и достаточно B»), которое истинно, когда высказывания A и B истинны или ложны одновременно.

Наряду с $A \Leftrightarrow B$ в эквиваленции используется запись: $A = B$.

Итак, при помощи логических операций построено множество высказываний, которое называют *алгеброй высказываний*.

Основные формулы алгебры высказываний следующие:

1) $\neg(\neg A) = A$;

2) законы *дистрибутивности* (распределительные законы):
   $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
   $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

3) законы де Моргана[2]:
   $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$;
   $\neq (A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;

4) $A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B$;

5) $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge (\neg B)$.

Эти формулы могут быть доказаны сравнением соответствующих таблиц истинности.

Пример 1.2. Докажем формулу 5). Таблица истинности для утверждения в левой части имеет вид:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
и	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

[2] *Огастес де Морган* (1806-1871) – шотландский математик, логик, основоположник логической теории отношений

А таблица истинности для утверждения в правой части имеет вид:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

Сравнивая эти таблицы, видим, что утверждения в правой и левой части принимают одинаковые значения.

Упражнение. С помощью таблиц истинности докажите формулы 1 – 4.

Следующие импликации носят названия:z
$T = (A \Rightarrow B)$ – *прямая теорема*,
$T = (B \Rightarrow A)$ – *теорема, обратная к предыдущей.*
Справедлива формула:

$$(A \Rightarrow B) = ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)),$$

которая служит основой для распространенного в математике доказательства методом «от противного». Действительно, левая часть формулы ложна тогда и только тогда, когда $A =$ *и*, а $B =$ *л*. Но и правая часть ложна тоже только в этом случае.

Следует отметить, что из истинности прямой теоремы еще не следует истинность обратной к ней теоремы, как это видно из примера 1.1: в разобранном примере из утверждения B не следует утверждение A, потому что, как известно, существуют четные числа, не кратные четырем (например, 2).

Предикаты и кванторы

Определение 1.6. Суждение, зависящее от переменной величины, которое при подстанвке значений переменного становится высказыванием, называют *предикатом*.

Пример 1.3. $A(x) =$ «студент x учится на физическом факультете» есть предикат, зависящий от одного переменного x. Здесь $A(x)$ – одноместный предикат. Неравенство $B(x,y) = x^2 + y^2 \geqslant 0$ представляет собой двуместный предикат.

Как и для высказываний, с помощью логических операций $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ можно строить новые предикаты, и мы получим *алгебру предикатов*. Новые предикаты и высказывания можно строить из предикатов также с помощью символов, называемых *кванторами*:

$\exists$ – *квантор существования* (читается: «существует», «найдется»),

$\forall$ – *квантор всеобщности* (читается: «для любого», «для всякого», «для всех»).

Определение 1.7. $\forall x : A(x)$ (читается: «*для всех* $xA(x)$») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен для всех x из его области определение, и ложно – в противном случае.

Пример 1.4. Утверждение «любой студент УрФУ учится на физическом факультете (ФФ)», которое формально можно записать в виде:

$$\forall x \in \text{УрФУ} \ : \ \{\text{студент } x \text{ учится на ФФ}\},$$

есть ложное высказывание.

Утверждение «квадрат действительного числа есть число неотрицательное», формально записывается в виде:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0,$$

есть истинное высказывание.

Определение 1.8. $\exists x : A(x)$ (читается: «существует x, $A(x)$)» – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен на каком-то конкретном x из его области определения, и ложно, если предикат $A(x)$ ложен при всех x из его области определения.

Пример 1.5. Утверждение «на физическом факультете учатся девушки», которое формально записывается в виде:

$$\exists x : \{\text{девушка } x \text{ учится на физическом факультете}\}$$

есть истинное высказывание, так как, конечно, на физическом факультете учится хотя бы одна девушка.

Высказывание $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leqslant 0$ – ложное.

Построим отрицание высказывания $\forall x : A(x)$. Если данное утверждение не имеет места, то суждение $A(x)$ имеет место не для всех x, т. е. существует элемент x, для которого $A(x)$ не имеет места:

$$\neg(\forall x : A(x)) = (\exists x : \neg A(x)).$$

Пример 1.6. Один маленький мальчик очень грамотно построил отрицание утверждения «Все дети любят кашу». Он подумал и, решительно отодвинув от себя тарелку, сказал: «Не все».

Совершенно аналогично

$$\neg(\exists x : A(x)) = (\forall x : \neg A(x)).$$

Таким образом, чтобы построить отрицание логической формулы, содержащей кванторы, необходимо квантор $\forall$ заменить на квантор $\exists$, а квантор $\exists$ заменить на квантор $\forall$ и предикат заменить на его отрицание.

Пример 1.7.

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x : \{\exists y : [\forall z : A(x,y,z)]\}) = \\
&\qquad \exists x : \neg\{\exists y : [\forall z : A(x,y,z)]\} = \\
&\qquad \exists x : \{\forall y : \neg[\forall z : A(x,y,z)]\} = \\
&\qquad\qquad \exists x : \{\forall y : [\exists z : \neg A(x,y,z)]\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что скобки и двоеточия можно частично или вовсе опускать при записи такого рода логических формул, если не возникает разночтений.