



第7章

自然景物模拟与分形艺术

苏 小 红

计算机科学与技术学院

哈尔滨工业大学

本章内容

- ❖ 什么是分形？
- ❖ 什么是分形维数？
- ❖ 随机插值模型
- ❖ 迭代函数系统
- ❖ L系统
- ❖ 粒子系统
- ❖ 动力系统中的分形
- ❖ 复平面上的迭代

本章内容

- ❖ 什么是分形？
- ❖ 什么是分形维数？
- ❖ 随机插值模型
- ❖ 迭代函数系统
- ❖ L系统
- ❖ 粒子系统
- ❖ 动力系统中的分形
- ❖ 复平面上的迭代

什么是分形？（1/26）

❖ 著名理论物理学家约翰·惠勒(J. Wheeler)说过：

∞ 在过去，一个人如果不懂得熵是怎么回事，就不能说是科学上有教养的人；

∞ 在将来，一个人如果不能同样熟悉分形，他就不能被认为是科学上的文化人。



什么是分形？（2/26）

❖ 非线性科学中最重要的三个概念

❧ 分形(Fractal)

❧ 混沌(chaos)

❧ 孤子(soliton)，也称“孤波” (solitary wave)

❖ 分形理论——非线性科学研究领域中最活跃的分支

❧ 本质是一种新的世界观和方法论

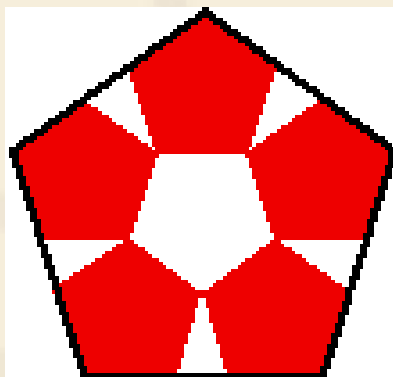
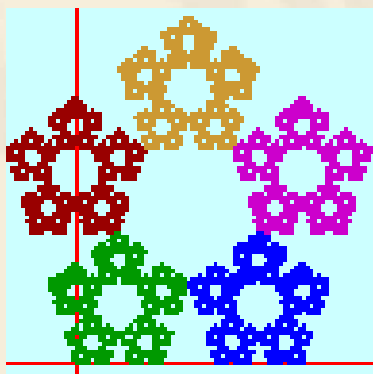
❧ 揭示了 有序与无序的统一， 确定性与随机性的统一

❧ 被认为是科学领域中继 相对论、量子力学 之后，人类认识和改造世界的最富有创造性的 第三次革命

什么是分形？ (3/26)

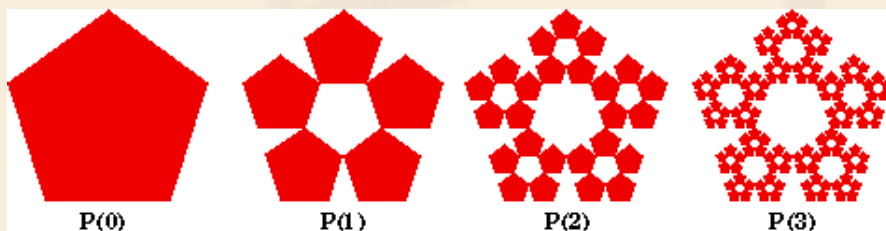
■ 第一个分形例子

❧ 文艺复兴时期德国著名画家丢勒(Albert Durer, 1471-1528)



丢勒正五边形

$$D = \log 5 / \log (3 + \text{SQRT}(5)/2) = 1.672$$



艺术创作特点：

精细，讲究科学和数学

与其父精于金银细工有关

与文艺复兴时期重视自然科学和数学的时代风气也有关

什么是分形？（4/26）

❖ 1827年，英国植物学家**R.Brown**（1773-1858）

❧ 用显微镜观察悬浮在水中的花粉时，发现小颗粒的花粉在水中呈现出“之”字型的不规则运动

❖ ——**布朗运动**

❧ 维纳(N.Wiener, 1894-1964)等人在此基础上创立**随机过程理论**

❧ 进入80年代，人们以分形的眼光看待布朗运动，并与**随机行走**（Levy flight）相联系，找到了确定论与随机论的内在联系。



布朗运动示意图

*图中每条折线是一个粒子在每隔一定时间所在位置的连线。

什么是分形？（5/26）

- ❖ 微积分研究领域：函数的可微（可导）性与连续性有什么内在联系吗？
- ❖ 可微的函数必定连续，但连续函数未必可微
 - ∞ 貌似连续函数的不可导的点集在某种意义上很小
 - ❖ 除有限的点外，其他处都应可导
 - ∞ 事实上，可能有的函数几乎处处不可导

什么是分形？（6/26）

❖ 你能找出一个处处不可微的连续函数吗？

❧ 1860年，瑞士一个名气不算大的数学家**C.Cellerer**(1818-1889)在课堂上讲：

❖ “连续函数的不可导的点集在某种意义上很小”的流行观念是错误的，并给出一个类似于Weierstrass函数的反例

❧ 1970年有人证明，**Cellerer函数**不同于**Weierstrass函数**，它们不是处处不可微的，在某些点上它们是有导数的

什么是分形？（7/26）

❖ 一个真正的处处连续、但处处不可微的函数

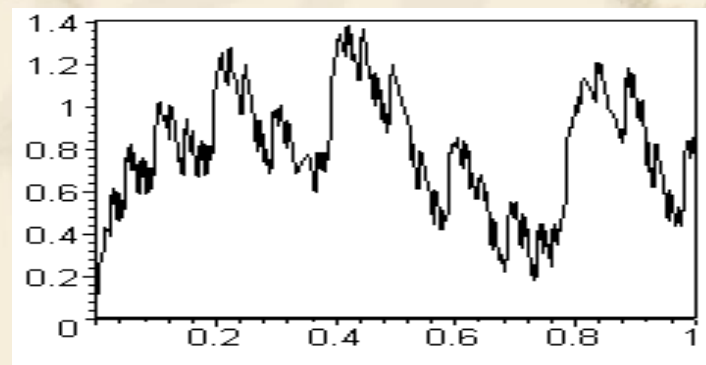
∞ 1872年，**K.T.W.Weierstrass** (1815-1897)向柏林科学院报告了数学分析学中的一个反例

∞ 三角函数级数，即著名的具有分形性质的Weierstrass函数

❖ 此前，已有不少数学家知道存在这样的函数，但都耻于发表它！因为它破坏了解析学的完美性

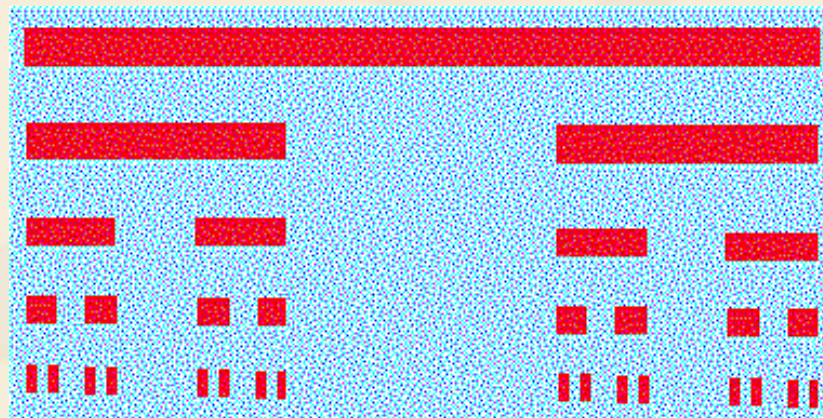
❖ 直到1875年才由杜布瓦-雷蒙(E.du Bois-Reymond)正式发表

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k x), \lambda > 1, 1 < s < 2. \quad f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}.$$



什么是分形？（8/26）

- ❖ 1883年，G.F.P.Cantor (1845-1918)构造了三分集
- ❖ 与实直线相对立
- ❖ 被认为是病态的
- ❖ 如今它已成为分形几何学的最典型、最简单的模型



Cantor 三分集的生成过程

$$D=\log 2 / \log 3=0.6309$$

每次去掉线段中间的1/3
最后剩下的就是Cantor set

为了显示方便，无宽度的 $[0, 1]$
线段在这里故意用一矩形框表示

什么是分形？ (9/26)

❖ 从什么是曲线谈起

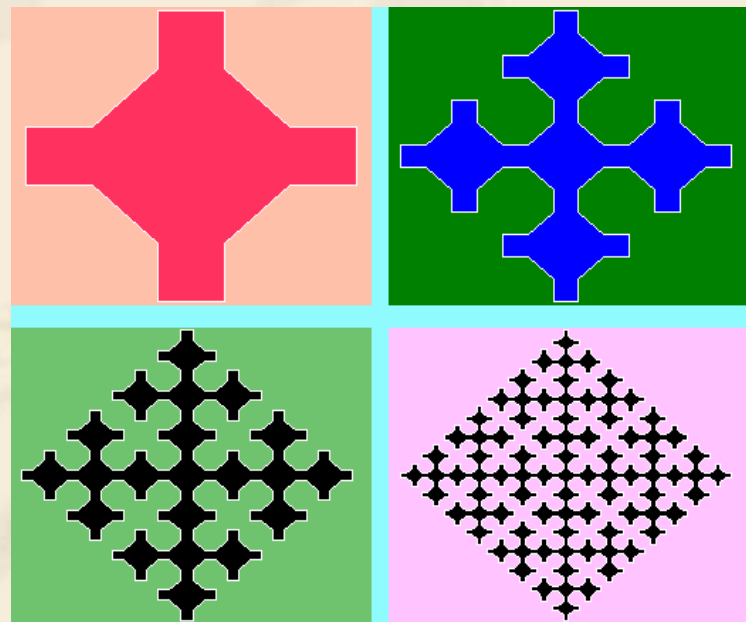
☞ 直观上有长无宽的线叫曲线

☞ 但这不是定义，甚至矛盾

☞ 1890年，意大利数学家
G.Peano构造了一种奇怪的
曲线

☞ 能通过正方形内的所有点，
有面积

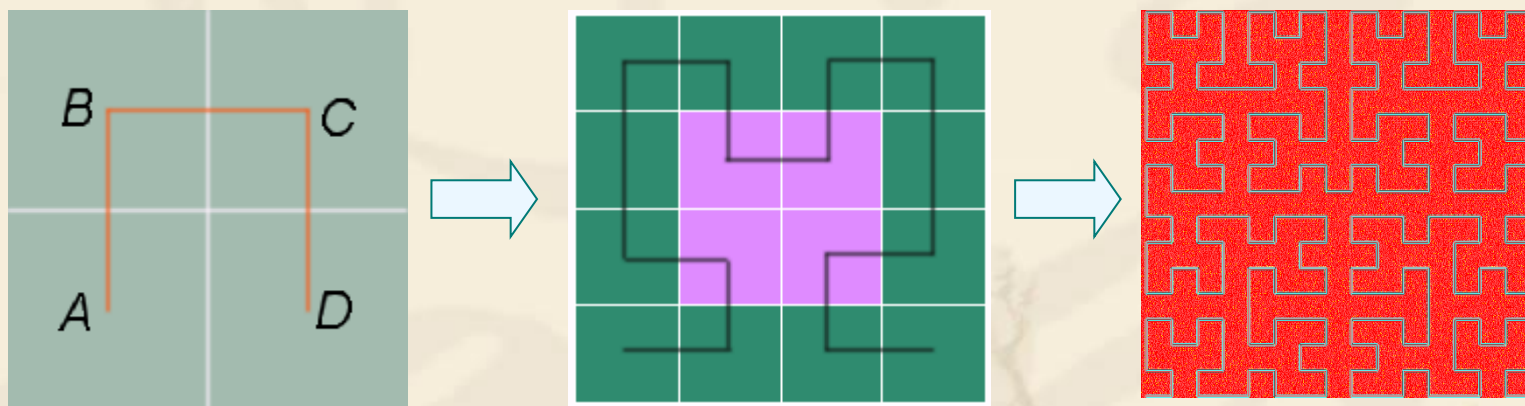
☞ 令数学界吃惊



Peano 曲线(前四步)围成的区域
 $D=\log 4 / \log 2=2.0$

什么是分形？（10/26）

- 1891年，大数学家D.Hilbert也构造了一种性质相同的曲线



按一定顺序相继穿过每一个小正方形的“中位线”。 $D=\log 4 / \log 2=2.0$

演示

什么是分形？ (11/26)

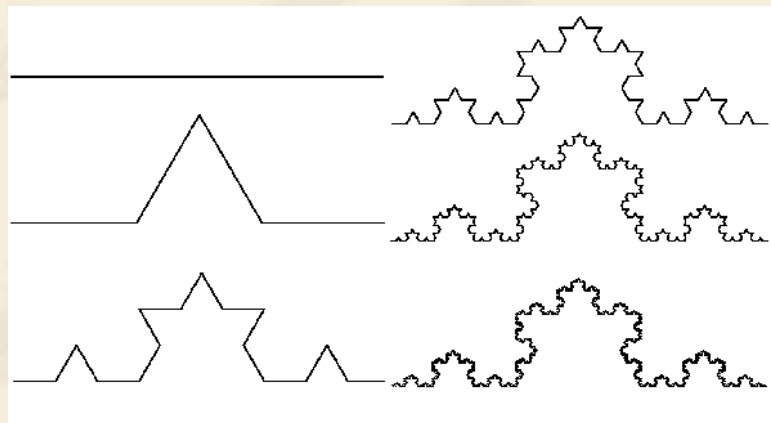
- 性质：
 - ❧ 能够填充空间
 - ❧ 十分曲折，连续但不可导
 - ❧ 具有自相似性
- 此性质很令数学界吃惊。
 - ❧ 如果这是可能的，那么曲线与平面如何区分？
- 分形几何兴起以后
 - ❧ 由反例跃居为主角
- 这类曲线现在统称为Peano曲线

什么是分形？（12/26）

- 1906年，瑞典数学家H.Von Koch在研究构造连续而不可微函数时，构造了Koch曲线。
- 周长无穷，但面积为定值（0）

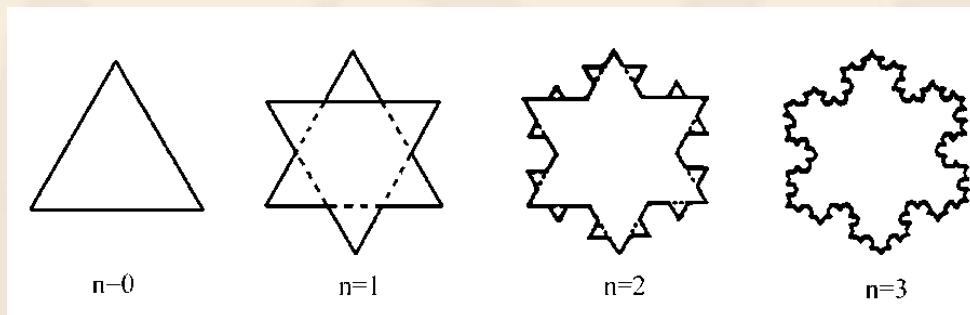


演示



构造方法

什么是分形？ (13/26)



Von koch snowflake

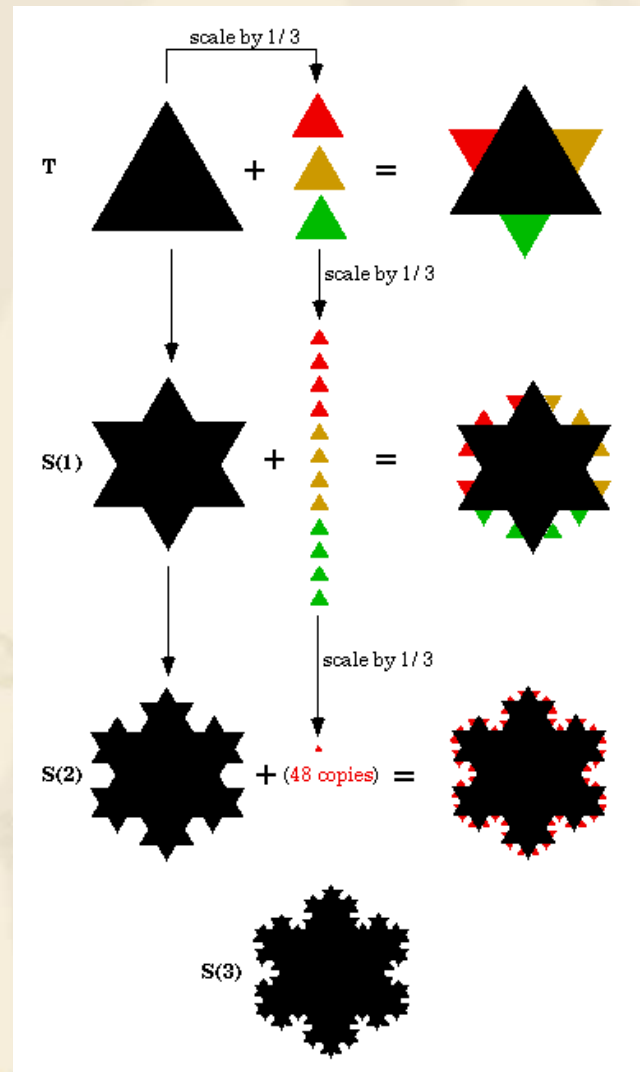
$$D = \log 4 / \log 3 = 1.2618$$



- 周长无穷，但面积为定值

$$3a, \frac{4}{3} \times 3a, \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 3a, \dots \rightarrow \infty$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, S + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} S, S + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} S + \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 S, \dots \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2$$



构造方法

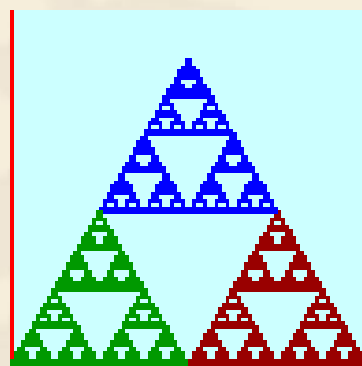
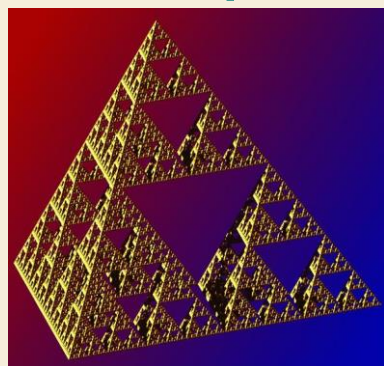
什么是分形？（14/26）

- 1915-1916年，波兰数学家W.Sierpinski(1882-1969)构造了Sierpinski曲线、海绵、墓塚。

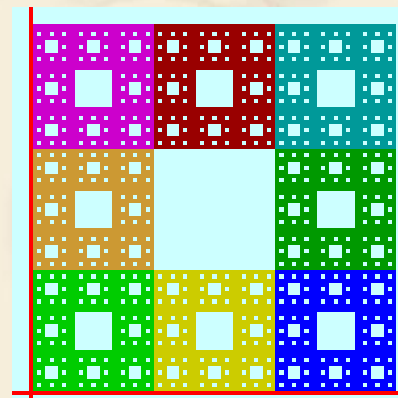
❧ Sierpinski地毯是平面万有曲线(plane universal curve)

❧ Sierpinski海绵是空间万有曲线

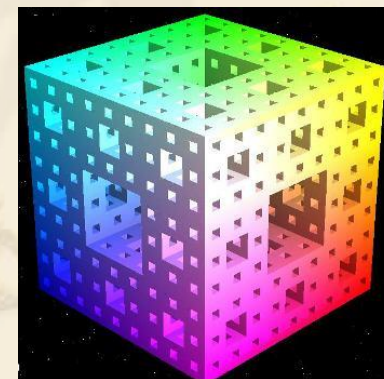
❧ 奥地利数学家门格尔(K.Menger)证明，任何曲线都可嵌入Sierpinski地毯中



Sierpinski gasket



Sierpinski carpet



演示

什么是分形？ (15/26)

- 传统的欧氏几何理论描绘已显得无能为力
- ❖ 1919年, F.Hausdorff(1868-1942)给出维数新定义

- ❧ 为维数的非整化提供了理论基础。



❖ 复迭代

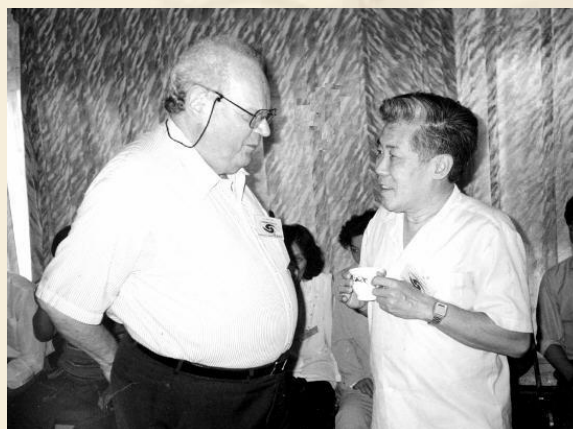
- ❧ 1918-1920年左右, 法国数学家G.Julia (1893-1978), P.J.L.Fatou(1878-1929)

- ❧ G.Julia于1918年(当时他25岁)在《纯粹数学与应用数学杂志》上发表了长达199页的数学论文, 一举成名

- ❧ 一战结束后成为巴黎Ecole工业大学的数学教授

什么是分形？（16/26）

- ❖ 1924年11月20日 B.B.Mandelbrot 生于波兰。
- ❖ 1952年，Mandelbrot 获博士学位。
- ❖ 60年代，B.B.Mandelbrot 将雪花与海岸线、山水、树木等自然景物联系起来
- ❖ 现代分形理论的奠基人
 - ∞ 经历、性格、举止非同寻常的人物



Mandelbrot与北京大学非线性科学中心主任赵凯华教授

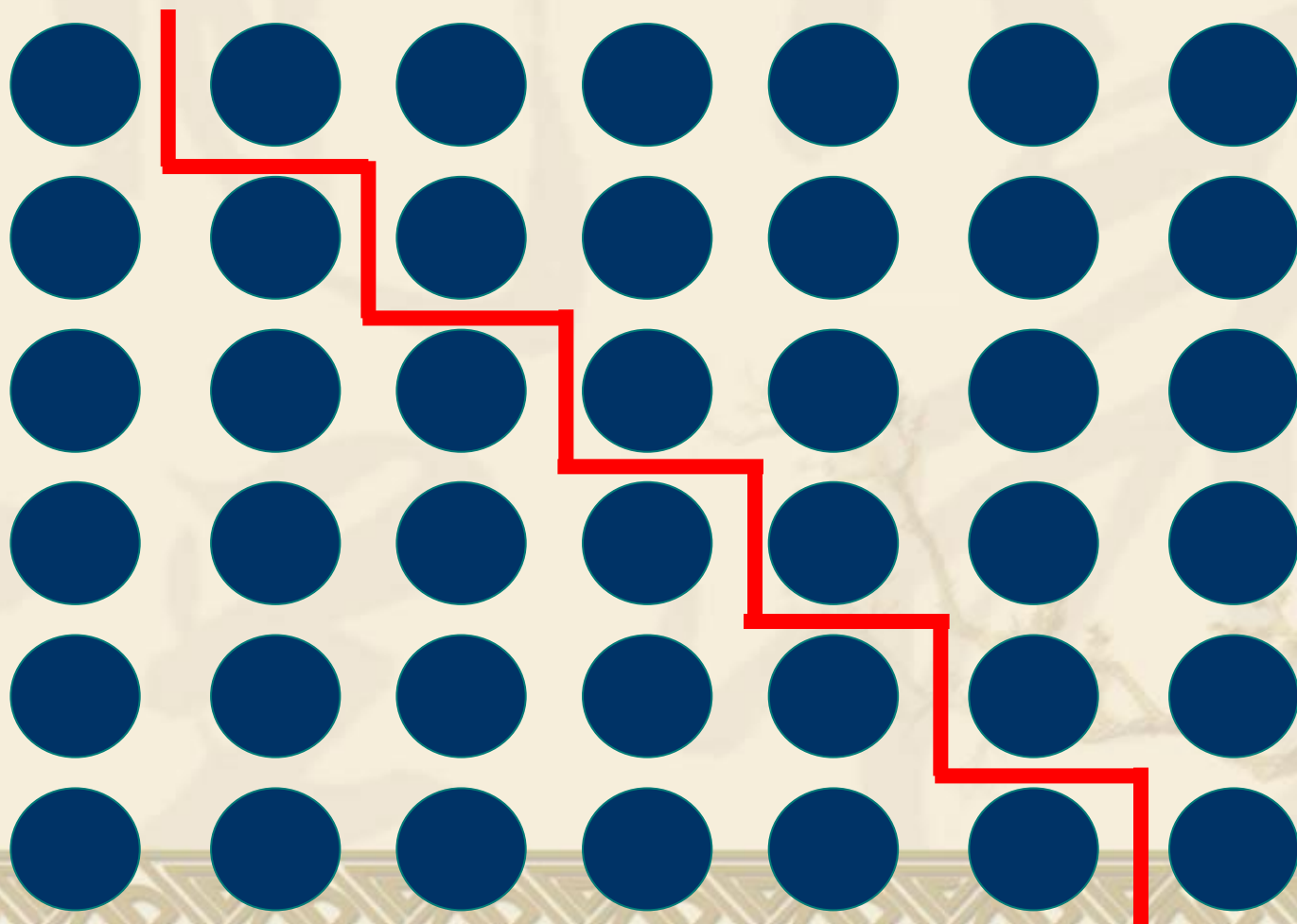
什么是分形？（17/26）

- 1924年11月生于波兰华沙，1936年搬到法国巴黎，1958 年去美国，1974年成为IBM的一位研究人员。
- ❖ Mandelbrot所受的教育不很规则，他甚至声称背字母表都有困难，但善于以图形化的方式思维
 - ☞ 据他本人讲，当初参加法国著名的高等工业学院关键性的入学考试时，不能很好地对付代数题，但却成功地在头脑中通过把代数问题转化为图形而取得高分。
- ❖ 不但对几何形状感兴趣，而且特别关注“不规则”的形状

用图形思维解决代数问题

——无需语言的证明 (1/3)

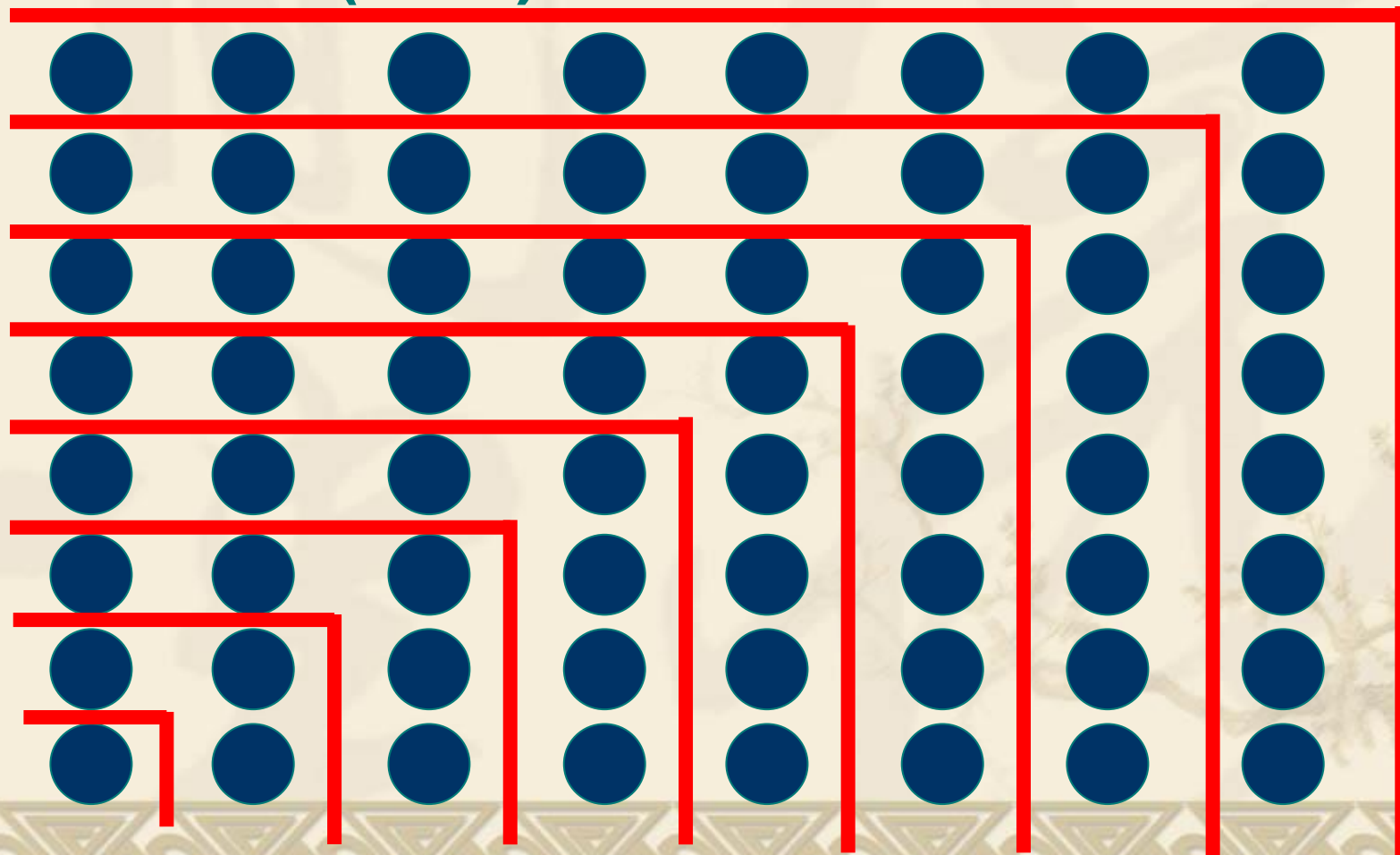
❖ $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$



用图形思维解决代数问题

——无需语言的证明 (2/3)

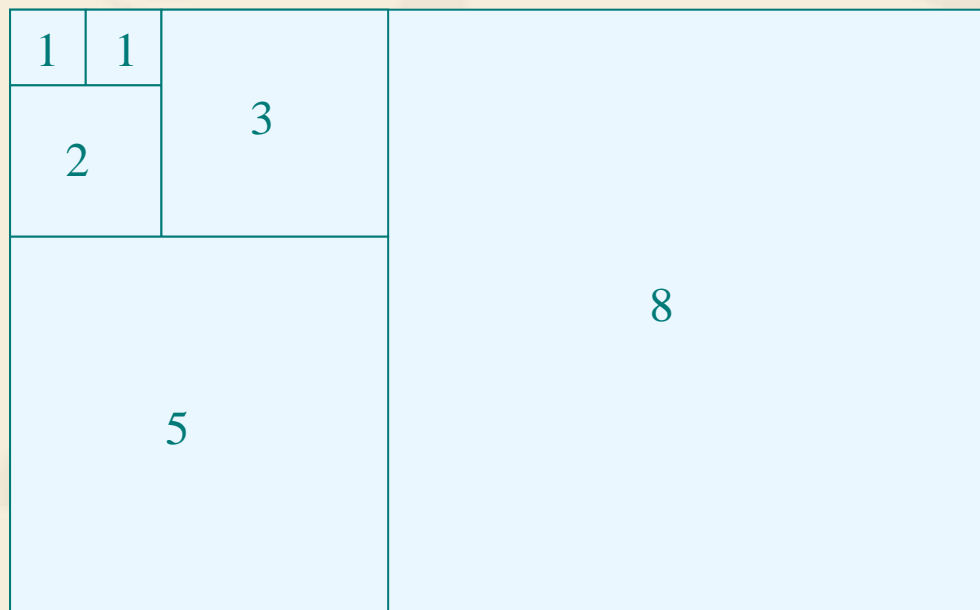
❖ $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$



用图形思维解决代数问题 ——无需语言的证明 (3/3)

❖ Fibonacci数列的性质:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$



什么是分形？（18/26）

- 接受大学教育后，Mandelbrot的生涯变得与他感兴趣的形状一样无规则
 - ❧ 在加州理工大学研究**航空学**，受普林斯顿高等研究院杰出数学家约翰·冯·诺伊曼(J.von Neumann,1903-1957)的支持，在一系列领域做研究工作
 - ❧ 他用**分形刻画股票价格**，结果显示：大的涨跌期模仿者每月、每天的价格波动，整个市场从它的最大尺度到最小尺度是自相似的
 - ❧ 他用分形（不使用天文数据）绘制了天体物理学家刚刚证实的**宇宙星系分布**
 - ❧ “我时不时被某种突如其来的力量所驱使，恰好在撰写研究论文的当中放下这个领域的研究。我兴冲冲奔向另一个感兴趣的新课题，而我以前对此领域什么也不知道。我按本能行事，却说不大清楚为什么，直到很久很久以后。”

什么是分形？（19/26）

- 在1982年出版的《大自然的分形几何学》一书的开头写到：

❧ “我的第一篇科学论文发表于1951年4月30日。多年来，许多人觉得我的每项研究所取的方向都不相同。但这种表面上的无序性只是一种错觉，在其背后有明确的统一目标，本书及以前的两个版本正是试图阐明这个目标。聚沙成塔，我的大多数工作成了一门新学科的产前阵痛。”

❧ 创立新理论需要机遇，机遇从统计意义上看对所有人几乎是平等的，但只有个别人抓住了机遇。

什么是分形？（20/26）

- 67年，英国《科学》杂志，《英国的海岸线有多长？统计自相似性与分数维数》
- 正确答案令人吃惊：
- 不确定，依赖测量单位长度
- 研究发现
 - ❧ 一个很重要而有趣的性质，即自相似性。



什么是分形？ (21/26)

- 75年，法文专著《分形对象:形、机遇与维数》
- 77年，英译本《分形：形、机遇与维数》 (Fractals: Form, Chance, and Dimension)
- 82年，增补本，改名为《大自然的分形几何学》
- 一个有趣的故事
 - ❧ 70年代末，英文版在北京中关村一带的地摊上可见到数十部
 - ❧ 北京大学力学系黄永念(1939-)教授和 朱照宣(1930-)教授各买了一部，只花了几元钱
 - ❧ 于1986年创立了北京大学非线性科学中心

什么是分形？ (22/26)

- 创造的词Fractal

- ❧ 根据拉丁语fractus造的词

- 词根含义：

- ❧ 细片的，破碎的，分裂的，分数的

- ❖ 70年代末，fractal传到中国，一时难以定译

- ❧ 中国科学院物理所 李荫远(1919-)院士说，fractal应译成“分形”

- ❧ 郝柏林、张恭庆、赵凯华、朱照宣等科学家表示赞同

- ❧ 于是，在中国大陆fractal逐渐定译为“**分形**”

- ❧ 台湾译成“**碎形**”

什么是分形？ (23/26)

分形指具有多重自相似性的对象

可以是自然存在的，也可以是人造的

花椰菜、树木、山川、云朵、脑电图、材料断口、海岸线、树枝、山脉、星系分布、云朵、聚合物、多变的天气、大脑皮层褶皱、肺部支气管分支、血液微循环管道、动荡的股市、经济收入分配关系、棉花的价格波动



视乳头旁毛细血管瘤



视网膜中央动脉颞上支阻塞

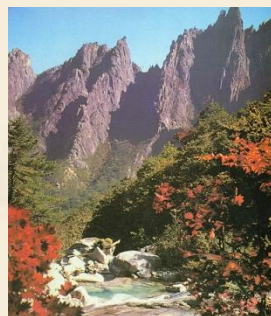
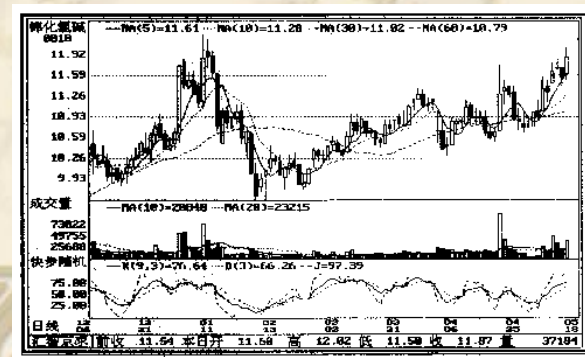


图4-1 西江流域主要河流及水文站点分布图

河流分布图

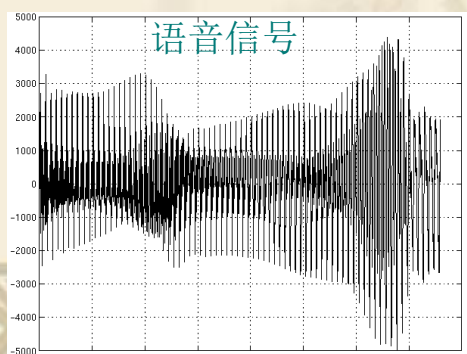
股票分时走势图



星云



东方摄影



语音信号

什么是分形？（25/26）

- ❖ 分形几何在**极端有序**与**真正混沌**之间提供了一种中间可能性
- ❖ 最显著的特征
 - ❧ 看似复杂的事物，大多数可用很少参数的简单公式来描述
- ❖ 贡献
 - ❧ 在于**巧妙的综合**，统一到一面旗帜下
 - ❧ 虽然起初没有太多公式，但它揭示了众多现象的自相似性，
在非线性中找到了一个重要不变量——**分数维数**

什么是分形？ (26/26)

- 85年获得Barnard Medal奖章
 - ✧ 爱因斯坦(A.Einstein,1879-1955)、费米(E.Fermi,1901-1954)、卢瑟福(L.Rutherford,1871-1937)等人获得过此殊荣
- 1986年获Franklin Medal
- 1993年获Wolf Prize in Physics
- 1994年获本田奖(Honda Prize)
- 美国艺术与科学学院(American Academy of Arts and Sciences)院士
- 美国国家科学院(U.S.National Academy of Sciences)院士
- 后任职于耶鲁大学
- 2010年去世，享年85岁

本章内容

- ❖ 什么是分形？
- ❖ 什么是分形维数？
- ❖ 随机插值模型
- ❖ 迭代函数系统
- ❖ L系统
- ❖ 粒子系统
- ❖ 动力系统系统中的分形
- ❖ 复平面上的迭代

什么是分形维数？ (1/15)

整数维数

拓扑维数

- ❖ 欧氏几何学描述的都是整数维的对象
- ❖ 在各种拓扑变换下，维数不变
- ❖ 表示描述一个对象所需的独立变量的个数
 - ∞ 在一维直线上确定一个点
 - ❖ 需要一个坐标
 - ∞ 在二维平面上确定一个点
 - ❖ 得用两个坐标
 - ∞ 在三维空间中确定一个点
 - ❖ 得用三个坐标

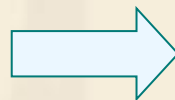
什么是分形维数？ (2/15)

整数维数



分数维数

拓扑维数



度量维数

❖ 分形维数(分数维)

∞ 描述分形物体的细节变化

∞ 物体粗糙性或细碎性的度量

什么是分形维数？ (3/15)

分数维数

度量维数

- ❖ 从测量的角度来定义
- ❖ 对象的维数是可变的，与测量尺度密切相关
 - 例如：看一个毛线团
 - ☞ 远看是一个0维的点，
 - 在广阔的银河系外宇宙空间看地球
 - ☞ 近看是三维的球
 - 进入太阳系后，乘航天飞机 在太空沿地球轨道飞行
 - ☞ 贴近其表面看是二维球面，甚至是二维平面
 - 站在旷野上环顾左右
 - ☞ 再近一些，看一根毛线；再接近，看毛线上的纤维

什么是分形维数？ (4/15)

- ❖ 从测量的角度重新理解维数概念
- ❖ 《楚辞·卜居》中说：“夫尺有所短，寸有所长”
 - ❧ 事物都有其自己的特征尺度，要用适宜的尺度去测量
 - ❧ 精确描述世界中的现象，要有度量“尺度”的观念
- ❖ 对于一个有确切维数的几何体
 - ❧ 若用与其维数相同的“尺”去度量，可得到确切数值
 - ❧ 若用低于其维数的“尺”去度量，结果为无穷大
 - ❧ 若用高于其维数的“尺”去度量，结果就会为零