



**医学影像分析**  
Medical Image Analysis

王宽全  
教授•博士生导师

哈尔滨工业大学•感知计算研究中心•计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**第13章 医学图像配准方法**

哈尔滨工业大学•感知计算研究中心•计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**回顾**

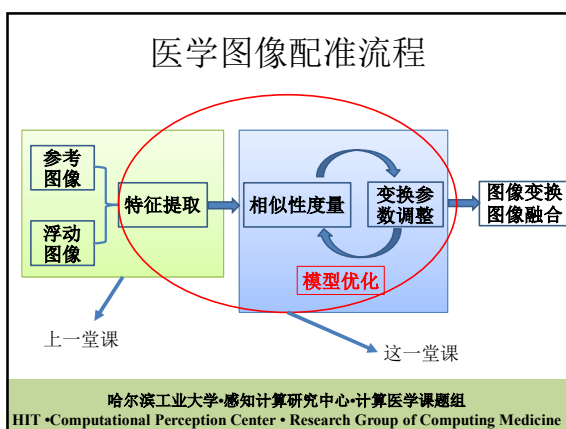
- 配准基本概念和案例
- 配准整体框架
- 配准关键技术概述
- 特征检测方法（点、线、面、Harris角点检测方法）

哈尔滨工业大学•感知计算研究中心•计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**医学图像配准关键技术**

- 配准关键技术可以归纳为：
  - **特征提取**：图像特征提取，关键点检测。
  - **图像变换（特征匹配）**：刚体变换、仿射变换、B-样条变换或者是弹性变换等；
  - **图像插值或重采样**：最近邻插值、线性插值或三次卷积插值等（之前课程讲解过）；
  - **相似度测量**：一个评价图像相似性的测度准则，例如欧氏距离、最大互信息测度；
  - **变换模型估计（模型优化）**：寻找变换参数，即优化算法，常用的优化算法有Powell 算法，梯度下降法等。
  - **图像融合**：从一幅图像中分割出感兴趣部分，嵌入到另一幅图像中，例如灰度调制法、Toet法、小波变换融合法等

哈尔滨工业大学•感知计算研究中心•计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine



**目录**

- 基于图像特征匹配的配准方法--SIFT
- 刚性变换

哈尔滨工业大学•感知计算研究中心•计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 目录

- 基于图像特征匹配的配准方法--SIFT
- 刚性变换

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

上一堂课的遗留问题：

如何让特征点对图像尺度变化具有不变性（并且不局限于检测角点）？如何对特征进行更好的描述？最终如何实现匹配呢？

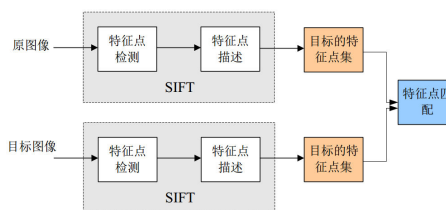
哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 尺度不变特征匹配（SIFT）

- 尺度不变特征变换（匹配）：Scale Invariant Feature Transform（SIFT）。
- 1999年British Columbia大学大卫·劳伊（David G.Lowe）教授总结了现有的基于不变量技术的特征检测方法，并正式提出了一种基于尺度空间的、对图像缩放、旋转甚至明暗度保持不变性的图像局部特征描述算子—SIFT（尺度不变特征变换）
- SIFT 主要思想  
SIFT算法是一种提取局部特征的算法，在尺度空间寻找极值点，提取位置，尺度，旋转不变量。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 尺度不变特征匹配（SIFT）



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 尺度不变特征匹配（SIFT）

SIFT特征匹配算法包括两个阶段：

- ① SIFT特征向量的生成（特征点描述）
- ② SIFT特征向量的匹配

SIFT特征向量的生成算法共包括4步：

- (1) 检测尺度空间极值点（初步确定关键点位置和所在尺度）
- (2) 精确定位极值点（筛选特征点，要去掉低对比度的特征点和不稳定的边缘响应点）
- (3) 为每个关键点指定方向参数（关键点邻域像素的梯度方向分布特性为每个关键点指定方向参数，使算子具备旋转不变性）
- (4) 关键点描述子的生成：

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## SIFT--尺度空间

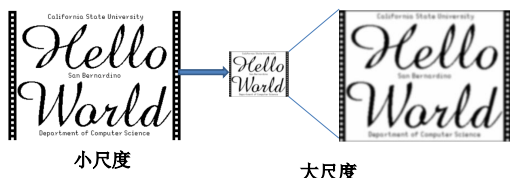
尺度空间（scale space）：

- ✓ 精确表示的物体都是通过一定的尺度来反映的。现实世界的物体也总是通过不同尺度的观察而得到不同的变化。
- ✓ 尺度空间(scale space)思想最早是由Iijima于1962年提出的，后经witkin和Koenderink等人的推广逐渐得到关注，在计算机视觉领域使用广泛。
- ✓ 其主要思想是通过原始图像进行尺度变换，获得图像多尺度下的尺度空间表示序列，对这些序列进行尺度空间主轮廓的提取，并以该主轮廓作为一种特征向量，实现边缘、角点检测和不同分辨率上的特征提取等。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## SIFT--尺度空间

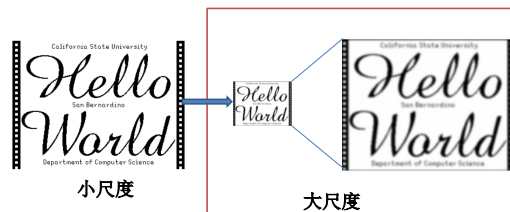
- ◆ 尺度空间中尺度从小到大，图像的模糊程度逐渐变大，能够模拟人在距离目标由近到远时目标在视网膜上的形成过程。**尺度越大图像越模糊**
- ◆ 尺度空间理论告诉我们：任何图像特征都是在一定尺度下考虑才有意义。



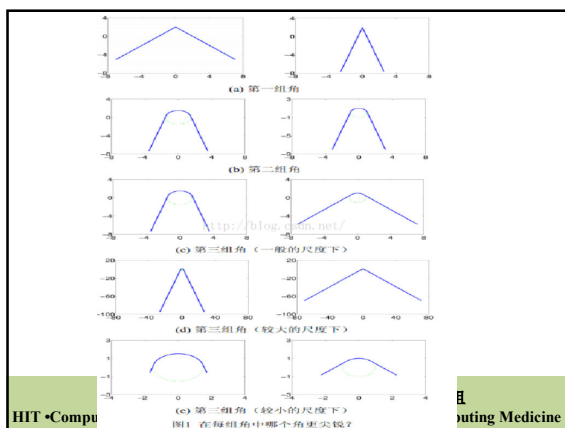
哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## SIFT--尺度空间

尺度越大→图像越模糊→**所以用模糊技术来近似尺度变化**



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine



HIT •Compu

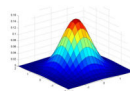
ut

puting Medicine

## SIFT--尺度空间

- 根据文献《Scale-space theory: A basic tool for analysing structures at different scales》我们可知，**高斯核是唯一可以产生多尺度空间的核**，一个图像的尺度空间， $L(x, y, \sigma)$  定义为原始图像  $I(x, y)$  与一个可变尺度的2维高斯函数  $G(x, y, \sigma)$  卷积运算

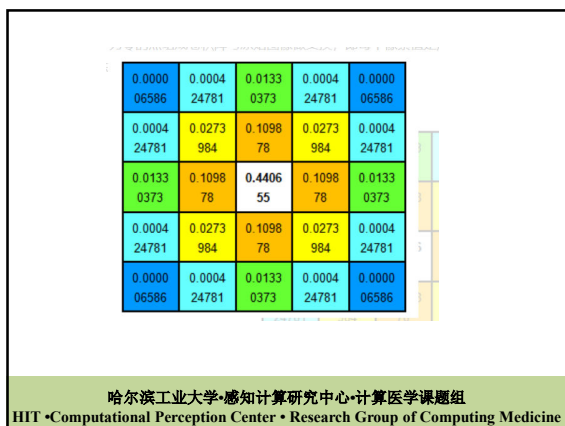
$$\text{高斯函数 } G(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{2\sigma^2}\right)$$



$$L(x, y, \sigma) = G(x, y, \sigma) * I(x, y)$$

$(x, y)$  是空间坐标,  $\sigma$  是尺度坐标。  $\sigma$  大小决定图像的平滑程度，大尺度对应图像的概貌特征，小尺度对应图像的细节特征。大的值对应粗糙尺度(低分辨率)，反之，对应精细尺度(高分辨率)。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## SIFT--尺度空间



高斯模糊前

高斯模糊后

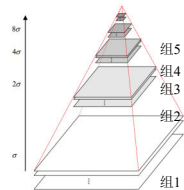
哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## SIFT--尺度空间金字塔

根据不同的高斯尺度的高斯模糊产生不同尺度的图像，构建高斯金字塔的构建过程可分为两步：

- (1) 对图像做高斯平滑；
- (2) 对图像做降采样；

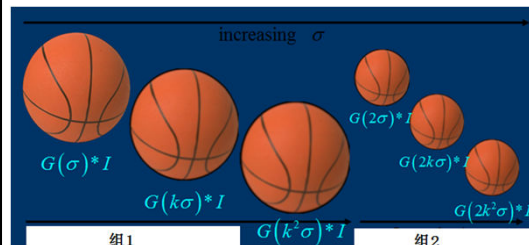
为了让尺度体现其连续性，在简单下采样的基础上加上了高斯滤波。一幅图像可以产生几组。每个组内部又有多个层



- 尺度空间表达是由不同高斯核平滑卷积得到，在所有尺度上有相同的分辨率；
- 而金字塔多分辨率表达每层分辨率减少固定比率。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 组内和组间高斯模糊核尺度关系

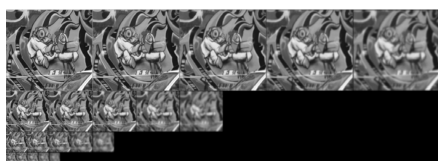


其中K是一个控制高斯模糊尺度的系数，一般设置为1到2之间

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## SIFT--尺度空间

- 以多分辨率来解释图像的一种有效但概念简单的结构就是图像金字塔。其优势很明显，某种分辨率下无法发现的特性在另一种分辨率下将很容易被发现。
- 图像金字塔是一个图像集合，集合中所有的图像都源于同一个原始图像，而且是通过原始图像连续降采样获得，直到达到某个中止条件才停止降采样。（当然，降为一个像素肯定是中止条件。）



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 高斯差分尺度空间

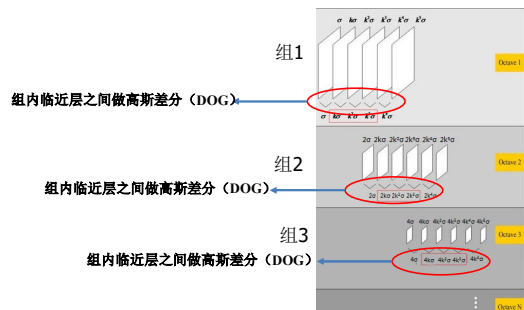
- 为了在尺度空间检测到稳定的关键点，提出了高斯差分（DOG：Difference of Gaussian）尺度空间。利用不同尺度的高斯差分核与图像卷积生成。（简单理解为不同尺度的高斯模糊图像相减！）。该方法可以尤其对图像的亮度变化非常鲁棒。无论将图像调亮还是变暗，DOG结果是一样的！

$$D(x, y, \sigma) = (G(x, y, k\sigma) - G(x, y, \sigma)) * I(x, y) \\ = L(x, y, k\sigma) - L(x, y, \sigma)$$

其中K是一个控制高斯模糊尺度的系数，一般设置为1到2之间

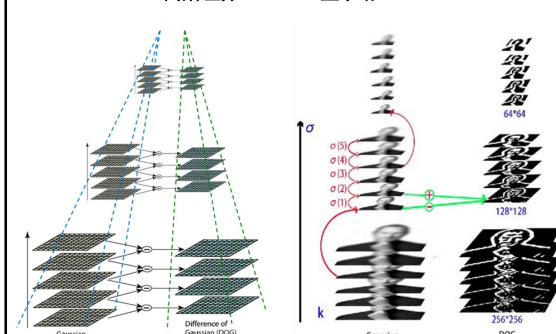
哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## SIFT--尺度空间金字塔划分

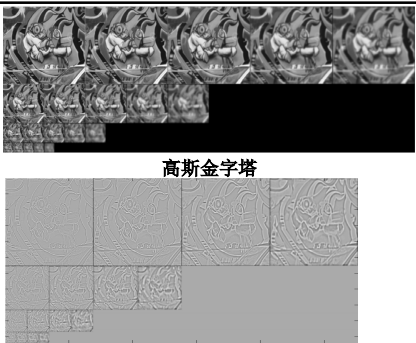


哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 高斯差分（DOG）金字塔



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine



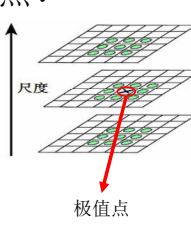
高斯金字塔

生成的高斯差分图像

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

### 如何选择特征点？

- 特征点选择：**为了寻找尺度空间的极值点，每一个采样点要和它所有的相邻点比较，看其是否比它的图像域和尺度域的相邻点大或者小。如下图所示，中间的检测点和它同尺度的8个相邻点和上下相邻尺度对应的 $9 \times 2$ 个点共26个点比较，以确保在尺度空间和二维图像空间都检测到极值点。一个点如果在DOG尺度空间本层以及上下两层的26个领域中是最大或最小值时，就认为该点是图像在该尺度下的一个特征点。



尺度

极值点

DOG尺度空间局部极值检测

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

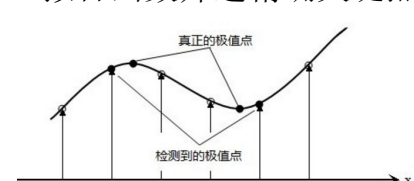
### 如何筛选特征点？

**特征点筛选：**

- 通过拟合二次函数来精确确定关键点。
- 去除低对比度的关键点和不稳定的边缘响应点(因为DoG算子会产生较强的边缘响应)，以增强匹配稳定性、提高抗噪声能力。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

### 拟合函数筛选精确关键点



真正的极值点


检测到的极值点

离散空间的极值点并不是真正的极值点，图中显示了二维函数离散空间得到的极值点与连续空间极值点的差别。利用已知的离散空间点插值得到的连续空间极值点的方法叫做子像素插值(Sub-pixel Interpolation)。(具体的推导在这里不做展示，涉及到矩阵分析内容，感兴趣同学自行探索)

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

### 去除边缘响应点

- 一个定义不好的高斯差分算子的极值在横跨边缘的地方有较大的主曲率，而在垂直边缘的方向有较小的主曲率。



消除前

消除后

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

### 去除边缘响应点

- DOG算子会产生较强的边缘响应，需要剔除不稳定的边缘响应点。获取特征点处的Hessian矩阵，主曲率通过一个 $2 \times 2$ 的Hessian矩阵H求出

$$H = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix}$$

- D为某个尺度的DOG图像中的关键点，H的特征值 $\alpha$ 和 $\beta$ 代表x和y方向的梯度，D的主曲率和H的特征值成正比，令 $\alpha$ 为最大特征值， $\beta$ 为最小的特征值。两个特征值相等时最小，随着的增大而增大。值越大，说明两个特征值的比值越大，即在某一个方向的梯度值越大，而在另一个方向的梯度值越小。而边缘恰恰就是这种情况。可以剔除特征值差异大的响应点。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

DOG算子会产生较强的边缘响应，需要剔除不稳定的边缘响应点。获取特征点处的Hessian矩阵，主曲率通过一个2x2的Hessian矩阵H求出：

$$H = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

H的特征值 $\alpha$ 和 $\beta$ 代表x和y方向的梯度，

$$\begin{aligned} Tr(H) &= D_{xx} + D_{yy} = \alpha + \beta, \\ Det(H) &= D_{xx}D_{yy} - (D_{xy})^2 = \alpha\beta \end{aligned} \quad (4-5)$$

表示矩阵H对角线元素之和，表示矩阵H行列式。假设是 $\alpha$ 较大的特征值，而是 $\beta$ 较小的特征值。令 $\alpha = r\beta$ ，则

$$\frac{Tr(H)^2}{Det(H)} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{(r\beta + \beta)^2}{r\beta^2} = \frac{(r+1)^2}{r} \quad (4-6)$$

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

D的主曲率和H的特征值成正比，令 $\alpha$ 为最大特征值， $\beta$ 为最小的特征值，则公式 $(r+1)^2/r$ 的值在两个特征值相等时最小，随着的增大而增大。值越大，说明两个特征值的比值越大，即在某一个方向的梯度值越大，而在另一个方向的梯度值越小，而边缘恰恰就是这种情况。所以为了剔除边缘响应点，需要让该比值小于一定的阈值，因此，为了检测主曲率是否在某域值 $r$ 下，只需检测

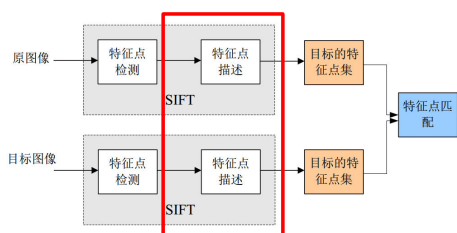
$$\frac{Tr(H)^2}{Det(H)} < \frac{(r+1)^2}{r} \quad (4-7)$$

式(4-7)成立时将关键点保留，反之剔除。

在Lowe的文章中，取 $r = 10$ 。图4.2右侧为消除边缘响应后的关键点分布图。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 基于特征点的图像匹配算法流程



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 特征点（关键点）描述

**描述的目的：**是在关键点计算后，用一组向量将这个关键点描述出来，这个描述子不但包括关键点，也包括关键点周围对其有贡献的像素点。用来作为目标匹配的依据，也可使关键点具有更多的不变特性，如光照变化、3D视点变化等。

**描述思路：**通过对关键点周围图像区域分块，计算块内梯度直方图，生成具有独特性的向量，这个向量是该区域图像信息的一种抽象，具有唯一性。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 梯度计算

通过尺度不变性求极值点，可以使它具有缩放不变的性质，利用关键点邻域像素的梯度方向分布特性，我们可以为每个关键点指定方向参数方向，从而使描述子对图像旋转具有不变性。

像素点的梯度表示

$$gradI(x, y) = \left( \frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y} \right)$$

$$m(x, y) = \sqrt{(L(x+1, y) - L(x-1, y))^2 + (L(x, y+1) - L(x, y-1))^2}$$

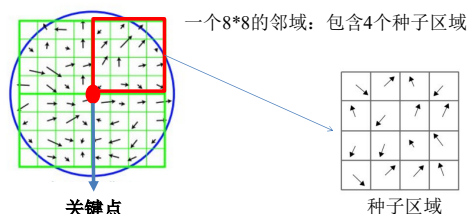
$$\theta(x, y) = \tan^{-1}((L(x, y+1) - L(x, y-1)) / (L(x+1, y) - L(x-1, y)))$$

式中 $m(x, y)$ 为梯度的模值， $\theta(x, y)$ 为方向公式。其中 $L$ 所用的尺度为每个关键点各自所在的尺度。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 如何描述检测到的特征点？

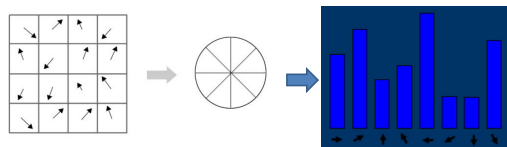
采用关键点邻域的梯度分布进行描述！



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine



### 每个种子区域梯度描述



每个像素点的梯度

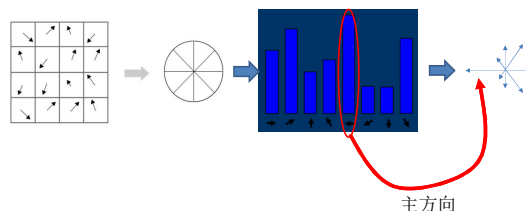
8个方向

直方图

直方图统计区域内像素的梯度方向。梯度直方图的范围是0~360度，其中每45度一个柱，总共8个柱  
每4×4的小块上计算8个方向的梯度方向直方图，绘制每个梯度方向的累加值（不是简单计数，而是向量模值累加）

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

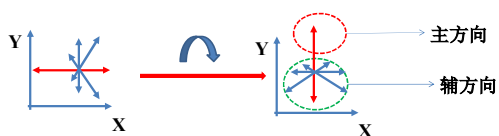
### 直方图向量化



主方向

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

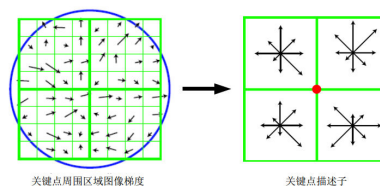
### 向量方向归一化



向量方向归一化：通过向量旋转将主方向调整为统一的方向（例如主方向指向Y轴方向），这样可以是特征描述具有方向不变性。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

### 描述子生成



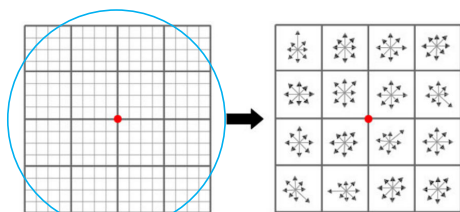
关键点周围区域图像梯度

关键点描述子

描述子生成：2\*2\*8=32维度的向量

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

### 描述子生成



如果放大描述的邻域，  
描述子生成：4\*4\*8=128维度的向量

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

### 向量大小规范化

假设我们采用128维作为描述子向量，将所有向量的模值规范化为1

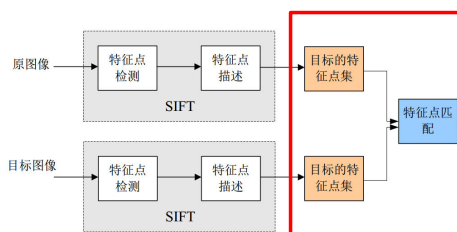
$W = (w_1, w_2, \dots, w_{128})$  为得到的128描述子向量

$L = (l_1, l_2, \dots, l_{128})$  为规范化后的向量

$$\text{其中 } l_j = w_j / \sqrt{\sum_{i=1}^{128} w_i^2} \quad j=1, 2, \dots, 128$$

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

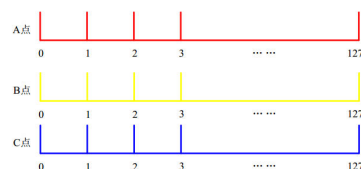
## 基于特征点的图像匹配算法流程



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 描述子集合

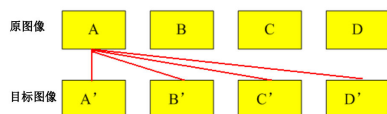
分别对目标图（参考图，reference image）和原图（观测图，observation image）建立关键点描述子集合。集合中的每个元素都是关键点的128维向量。



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 关键点匹配

目标的识别是通过两点集内关键点描述子的比对来完成。采用穷举匹配的方式进行匹配。



关键点的匹配可以采用穷举法来完成，但是这样耗费的时间太多，一般都采用一种叫kd树的数据结构来完成搜索。搜索的内容是以目标图像的关键点为基准，搜索与目标图像的特征点最近的原图像特征点和次邻近的原图像特征点。（kd树是一个平衡二叉树，这部分内容同学们自行探索）

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 相似性度量

具有128维的关键点描述子的相似性度量：采用欧式距离

$$\begin{aligned} \text{目标图中关键点描述子: } R_i &= (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{i128}) \\ \text{原图中关键点描述子: } S_j &= (s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{j128}) \\ \text{欧氏距离: } d(R_i, S_j) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{128} (r_{ik} - s_{jk})^2} \end{aligned}$$

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 匹配成功的标准

要得到配对的关键点描述满足：

$$\frac{\text{实时图中距离 } R_i \text{ 最近的点 } S_j}{\text{实时图中距离 } R_i \text{ 的次最近点 } S_p} < \text{Threshold}$$

从而筛选出匹配程度最高的关键点！

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

DOG和采用梯度向量作为描述子：图像明暗度（光照条件）不变性  
向量方向归一化：图像旋转不变性  
缩放不变性如何解决呢？

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT • Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

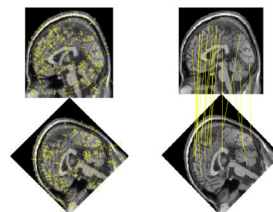


关键点提取的时候采用了多尺度金字塔。

关键点匹配的时候依然可以采用多尺度金字塔，各个scale（所有scale）的描述子进行匹配。这样可以解决图像缩放不变性匹配问题。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 匹配结果



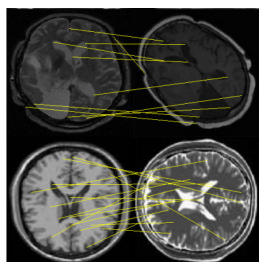
关键点

匹配结果

对图像旋转鲁棒性高

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 多模医学影像配准



MRI-T1

MRI-T2

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

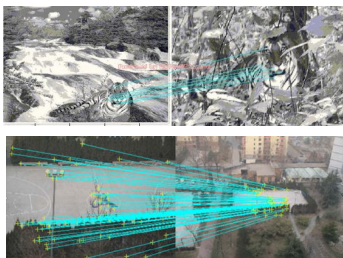
## 匹配结果



对图像明暗度鲁棒性高

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 匹配结果



对图像尺度变化鲁棒性高

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## SIFT总结

优势：基于尺度空间的、对图像缩放、旋转甚至明暗度保持不变性的图像局部特征描述算子。

不足：实时性不好、只能直接匹配、并得到匹配结果。无法进行模型优化。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 医学图像配准关键技术

- 配准关键技术可以归纳为：
  - 特征提取**：图像特征提取，关键点检测。
  - 图像变换（特征匹配）**：刚体变换、放射变换、B-样条变换或者是弹性变换等；
  - 图像插值或重采样**：最近邻插值、线性插值或三次卷积插值等（之前课程讲解过）；
  - 相似度测量**：一个评价图像相似性的测度准则，例如欧氏距离、最大互信息测度；
  - 变换模型估计（模型优化）**：寻找变换参数，即优化算法，常用的优化算法有Powell算法，梯度下降法等。
  - 图像融合**：从一幅图像中分割出感兴趣部分，嵌入到另一幅图像中，例如灰度调制法、Toet法、小波变换融合法等

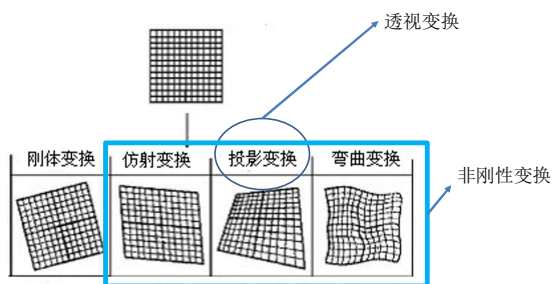
哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 目录

- 基于图像特征匹配的配准方法--SIFT
- 刚性变换

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 刚性与非刚性变换



哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**刚体变换**：指物体内部任意两点间的距离及平行关系保持不变（处理人脑图像，对不同方向成像的图像配准常使用刚体变换），包括**旋转、平移**

**仿射变换**：保持平行性，但距离发生变化，直线还是直线（校正成像设备的误差产生的畸变）

**投影变换**：直线映射成直线，平行性和两点间的距离变化（二维投影图像与三维图像的配准）

**缩放变换**：图像尺度发生变化，

**弯曲变换**：直线变成曲线（解剖图谱变形拟合图像数据）

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 刚体变换

**物体内部两点间的距离和角度保持不变**

医学图像配准在大多数情况下是采用刚体变换模型。  
人体的很多组织可以**近似**为刚体，如骨头、由颅骨固定的大脑等

刚体变换：**平移、旋转**

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

### ① 二维刚体变换：沿x轴平移：

从  $(x, y)$  变到新坐标系  $(x', y')$

变换公式：
$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y \end{cases}$$
 其中  $x'$  与  $y'$  是平移后的结果

矩阵公式：
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + p \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + p \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

向右平移  $p$  为正  
向左平移  $p$  为负

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**沿y轴平移:**

变换公式:  $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + q \end{cases}$  其中 $x'$ 与 $y'$ 是平移后的结果

$$\text{矩阵公式: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + q \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + q \\ 1 \end{bmatrix}$$

向上平移 $q$ 为正  
向下平移 $q$ 为负

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**② 三维刚体变换: 沿x轴平移**

变换公式:  $\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y, z' = z \end{cases}$  其中 $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ 是平移后的结果

$$\text{矩阵公式: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + p \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

向右平移 $p$ 为正  
向左平移 $p$ 为负

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**沿y轴平移:**

变换公式:  $\begin{cases} y' = y + q \\ x' = x, z' = z \end{cases}$  其中 $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ 是平移后的结果

$$\text{矩阵公式: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + q \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

向上平移 $q$ 为正  
向下平移 $q$ 为负

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**绕坐标原点旋转:**

变换公式:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

矩阵公式:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y + 0 \cdot 1 \\ -\sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组

HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**复合变换**

先沿x轴平移, 再沿y轴平移, 最后绕原点旋转

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

先绕原点旋转, 再沿y轴平移, 最后沿x轴平移

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

不同顺序的变换得到的结果是不同。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

**复合变换举例**

设刚体变换先绕坐标原点旋转 $10^\circ$ , 再沿x轴平移4个单位, 然后沿y轴平移9个单位

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(10^\circ) & \sin(10^\circ) & 0 \\ -\sin(10^\circ) & \cos(10^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9848 & 0.1736 & 9 \\ -0.1736 & 0.9848 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

设刚体变换先沿x轴平移4个单位, 再沿y轴平移9个单位, 然后绕坐标原点旋转 $10^\circ$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(10^\circ) & \sin(10^\circ) & 0 \\ -\sin(10^\circ) & \cos(10^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9848 & 0.1736 & 5.5016 \\ -0.1736 & 0.9848 & 8.1688 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

不同顺序的变换得到的结果是不同。

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

## 复合变换举例

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9848 & 0.1736 & 9 \\ -0.1736 & 0.9848 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(10^\circ) & \sin(10^\circ) & 0 \\ -\sin(10^\circ) & \cos(10^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9.5579 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2.3764 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

先沿X轴平移2.3764个单位

再沿Y轴平移9.5579个单位

最后绕坐标原点旋转10度

对于一个给定的变换结果，可以有许多的变换途径

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine

谢谢！

哈尔滨工业大学·感知计算研究中心·计算医学课题组  
HIT •Computational Perception Center • Research Group of Computing Medicine