domaine occupé par le cylindre). La frontière du volume Ω est notée $\Sigma \cup \Gamma$ où Σ est le contour rectangulaire extérieur et Γ la surface [illegible]ylindre (comme dans la partie précédente).

Les champ de vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e_x} + v\mathbf{e_y}$ et de pression sur la frontière extérieure Σ sont indiqués sur la figure. La troisième composante de vitesse w est nulle sur toutes les frontières du domaine. On suppose que les effets visqueux sont négligeables loin du cylindre (y compris sur les frontières du volume de contrôle).

9. Ecrire un bilan intégral de quantité de mouvement pour le fluide occupant le volume de contrôle Ω.

10. En déduire que la traînée exercée sur le cylindre peut s'exprimer directement par une expression de la forme

$$F_x = -\iint_\Sigma \rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_x)\,dS$$

11. Quel est l'intérêt de cette expression par rapport à la détermination directe de la force discutée dans la partie B ?

12. Ecrire un bilan de masse sur le volume de contrôle, et en déduire la relation suivante :

$$-U_0 b + \int u(L,y)\,dy - \int v_(x,-b)\,dx + \int v_(x,+b)\,dx = 0.$$

13. En combinant les équations obtenues aux deux questions précédentes, montrez que la force de traînée peut être estimée par l'équation suivante : $F_x = 2H \int_{-b}^{b} u(L,y)\,(U_0 - u(L,y))\,dy$

14. Application. On suppose qu'à la position $x = L$ le profil de vitesse peut être approximé par la loi suivante:

$$u(L,y) = \begin{cases} U_0 & |y| > a \\ U_0 y^2/a^2 & |y| < a \end{cases}$$

En déduire le coefficient de traînée $C_x = F_x/(\rho U_0^2 a H)$.

3 Ondes stationnaires dans un tuyau de flûte

On étudie les ondes acoustiques dans un tuyau de longueur L, supposé ouvert à ses deux extrémités. Le fluide est un gaz parfait, de masse volumique moyenne ρ_0, pression moyenne P_0 et vitesse du son c_0.

Dans le tuyau on suppose $p(x,t) = P_0 + p'(x,t)$ avec $|p'(x,t)| \ll 1$, et $\mathbf{u} = u'(x,t)\mathbf{e_x}$ avec $|u'(x,t)| \ll c_0$.

A l'extérieur du tuyau ($x < 0$ et $x > L$) on suppose $p(x,t) \approx P_0$.

1. Justifiez que sous les hypothèses de l'acoustique linéaire les bilans locaux de masse et de quantité de mouvement se simplifient sous la forme suivante :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x},$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}.$$

2. Montrez que ces deux équations peuvent être combinées entre elles pour aboutir à une équation reliant les dérivées secondes en temps et en espace de la fonction $p'(x,t)$.

3. On cherche une solution à cette dernière équation sous forme d'une onde stationnaire de la forme suivante :

$$p'(x,t) = A \sin(kx)\sin(\omega t)$$

Quelle relation relie les paramètres ω et k ?

4. Quelles valeurs de k sont-elles compatibles avec les conditions limites pour la pression en $x = 0$ et $x = L$?

5. En déduire l'expression de la plus basse valeur possible pour la pulsation ω.

6. Application numérique : donnez la fréquence fondamentale f d'une flûte de longueur $L = 50cm$ (on donne $c_0 = 340m/s$).