2022 年 9 月 24 日

1

证明实系数且次数低于n次的全体多项式与零多项式的集合$\mathbb{R}[x]_n$，依多项式加法和数乘构成线性空间，且维数为n。

解：

根据线性空间的定义及性质，若要证明$\mathbb{R}[x]_n$是一个线性空间，只需要说明：

① $\mathbb{R}[x]_n$满足对加法和数乘的封闭性。

② $\mathbb{R}[x]_n$上的加法和数乘满足线性空间的八个条件。

先证明运算封闭性。

(1) 加法的封闭性。对于$\forall p_n, m_n \in \mathbb{R}[x]_n$，可以被表示成如下形式：

$$p_n = p_0 + p_1x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1}$$

$$m_n = m_0 + m_1x + \cdots + m_{n-1}x^{n-1}$$

则有

$$\begin{aligned} r_n &= p_n + m_n \\ &= p_0 + p_1x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + m_0 + m_1x + \cdots + m_{n-1}x^{n-1} \\ &= (p_0 + m_0) + (p_1 + m_1)x + \cdots + (p_{n-1} + m_{n-1})x^{n-1+} \\ &= r_0 + r_1x + \cdots + r_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{R}[x]_n \end{aligned}$$

(2) 数乘的封闭性。对于$\forall r_n \in \mathbb{R}[x]_n, \forall k \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} p_n = r_nk &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})k \\ &= a_0k + a_1xk + \cdots + ka_{n-1}x^{n-1}k \\ &= p_0 + p_1x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{R}[x]_n \end{aligned}$$

再证明8个条件。由多项式$\mathbb{R}[x]_n$组成的线性空间可以表示为：

$$\mathbb{R}[x]_n = \{r_n = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} | a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 2, \cdots, n-1\}$$

(1) 加法交换律显然满足

(2) 加法结合律显然满足

(3) 存在零多项式$0 \in \mathbb{R}[x]_n$，使得对于$\forall r_n \in \mathbb{R}[x]_n$，有$r_n + 0 = r_n$

(4) 存在负多项式$\hat{r_n} = (-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_{n-1})x^{n-1}$，使得$\hat{r_n} + r_n = 0$

(5) 取$1 \in \mathbb{R}$，使得$r_n \cdot 1 = r_n$

(6) 数域$\mathbb{R}$中任取$l, k \in \mathbb{R}$，有：

$$(r_n \cdot l) \cdot k = (a_0l + a_1xl + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}l)k = (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})(lk) = r_n \cdot (lk)$$

(7) 数域$\mathbb{R}$中任取$l, k \in \mathbb{R}$，有：

$$\begin{aligned} r_n(k+l) &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})(k+l) \\ &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})k + (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})l \\ &= r_n k + r_n l \end{aligned}$$

(8) 线性空间$\mathbb{R}[x]_n$中任取$p_n, m_n \in \mathbb{R}[x]_n$，其中

$$p_n = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1}$$

$$m_n = m_0 + m_1 x + \cdots + m_{n-1}x^{n-1}$$

有：

$$\begin{aligned} (p_n + m_n)k &= (p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + m_0 + m_1 x + \cdots + m_{n-1}x^{n-1})k \\ &= (p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1})k + (m_0 + m_1 x + \cdots + m_{n-1}x^{n-1})k \\ &= p_n k + m_n k \end{aligned}$$

至此，八条运算规则证明完毕。

2

在$\mathbb{R}^2$中，回答下述问题：（注：涉及的矩阵求逆的运算以及乘法不必计算出具体结果，仅需写出表达式即可）

(1) 试证：$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，构成一组基

(2) 试证该空间与$\mathbb{R}^4$同构

(3) 求$\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$在$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$下的坐标

(4) 求$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$到另一组基$\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$，的过渡矩阵

(5) 求α在$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$下的坐标

(6) 求试证，任意给定的$A \in \mathbb{R}^{m\times 2}$，$B \in \mathbb{R}^{2\times n}$，映射$\mathcal{G}: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{m\times n}$；$X \mapsto AXB$定义了一个线性映射

(7) 当$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，求上述线性映射在入口基$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$和出口基$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵表示

解：

(2) 建立映射σ：$\mathbb{R}^{2\times 2} \mapsto \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$，其逆映射$\sigma^{-1}$：$\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$存在，且有

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} k_2 \right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} k_2 = \sigma\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \right) k_1 + \sigma\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) k_2$$

成立，所以$\mathbb{R}^{2\times 2}$与$\mathbb{R}^4$同构

(3) 设坐标为$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}^T$，原问题可以如下表达：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

求解得：

$$\begin{cases} k_1 = \frac{a-b-c-d}{2} \\ k_2 = \frac{a+b-c-d}{2} \\ k_3 = \frac{a+b+c-d}{2} \\ k_4 = \frac{a+b+c+d}{2} \end{cases}$$

(1) 欲证$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$构成一组基，需证$k_1E_1 + k_2E_2 + k_3E_3 + k_4E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$只有零解。代入，展开有：

$$\begin{cases} k_1 + k_4 = 0 \\ k_2 - k_1 = 0 \\ k_3 - k_2 = 0 \\ k_4 - k_3 = 0 \end{cases}$$

易知，$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，此外由(3)可知，$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{2\times 2}$均可以被$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$线性表出，因此$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$确实可以构成一组基。

(4) 由过渡矩阵的含义，有：

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma(E_1) & \sigma(E_2) & \sigma(E_3) & \sigma(E_4) \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \sigma(e_1) & \sigma(e_2) & \sigma(e_3) & \sigma(e_4) \end{bmatrix}$$

其中σ是前述线性同构映射，进而可得：

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} \sigma(E_1) & \sigma(E_2) & \sigma(E_3) & \sigma(E_4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma(e_1) & \sigma(e_2) & \sigma(e_3) & \sigma(e_4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & -2 & -0.5 & -2 \\ 1.5 & 1 & 2.5 & 4 \\ 0.5 & 2 & 4.5 & 5 \\ 1.5 & 2 & 5.5 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(5) 由矩阵表示的含义以及同构的概念，可得：

$$\alpha = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

经过计算：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{9}a + \frac{1}{3}b - c - \frac{11}{9}d \\ x_2 = \frac{1}{27}a + \frac{4}{9}b - \frac{1}{3}c - \frac{23}{27}d \\ x_3 = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}d \\ x_4 = -\frac{7}{27}a - \frac{1}{9}b + \frac{1}{3}c + \frac{26}{27}d \end{cases}$$

(6) 根据矩阵运算本身的性质和线性映射的性质可知：

$$\begin{cases} AX_1B + AX_2B = A(X_1 + X_2)B \\ \lambda AXB = A(\lambda X)B \end{cases}$$

因此，$X \mapsto AXB$是线性映射

(7) 根据线性映射的矩阵表示的含义，有：

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} M &= A \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{bmatrix} B \\ &= \begin{bmatrix} AE_1B & AE_2B & AE_3B & AE_4B \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 11 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

由同构的思想，可整理为：

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3

已知$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$。$V_1 = span\{\alpha_1, \alpha_2\}$，$V_2 = span\{\beta_1, \beta_2\}$，求：

(1) $V_1 \cap V_2$的基、维度

(2) $V_1 + V_2$的基、维度

解：

(1) 根据交空间的定义，$x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_3\beta_1 + k_4\beta_2$，经整理可得：

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = 0_{4\times 1} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = 0$$

经过整理，可得：

$$\begin{cases} k_4 = k_4 \\ k_3 = -3k_4 \\ k_2 = k_4 - k_3 = 4k_4 \\ k_1 = k_4 + 2k_3 + k_2 = -k_4 \end{cases}$$

因此可知：

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

因此，$dim(V_1 \cap V_2) = 1$，基为：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$。

(2) 因为生成空间为V_1和V_2的和空间，不妨取$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$作为和空间的生成元。对$B$进行初等行列变换得到：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此，$dim((V_1 + V_2) = rank(B) = 3$，基为$B$中一极大无关组，不妨取$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 \end{bmatrix}$。

4

设$\mathcal{A}$是n维空间的线性变换，对某个$\xi \in V$，有$\mathcal{A}^{k-1}(\xi) \neq 0, \mathcal{A}^k(\xi) = 0$。

(1) 试证：$\xi, \mathcal{A}(\xi), \mathcal{A}^2(\xi), \cdot, \mathcal{A}^{k-1}(\xi)$线性无关

(2) 当$k = n$时，求$\mathcal{A}$在基$\xi, \mathcal{A}(\xi), \mathcal{A}^2(\xi), \cdot, \mathcal{A}^{n-1}(\xi)$下的矩阵表示

解：

(1) 取$q_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, k-1.s.t.$

$$q_0\xi + q_1\mathcal{A}(\xi) + \cdots + q_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\xi) = 0$$

由线性变换的性质，反复用$\mathcal{A}(\cdot)$作用等式两边可得：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(q_0\xi+q_1\mathcal{A}(\xi)+\cdots+q_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\xi))=\mathcal{A}(0)=0 \Rightarrow\\
q_0\mathcal{A}(\xi)+q_1\mathcal{A}^2(\xi)+\cdots+q_{k-1}\mathcal{A}^{k}(\xi)=0 \Rightarrow\\
q_0\mathcal{A}(\xi)+q_1\mathcal{A}^2(\xi)+\cdots+q_{k-2}\mathcal{A}^{k-1}(\xi)=0 \Rightarrow\\
\vdots\\
q_0\mathcal{A}^{k-2}(\xi)+q_1\mathcal{A}^{k-1}(\xi)=0 \Rightarrow\\
q_0\mathcal{A}^{k-1}(\xi)=0 \Rightarrow\\
q_0=0
\end{aligned}$$

解得$q_0=q_1=\cdots=q_{k-1}=0$，因方程只有零解，所以$\xi,\mathcal{A}(\xi),\mathcal{A}^2(\xi),\cdot,\mathcal{A}^{k-1}(\xi)$线性无关。

(2) 根据线性变换的性质，直接列写并将矩阵分解：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\begin{bmatrix}\xi & \mathcal{A}(\xi) & \cdots & \mathcal{A}^{n-1}(\xi)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\mathcal{A}(\xi) & \mathcal{A}^2(\xi) & \cdots & \mathcal{A}^{n}(\xi)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\xi & \mathcal{A}(\xi) & \cdots & \mathcal{A}^{n-1}(\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & & \cdots & & 0 & 0\\ 1 & 0 & & & & 0\\ 0 & 1 & 0 & & & 0\\ & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

显然，该线性变换的矩阵表示为：$\begin{bmatrix}0 & & \cdots & & 0 & 0\\ 1 & 0 & & & & 0\\ 0 & 1 & 0 & & & 0\\ & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$。

5

设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\lambda_1$，$\lambda_2$是$S$的两个相异特征值。$V_{\lambda_1}=\{x|Ax=\lambda_1x,x\in\mathbb{R}_n\}$，$V_{\lambda_2}=\{x|Ax=\lambda_2x,x\in\mathbb{R}_n\}$，试证$V_{\lambda_1}\bigoplus V_{\lambda_2}$。

注：该结论等价于，若$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$是$V_{\lambda_1}$的线性无关组，$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\}$是$V_{\lambda_2}$的线性无关组，$\lambda_1\neq\lambda_2$，则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\}$也是线性无关组。可作定理，需要牢记。

证明：

使用反证法，假设$\exists x_1\neq 0,s.t.x_1\in V_{\lambda_1}$且$x_1\in V_{\lambda_2}$，由定义及性质可知：

$$\begin{cases}Ax_1=\lambda_1x_1\\ Ax_1=\lambda_2x_1\end{cases}$$

进而有$\lambda_1x_1=\lambda_2x_1\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2)x_1=0$，因为$x_1\neq0$，所以$\lambda_1=\lambda_2$，与题干矛盾，因此得出结论：$V_{\lambda_1}\bigoplus V_{\lambda_2}$。

6

若$A\in\mathbb{C}^{n\times n},x_i\in\mathbb{C}^n,Ax_i=\lambda_ix_i,x_i\neq0,i=1,2,\cdots,r$。且$\lambda_i\neq\lambda_j,when\ i{\neq}j$，试证$\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$线性无关

证明：

欲证$\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$线性无关，只需证$x_1k_1 + x_2k_2 + \cdots + x_rk_r = 0$只有零解。

$$\begin{aligned} &x_1k_1 + x_2k_2 + \cdots + x_rk_r = 0 \Rightarrow \\ &Ax_1k_1 + Ax_2k_2 + \cdots + Ax_rk_r = 0 \Rightarrow \\ &x_1\lambda_1k_1 + x_2\lambda_2k_2 + \cdots + x_r\lambda_rk_r = 0 \end{aligned}$$

将上式继续左乘A矩阵，有：

$$x_1k_1\lambda_1^2 + x_2k_2\lambda_2^2 + \cdots + x_rk_r\lambda_r^2 = 0$$

以此类推，可以得到以下方程组：

$$\begin{cases} x_1k_1\lambda_1 + x_2k_2\lambda_2 + \cdots + x_rk_r\lambda_r = 0 \\ x_1k_1\lambda_1^2 + x_2k_2\lambda_2^2 + \cdots + x_rk_r\lambda_r^2 = 0 \\ \vdots \\ x_1k_1\lambda_1^r + x_2k_2\lambda_2^r + \cdots + x_rk_r\lambda_r^r = 0 \end{cases}$$

写成矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \vdots \cdots x_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1\lambda_1 & k_1\lambda_1^2 & \cdots & k_1\lambda_1^r \\ k_2\lambda_2 & k_2\lambda_2^2 & \cdots & k_2\lambda_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_r\lambda_r & k_r\lambda_r^2 & \cdots & k_r\lambda_r^r \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_r \end{bmatrix} diag(k_1, k_2, \cdots, k_r) \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^r \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_r & \lambda_r^2 & \cdots & \lambda_r^r \end{bmatrix} = 0$$

由于当$i \neq j$时，$\lambda_i \neq \lambda_j$，故$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^r \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_r & \lambda_r^2 & \cdots & \lambda_r^r \end{bmatrix}\right) \neq 0$，进而推出

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_r \end{bmatrix} diag(k_1, k_2, \cdots, k_r) = 0 \Rightarrow k_i = 0$$

得证

7

设$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$是线性空间中的一组线性无关的向量，且

$$\xi = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \cdots, s$$

试证：$rank(\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_s \end{bmatrix}) = rank([a_{ij}]_{m\times s})$

证明：

由题意，有

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}$$

设$rank(\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m\end{bmatrix}) = r$，将$\{\xi_i\}$重新排列为$\{\xi_i'\}$，并且将极大无关组排列在前$r$列，将$\{a_{ij}\}$与$\{\xi_i\}$做同样的变换得到$\{a_{ij}'\}$

因为$\begin{bmatrix}\xi_1' & \xi_2' & \cdots & \xi_r'\end{bmatrix}$线性无关，所以$\begin{bmatrix}\xi_{r+1}' & \xi_{r+2}' & \cdots & \xi_s'\end{bmatrix}$均可由前者线性表示，形式如下：

$$\begin{bmatrix}\xi_1' & \xi_2' & \cdots & \xi_r'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1r}' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}' & a_{m2}' & \cdots & a_{mr}'\end{bmatrix}$$

且对于$\forall \xi_i', i > r$，均有

$$\begin{aligned}\xi_i' = \begin{bmatrix}\xi_1' & \xi_2' & \cdots & \xi_r'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{1i} \\ k_{2i} \\ \cdots \\ k_{ri}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1i}' \\ a_{2i}' \\ \cdots \\ a_{mi}'\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1r}' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}' & a_{m2}' & \cdots & a_{mr}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{1i} \\ k_{2i} \\ \cdots \\ k_{ri}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

进而

$$\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}a_{1i}' \\ a_{2i}' \\ \cdots \\ a_{mi}'\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1r}' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}' & a_{m2}' & \cdots & a_{mr}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{1i} \\ k_{2i} \\ \cdots \\ k_{ri}\end{bmatrix}\right] = 0$$

由$\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}$线性无关，可知

$$\begin{bmatrix}a_{1i}' \\ a_{2i}' \\ \cdots \\ a_{mi}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1r}' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}' & a_{m2}' & \cdots & a_{mr}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{1i} \\ k_{2i} \\ \cdots \\ k_{ri}\end{bmatrix} i{\geq}r$$

即a_{ij}中，对于$\forall i > r$，$\begin{bmatrix}a_{1i}' \\ a_{2i}' \\ \cdots \\ a_{mi}'\end{bmatrix}$均可由前$r$列线性表示，即$dim([a_{ij}]_{m\times s}){\leq}r$

又由：

$$\begin{cases} dim(\begin{bmatrix}\xi_1' & \xi_2' & \cdots & \xi_r'\end{bmatrix}) = r \\ dim(\begin{bmatrix}\xi_1' & \xi_2' & \cdots & \xi_r'\end{bmatrix}){\leq}min(dim(\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}), dim([a_{ij}]_{m\times s}))\end{cases}$$

可知：$dim([a_{ij}]_{m\times s}){\geq}r{\Rightarrow}dim([a_{ij}]_{m\times s}) = r = dim(\begin{bmatrix}\xi_1' & \xi_2' & \cdots & \xi_r'\end{bmatrix})$

由于线性变换不改变矩阵的秩，因此$rank(\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_s\end{bmatrix}) = rank([a_{ij}]_{m\times s})$得证。

第二章 λ 矩阵与矩阵的 Jordan 标准形
第三章 内积空间、正规矩阵、Hermite 矩阵

卢鸿谦

2020 年 11 月 11 日

2.1

求以下 λ 矩阵的 Smith 标准型、不变因子、各阶行列式因子、初等因子组。

$(1)A=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & \lambda\end{bmatrix}\quad(2)A=\begin{bmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

解：

(1) 由矩阵初等变换的规则，A 可以经过一系列初等变换

$$A=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & \lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1=c_1+c_3}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda+\lambda^2 & \lambda^2 & \lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2=c_2-\lambda c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & \lambda\\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda\\ \lambda^2+\lambda+1 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3=-c_3]{c_3=c_3-\lambda c_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda\\ \lambda^2+\lambda+1 & 0 & \lambda^3+\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3=r_3-(\lambda^2+\lambda+1)r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda(\lambda+1)\\ 0 & \lambda^2(\lambda+1) & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3=-c_3]{c_3=c_3-(\lambda+1)c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2(\lambda+1) & \lambda^2(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\lambda(\lambda+1)r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1)^2\end{bmatrix}(Smith\text{标准型})$$

由 $Smith$ 标准型，可以直接得出：

不变因子：$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^2$

各阶行列式因子：$D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=\lambda, D_3(\lambda)=\lambda^3(\lambda+1)^2$

初等因子组：$\lambda, \lambda^2, (\lambda+1)^2$

(2) 根据矩阵形式，可以直接求出各阶行列式因子

$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^3$

$D_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$

$D_1(\lambda)=1$

据此得出不变因子和初等因子组

不变因子：$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1), d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$

初等因子组：$\lambda, \lambda+1, \lambda, (\lambda+1)^2$

$Smith$ 标准型为：$B \xrightarrow{Smith\text{标准型}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$

2.2

求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 的不变因子、初等因子、各阶行列式因子、Jordan 标准型、有理标准型、某一个零化多项式、最小多项式

解：

A 对应的 λ 矩阵为 $A \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$ 将 A 进行初等变换得到

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2+2)(\lambda-2) \end{bmatrix} (\text{Smith 标准型})$$

行列式因子：$D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=1, D_3(\lambda)=(\lambda^2+2)(\lambda-2)$

不变因子：$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda^2+2)(\lambda-2)$

初等因子：$\lambda-2, \lambda-\sqrt{2}i, \lambda+\sqrt{2}i$

$Jordan$ 标准型：$A \xrightarrow{Jordan\text{标准型}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

有理标准型：$A \xrightarrow{\text{有理标准型}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

最小多项式：$\phi(\lambda)=(\lambda^2+2)(\lambda-2)$

一个零化多项式：$\phi_1(\lambda)=\phi(\lambda)=(\lambda^2+2)(\lambda-2)$，任何含因子 $(\lambda^2+2)(\lambda-2)$ 的多项式皆可

2.3

$A^k=I_n$，k 为正整数。求 A 的一个零化多项式，并证明 A 相似于对角矩阵

证明：

由零化多项式的特点，可知 A 的一个零化多项式为 $\phi(\lambda)=\lambda^k-1$

该零化多项式没有重根故 A 的 $Jordan$ 字块的阶数都是 1，因此 A 相似于对角矩阵

2.4

已知某 n 阶数字矩阵的初等因子组为 λ，λ^3，$(\lambda+1)^3$ 求其不变因子，Jordan 标准型和有理标准型

解：

由初等因子组可得 λ 矩阵的行列式为 $det(\lambda I-A)=\lambda^4(\lambda+1)^3$，因此可以确定该数字矩阵为 7 阶，即 $n=7$

根据初等因子组，可得不变因子为：

$$\begin{cases} d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_5(\lambda)=1 \\ d_6(\lambda)=\lambda \\ d_7(\lambda)=\lambda^3(\lambda+1)^3 \end{cases}$$

由初等因子可知，矩阵的 $Jordan$ 标准型为
$$\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0_{1\times3} & 0_{1\times3} \\ \hdashline 0_{3\times1} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0_{3\times3} \\ \hdashline 0_{3\times1} & 0_{3\times3} & \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \end{array}\right]$$

矩阵的有理标准型为
$$\left[\begin{array}{c:c} 0 & 0_{1\times6} \\ \hdashline 0_{6\times1} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \end{matrix} \end{array}\right]$$

2.5

试回答下列问题

(1) 什么叫两个 λ 矩阵等价

(2) 什么叫 λ 矩阵的行列式因子

(3) 若两个多项式 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 互素，证明下述两个 λ 矩阵等价

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & f(\lambda)g(\lambda) \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & f(\lambda) & & \\ & & 1 & \\ & & & g(\lambda) \end{bmatrix}$$

解：

(1) $A(\lambda)$，$B(\lambda)$ 为两个 $m\times n$ 的 λ 矩阵，若经过有限次航宇列的初等变换，可将 $A(\lambda)$ 换为 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相似，记为 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$

(2) 设 n 阶 λ 矩阵的秩为 r，对于正整数 $k, 1 \leq k \leq r$，矩阵中所有 k 阶子式的首项系数为 1 的最高公因式称为 λ 矩阵的 k 阶行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$

(3) 证明：有定理等价矩阵具有相同的行列式因子和相同的秩。由题可知，两个矩阵的秩均为 4。由 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 两个多项式互素，行列式因子：

矩阵 A：$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = D_3(\lambda) = 1, D_4(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$

矩阵 B：$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = D_3(\lambda) = 1, D_4(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$

因此，λ 矩阵 A 和 λ 矩阵 B 的秩和各阶行列式因子都完全相同，所以两个 λ 矩阵等价

2.6

给定复数矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 $\lambda I - A$ 的所有初等因子

(2) 求 A 的 Jordan 标准型

解：

(1) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ -4 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

由第五题结论，可以得出 $A(\lambda)$ 的 $Smith$ 标准型为 $A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$

所以，可得 A 的初等因子组为 $(\lambda-2)^2, \lambda+1$

另：矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$ 本身为对角形式，因此可以直接看出它的初等因子组为 $(\lambda-2)^2, \lambda+1$

(2) 由 (1) 可得，A 的 $Jordan$ 标准型为 $A(\lambda) \simeq \left[\begin{array}{c:cc} -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

3.1

试证：$V_n(\mathbb{C},U)$ 中，$\forall\alpha,\beta\in V$，$|\|\alpha\|-\|\beta\||\leq\|\alpha+\beta\|$ 成立

证明：利用三角不等式

$$\begin{cases}\|\alpha\|=\|(\alpha-\beta)+\beta\|\leq\|\alpha-\beta\|+\|\beta\|\\ \|\beta\|=\|(\beta-\alpha)+\alpha\|\leq\|\beta-\alpha\|+\|\alpha\|\end{cases} \tag{$*$}$$

移项，得

$$\begin{cases}\|\alpha\|-\|\beta\|\leq\|\alpha-\beta\|\\ \|\beta\|-\|\alpha\|\leq\|\beta-\alpha\|\end{cases}$$

综合两式，得

$$|\|\alpha\|-\|\beta\||\leq\|\alpha+\beta\|$$

3.2

(1) 试述 n 维实空间中内积的定义

(2) 试证 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中，$<A,B>=tr(A^TB),\forall A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个内积

解：

(1) n 维实空间中，对于 $\forall$ 向量 α，β，如果按照某种法则对应一个实数 $\langle\alpha,\beta\rangle$，若有

$$\begin{cases}\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle\\ \langle m\alpha,n\beta\rangle=mn\langle\alpha,\beta\rangle\\ \langle\alpha,\beta+\gamma\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha,\gamma\rangle\\ \langle\alpha,\alpha\rangle\geq0,\text{当且仅当}\alpha=0\text{时},\text{等号成立}\end{cases}$$

成立，则称 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 是一个内积运算

(2) 证明：

1) $\langle A,B\rangle=tr\left(A^TB\right)=tr\left(A^TB\right)=\langle B,A\rangle$ 成立

2) $\langle mA,nB\rangle=tr\left((mA)^T(nB)\right)=mntr\left(A^TB\right)=mn\langle A,B\rangle$ 成立

3) $\langle A,B+C\rangle=tr\left(A^T(B+C)\right)=tr\left(A^TB\right)+tr\left(A^TC\right)=\langle A,B\rangle+\langle A,C\rangle$ 成立

4) $\langle A,A\rangle=tr\left(A^TA\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\geq0$，当且仅当 $A=0$ 时取等，成立

得证

3.3

已知 A 是 n 阶正定 Hermite 矩阵，在 n 维线性空间 $\mathbb{C}^n$ 中向量 $\alpha=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$，定义内积 $<\alpha,\beta>=\alpha^HA\beta$

(1) 证明在上述定义下，$\mathbb{C}^n$ 是酉空间

(2) 写出 $\mathbb{C}^n$ 中的 Cauchy-Schwarz 不等式

解：

(1) 证明：

1) $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle^T=\overline{\langle\alpha,\beta\rangle^H}=\overline{(\alpha^HA\beta)^H}=\overline{\beta^HA\alpha}=\overline{\langle\beta,\alpha\rangle}$

2) $\langle\alpha,k\beta\rangle=\overline{\langle\alpha,k\beta\rangle^H}=\overline{(\alpha^HAk\beta)^H}=\overline{k\beta^HA\alpha}=k\overline{\beta^HA\alpha}=k\langle\alpha,\beta\rangle$

3) $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=(\alpha+\beta)^HA\gamma=\alpha^HA\gamma+\beta^HA\gamma=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$

4) $\langle\alpha,\alpha\rangle=\alpha^HA\alpha$，因为 A 为正定矩阵，所以 $\alpha^HA\alpha\geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立

(2) $\|\alpha^HA\beta\|\leq\sqrt{\alpha^HA\alpha}\sqrt{\beta^HA\beta}$

3.4

设 S 是酉空间 $V_n(\mathbb{C},U)$ 的子空间，试证

(1) S 的正交补必然存在且唯一

(2) S 的一个标准正交基是 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，必能扩展为 $V_n(\mathbb{C},U)$ 的一组标准正交基

(3) S 的一个基是 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，$V_n(\mathbb{C},U)$，则 $\gamma\in\gamma\perp S\Leftrightarrow\gamma\perp\alpha_i,i=1,2,\cdots,m$

证明：

(2) 设 $V_n(C,U)$ 中的一组基为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$,对于 $\forall\alpha_i,i=1,2,\cdots,n$,若 α_i 可由 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 线性表出，则保持 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 不变；如不能，则令

$$e_{m+1}=\alpha_1-\frac{\langle e_1,\alpha_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle}e_1-\cdots-\frac{\langle e_m,\alpha_1\rangle}{\langle e_m,e_m\rangle}e_m$$

并将 e_{m+1} 加入到 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 中，对每一个 α_i 执行上述过程，则可以将 S 的一个标准基扩充为 $V_n(C,U)$ 的一组标准正交基

(1) 存在性：由 (2) 可知将 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 扩展为 $V_n(C,U)$ 的一组标准正交基，令 $T=span\{e_{m+1},e_{m+2},\cdots,e_n\}$，则 $S\perp T$，正交补必然存在

唯一性：若 $\exists T'$ 为 S 的正交补，则对于 T' 中任意的非零向量 $t\in S$，$\forall\alpha\in S$ 有 $\langle\alpha,t\rangle=0$，这表明 $t\in T$，所以 $T'\subset T$，同理 $T\subset T'$，故 $T'=T$

(3) 充分性：由于 $\alpha_i\in S$，$\gamma\perp S$，故有 $\gamma\perp\alpha_i,i=1,2,\cdots,m$

必要性：由 $\alpha_i\in S$，可知 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，则有

$$\langle\gamma,\alpha\rangle=k_1\langle\gamma,\alpha_1\rangle+k_2\langle\gamma,\alpha_2\rangle+\cdots+k_m\langle\gamma,\alpha_m\rangle$$

由于 $\gamma\perp\alpha_i$，则有 $\langle\gamma,\alpha\rangle=0$，因此 $\forall\alpha\in S$，有 $\langle\gamma,\alpha\rangle=0$，进而 $\gamma\perp S$

3.5

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，内积定义为 $<x,y>=x^TWy,\forall x,y\in\mathbb{R}^n$，$W$ 为 n 阶正定对称矩阵。设 S 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 是 S 的一组基，对任意的 $y\in\mathbb{R}^n$，是在 S 中寻找一点 β，使 $\|\gamma-\beta\|$ 最小

解：

3.6

已知 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 $Null(A)$ 的一组标准正交基

3.7

设 A 为正定 Hermite 矩阵，B 为反 Hermite 矩阵，试证：AB 与 BA 的特征值实部为零
证明：

3.8

设 A，B 为 Hermite 矩阵，且 A 正定，试证：AB 与 BA 的特征值都是实数
证明：

3.9

设 A 是半正定 Hermite 矩阵，$A \neq 0$，B 是正定 Hermite 矩阵，试证：
(1) $|A+I|>1$
(2) $|A+B|>|A|$
证明：

3.10

设 A 是正规矩阵。试证：
(1) $A^r=0$，r 是自然数，则 $A=0a$
(2) 若 $A^2=A$，则 $A^H=A$
(3) 若 $A^3=A^2$，则 $A^2=A$
证明：

3.11

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $A^H=A$，$A^3=I$
(1) 写出 A 的一个零化多项式
(2) 写出 A 的所有特征值，并指明其几何重数与代数重数间的约束关系
(3) 写出 A 的 Jordan 标准型中全部可能的 Jordan 子块应具有的形式
(4) 说明 A 是否一定是正定矩阵，或指明其正定的条件
(5) 是否存在正定矩阵 $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$H{\neq}A$，使 $H^2=A^2$，并说明原因
解：

3.5.欧氏空间$\mathbb{R}^n$，内积定义为$<x,y>=x^TWy,\forall x,y\in\mathbb{R}^n$，$W$为n阶正定对称矩阵。设S是欧氏空间$\mathbb{R}^n$的子空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$是S的一组基，对任意的$\gamma\in\mathbb{R}^n$，试在S中寻找一点$\beta$，使$\|\gamma-\beta\|$最小。

答：$\beta=\Phi(\Phi^TW\Phi)^{-1}\Phi^TW\alpha$ ，其中$\Phi=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{bmatrix}$

3.6. 已知

$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求Null(A)的一组标准正交基。

解：略

3.7 设A为正定Hermite矩阵，B为反Hermite矩阵，试证：AB与BA的特征值实部为零。

证明：

由A 正定可知$\exists P\in C^{n\times n},|P|\neq 0,A=P^HP,\ \Rightarrow\lambda I-AB=P^H(\lambda I-PBP^H)P^{-H}$

$\Rightarrow AB,PBP^H$具有相同的特征值

又因为$B^H=-B\Rightarrow$ PBP^H也是反对称矩阵，其实部为零$\Rightarrow AB$的特征值实部为零。

同理可证BA$\Rightarrow AB$的特征值实部为零。

3.8 设A,B为Hermite矩阵，且A正定，试证：AB与BA的特征值都是实数。

证明类似3.7,略。

3.9 设 A 是半正定 Hermite 矩阵，$A\neq 0$，B 是正定 Hermite 矩阵，试证：（1）$|A+I|>1$；（2）$|A+B|>|A|$

证明：（1）略（注意$A\neq 0\Rightarrow A$的特征值不全为零，因此严格大于）

（1） 当A不可逆时，$A+B$正定，结论显然成立。

当A为可逆的正半定矩阵时$\Rightarrow A$正定$\Rightarrow\exists P\in C^{n\times n},|P|\neq 0$ 使$A=P^HP$ ，

$|A|=|P^H||P|\Rightarrow|A+B|=|P^H|\cdot|I+\left(P^{-1}\right)^HBP^{-1}|\cdot|P|=|A|\cdot|\left(P^{-1}\right)^HBP^{-1}+I|$

又$\left(P^{-1}\right)^HBP^{-1}$正定，由(1)可知$|\left(P^{-1}\right)^HBP^{-1}+I|>1$

故$|A+B|>|A|$

3.10 设A是正规矩阵。试证：（1）$A^r=0$，r是自然数，则$A=0$；（2）若$A^2=A$，则$A^H=A$；（3）若$A^3=A^2$，则$A^2=A$

3.11 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且 $\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{I}$

（1）写出 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式。

（2）写出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值，并指明其几何重数与代数重数间的约束关系。

（3）写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中全部可能的 Jordan 子块应具有的形式。

（4）说明 $\boldsymbol{A}$ 是否一定是正定矩阵，或指明其正定的条件。

（5）是否存在正定矩阵 $\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{n \times n}$， $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{A}$，使 $\boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{A}^2$，并说明原因。

答：

（1） $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式为 $\lambda^3 - 1$

（2）A 是 Hermite 的，可知 A 的特征值都是实数，又由零化多项式的根及其重数可知，A 的特征值为 1，其几何重度等于代数重度。

（3） $J_i = 1$

（4）由(3)可知 A=I，正定。
（5）不存在，因为正定矩阵的算数根唯一。