República Bolivariana de Venezuela

Ministerio del Poder Popular para la Educación Superior

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"

Decanato de Ciencias y Tecnología

Barquisimeto - Lara

Cuadratura de Gauss

Integrantes:

Luis Carrillo, C.I: 27539960

Ernesto Contreras, C.I: 28245373

Yaslin Vreugdenhil, C.I: 29561929

Gregori Yepez, C.I: 28047103

Juan Parra, C.I: 28281378

Barquisimeto, Mayo 2025

Introducción

Cuando se habla de la resolución de problemas en las áreas que conforman la ingeniería o las ciencias, los cálculos numéricos juegan un rol fundamental y dentro de estos campos la aproximación de integrales definidas y la interpolación de datos son dos herramientas muy importantes y poderosas.

La cuadratura de Gauss, también conocida como cuadratura gaussiana, representa una de las herramientas más poderosas y elegantes en el campo del análisis numérico para la aproximación de integrales definidas. Su principal característica radica en la optimización de los puntos de evaluación (nodos) y los pesos asociados, permitiendo alcanzar una alta precisión con un número relativamente pequeño de evaluaciones de la función integrando. A diferencia de otros métodos de cuadratura, como las fórmulas de Newton-Cotes (regla del trapecio o regla de Simpson), que utilizan nodos equiespaciados, la cuadratura de Gauss selecciona los nodos de manera estratégica, como las raíces de ciertos polinomios ortogonales, lo que le confiere una eficiencia superior para una amplia clase de funciones.

Por otro lado, la interpolación polinómica (de newton y lagrange) es crucial para estimar valores de funciones desconocidas a partir de datos discretos y permiten la aproximación de la función entre los datos proporcionados. Asimismo, la regla del trapecio ofrece una aproximación integral más simple, aunque generalmente es menos precisa que la cuadratura de Gauss para el mismo número de puntos.

En este informe, se explorarán los fundamentos teóricos de la cuadratura de Gauss, incluyendo la relación con los polinomios ortogonales y la derivación de sus nodos y pesos. Además, se analizarán diferentes variantes del método, como la cuadratura de Gauss-Legendre, Gauss-Chebyshev, Gauss-Laguerre y Gauss-Hermite, cada una adaptada a distintos tipos de funciones e intervalos de integración. Finalmente, se discutirán sus aplicaciones prácticas y se comparará su rendimiento con otros métodos numéricos de integración. Adicionalmente se presentarán los resultados a los problemas asignados utilizando los pseudocódigos de Interpolación de Newton, interpolación de Lagrange y la regla del Trapecio.

Cuadratura de Gauss (sección 22.3)

Una cuadratura de Gauss es una cuadratura construida para obtener el resultado exacto al integrar polinomios de grado 2n-1 o menos. Es un método numérico para aproximar integrales definidas de funciones, especialmente útil cuando no es posible resolverlas analíticamente, debido a que mejora la precisión con respecto a distintas fórmulas. La clave de esta cuadratura es escoger bien los nodos (w_i) y pesos (x_i) y así maximizar la exactitud.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

donde

w_i = nodos.

$x_i \in [a, b]$ = pesos asociados a cada nodo.

La cuadratura de Gauss busca una aproximación precisa de la integral al elegir puntos que, al ser ponderados con pesos específicos, dan como resultado el valor exacto de la integral de polinomios de un cierto grado.

El desarrollo de este método se atribuye al célebre matemático alemán Carl Friedrich Gauss a principios del siglo XIX, quien demostró que, eligiendo óptimamente los n nodos de integración, es posible obtener una fórmula que integre exactamente todos los polinomios de grado hasta 2n−1. Esta propiedad la convierte en una técnica de elección cuando se requiere precisión y eficiencia computacional, especialmente en problemas de ingeniería y ciencias donde la evaluación de la función integrando puede ser costosa.

A diferencia de otros métodos, en la cuadratura de Gauss, tanto los puntos x_i como los pesos w_i se eligen estratégicamente. Esta elección se basa en los polinomios ortogonales.

Relación con los polinomios ortogonales

La cuadratura de Gauss está intrínsecamente ligada a los polinomios ortogonales, ya que los nodos y pesos usados en el método dependen directamente de las propiedades de estos polinomios. Selecciona los nodos como las raíces del polinomio ortogonal de grado n y los pesos para garantizar precisión máxima.

> **Teorema fundamental:** Los nodos de la cuadratura de Gauss de orden n son las raíces del polinomio ortogonal de grado n asociado al intervalo y función peso.

La cuadratura gaussiana tiene ciertas variantes, estas son:

Cuadratura de Gauss-Legendre

Es un método para integrales en intervalos finitos $[-1, 1]$ donde su función de peso $w(x) = 1$. Se busca una fórmula del tipo: $I \approx c_0 f\left(x_0\right) + c_1 f\left(x_1\right)$

Su fórmula es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

donde

x_i = nodos. Raíces de $P_n(x)$

w_i= pesos correspondientes a estos nodos.

Para dos nodos, su fórmula es:

$$I \equiv f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A mayor cantidad de nodos, mayor precisión. Esto se ve en la siguiente tabla:

Puntos	Factor de ponderación	Argumentos de la función	Error de truncamiento
2	$c_0 = 1.0000000$ $c_1 = 1.0000000$	$x_0 = -0.577350269$ $x_1 = 0.577350269$	$\cong f^{(4)}(\xi)$
3	$c_0 = 0.5555556$ $c_1 = 0.8888889$ $c_2 = 0.5555556$	$x_0 = -0.774596669$ $x_1 = 0.0$ $x_2 = 0.774596669$	$\cong f^{(6)}(\xi)$
4	$c_0 = 0.3478548$ $c_1 = 0.6521452$ $c_2 = 0.6521452$ $c_3 = 0.3478548$	$x_0 = -0.861136312$ $x_1 = -0.339981044$ $x_2 = 0.339981044$ $x_3 = 0.861136312$	$\cong f^{(8)}(\xi)$
5	$c_0 = 0.2369269$ $c_1 = 0.4786287$ $c_2 = 0.5688889$ $c_3 = 0.4786287$ $c_4 = 0.2369269$	$x_0 = -0.906179846$ $x_1 = -0.538469310$ $x_2 = 0.0$ $x_3 = 0.538469310$ $x_4 = 0.906179846$	$\cong f^{(10)}(\xi)$
6	$c_0 = 0.1713245$ $c_1 = 0.3607616$ $c_2 = 0.4679139$ $c_3 = 0.4679139$ $c_4 = 0.3607616$ $c_5 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$ $x_1 = -0.661209386$ $x_2 = -0.238619186$ $x_3 = 0.238619186$ $x_4 = 0.661209386$ $x_5 = 0.932469514$	$\cong f^{(12)}(\xi)$

Cuadratura de Gauss-Chebyshev (Tipo I)

Éste es otro tipo de cuadratura Gaussiana ideal para integrales con singularidades para la función de peso: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

en los extremos de $[-1, 1]$.

Su fórmula es:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

donde:

Nodos (x_i): $x_i = cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$

Pesos: $w_i = \frac{\pi}{n}$

Cuadratura de Gauss-Laguerre

Esta cuadratura está diseñada para ser utilizada para integrales en el intervalo $[0, \infty)$ con función de peso $w(x) = e^{-x}$. Busca la forma de:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

donde:

Nodos: x_i: raiz i-esima de $L_n(x)$(Polinomio de Laguerre).

Pesos: Este está dado por $w_i = \frac{x_1}{(n+1)^2 \left[L_{n+1}(x_i)\right]^2}$.

Cuadratura de Gauss-Hermite

Se utiliza para la aproximación de integrales en el intervalo $(-\infty, \infty)$ Con peso en $w(x) = e^{-x^2}$. Se utiliza en estadística (esperanzas con distribución normal) o mecánica cuántica. Su fórmula es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

donde

Nodos: (x_i) Raíces de $H_n(x)$ (Polinomios de Hermite).

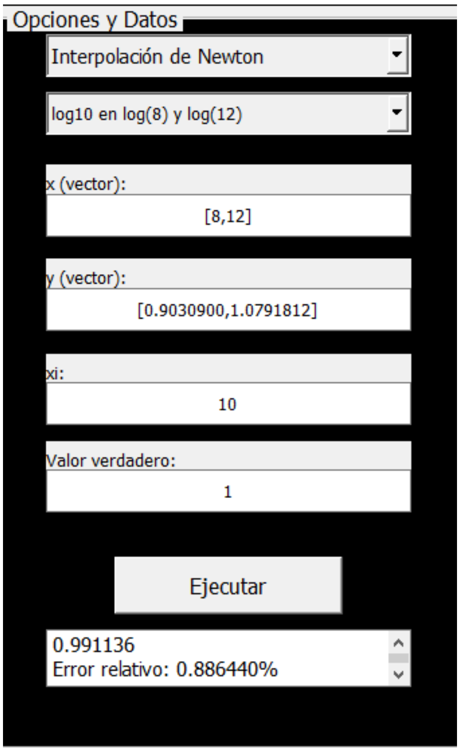
Pesos: $w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 \left[H_{n-1}(x_i)\right]^2}$.

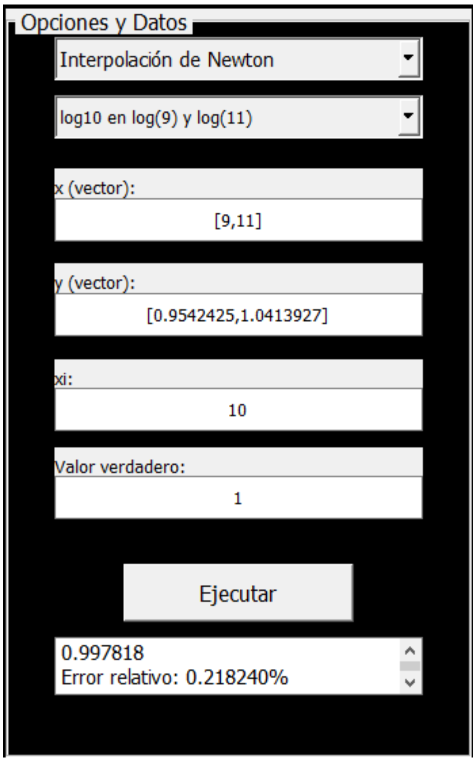
Aplicación de algoritmos

Algoritmo de Newton

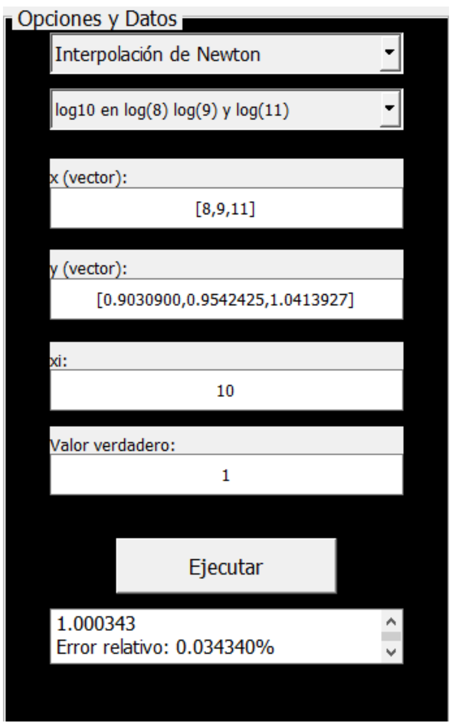
18.1 Estime Estime el logaritmo natural de 10 por medio de interpolación lineal.

a) Interpole entre log 8 = 0.9030900 y log 12 = 1.0791812.
b) Interpole entre log 9 = 0.9542425 y log 11 = 1.0413927.
Para cada una de las interpolaciones calcule el error relativo porcentual con base en el valor verdadero.

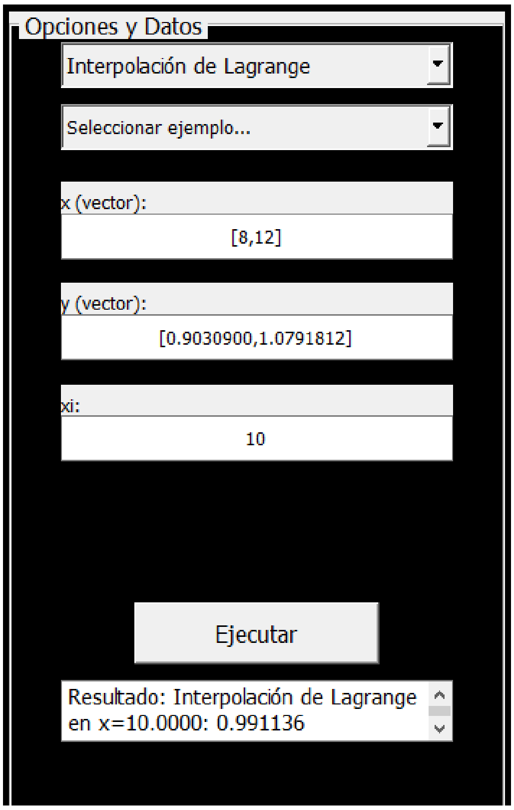


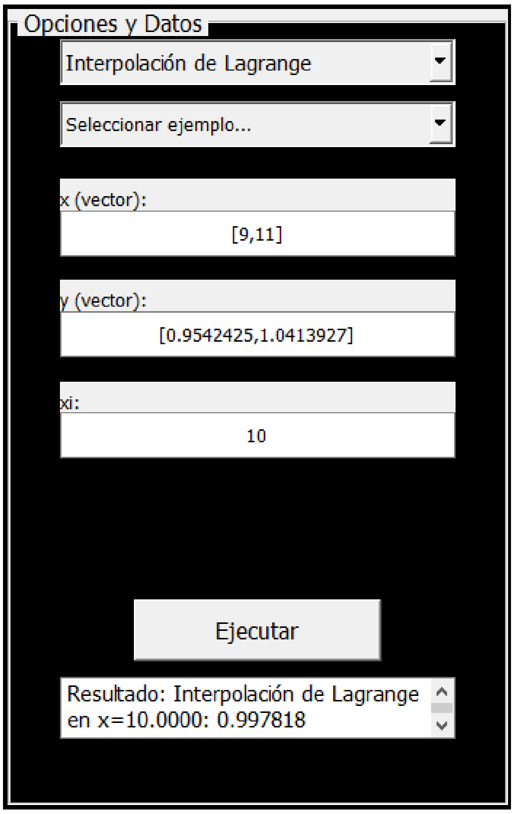


18.2 Ajuste un polinomio de interpolación de Newton de segundo orden para estimar el log 10, con los datos del problema 18.1 en $x = 8$, 9 y 11. Calcule el error relativo porcentual verdadero.

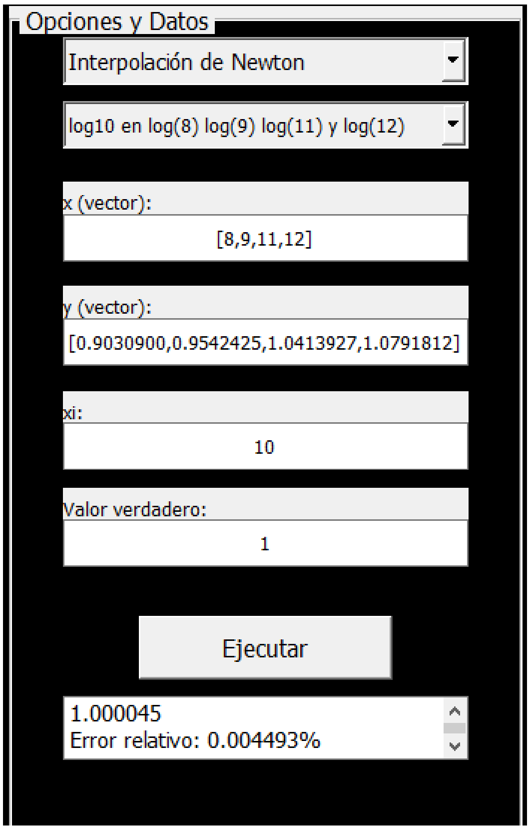


18.6 Repita los problemas 18.1 a 18.3, con el empleo del polinomio de Lagrange.





18.3 Ajuste un polinomio de interpolación de Newton de tercer orden para estimar log 10 con los datos del problema 18.1.



21.1 Evalúe la integral siguiente:

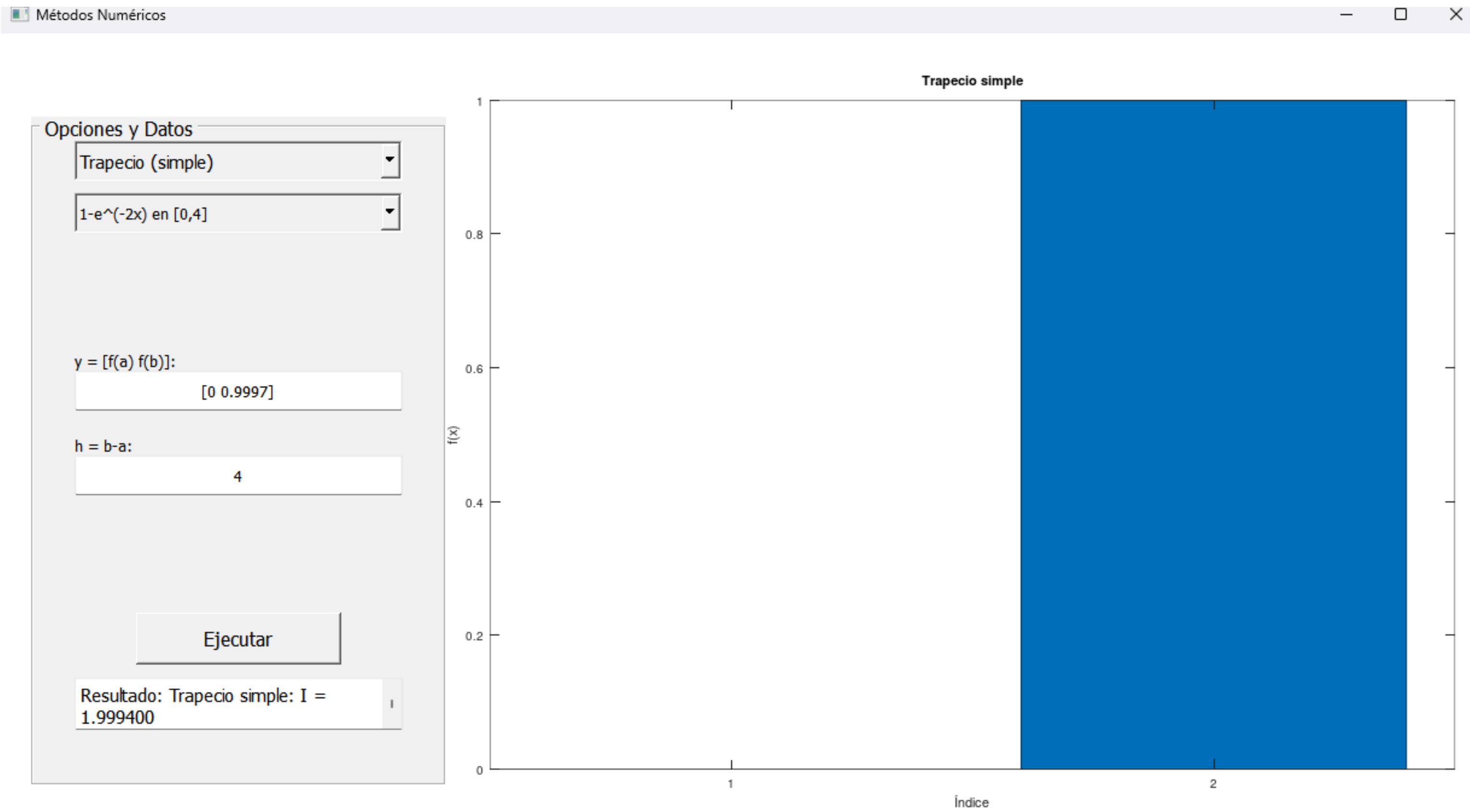
$$\int_0^4 (1-e^{-2x})\,dx$$

a) en forma analítica; *b*) con una sola aplicación de la regla del trapecio; *c*) con aplicación múltiple de la regla del trapecio, con $n = 2$ y 4; *d*) con una sola aplicación de la regla de Simpson 1/3; *e*) con la aplicación múltiple de la regla de Simpson 1/3, con $n = 4$; *f*) con una sola aplicación de la regla de Simpson 3/8, y *g*) con aplicación múltiple de la regla de Simpson, con $n = 5$. Para los incisos *b*) a *g*), determine el error relativo porcentual de cada una de las estimaciones numéricas, con base en el resultado del inciso *a*).

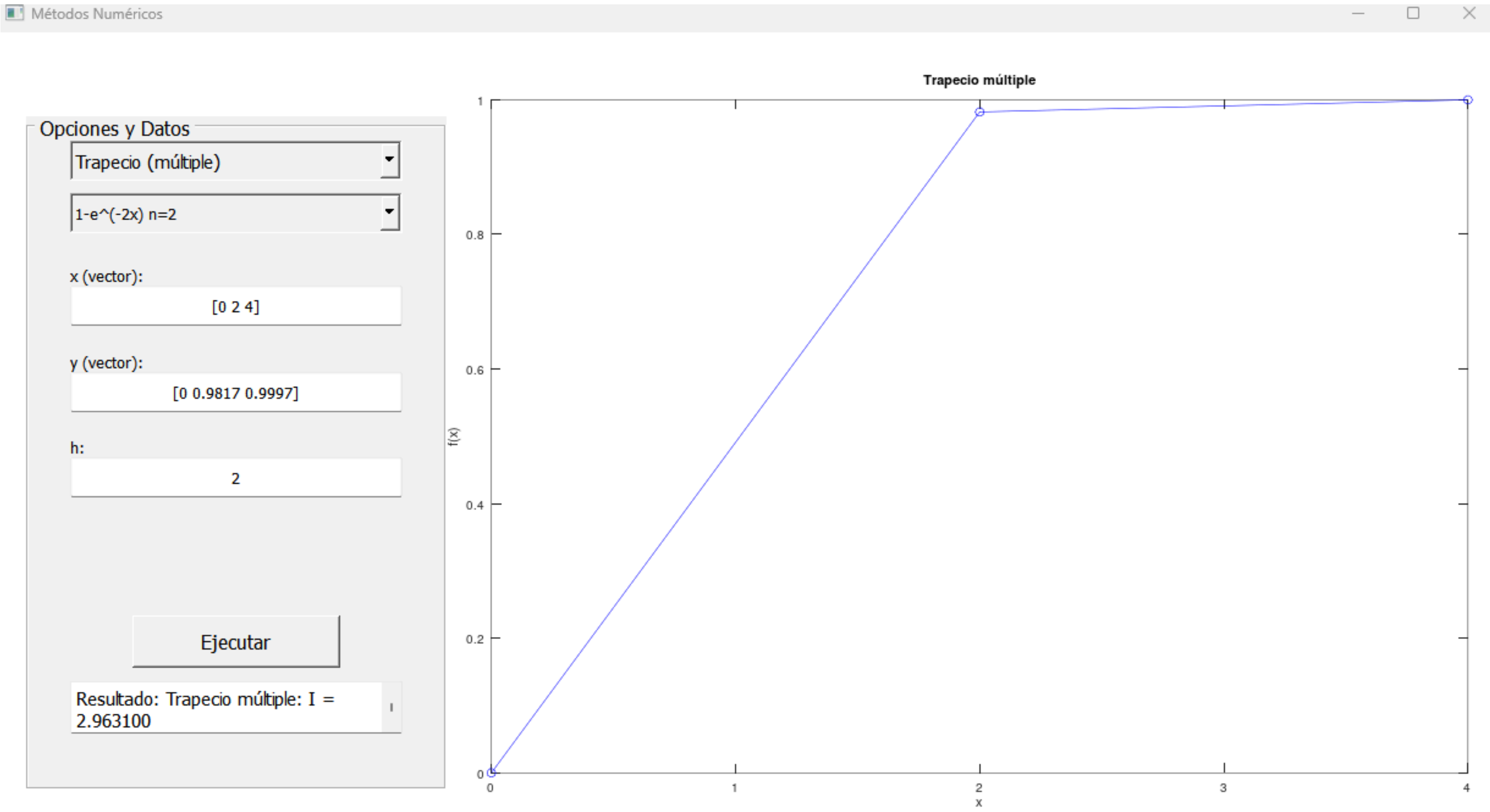
a) Forma analitica:

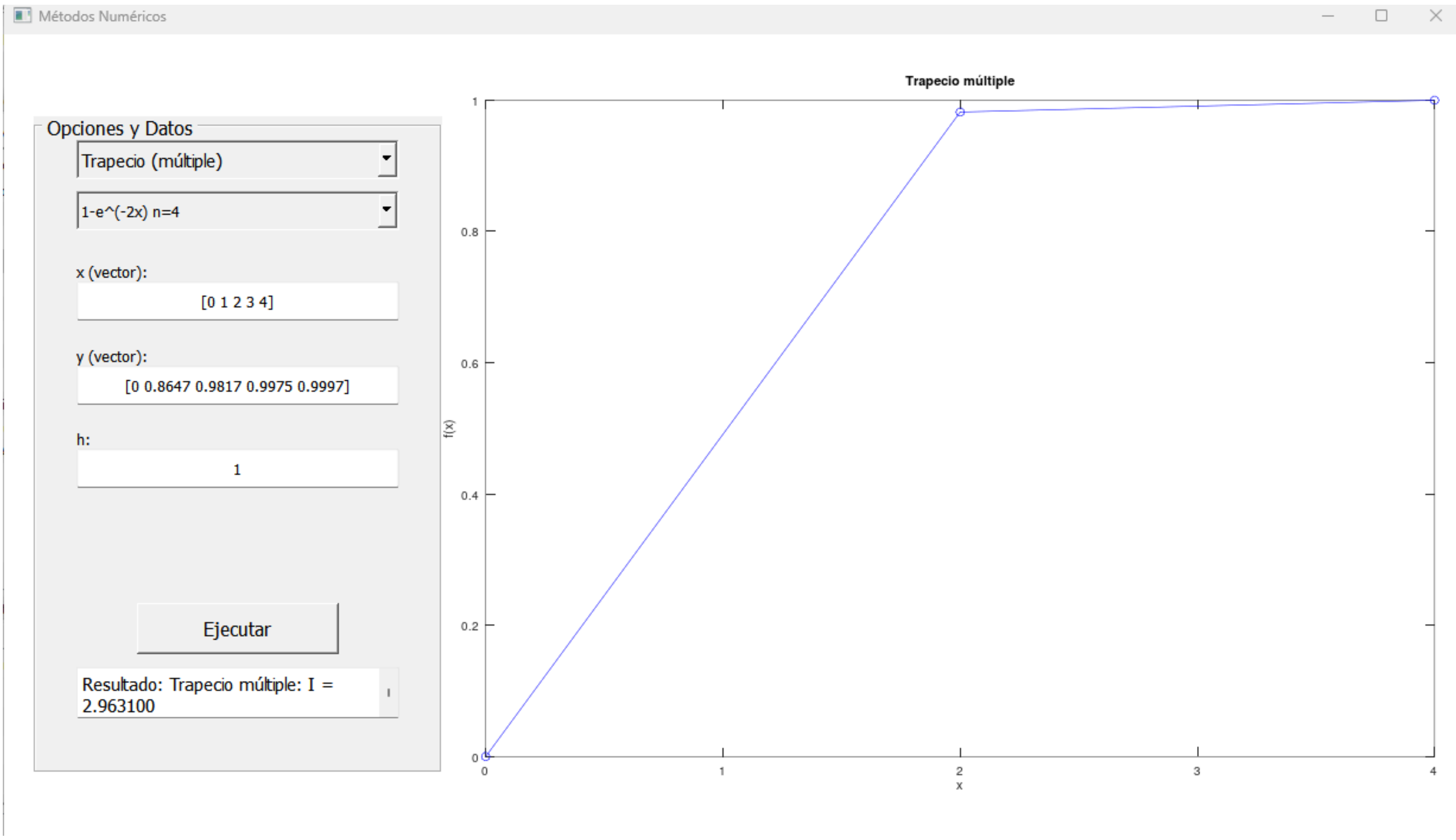
$$\int_0^4 (1-e^{-2x})dx = [x + \tfrac{1}{2}e^{-2x}]0\ a\ 4 = 3.5000$$

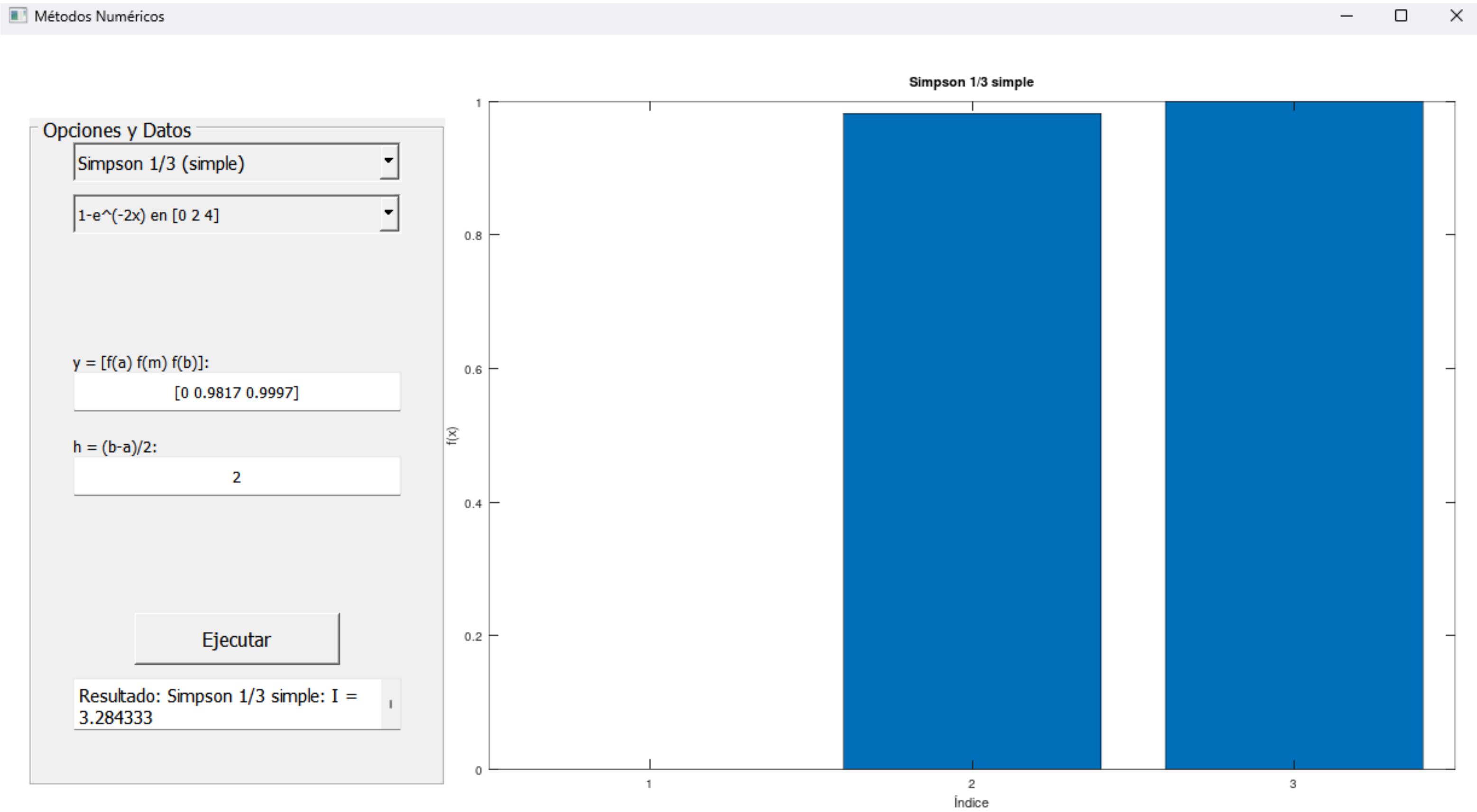
b) Trapecio Simple



c) Trapecio Múltiple con n=2 y n=4







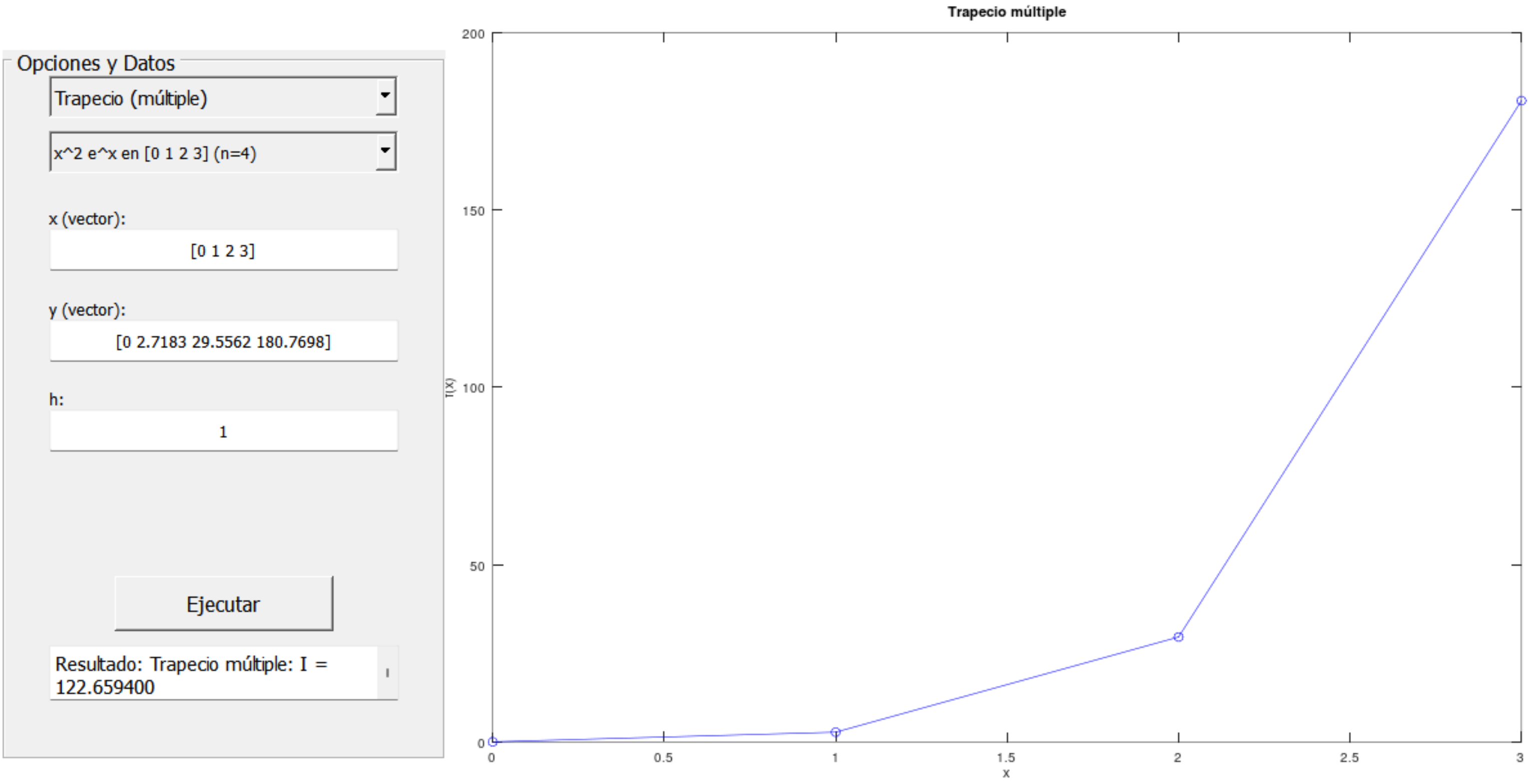
21.6 Integre la función siguiente tanto en forma analítica como numérica. Emplee las reglas del trapecio y de Simpson 1/3 para integrar numéricamente la función. Para ambos casos, utilice la versión de aplicación múltiple, con $n = 4$. Calcule los errores relativos porcentuales para los resultados numéricos.

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

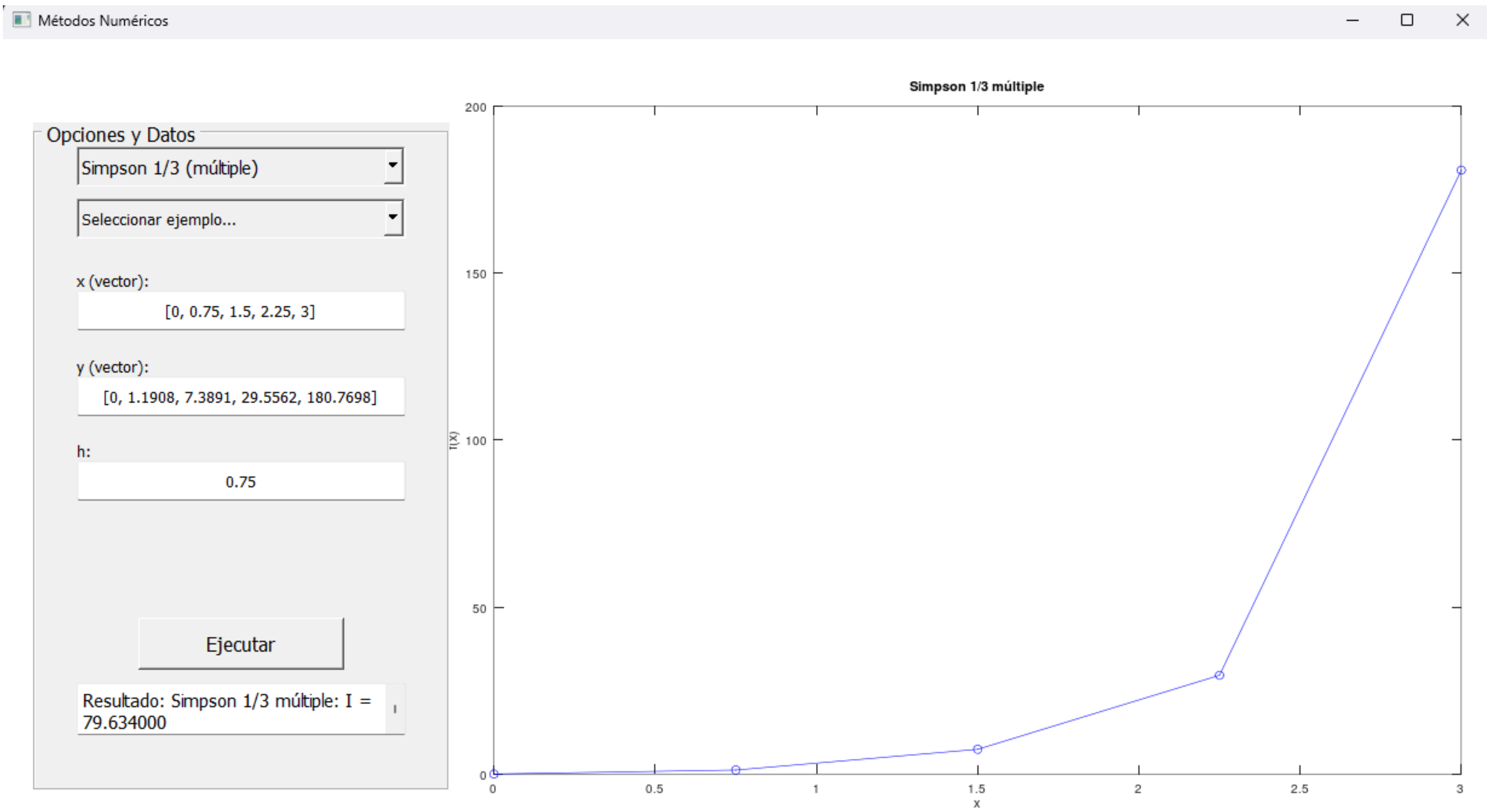
Forma analitica

$$\int_0^3 x^2\, e^x\, dx = e^x\,(x^2 - 2x + 2)\,|_0^3 = 5e^3 - 2 \approx 98.4276$$

Regla del trapecio



Regla de simpson



Errores relativos

$$\varepsilon = \left|\frac{122.659-98.4276}{122.659}\right| \times 100\% = 19.75\%$$

$$\varepsilon = \left|\frac{79.6340-98.4276}{79.6340}\right| \times 100\% = 23.59\%$$

Referencias

- https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadratura_de_Gauss#:~:text=En%20an%C3%A1lisis%20num%C3%A9rico%20un%20m%C3%A9todo,grado%202n%2D1%20o%20menos.
- Cortés J., González M., Pinilla V., Salazar A., Tovar V. * . (2019). Integración numérica. Cuadratura Gaussiana.
- https://en-m-wikipedia-org.translate.goog/wiki/Gauss%E2%80%93Laguerre_quadrature?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=es&_x_tr_hl=es&_x_tr_pto=sge
- https://mathworld.wolfram.com/Hermite-GaussQuadrature.html
- https://es.scribd.com/document/422923059/Cuadratura-de-Gauss-Legendre