



日期： 2022 年 5 月 15 日

成绩： _____

学院： 智能工程学院

课程： 智能机器人技术

周次： 第 14 周

专业： 智能科学与技术

姓名： 方桂安

学号： 20354027

1 题一

图为 2R 平面机器人，其中 $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$ 。关节状态变量表示为 $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T$ ，其中 θ_1 和 θ_2 分别为关节 1 和关节 2 的角度，给定如下条件：

(1) 初始位置、速度、加速度

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} \theta_{10} & \theta_{20} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10^\circ & 20^\circ \end{bmatrix}^T, \quad \dot{\Theta}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{10} & \dot{\theta}_{20} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \ddot{\Theta}_0 = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{10} & \ddot{\theta}_{20} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

(2) 终点位置、速度、加速度

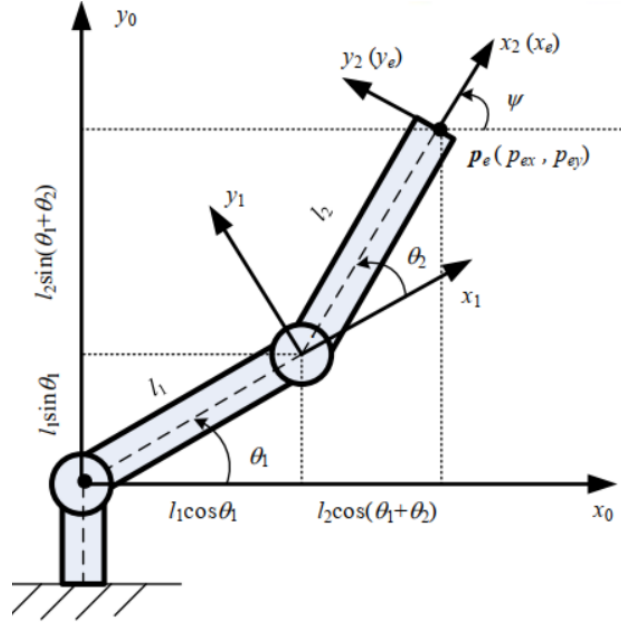
$$\Theta_f = \begin{bmatrix} \theta_{1f} & \theta_{2f} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 60^\circ & 100^\circ \end{bmatrix}^T, \quad \dot{\Theta}_f = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1f} & \dot{\theta}_{2f} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \ddot{\Theta}_f = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{1f} & \ddot{\theta}_{2f} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

(3) 要求所有关节的速度、加速度满足如下约束条件

$$\begin{cases} |\dot{\theta}_i| \leq 5 (^\circ/\text{s}) \\ |\ddot{\theta}_i| \leq 0.5 (^\circ/\text{s}^2) \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

1.1 题目

请采用五次多项式对关节 1 和关节 2 的轨迹进行规划，给出规划函数（含具体的多项式参数）、关节曲线、机器人运动状态图，附上求解程序（matlab，其他编程语言都可以）。



1.2 解答

每个关节角均采用五次多项式进行规划

$$\theta_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + a_{i3}t^3 + a_{i4}t^4 + a_{i5}t^5 \quad (i = 1, \dots, n)$$

相应地，速度和加速度的表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i(t) = a_{i1} + 2a_{i2}t + 3a_{i3}t^2 + 4a_{i4}t^3 + 5a_{i5}t^4 \\ \ddot{\theta}_i(t) = 2a_{i2} + 6a_{i3}t + 12a_{i4}t^2 + 20a_{i5}t^3 \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

根据下列起始和终止条件，可以确定待定参数：

$$\begin{cases} \theta_i(0) = \theta_{i0}, \quad \dot{\theta}_i(0) = \dot{\theta}_{i0}, \quad \ddot{\theta}_i(0) = \ddot{\theta}_{i0} \\ \theta_i(t_f) = \theta_{if}, \quad \dot{\theta}_i(t_f) = \dot{\theta}_{if}, \quad \ddot{\theta}_i(t_f) = \ddot{\theta}_{if} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

将起止条件代入表达式得到方程组：

$$\begin{cases} \theta_{i0} = a_{i0} \\ \dot{\theta}_{i0} = a_{i1} \\ \ddot{\theta}_{i0} = 2a_{i2} \\ \theta_{if} = a_{i0} + a_{i1}t_f + a_{i2}t_f^2 + a_{i3}t_f^3 + a_{i4}t_f^4 + a_{i5}t_f^5 \\ \dot{\theta}_{if} = a_{i1} + 2a_{i2}t_f + 3a_{i3}t_f^2 + 4a_{i4}t_f^3 + 5a_{i5}t_f^4 \\ \ddot{\theta}_{if} = 2a_{i2} + 6a_{i3}t_f + 12a_{i4}t_f^2 + 20a_{i5}t_f^3 \end{cases}$$

求得如下待定参数：

$$\begin{cases} a_{i0} = \theta_{i0}, a_{i1} = \dot{\theta}_{i0}, a_{i2} = \frac{\ddot{\theta}_{i0}}{2} \\ a_{i3} = \frac{20(\theta_{if} - \theta_{i0}) - (8\dot{\theta}_{if} + 12\dot{\theta}_{i0})t_f + (\ddot{\theta}_{if} - 3\ddot{\theta}_{i0})t_f^2}{2t_f^3} \\ a_{i4} = \frac{-30(\theta_{if} - \theta_{i0}) + (14\dot{\theta}_{if} + 16\dot{\theta}_{i0})t_f - (2\ddot{\theta}_{if} - 3\ddot{\theta}_{i0})t_f^2}{2t_f^4} \\ a_{i5} = \frac{12(\theta_{if} - \theta_{i0}) - (6\dot{\theta}_{if} + 6\dot{\theta}_{i0})t_f + (\ddot{\theta}_{if} - \ddot{\theta}_{i0})t_f^2}{2t_f^5} \end{cases}$$

由于起点及终点的速度、加速度为 0，待定参数则为：

$$\begin{cases} a_{i0} = \theta_{i0}, a_{i1} = 0, a_{i2} = 0 \\ a_{i3} = \frac{10(\theta_{if} - \theta_{i0})}{t_f^3} \\ a_{i4} = \frac{-15(\theta_{if} - \theta_{i0})}{t_f^4} \\ a_{i5} = \frac{6(\theta_{if} - \theta_{i0})}{t_f^5} \end{cases}$$

通过 (3) 中的约束条件易得， $T \leq 30s$ 。故取 $t = 0$ $t_f = 30s$ ，利用 matlab 求解得到关节曲线与机器人运动状态如下图所示（代码见附件）。

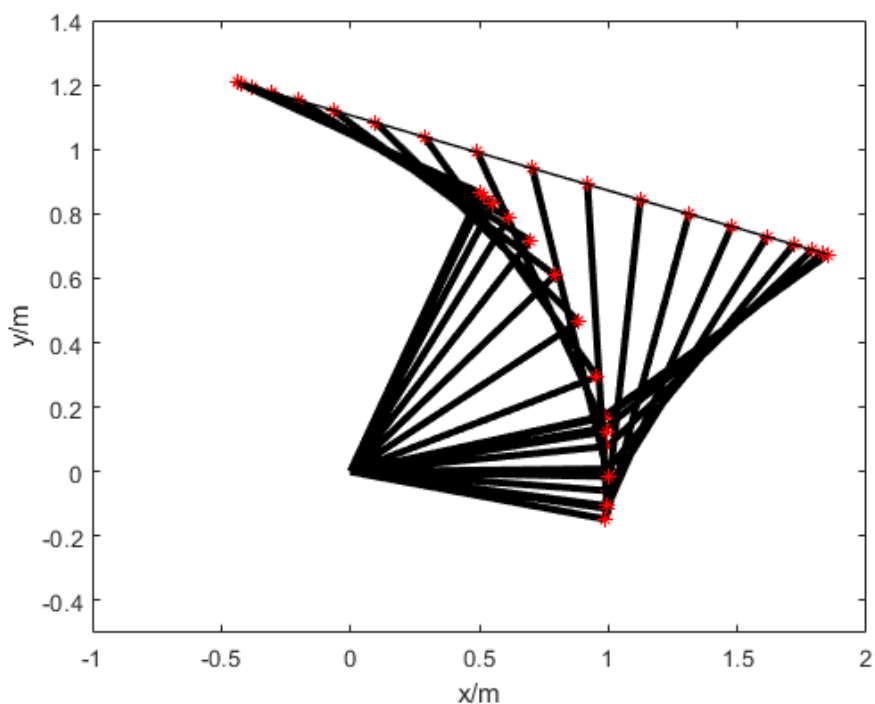


图 1：机器人运动状态

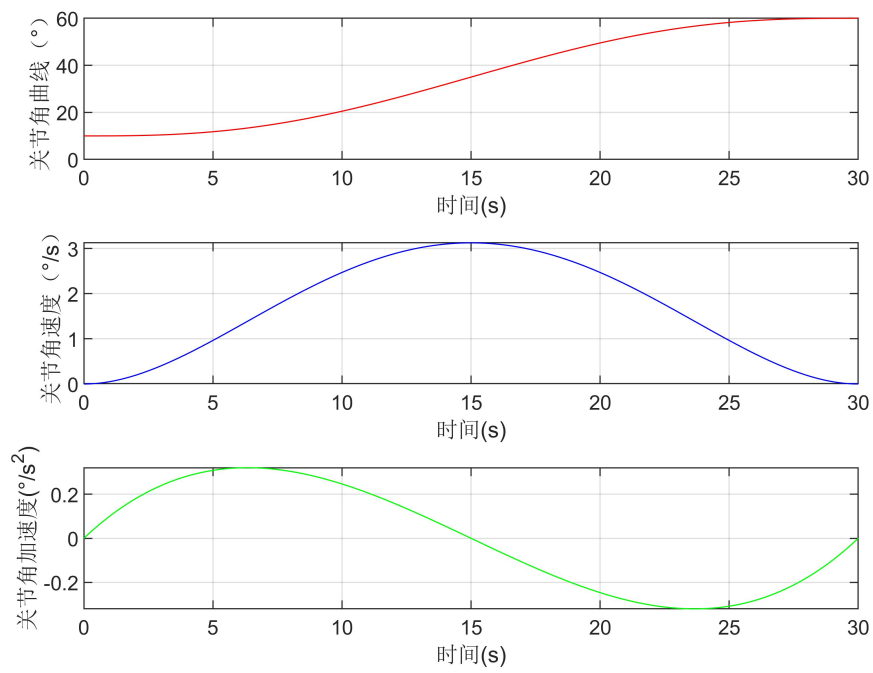


图 2: 关节 1 曲线

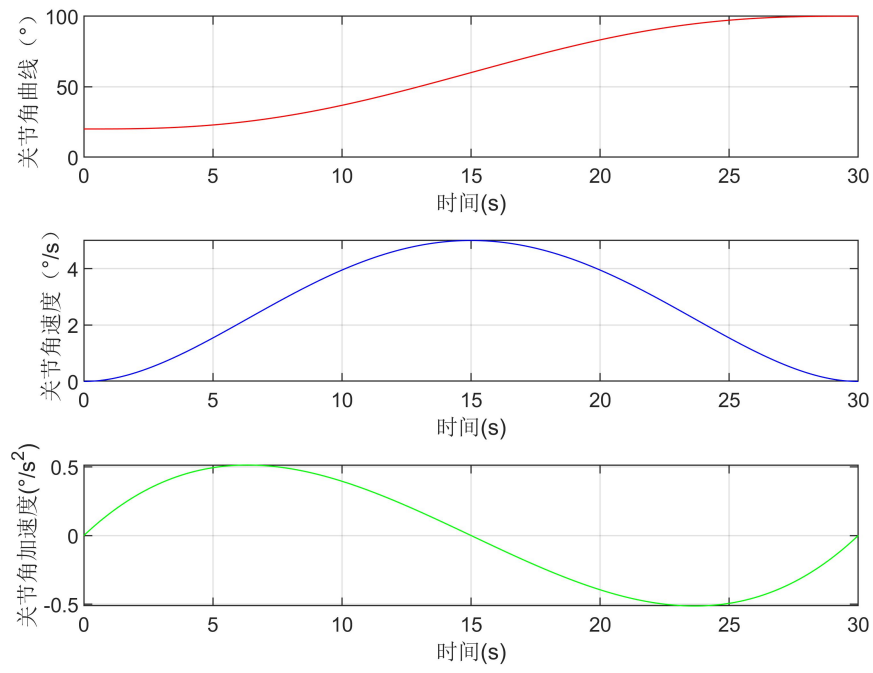


图 3: 关节 2 曲线