

# ch10\_解答

T10.1

T10.2

好像考试不考，所以我就随便水水

## T10.1

10.1 （滑雪板租买问题）假设您到亚布力滑雪，滑雪板的销售价格是 $m$ 元，租借滑雪板的价格是每天 $r$ 元。由于某些原因，例如是否因为天气恶劣或摔伤而无法滑雪，您无法预知要滑雪的天数。

(1) 试设计一个在线算法帮助您每天决定是否在当天买下滑雪板，使得您的实际花销与（滑雪天数事先知道的前提下）的最优花销的比值不超过 $m/r$ 。

(2) 设 $m=500, r=100$ , 试设计一个竞争度为3的在线算法？

(3) 在 $m=500, r=100$ 的条件下，在线算法能够获得的最优竞争度是多少？

(1) 我们可以设计一个在线算法，在每一天根据当前的租赁花费与购买花费之间的关系来决定是否购买滑雪板。具体步骤如下：

1. 设当前滑雪天数为  $d$ ，初始化为 0。
2. 在每个滑雪日，执行以下操作：
  - a. 将滑雪天数  $d$  加 1。
  - b. 计算当前的租赁花费为  $dr$ 。
  - c. 如果  $dr \geq m$ ，则在当天买下滑雪板。
  - d. 否则，继续租借滑雪板。

在这个算法中，当租借滑雪板的花费大于等于购买滑雪板的花费时，我们选择购买滑雪板。这确保了实际花销与最优花销的比值不超过  $m/r$ 。

(2) 当  $m=500, r=100$  时，我们可以稍微修改上述算法以获得竞争度为 3 的在线算法。具体步骤如下：

1. 设当前滑雪天数为  $d$ ，初始化为 0。
2. 在每个滑雪日，执行以下操作：
  - a. 将滑雪天数  $d$  加 1。

- b. 计算当前的租赁花费为  $dr$ 。
- c. 如果  $dr \geq m/3$ ，则在当天买下滑雪板。
- d. 否则，继续租借滑雪板。

在这个算法中，当租借滑雪板的花费大于等于购买滑雪板花费的  $1/3$  时，我们选择购买滑雪板。这确保了实际花销与最优花销的比值不超过 3。

(3) 在  $m=500$ ， $r=100$  的条件下，最优竞争度为2。可以证明任何情况下不存在一个算法竞争度小于2。

## T10.2

10.2 现有两个求解计算问题 $P$ 的在线算法 $A$ 和 $B$ ,它们的竞争度分别为2和3,请利用算法 $A$ 和算法 $B$ 设计一个竞争度为 $9/4$ 的在线随机算法。

为了设计一个竞争度为  $9/4$  的在线随机算法，我们可以利用算法 A 和算法 B，通过随机选择一个算法来执行。为了优化竞争度，我们需要选择一个合适的概率分布。

假设在线随机算法 C 以概率  $p$  选择算法 A，以概率  $1-p$  选择算法 B。在线随机算法 C 的期望竞争度  $E[C]$  为：

$$E[C] = p * E[A] + (1-p) * E[B] = 2p + 3(1-p)$$

我们的目标是找到一个合适的概率  $p$ ，使得  $E[C] \leq 9/4$ 。为了求解  $p$ ，我们可以解下面的不等式：

$$2p + 3(1-p) \leq 9/4$$

化简后得到：

$$p \geq 1/4$$

所以，我们可以选择  $p = 1/4$ ，这样在线随机算法 C 的期望竞争度将不超过  $9/4$ 。具体实现如下：

1. 在每个操作步骤，以概率  $p = 1/4$  随机选择算法 A；以概率  $1-p = 3/4$  随机选择算法 B。
2. 执行选定的算法（A 或 B）来处理当前的操作。

通过这种方法，我们利用了算法 A 和算法 B 的竞争优势，将在线随机算法 C 的期望竞争度降低到  $9/4$ 。