и достаточно B»), которое истинно, когда высказывания A и B истинны или ложны одновременно.

Наряду с $A \Leftrightarrow B$ в эквиваленции используется запись: $A = B$.

Итак, при помощи логических операций построено множество высказываний, которое называют *алгеброй высказываний*.

Основные формулы алгебры высказываний следующие:

1) $\neg(\neg A) = A$;

2) законы *дистрибутивности* (распределительные законы):
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

3) законы де Моргана[2]:
$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$;
$\neq (A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;

4) $A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B$;

5) $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge (\neg B)$.

Эти формулы могут быть доказаны сравнением соответствующих таблиц истинности.

Пример 1.2. Докажем формулу 5). Таблица истинности для утверждения в левой части имеет вид:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
и	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

[2] *Огастес де Морган* (1806-1871) – шотландский математик, логик, основоположник логической теории отношений

А таблица истинности для утверждения в правой части имеет вид:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

Сравнивая эти таблицы, видим, что утверждения в правой и левой части принимают одинаковые значения.

Упражнение. С помощью таблиц истинности докажите формулы 1 – 4.

Следующие импликации носят названия:z

$T = (A \Rightarrow B)$ – *прямая теорема*,

$T = (B \Rightarrow A)$ – *теорема, обратная к предыдущей.*

Справедлива формула:

$$(A \Rightarrow B) = ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)),$$

которая служит основой для распространенного в математике доказательства методом «от противного». Действительно, левая часть формулы ложна тогда и только тогда, когда $A = и$, а $B = л$. Но и правая часть ложна тоже только в этом случае.

Следует отметить, что из истинности прямой теоремы еще не следует истинность обратной к ней теоремы, как это видно из примера 1.1: в разобранном примере из утверждения B не следует утверждение A, потому что, как известно, существуют четные числа, не кратные четырем (например, 2).

Предикаты и кванторы

Определение 1.6. Суждение, зависящее от переменной величины, которое при подстанвке значений переменного становится высказыванием, называют *предикатом*.

Пример 1.3. $A(x) =$ «студент x учится на физическом факультете» есть предикат, зависящий от одного переменного x. Здесь $A(x)$ – одноместный предикат. Неравенство $B(x,y) = x^2 + y^2 \geqslant 0$ представляет собой двуместный предикат.

Как и для высказываний, с помощью логических операций $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ можно строить новые предикаты, и мы получим *алгебру предикатов*. Новые предикаты и высказывания можно строить из предикатов также с помощью символов, называемых *кванторами*:

$\exists$ – *квантор существования* (читается: «существует», «найдется»),

$\forall$ – *квантор всеобщности* (читается: «для любого», «для всякого», «для всех»).

Определение 1.7. $\forall x : A(x)$ (читается: «*для всех* $xA(x)$») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен для всех x из его области определение, и ложно – в противном случае.

Пример 1.4. Утверждение «любой студент УрФУ учится на физическом факультете (ФФ)», которое формально можно записать в виде:

$$\forall x \in \text{УрФУ} \;:\; \{\text{студент } x \text{ учится на ФФ}\},$$

есть ложное высказывание.

Утверждение «квадрат действительного числа есть число неотрицательное», формально записывается в виде:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0,$$

есть истинное высказывание.

Определение 1.8. $\exists x : A(x)$ (читается: «существует x, $A(x)$)» – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен на каком-то конкретном x из его области определения, и ложно, если предикат $A(x)$ ложен при всех x из его области определения.

Пример 1.5. Утверждение «на физическом факультете учатся девушки», которое формально записывается в виде:

$$\exists x : \{\text{девушка } x \text{ учится на физическом факультете}\}$$

есть истинное высказывание, так как, конечно, на физическом факультете учится хотя бы одна девушка.

Высказывание $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leqslant 0$ – ложное.

Построим отрицание высказывания $\forall x : A(x)$. Если данное утверждение не имеет места, то суждение $A(x)$ имеет место не для всех x, т. е. существует элемент x, для которого $A(x)$ не имеет места:

$$\neg(\forall x : A(x)) = (\exists x : \neg A(x)).$$

Пример 1.6. Один маленький мальчик очень грамотно построил отрицание утверждения «Все дети любят кашу». Он подумал и, решительно отодвинув от себя тарелку, сказал: «Не все».

Совершенно аналогично

$$\neg(\exists x : A(x)) = (\forall x : \neg A(x)).$$

Таким образом, чтобы построить отрицание логической формулы, содержащей кванторы, необходимо квантор $\forall$ заменить на квантор $\exists$, а квантор $\exists$ заменить на квантор $\forall$ и предикат заменить на его отрицание.

Пример 1.7.

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x : \{\exists y : [\forall z : A(x,y,z)]\}) = \\
&\qquad\qquad = \exists x : \neg\{\exists y : [\forall z : A(x,y,z)]\} = \\
&\qquad\qquad = \exists x : \{\forall y : \neg[\forall z : A(x,y,z)]\} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \exists x : \{\forall y : [\exists z : \neg A(x,y,z)]\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что скобки и двоеточия можно частично или вовсе опускать при записи такого рода логических формул, если не возникает разночтений.

2. Элементы теории множеств

2.1. Понятие множества

Понятие множества в математике рассматривается как первичное, неопределяемое понятие.

Под *множеством* будем понимать совокупность (или семейство, или собрание, или класс) объектов, обладающих определенным признаком. Например, множество деревьев в парке, множество звезд на небе, множество студентов в аудитории, множество натуральных чисел, множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, множество треугольников на плоскости и т.д.

Объекты, обладающие этим признаком, называются *элементами множества*. Множества будем обозначать заглавными буквами A, B, C,..., а элементы этих множеств – строчными буквами a, b, c,.... Множество *содержит* элементы, а элементы *принадлежат* множеству. Для обозначения принадлежности используется знак $\in$. Если a элемент множества A, то этот факт записывается так: $a \in A$. Запись $b \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A. Так, имеем $3 \in \mathbb{Z}$ и $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Множества делятся на *конечные* и *бесконечные*. Например, множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ бесконечны, а множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ конечно. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым*. Пустое множество обозначается символов $\emptyset$ Запись

$$C = \{x \in B \mid P(x)\}$$

обозначает множество, состоящее из всех тех и тлько тех элементов множества B, которое обладает свойством $P(x)$.

Например, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1$ – множество тех действительных чисел, которые обладают свойством быть не меньше нуля и не больше единицы.

Определение 2.1. Множество Y называется *подмножеством* множества X, если любой элемент множества Y является элементом множества X. Это обозначается записью $Y \subseteq X$.

В кванторах это определение можно записать следующим образом:

$$\forall y \in Y : y \in X.$$

Например, $\{1{,}2\} \subseteq \{1{,}2, -\frac{1}{2}\},\ \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z},\ \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q},\ \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Из определения подмножества следует, что всякое множество является подмножеством самого себя, а пустое множество является подмножеством любого множества.

Пример 2.1. Решим следующую простую задачу: найти все подмножества множества $\{1,2,3\}$. Очевидно, что это множество имеет восемь подмножеств: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ и $\{1,2,3\}$.

Определение 2.2. Множество X *равно* множеству Y, если любой элемент множества X является элементом множества Y и любой элемент множества Y является элементом множества X. Другими словами, если X и Y состоят из одних и тех же элементов. На письме это обозначается обычным образом: $X = Y$.

Из определения следует, что множества X и Y равны тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пример 2.2. Множество корней уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

равно множеству $\{1,2,3\}$, а множество $\{51,2,3\}$ равно множеству $\{3,2,51,2\}$.

Заметим, что, перечисляя элементы множества, принято записывать каждый из них только один раз. Подчеркнем, что по определению равенство неважно, в каком порядке перечисляются элементы.

2.2. Операции над множествами

Рассмотрим следующие Операции над множествами: пересечение, объединение, дополнение и разность. Эти операции называются *булевыми*. Установим основные свойства булевых операций.

Определение 2.3. Пусть X и Y – некоторые множества. Тогда *пересечением* множеств X и Y называется множество

$$X \bigcap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\},$$

объединением множеств X и Y называется множество

$$X \bigcup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Например, если $X = \{2,4,6,8,9\}$, $Y = \{1,3,6,9\}$, то $X \bigcap Y = \{6,9\}$, а $X \bigcup Y = \{1,2,3,4,6,8,9\}$.

Отметим основные свойства введенных операций:

1) $X \bigcap X = X$ – *идемпотентность пересечения*;

2) $X \bigcup X = X$ – *идемпотентность объединения*;

3) $X \bigcap Y = Y \bigcap X$ – *коммутативность пересечения*;

4) $X \bigcup Y = Y \bigcup X$ – *коммутативность объединения*;

5) $(X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z)$ – *ассоциативность пересечения*;

6) $(X \bigcup Y) \bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z)$ – *ассоциативность объединения*;

7) $X \bigcap (Y \bigcup Z) = (X \bigcap Y) \bigcup (X \bigcap Z)$ – *дистрибутивность пересечения относительно объединения*;

8) $X \bigcup (Y \bigcap Z) = (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$ – *дистрибутивность объединения относительно пересечения*;

9) $X \bigcap \emptyset = \emptyset$;

10) $X \bigcup \emptyset = X$.

Доказательство отмеченных свойств продемонстрируем на примере тождества 8. Надо доказать, что любой элемент множества $X \bigcup (Y \bigcap Z)$ принадлежит множеству $(X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$, и обратно.

Пусть $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. Тогда $a \in X$ или $a \in Y \bigcap Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$, и поэтому a принадлежит их пересечению, т. е. правой части. Если же $a \in Y \bigcap Z$, то $a \in Y$ и $a \in Z$. Отсюда следует, что $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$, т. е. a принадлежит и их пересечению.

Докажем обратное включение. Пусть теперь $a \in (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$. Тогда $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. Если же $a \notin X$, то из условий $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$ следует, что $a \in Y$ и $a \in Z$, а значит, $a \in Y \bigcap Z$, следовательно, $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. $\square$