

姓名:

学号:

作业 3

2023 年 5 月 5 日之前发送到: 2224127900@qq.com

1. 结合具体的最优化方法来解释优化中的迭代与逼近思想。
2. 假设优化问题为 $\min f(x); s.t. g(x) \leq 0, h(x) = 0$, 其中 $f: R^n \rightarrow R, g: R^n \rightarrow R^m, h: R^n \rightarrow R^l$, 假设在点 $x_k \in R^n$ 处, 方向 $d \in R^n$ 是该点处的某个方向, 若该方向是可行下降方向, 请推导方向 d 必须满足的条件。
3. 用最速下降法求解 $\min f(x) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, 取 $x_0 = (0,0)^T$ 要求迭代两次。
4. 考虑下述问题 $\min f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2; s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$,
 - a) 试求目标函数 $f(x)$ 的梯度, 以及临界点和 Hessian 矩阵 H , 并判定各临界点是否是真正的极值点。
 - b) 试求各约束条件的梯度
 - c) 假设从初始点 $x^{(1)} = (0,0)$ 出发, 采用约束优化问题的可行方向法来求解该问题

5. 考虑约束最优化问题 $\min f(x) = 4x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2; s.t. \begin{cases} x_1^2 - x_2 + 2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$, 分别写出用内点法和

和外点法求解的辅助问题

6. 给定如下的原问题(Primal Problem)和拉格朗日对偶问题(Lagrangian Duality Problem):

原问题: $\min_x f(x), s.t. \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l \end{cases}$, 这里 $f, g_i, h_j: R^n \rightarrow R, X \subset R^n$ 为非空集合。一般 $x \in X$

可令 $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_l \end{pmatrix}$, 来进一步化简表达式。

对偶问题: $\max_{u,v} \theta(u,v), s.t. u \geq 0$, 这里 $\theta(u,v) = \inf_{x \in X} \{f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^l v_j h_j(x)\}$

X , $u \in R^m, v \in R^l$ 分别表示对应不等式约束和等式约束的拉格朗日乘子向量或者对偶变量。

- a) 请证明: 函数 $\theta(u,v)$ 是凹函数。
 - b) 请解释对偶问题在最优化中的作用, 简单论述弱对偶定理和强对偶定理的内容。
7. 给定优化问题 $\min (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2, s.t. \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$, 回答下列问题

- a) 写出该问题的 KKT 条件式;
 - b) 判断点 $x' = (0,0)^T$ 是否是 KKT 点
 - c) 判断点 $x'' = (2,1)^T$ 是否是 KKT 点;
 - d) 画出优化问题的几何示意图, 然后分别画出起作用约束条件和目标函数在这两个点 x', x'' 的梯度示意图, 并根据 KKT 条件式来解释 b) 和 c) 中的结论。
8. 给定凸函数 $f: R^n \rightarrow (-\infty, \infty]$, 向量 g 称为函数 f 在点 x 处的次梯度(subgradient), 若满足 $f(z) \geq f(x) + g'(z - x), \forall z \in R^n$ 。所有定义域上点的次梯度的集合称为次微分, 记为 $\partial f(x)$, 试根据这个定义求解下列函数的次微分集合, 或者用图示的方式将次梯度的意义表示清楚:
- a) $f(x) = |x|$;
 - b) $f(x) = \max\{0, \frac{1}{2}(x^2 - 1)\}$

姓名：

学号：

9. 论述启发式优化算法的基本思想。点集匹配问题（给定两组特征点及其描述，如何确认其匹配的点）、拼图重构问题都是组合优化问题，如何采用启发式算法来求解？
10. 请给出几种求解大规模问题的分布式优化算法及其基本思想。
11. 论述罚因子方法与增广拉格朗日方法的基本思想，简述增广拉格朗日方法和 ADMM 方法的异同。
12. 思考：将非凸问题转化为凸问题有哪些可能的方法。