Домашнее задание

Индивидуальный вариант для *Золкин А.Н.*

Количество баллов: 0
Сложность: 1.0
Задание: Оформить документ в LaTeX, все формулы, которые встречаются, должны быть оформлены в математическом режиме (через equation). Если формула имеет номер и на неё есть ссылка, то необходимо также проставить метку для формулы и ссылаться по этой метке. Все сноски должны быть оформлены в виде сносок. Рисунки повторены при помощи пакета TikZ.

и достаточно B»), которое истинно, когда высказывания A и B истинны или ложны одновременно.

Наряду с $A \Leftrightarrow B$ в эквиваленции используется запись: $A = B$.

Итак, при помощи логических операций построено множество высказываний, которое называют *алгеброй высказываний.*

Основные формулы алгебры высказываний следующие:

1) $\neg(\neg A) = A$;
2) законы *дистрибутивности* (распределительные законы):
   $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
   $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
3) законы де Моргана[2]:
   $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$;
   $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
4) $A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B$;
5) $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge (\neg B)$.

Эти формулы могут быть доказаны сравнением соответствующих таблиц истинности.

Пример 1.2. Докажем формулу 5). Таблица истинности для утверждения в левой части имеет вид:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
и	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

[2] *Огастес де Морган* (1806–1871) – шотландский математик, логик, основоположник логической теории отношений.

А таблица истинности для утверждения в правой части имеет вид:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

Сравнивая эти таблицы, видим, что утверждения в правой и левой части принимают одинаковые значения.

Упражнение. С помощью таблиц истинности докажите формулы 1)–4).

Следующие импликации носят названия:

$T = (A \Rightarrow B)$ – *прямая теорема*,
$T = (B \Rightarrow A)$ – *теорема, обратная к предыдущей.*

Справедлива формула:

$$\big(A \Rightarrow B\big) = \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big),$$

которая служит основой для распространенного в математике доказательства методом «от противного». Действительно, левая часть формулы ложна тогда и только тогда, когда $A =$ *и*, а $B =$ *л*. Но и правая часть ложна тоже только в этом случае.

Следует отметить, что из истинности прямой теоремы еще не следует истинность обратной к ней теоремы, как это видно из примера 1.1: в разобранном примере из утверждения B не следует утверждение A, потому что, как известно, существуют четные числа, не кратные четырем (например, 2).

Предикаты и кванторы

Определение 1.6. Суждение, зависящее от переменной величины, которое при подстановке значений переменного становится высказыванием, называют *предикатом.*

П р и м е р 1.3. $A(x)$ = «студент x учится на физическом факультете» есть предикат, зависящий от одного переменного x. Здесь $A(x)$ – одноместный предикат. Неравенство $B(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0$ представляет собой двуместный предикат.

Как и для высказываний, с помощью логических операций $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ можно строить новые предикаты, и мы получим *алгебру предикатов.* Новые предикаты и высказывания можно строить из предикатов также с помощью символов, называемых *кванторами*:

$\exists$ – *квантор существования* (читается: «существует», «найдется»),

$\forall$ – *квантор всеобщности* (читается: «для любого», «для всякого», «для всех»).

Определение 1.7. $\forall\, x\, :\; A(x)$ (читается: «*для всех x $A(x)$*») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен для всех x из его области определения, и ложно – в противном случае.

П р и м е р 1.4. Утверждение «любой студент УрФУ учится на физическом факультете (ФФ)», которое формально можно записать в виде:

$$\forall\, x \in \text{УрФУ} : \{\text{студент } x \text{ учится на ФФ}\},$$

есть ложное высказывание.

Утверждение «квадрат действительного числа есть число неотрицательное», формально записываемое в виде:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ x^2 \geqslant 0,$$

есть истинное высказывание.

Определение 1.8. $\exists\, x\, :\ A(x)$ (читается: «*существует* x, $A(x)$») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен на каком-то конкретном x из его области определения, и ложно, если предикат $A(x)$ ложен при всех x из его области определения.

Пример 1.5. Утверждение «на физическом факультете учатся девушки», которое формально записывается в виде

$$\exists\, x :\ \{\text{девушка } x \text{ учится на физическом факультете}\}$$

есть истинное высказывание, так как, конечно, на физическом факультете учится хотя бы одна девушка.

Высказывание $\exists\, x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 1 \leqslant 0$ – ложное.

Построим отрицание высказывания $\forall\, x\, :\ A(x)$. Если данное утверждение не имеет места, то суждение $A(x)$ имеет место не для всех x, т. е. существует элемент x, для которого $A(x)$ не имеет места:

$$\neg\big(\forall\, x :\ A(x)\big) = \big(\exists\, x : \neg A(x)\big).$$

Пример 1.6. Один маленький мальчик очень грамотно построил отрицание утверждения «Все дети любят кашу». Он подумал и, решительно отодвинув от себя тарелку, сказал: «Не все».

Совершенно аналогично

$$\neg\big(\exists\, x :\ A(x)\big) = \big(\forall\, x :\ \neg A(x)\big).$$

Таким образом, чтобы построить отрицание логической формулы, содержащей кванторы, необходимо квантор $\forall$ заменить на квантор $\exists$, а квантор $\exists$ заменить на квантор $\forall$ и предикат заменить на его отрицание.

Пример 1.7.

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall\, x : \{\exists\, y : [\forall\, z : A(x,y,z)]\}) = \\
&\qquad = \exists\, x : \neg\{\exists\, y : [\forall\, z : A(x,y,z)]\} = \\
&\qquad = \exists\, x : \{\forall\, y : \neg[\forall\, z : A(x,y,z)]\} = \\
&\qquad\qquad = \exists\, x : \{\forall\, y : [\exists\, z : \neg A(x,y,z)]\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что скобки и двоеточия можно частично или вовсе опускать при записи такого рода логических формул, если не возникает разночтений.

2. Элементы теории множеств

2.1. Понятие множества

Понятие множества в математике рассматривается как первичное, неопределяемое понятие.

Под *множеством* будем понимать совокупность (или семейство, или собрание, или класс) объектов, обладающих определенным признаком. Например, множество деревьев в парке, множество звезд на небе, множество студентов в аудитории, множество натуральных чисел, множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, множество треугольников на плоскости и т.д.

Объекты, обладающие этим признаком, называются *элементами множества.* Множества будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \ldots$, а элементы этих множеств – строчными буквами $a, b, c, \ldots$. Множество *содержит* элементы, а элементы *принадлежат* множеству. Для обозначения принадлежности используется знак $\in$. Если a есть элемент множества A, то этот факт записывается так: $a \in A$. Запись $b \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A. Так, имеем $3 \in \mathbb{Z}$ и $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Множества делятся на *конечные* и *бесконечные.* Например, множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ бесконечны, а множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ конечно. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым.* Пустое множество обозначается символом $\emptyset$. Запись

$$C = \{x \in B \mid P(x)\}$$

обозначает множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества B, которые обладают свойством $P(x)$.

Например, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ – множество тех действительных чисел, которые обладают свойством быть не меньше нуля и не больше единицы.

Определение 2.1. Множество Y называется *подмножеством* множества X, если любой элемент множества Y является элементом множества X. Это обозначается записью $Y \subseteq X$.

В кванторах это определение можно записать следующим образом:

$$\forall\, y \in Y \,:\, y \in X.$$

Например, $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $Q \subseteq \mathbb{R}$.

Из определения подмножества следует, что всякое множество является подмножеством самого себя, а пустое множество является подмножеством любого множества.

П р и м е р 2.1. Решим следующую простую задачу: найти все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$. Очевидно, что это множество имеет восемь подмножеств: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ и $\{1, 2, 3\}$.

Определение 2.2. Множество X *равно* множеству Y, если любой элемент множества X является элементом множества Y и любой элемент множества Y является элементом множества X. Другими словами, если X и Y состоят из одних и тех же элементов. На письме это обозначается обычным образом: $X = Y$.

Из определений следует, что множества X и Y равны тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

П р и м е р 2.2. Множество корней уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

равно множеству $\{1, 2, 3\}$, а множество $\{51, 2, 3\}$ равно множеству $\{3, 2, 51, 2\}$.

Заметим, что, перечисляя элементы множества, принято записывать каждый из них только один раз. Подчеркнем, что по определению равенства неважно, в каком порядке перечисляются элементы.

2.2. Операции над множествами

Рассмотрим следующие операции над множествами: пересечение, объединение, дополнение и разность. Эти операции называются *булевыми*. Установим основные свойства булевых операций.

Определение 2.3. Пусть X и Y – некоторые множества. Тогда *пересечением* множеств X и Y называется множество

$$X \bigcap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\},$$

объединением множеств X и Y называется множество

$$X \bigcup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Например, если $X = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $Y = \{1, 3, 6, 9\}$, то $X \bigcap Y = \{6, 9\}$, а $X \bigcup Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$.

Отметим основные свойства введенных операций:

1) $X \bigcap X = X$ – *идемпотентность пересечения*;

2) $X \bigcup X = X$ – *идемпотентность объединения*;

3) $X \bigcap Y = Y \bigcap X$ – *коммутативность пересечения*;

4) $X \bigcup Y = Y \bigcup X$ – *коммутативность объединения*;

5) $(X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z)$ – *ассоциативность пересечения*;

6) $(X \bigcup Y) \bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z)$ – *ассоциативность объединения*;

7) $X \bigcap (Y \bigcup Z) = (X \bigcap Y) \bigcup (X \bigcap Z)$ – *дистрибутивность пересечения относительно объединения*;

8) $X \bigcup (Y \bigcap Z) = (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$ – *дистрибутивность объединения относительно пересечения*;

9) $X \bigcap \emptyset = \emptyset$;

10) $X \bigcup \emptyset = X$.

Доказательство отмеченных свойств продемонстрируем на примере тождества 8). Надо доказать, что любой элемент множества $X \bigcup (Y \bigcap Z)$ принадлежит множеству $(X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$, и обратно.

Пусть $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. Тогда $a \in X$ или $a \in Y \bigcap Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$, и поэтому a принадлежит их пересечению, т. е. правой части. Если же $a \in Y \bigcap Z$, то $a \in Y$ и $a \in Z$. Отсюда следует, что $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$, т. е. a принадлежит и их пересечению.

Докажем обратное включение. Пусть теперь $a \in (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$. Тогда $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. Если же $a \notin X$, то из условий $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$ следует, что $a \in Y$ и $a \in Z$, а значит, $a \in Y \bigcap Z$, следовательно, $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. $\square$