期末考试试题

- 课程： 跨入科学研究之门（XDSY118019）
- 答案提交截止时间: 2023.11.16, 21:05
- 答案提交方式： 以Pull Request的形式（请在标题备注学号、姓名）将所有相关材料提交到GitHub repo： https://github.com/liuyxpp/XDSY118019-exam

注意事项

1. 答案提交方式是本次期末考试考察的一个部分，如果不能按时以Pull Request的形式提交考试答案，将判定本次考试不合格。
2. 考试答案包括试题的解、相关代码及注释（.py文件或Jupyter notebook文件）以及所要求的说明文档（Markdown或LaTeX）。

一、编程实践项目

该部分试题将于第9次课结束后至第10次课结束前给出，请从以下两个项目任选一个作答。

单变量函数求根算法初探

给定单变量函数$f(x)$，求解方程$f(x)=0$的根是数值计算中的基本问题。本题将通过编程实践初步探索求解单变量函数根的算法。

Bisection算法

假定我们已知函数$f(x)$在区间$[a,b]$内有且仅有一个根，且$f(a)f(b)<0$，则可以通过Bisection算法求解$f(x)=0$的根。Bisection算法的基本思想是：将区间$[a,b]$等分为两个子区间$[a,c]$和$[c,b]$，其中$c=\frac{a+b}{2}$，如果$f(a)f(c)<0$，则$f(x)$在区间$[a,c]$内有且仅有一个根，否则$f(x)$在区间$[c,b]$内有且仅有一个根。重复上述过程，直到区间长度小于某个给定的阈值ϵ，即可得到根的近似值。

Newton算法

Newton算法是一种迭代算法，其基本思想是：假定我们已知函数$f(x)$在某个点x_0的函数值$f(x_0)$及其导数$f'(x_0)$，则可以构造一条直线$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$。该直线与x轴的交点为$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，即为函数$f(x)$在$x_0$附近的一个根的近似值。利用$x_1$代替$x_0$重复上述过程，即可得到根的近似值$x_2$。如此反复，即可求得根的近似值$x_n$。如果前后两个近似根小于某个给定的阈值$\epsilon$，则认为已经求得根的近似值。

请用Python编写代码以实现：

1. 一个Bisection算法函数：输入任意函数$f(x)$、包含一个根的区间（a, b）、目标误差ϵ，输出满足条件的近似根。
2. 一个Newton算法函数：输入任意函数$f(x)$、导数$df(x)$、根的估计值x_0、目标误差ϵ，输出满足条件的近似根。
3. 请用Numpy/Scipy中的求根函数对以下方程进行求解，并与上述两种算法的结果进行比较（目标误差设置为$\epsilon = 10^{-10}$）：
    i. $2x = \tan(x), x \in [-0.2, 1.4]$.
    ii. $e^{x+1} = 2 + x, x \in [-2, 2]$.
    iii. $x^{-2} = \sin(x), x \in [0.5, 4\pi]$. （提示： 在这个区间函数有多个根，请用合适的画图方法先大致确认每个根的区间或初始解再逐一求解）
4. 误差分析：分别将上述两种算法应用于求解$x^2 - 2 = 0$在区间$(1, 2)$内的根，比较两种算法的收敛速度，并将结果用图表形式展示出来。（注：收敛速度即是指根的近似值与真实值之间的误差随迭代次数的变化快慢的趋势）

试题解答要求

1. 编写Python代码，代码运行后能给出正确结果。可以提交.py文件或者Jupyter notebook文件。
2. Python代码应符合PEP 8规范。
3. 为Python代码合理编写注释。
4. 编写使用文档，包括但不限于：
    i. 问题描述及解答思路。
    ii. 如何使用代码。