第五章
图形变换与裁剪

苏小红

计算机科学与技术学院

哈尔滨工业大学

本章内容

- 5.1　窗口视图变换
- 5.2　二维图形几何变换
- 5.3　三维图形几何变换
- 5.4　投影变换
- 5.5　二维线段裁剪
- 5.6　多边形的裁剪

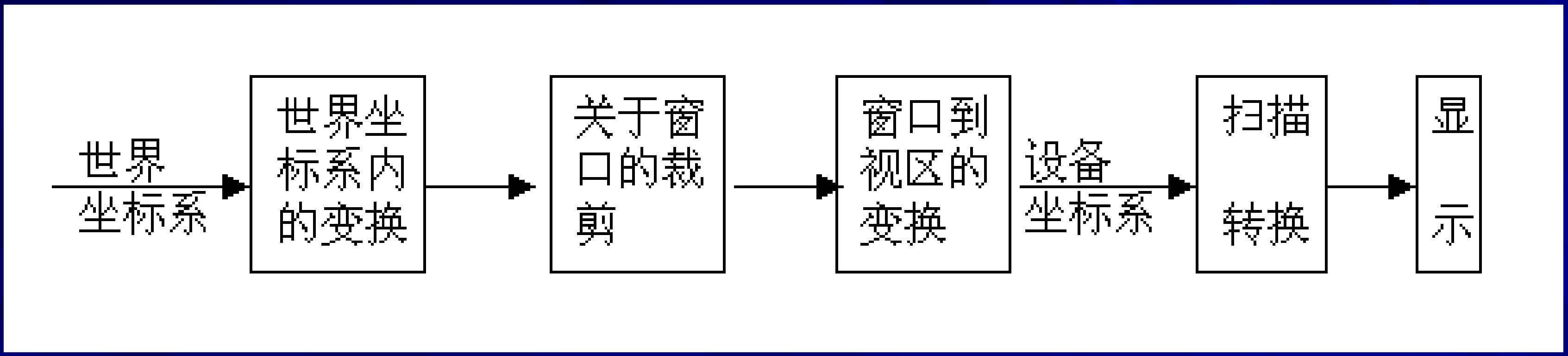
本章内容

5.1 窗口视图变换

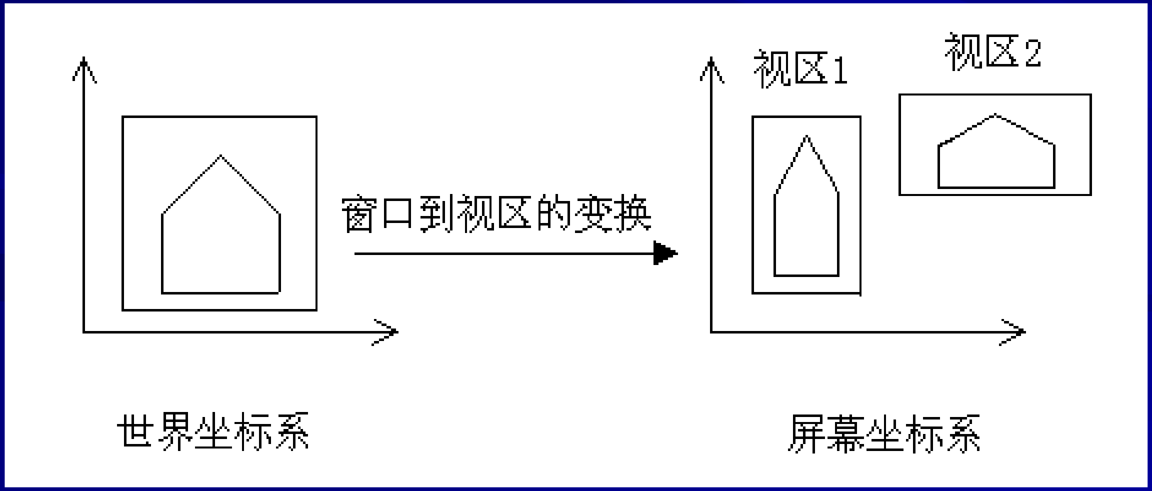
1.窗口和视图区

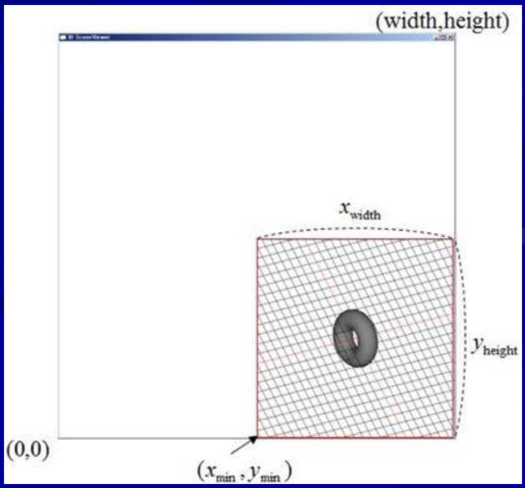
- 用户坐标系（world coordinate system，简称WC）
- 设备坐标系（device coordinate system，简称DC）
- 窗口区（window）
- 视图区（viewport）

二维图形的显示流程



- 将窗口内的图形在视区中显示出来，必须经过将窗口到视图区的变换（Window-Viewport Transformation）处理，称窗口视图变换，也称观察变换（Viewing Transformation）。





2.窗口到视图区的变换

窗口区与视图区间的映射关系：

$$\frac{x_v - v_{xl}}{x_w - w_{xl}} = \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} \Rightarrow x_v = \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}}(x_w - w_{xl}) + v_{xl}$$

$$\frac{y_v - v_{yb}}{y_w - w_{yb}} = \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} \Rightarrow y_v = \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}}(y_w - w_{yb}) + v_{yb}$$

令

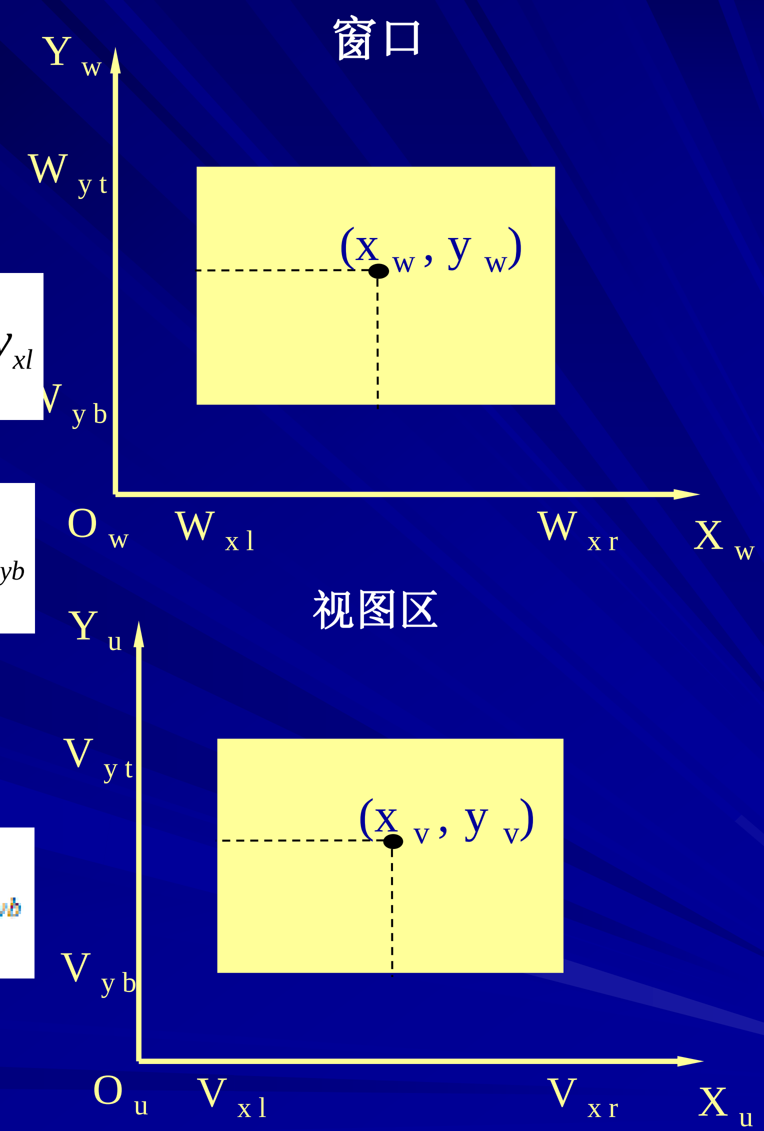
$$a = \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}}, \quad b = \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}}$$

$$c = -\frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} w_{xl} + v_{xl}, \quad d = -\frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} w_{yb} + v_{yb}$$

有

$$x_v = a x_w + c$$

$$y_v = b y_w + d$$



窗口与视图区的对应关系

本章内容

5.1 窗口视图变换
5.2 二维图形几何变换
5.3 三维图形几何变换
5.4 投影变换
5.5 二维线段裁剪
5.6 多边形的裁剪

5.2二维图形几何变换

5.2.1 二维图形几何变换的原理

二维图形由点或直线段组成

直线段可由其端点坐标定义

二维图形的几何变换：对点或对直线段端点的变换

$$P = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \Longrightarrow P' = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$$

5.2二维图形几何变换

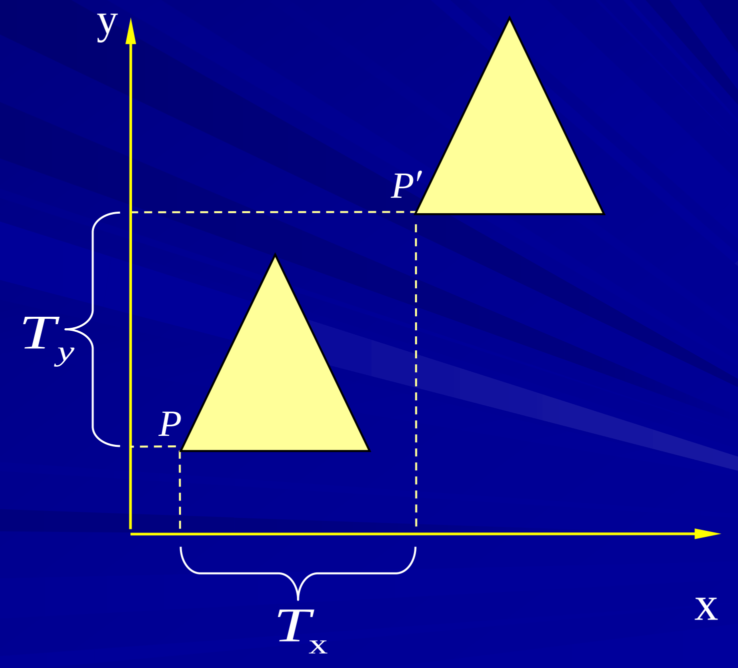
1.平移变换（translation）

T_x 平行于x轴的方向上的移动量

T_y 平行于y轴的方向上的移动量

几何关系

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \end{cases}$$



矩阵形式

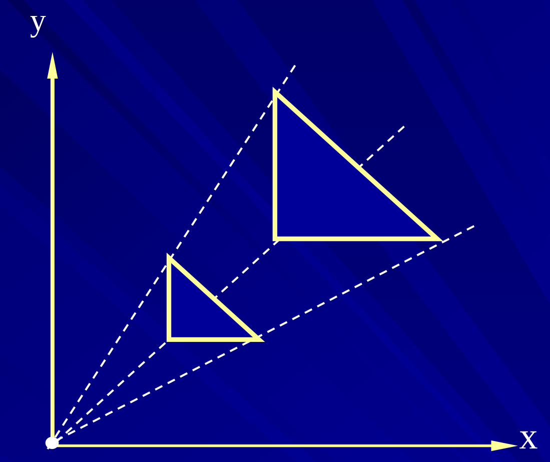
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}$$

5.2二维图形几何变换

2.比例变换（scale）

S_x 平行于x轴的方向上的缩放量

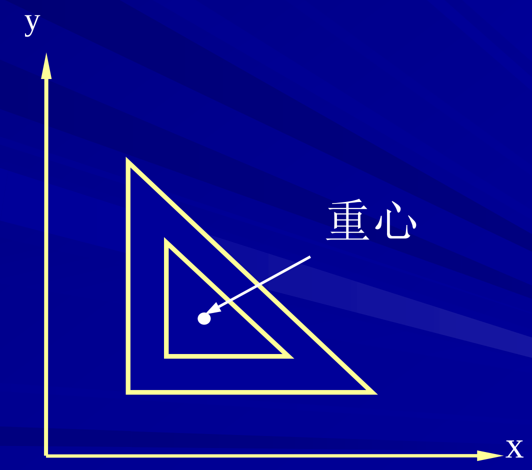
S_y 平行于y轴的方向上的缩放量



相对于原点的比例变换

几何关系

$$\begin{cases} x' = x * S_x \\ y' = y * S_y \end{cases}$$



相对于重心的比例变换

矩阵形式

$$[x' \quad y'] = [x \quad y]\begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

5.2二维图形几何变换

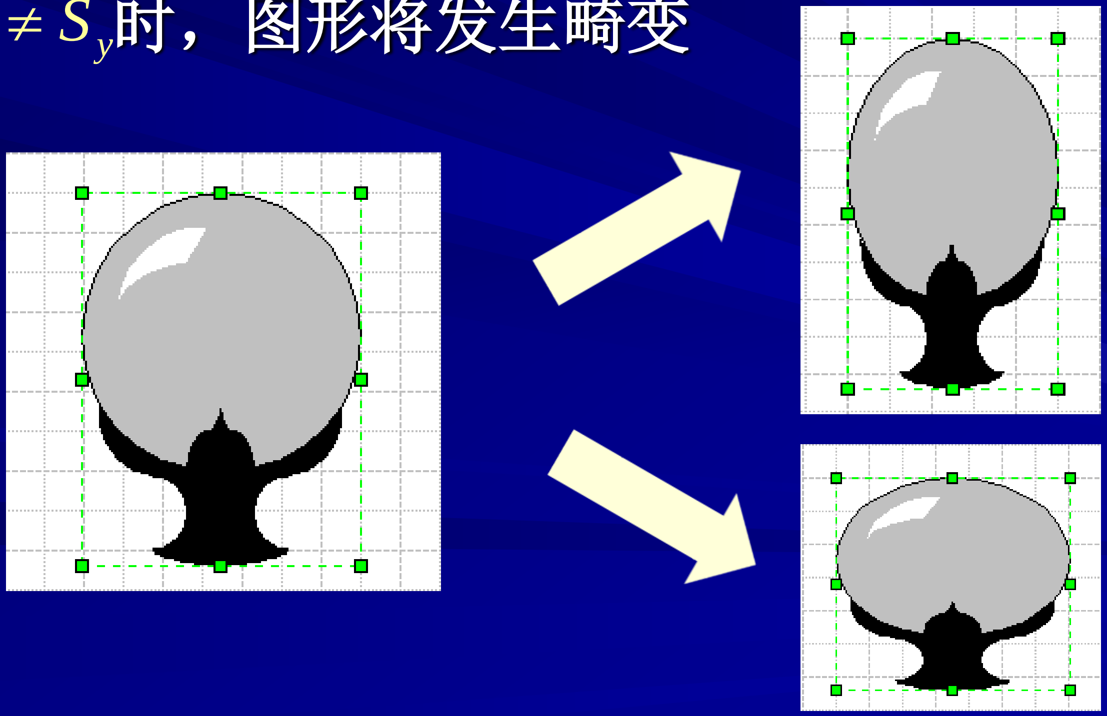
- 比例变换的性质

  当 $S_x = S_y$时，变换前的图形与变换后的图形相似

  当 $S_x = S_y > 1$时，图形将放大，并远离坐标原点

  当 $0 < S_x = S_y < 1$时，图形将缩小，并靠近坐标原点

  当 $S_x \neq S_y$时，图形将发生畸变



5.2二维图形几何变换

3.旋转变换（rotation）

点P绕原点逆时针转θ度角

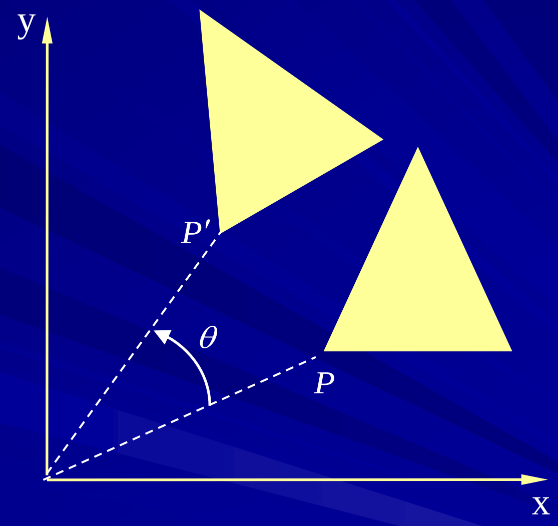
（设逆时针旋转方向为正方向）

几何关系

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\theta+\varphi) = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ y' = r\sin(\theta+\varphi) = r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$



矩阵形式

$$[x' \quad y'] = [x \quad y]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

5.2.2 齐次坐标技术

1.齐次坐标技术（**homogeneous coordinates**）

平移、比例和旋转等变换的组合变换

处理形式不统一，将很难把它们级联在一起。

2.变换具有统一表示形式的优点

– 便于变换合成

3.齐次坐标技术的基本思想

把一个**n**维空间中的几何问题转换到**n+1**维空间中解决。

5.2.2 齐次坐标技术

4.齐次坐标表示

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow (\omega x_1, \omega x_2, \ldots, \omega x_n, \omega)$$

有n个分量的向量　　　　有n+1个分量的向量

哑元或标量因子

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega) \Rightarrow (x_1/\omega, x_2/\omega, \ldots, x_n/\omega)$$

齐次坐标表示不是唯一的

$\omega = 1$ 规格化的齐次坐标

5. 无穷远点或无穷远区域的齐次坐标表示

$\omega = 0$时，齐次坐标 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega)$表示一个n维的无穷远点

5.2.2 齐次坐标技术

5.基本几何变换的齐次坐标表示

- 平移变换

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

- 比例变换

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 旋转变换

逆时针为正

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其他常用的二维几何变换

1.对称变换（symmetry）（反射变换或镜像变换）

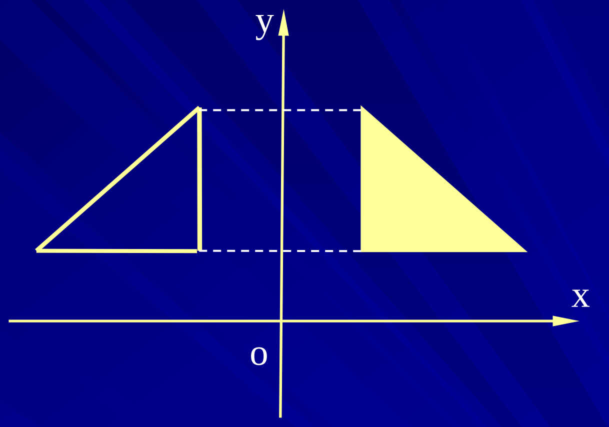
（1）相对于y轴对称

几何关系

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y & 1 \end{bmatrix}$$



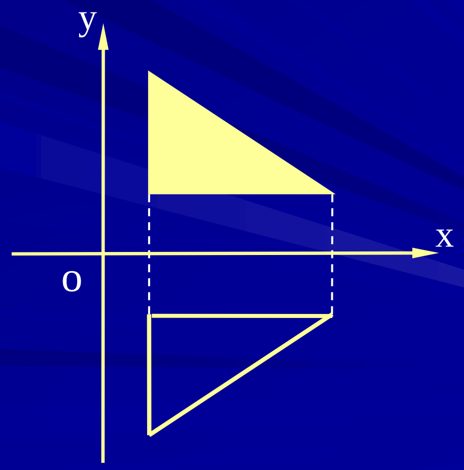
（2）相对于x轴对称

几何关系

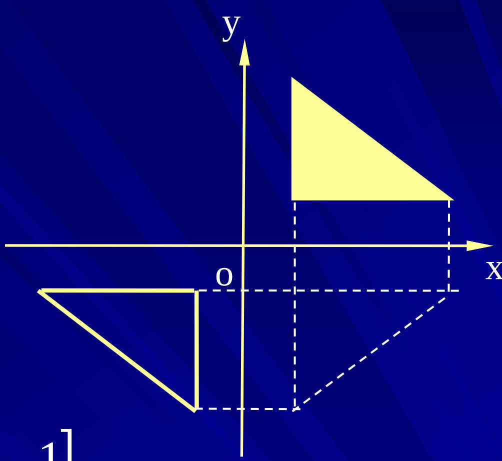
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y & 1 \end{bmatrix}$$



（3）相对于原点对称（即中心对称）



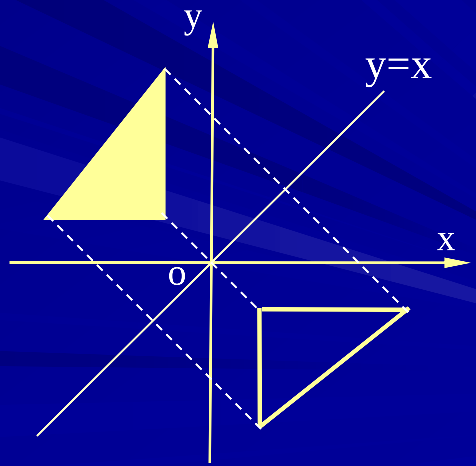
几何关系

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y & 1 \end{bmatrix}$$

（4）相对于直线y=x对称



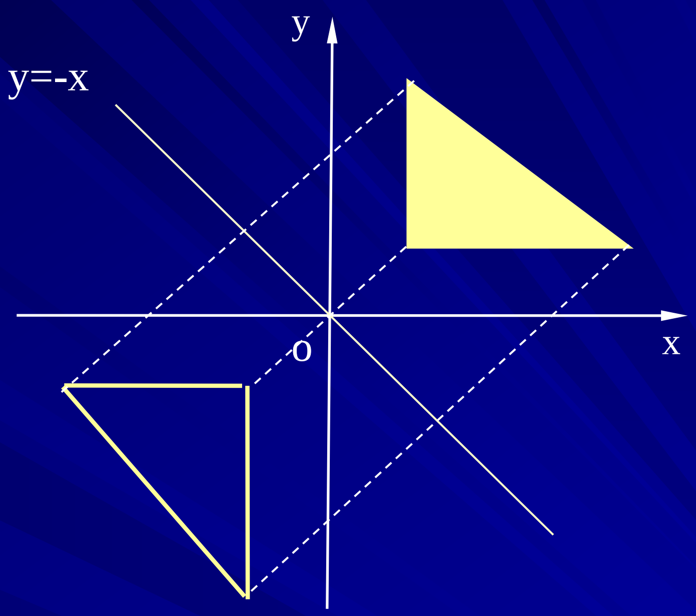
几何关系

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x & 1 \end{bmatrix}$$

（5）相对于直线y=-x对称



几何关系

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

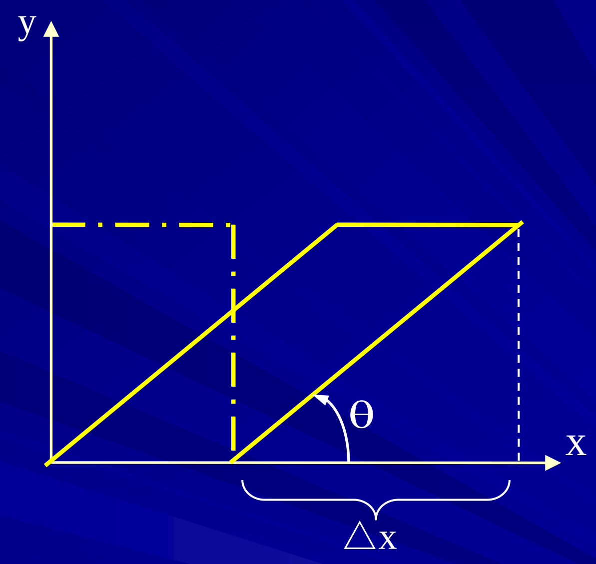
矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -x & 1 \end{bmatrix}$$

2.错切变换（shear）

（1）沿 x 轴方向关于 y 轴错切

将图形上关于y轴的平行线沿x方向推成θ角的倾斜线，而保持y坐标不变。



几何关系

$$\begin{cases} x' = x + \Delta x \\ y' = y \end{cases}$$

令 $a = ctg\theta$　有 $\Delta x = yctg\theta = ay$

代入得 $\begin{cases} x' = x + ay \\ y' = y \end{cases}$

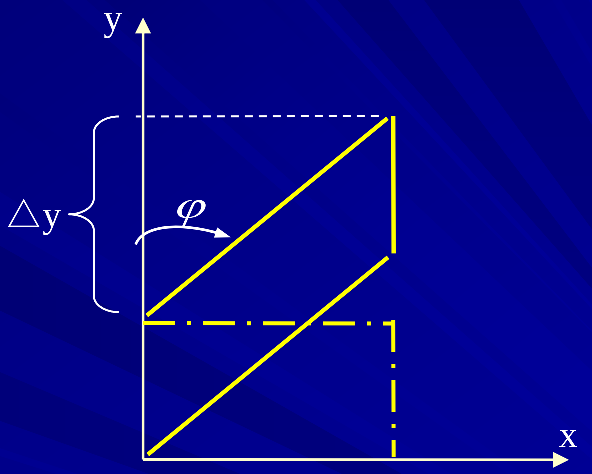
矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+ay & y & 1 \end{bmatrix}$$

（2）沿 y 轴方向关于 x 轴错切

将图形上关于x轴的平行线沿y方向推成Ψ角的倾斜线，而保持x坐标不变。

几何关系



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \Delta y \end{cases}$$

令 $b = ctg\varphi$ 　　有 $\Delta y = xctg\varphi = bx$

代入得 $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + bx \end{cases}$

矩阵形式

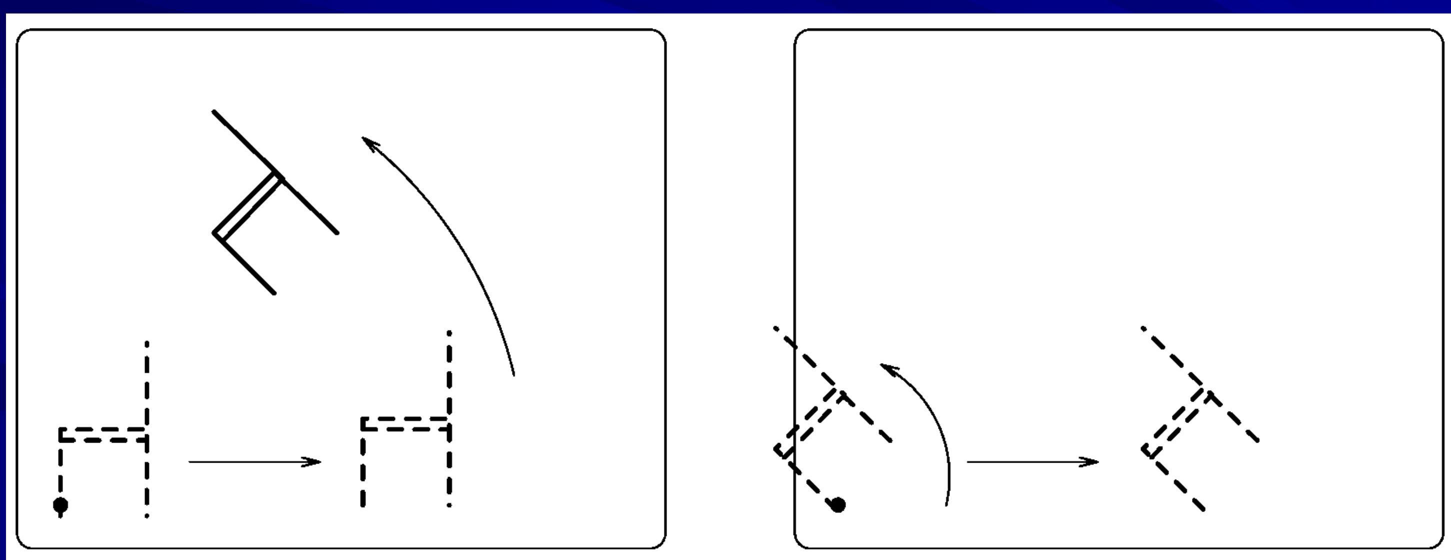
$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad bx + y \quad 1]$$

5.3.3 二维组合变换

- 问题：如何实现复杂变换？

变换分解 → 变换合成

- 变换的结果与变换合成的顺序有关
  - 矩阵乘法不可交换



先平移，再旋转　　　　先旋转，再平移

5.3.3 二维组合变换

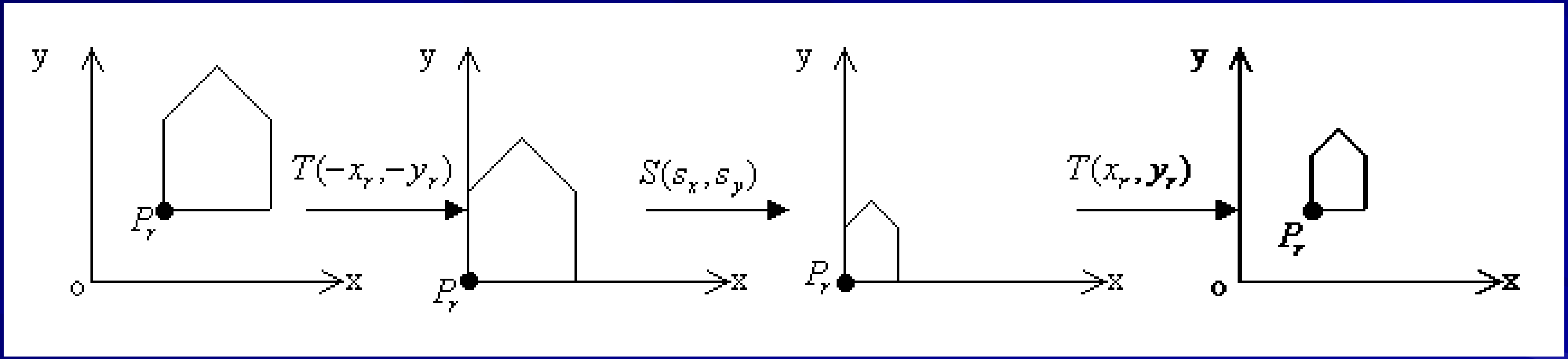
1.相对于任意点（x_0 , y_0）的比例变换

对任意点比例变换的步骤：

（1）平移变换

（2）相对于原点的比例变换

（3）平移变换



- 当（x_0 , y_0）为图形重心的坐标时，这种变换实现的是相对于重心的比例变换。

令

$$T_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_0 & -y_0 & 1\end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x_0 & y_0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T=T_1ST_2$$

则有

$$\begin{aligned}[x' \quad y' \quad 1]&=[x_4 \quad y_4 \quad 1]\\ &=[x_1 \quad y_1 \quad 1]T_1ST_2=[x_1 \quad y_1 \quad 1]T\end{aligned}$$

$$[x_1 \quad y_1 \quad 1]$$

平移

$$[x_2 \quad y_2 \quad 1]=[x_1 \quad y_1 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_0 & -y_0 & 1\end{bmatrix}$$

比例

$$[x_3 \quad y_3 \quad 1]=[x_2 \quad y_2 \quad 1]\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

平移

$$[x_4 \quad y_4 \quad 1]=[x_3 \quad y_3 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x_0 & y_0 & 1\end{bmatrix}$$

任意点比例变换示意图

5.3.3 二维组合变换

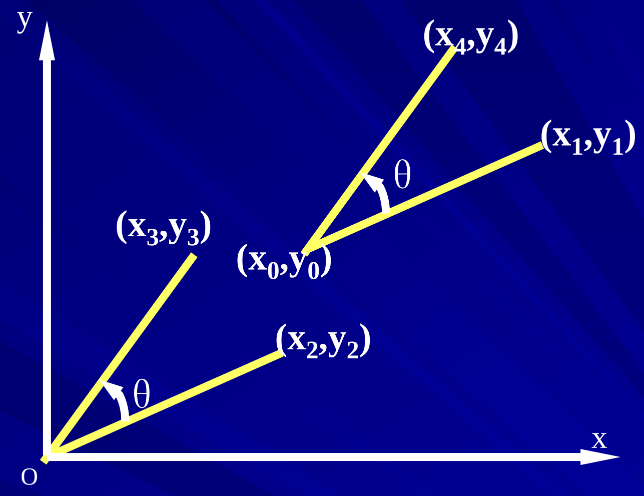
2.绕任意点（x_0 , y_0）的旋转变换

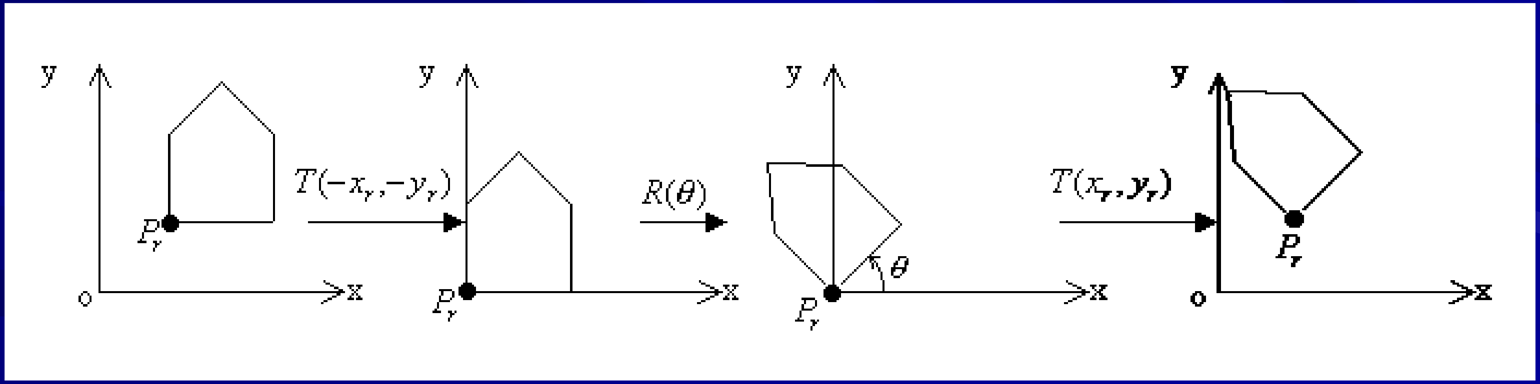
绕任意点旋转变换的步骤：

（1）平移变换

（2）对图形绕原点进行旋转变换

（3）平移变换





令

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = T_1 R T_2$$

则有

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} T_1 R T_2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} T$$

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

平移

$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转

$$\begin{bmatrix} x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

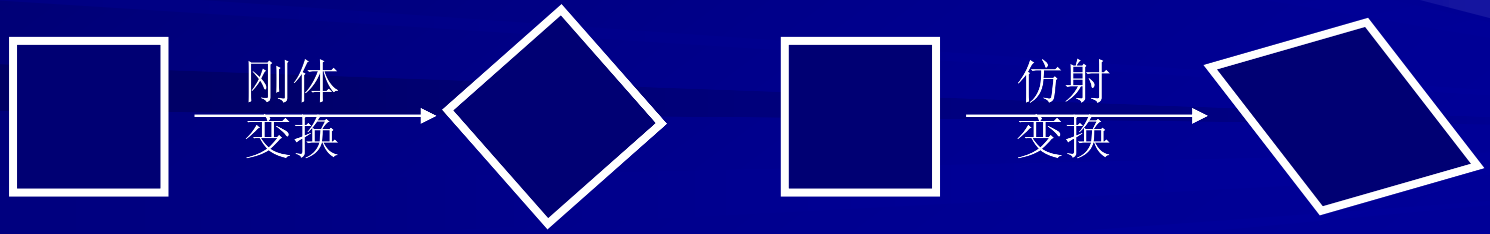
平移

$$\begin{bmatrix} x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕任意点旋转变换示意图

5.3.3 二维组合变换

- 上述变换的组合可以得到特殊的二维变换
  - 刚体变换
    - 可以分解为：平移和旋转的组合
    - 物体的形状没有变化，位置和方位有变化
  - 仿射变换
    - 可以分解为：平移、旋转和放缩或错切的组合
    - 保持点的共线性、长度的比例=>平行线



本章内容

5.1　窗口视图变换

5.2　二维图形几何变换

5.3　三维图形几何变换

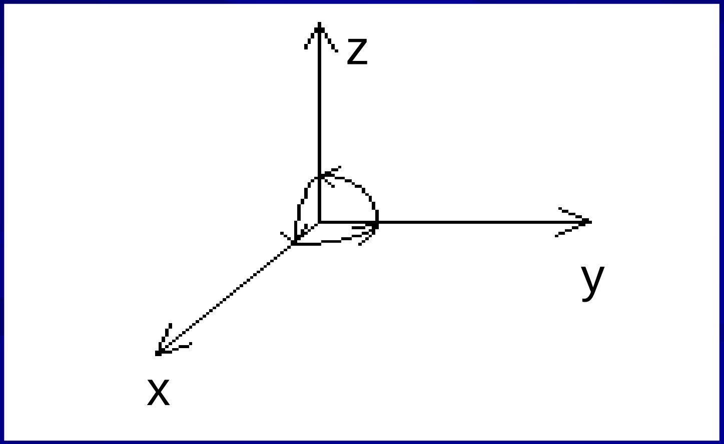
5.4　投影变换

5.5　二维线段裁剪

5.6　多边形的裁剪

三维图形几何变换（1/8）

- 三维齐次坐标
  - (x,y,z)点对应的规格化齐次坐标为(x,y,z,1)
- 三维空间坐标系——右手坐标系



三维图形几何变换（2/8）

- 平移变换

$$T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\T_x&T_y&T_z&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&t_x\\0&1&0&t_y\\0&0&1&t_z\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}$$

- 比例变换

$$S=\begin{bmatrix}s_x&0&0&0\\0&s_y&0&0\\0&0&s_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

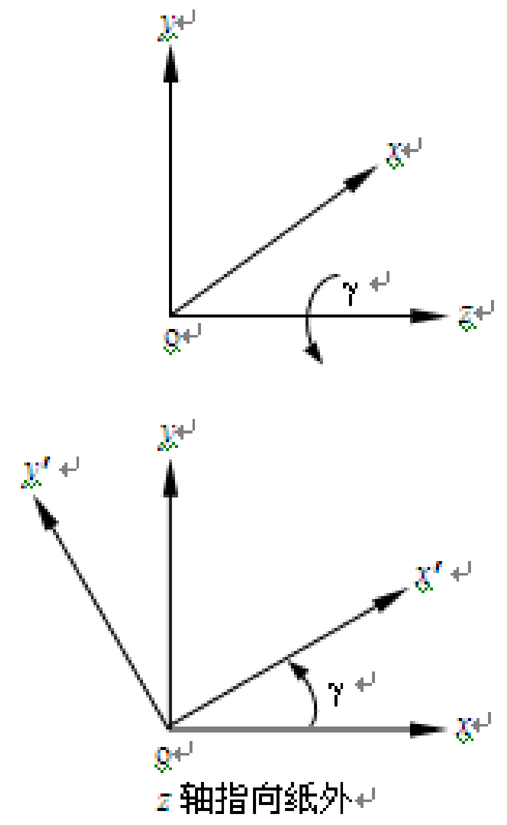
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_x&0&0&0\\0&s_y&0&0\\0&0&s_z&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}$$

三维图形几何变换（3/8）

- 旋转变换:右手螺旋方向为正
  - 绕z轴

$$
\begin{cases}
x' = x\cos\gamma - y\sin\gamma \\
y' = x\sin\gamma + y\cos\gamma \\
z' = z
\end{cases}
$$

$$
T = \begin{bmatrix}
\cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\
-\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$



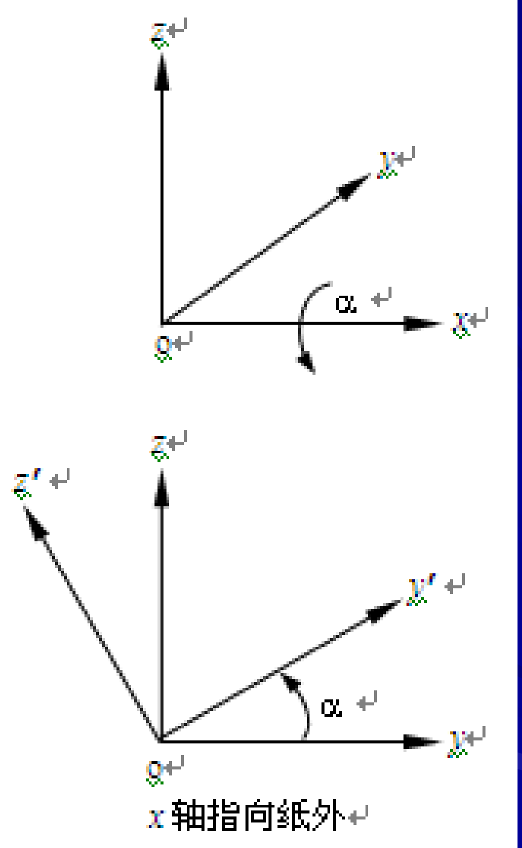
(c) 绕 z 轴旋转 γ 角

三维图形几何变换（4/8）

- 旋转变换:右手螺旋方向为正
  - 绕x轴

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



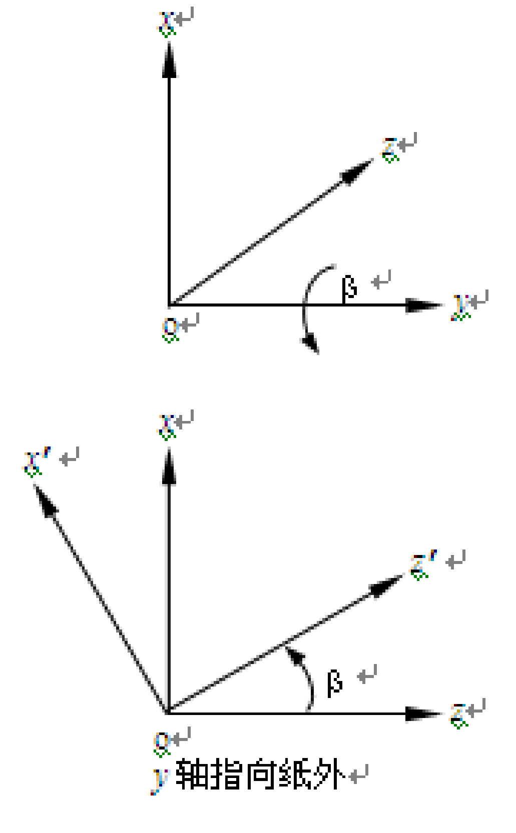
(a) 绕 x 轴旋转 α 角

三维图形几何变换（5/8）

- 旋转变换:右手螺旋方向为正
  - 绕y轴

$$\begin{cases} x' = x\cos\beta + z\sin\beta \\ y' = y \\ z' = -x\sin\beta + z\cos\beta \end{cases}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(b) 绕 y 轴旋转 β角

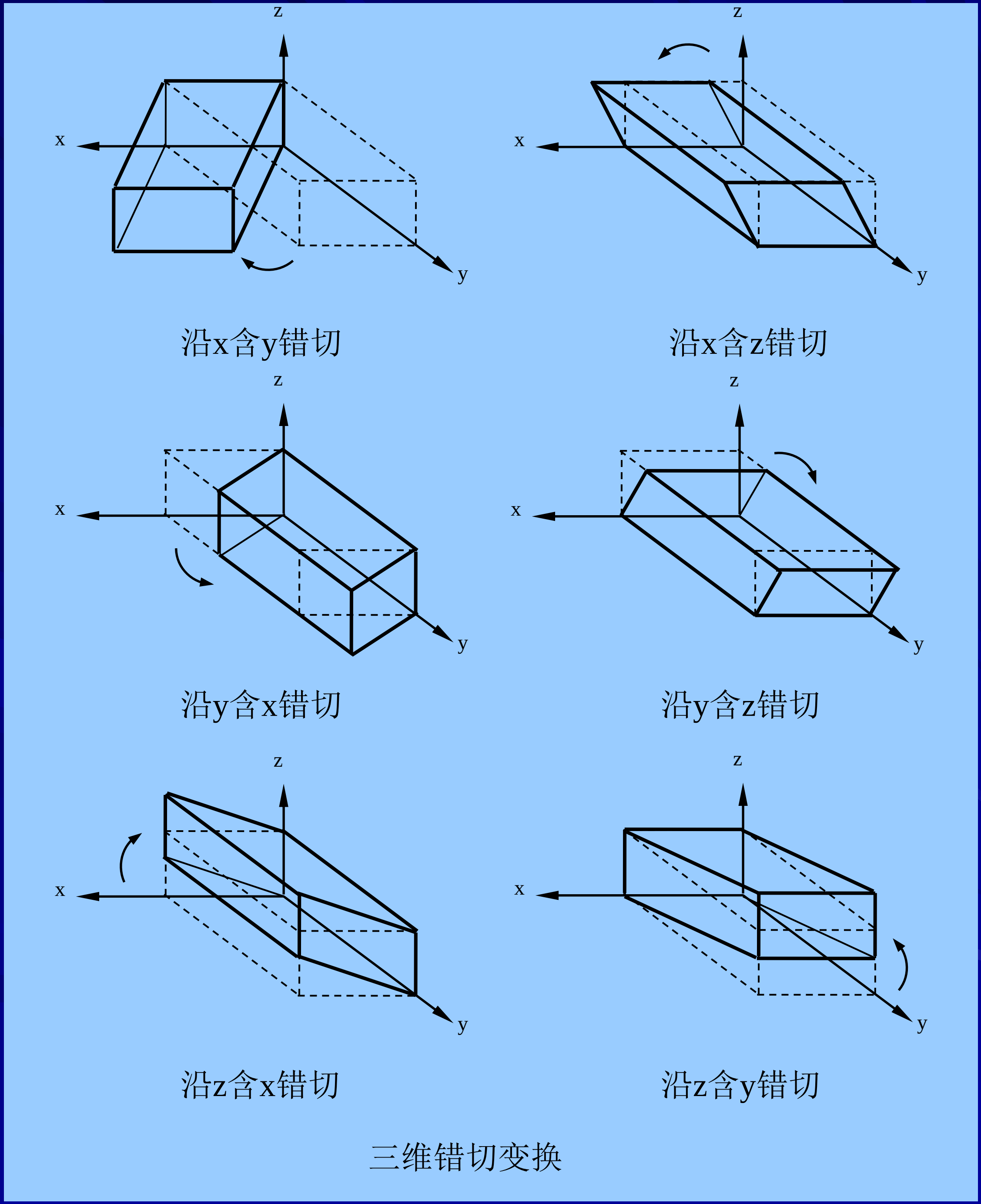
三维图形几何变换（6/8）

- 对称变换
  - 关于坐标平面xy的对称变换

$$SY_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维图形几何变换（7/8）

- 错切变换

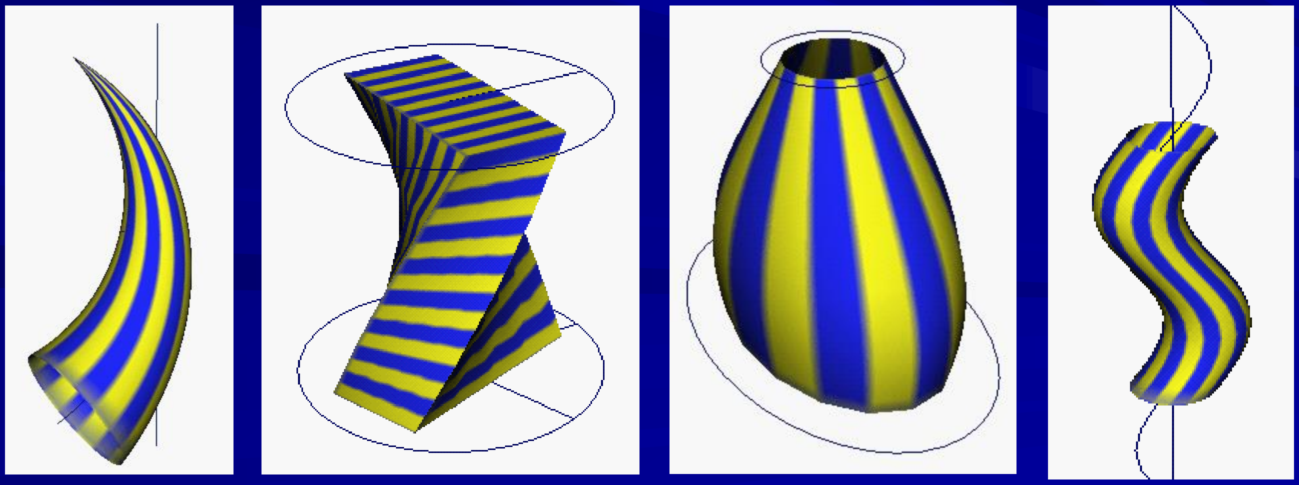


三维图形几何变换（8/8）

- 三维变换的一般形式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- 非线性三维模型变换：变换矩阵是空间位置(x, y, z)或者旋转角度$\theta(x, y, z)$的函数。



Thank you for your attention !

SuXiaoHong