



院(系): 智能工程学院

组号: 第一组

组长: 方桂安

日期: 2022. 12. 28

实验名称: (创新模块) 状态空间理论

LQR 控制器设计及仿真

一、实验目的

- 1、了解系统的状态空间描述方法;
- 2、掌握 LQR 控制器设计原理;
- 3、设计二级倒立摆系统 LQR 控制器。

二、小组成员

1. 方桂安: 20354027, 负责仿真
2. 刘梦莎: 20354091, 负责仿真以及报告撰写
3. 陈石翰: 20354019, 负责仿真
4. 刘恩骐: 20354086, 负责仿真
5. 刘 玥: 20354229, 负责仿真

三、实验任务

- 1、基于 LQR 方法, 设计二级倒立摆系统控制器;
- 2、二级倒立摆系统 LQR 方法的仿真实现。

四、实验设备

1. 二级倒立摆本体、倒立摆电控箱、PC 机 (Matlab 平台、运动控制卡)

五、实验原理

1、系统数学描述的两种基本类型

1) 输入—输出描述 (外部描述)

输入—输出描述是描述系统输入—输出变量关系的模型, 如传递函数。

2) 状态空间描述 (内部描述)

状态空间描述通过建立系统内部状态和系统的输入以及输出之间的数学关系, 来描述系统的行为。

2、线性系统的状态空间描述

1) 根据系统机理建立状态空间表达式:

属于分析的途径, 适用于结构和参数为已知的系统。直接根据系统的机理建立相应的微分方程或差分方程, 继而选择有关的物理量作为状态变量, 从而导出其状态空间表达式。

1) 由系统其它数学模型建立状态空间表达式:

属于辨识的途径, 适用于结构和参数难以搞清楚的系统。通过实验手段取得数据并采用适当的方法确定系统的输入输出模型(属于系统辨识和参数估计的范畴), 再由所得的系统输入输出描述导出相应的状态空间描述。

根据系统机理建立状态空间表达式的基本步骤是:

- 1) 根据系统所遵循的物理规律, 建立系统的微分方程或差分方程;
- 2) 选取有关物理量(变量)作为状态变量, 推导出系统的状态方程和输出方程。

3、线性定常系统的表达式

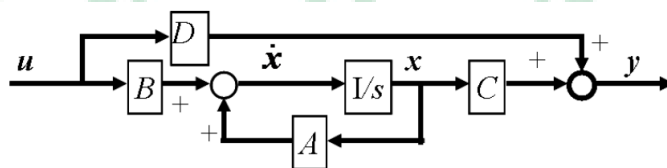
线性定常连续系统状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (\text{简记为 } (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}))$$

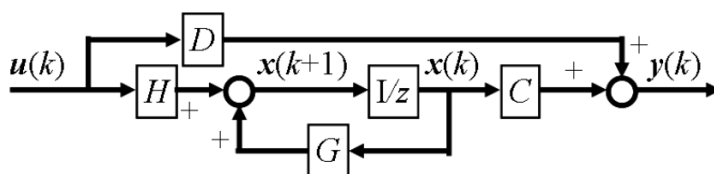
线性定常离散系统状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (\text{简记为 } (\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{D}))$$

线性系统状态空间表达式的模拟结构图



线性连续时间系统结构图



线性离散时间系统结构图

D 描述了输入 u 不经状态变量 x 对输出 y 的直接影响, 它不影响系统的动态过程, 实质上是系统外部模型的一部分。因此, 当利用状态模型来分析系统动态行为时, 常假设 $D=0$, 并不失对问题讨论的一般性。

所以通常采用的线性系统状态空间表达式为:

连续时不变系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{简记为 } (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}))$$

离散时不变系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (\text{简记为 } (G, H, C, D))$$

4、连续变量动态系统的线性化

严格说，大多物理系统都是非线性的，很难求解，如不用数值解，一般无法解。

$$\text{向量函数 } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}$$

所以，在足够的精度下，用线性系统来近似，为此，设 $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0$ 是非线性方程的一组解，即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \end{aligned}$$

用泰勒级数展开得:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta \mathbf{u} + \alpha(\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{u}) \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= g(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta \mathbf{u} + \beta(\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{u}) \end{aligned}$$

式中 α, β 是关于 $\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{u}$ 的高次项，可以忽略。又因为，

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - g(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta \mathbf{u}$$

引入如下符号:

$$\hat{\mathbf{x}} \triangleq \delta \mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}} \triangleq \delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{y}} \triangleq \delta \mathbf{y}$$

$$A \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, B \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, C \triangleq \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, D \triangleq \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}$$

$$A = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right)_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}$$

$$B = \left(\frac{\partial f}{\partial u^T} \right)_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$$C = \left(\frac{\partial g}{\partial x^T} \right)_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$$D = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

线性化后的状态空间表达式为：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B\hat{u} \\ \hat{y} &= C\hat{x} + D\hat{u} \end{aligned}$$

5、LQR(linear quadratic regulator): 线性二次型控制器
给定系统：

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

设计控制器

$$u(t) = -Kx(t)$$

使得系统渐近稳定，同时最小化性能指标：

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

其中， Q 为半正定对称矩阵， R 为正定对称矩阵

把 $u(t) = -Kx(t)$ 代入到系统 $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$
则闭环控制系统为：

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

闭环控制系统性能指标：

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[x^T Q x + u^T R u + \frac{d}{dt} V(x) \right] dt - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} V(x) dt \\ &= \int_0^{\infty} \{ x^T Q x + u^T R u + x^T [P(A - BK) + (A - BK)^T P] x \} dt - V[x(t)]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \int_0^{\infty} x^T [Q + K^T R K + PA + A^T P - PBK - K^T B^T P] x dt + x_0^T P x_0 \end{aligned}$$

$V(x) = x^T P x$: Lyapunov 函数, P 正定对称矩阵

用配方法可得：

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} x^T [PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q] x dt \\ &\quad + x_0^T P x_0 + \int_{-\infty}^{\infty} x^T (K - R^{-1}B^T P)^T R (K - R^{-1}B^T P) x dt \end{aligned}$$

要使得性能指标最小：

$$\begin{aligned} K &= R^{-1}B^T P \\ PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q &= 0 \quad \text{Riccati 方程} \end{aligned}$$

最优性能指标为：

$$J = x^T(0) P x(0)$$

LQR 方法设计步骤：

1) 给定 Q 、 R 矩阵，利用 Riccati 方程：

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

求解出矩阵 P 。

2) 利用 $K = R^{-1}B^T P$ 求出反馈增益 K ，从而得到控制器：

$$u(t) = -Kx(t)$$

六、实验步骤与结果

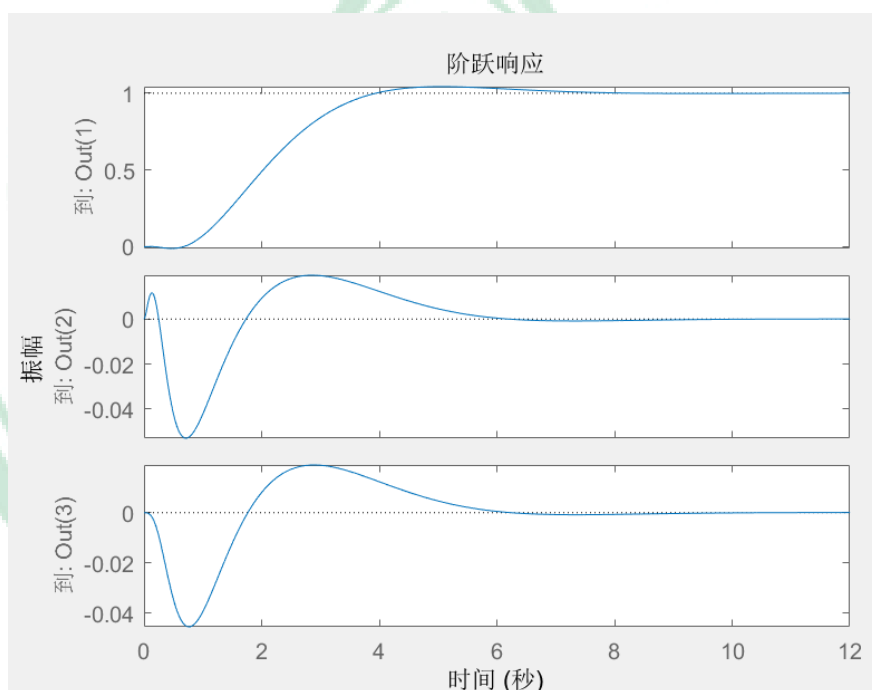
1、在 Matlab 中新建一个 .m 文件，输入如下代码，保存后运行。

```

1. A=[0,0,0,1,0,0;0,0,0,0,1,0;0,0,0,0,0,1;0,0,0,0,0,0;0,89.69,-
    21.62,0,0,0;0,-40.31,39.45,0,0,0];
2. B=[0;0;0;1;6.64;-0.088];
3. C=[1,0,0,0,0,0;0,1,0,0,0,0;0,0,1,0,0,0];
4. D=[0;0;0];
5. %选取 Q 矩阵
6. Q=zeros(6,6);
7. Q(1,1)=1;
8. Q(2,2)=1;
9. Q(3,3)=1;
10. R=1; %选取 R 矩阵
11. [K,P,Eigvalues_of_new_state_matrix]=lqr(A,B,Q,R) %确定控制矩阵 K
12. A_new=A-B*K;
13. sys_new=ss(A_new,B,C,D);
14. step(sys_new);

```

输出结果如下：



系统: sys_new

I/O: In(1) 到 Out(1)

上升时间(seconds): 2.17

系统: sys_new
I/O: In(1) 到 Out(1)
峰值振幅: 1.04
超调(%): 4.28
时间(seconds): 5.06

从结果可得 $K = [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6] = 17.3205, 112.3115, -200.7915, 18.2426, 2.7711, -32.6419$

系统的上升时间为 2.17s, 峰值时间为 5.06s。

2、保持 R 值不变, 更改 Q 中元素的值:

$Q(1, 1) = 300;$

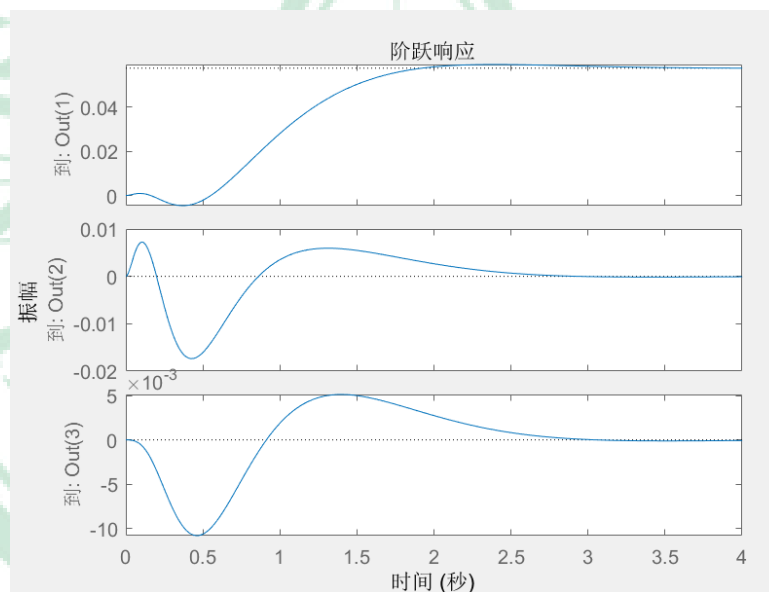
$Q(2, 2) = 500;$

$Q(3, 3) = 500;$

重新运行程序, 可得此时矩阵 K 的值为:

$K = [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6] =$

$17.3205, 112.3115, -200.7915, 18.2426, 2.7711, -32.6419$



系统: sys_new
I/O: In(1) 到 Out(1)
上升时间(seconds): 0.903

系统: sys_new
I/O: In(1) 到 Out(1)
峰值振幅: 0.0594
超调(%): 2.87
时间(seconds): 2.39

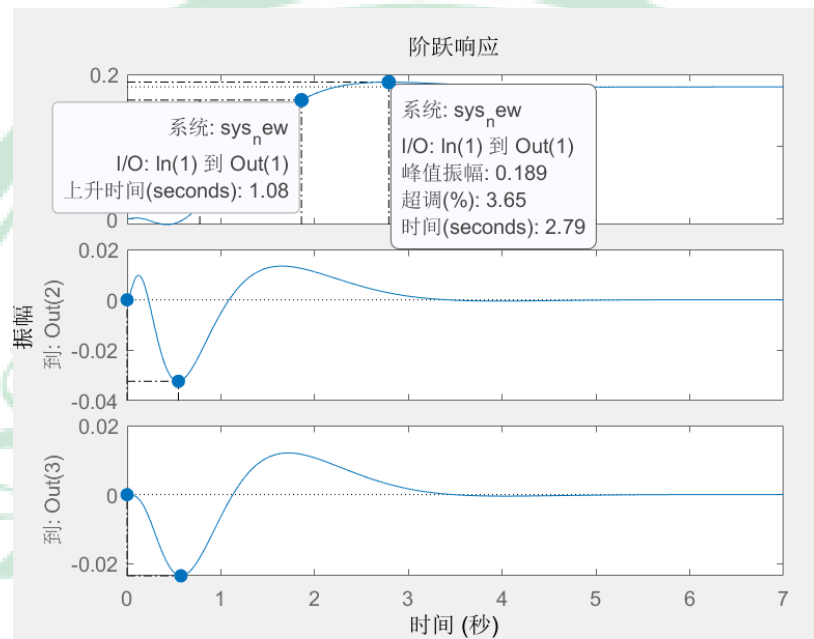
此时系统的上升时间为 0.903s, 峰值时间为 2.39s。

相比起第一组数据，系统的响应时间缩短。

3、同时更改矩阵 Q 和 R 的值（至少 6 组数据），观察对结果有何影响？

- ① $Q(1,1)=30$;
 $Q(2,2)=50$;
 $Q(3,3)=50$;
 $R=1$;

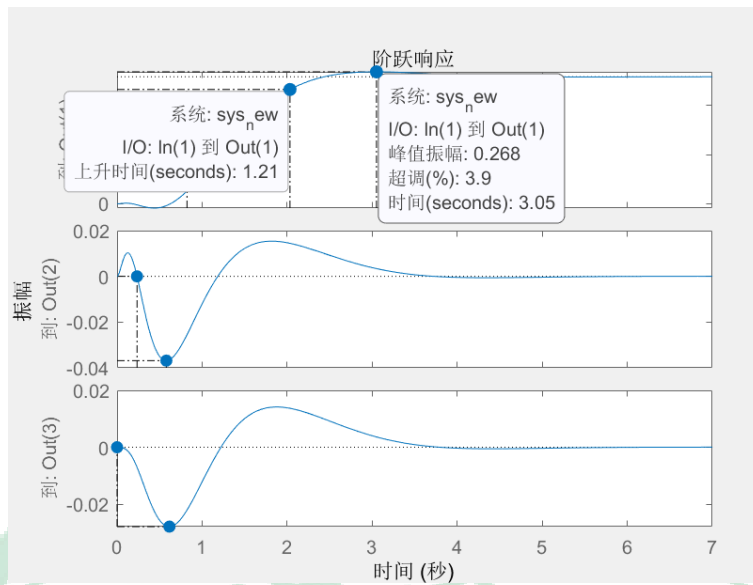
由结果可得此时 $K = 5.4772, 86.9801, -120.5372, 6.8309, 3.9061, -19.1943$



由结果可得此时 $K = 5.4772, 86.9801, -120.5372, 6.8309, 3.9061, -19.1943$
此时系统的上升时间为 0.903s，峰值时间为 2.39s，稳定时间为 3.46s，稳态值为 0.183。

- ② $Q(1,1)=30$;
 $Q(2,2)=50$;
 $Q(3,3)=50$;
 $R=2$;

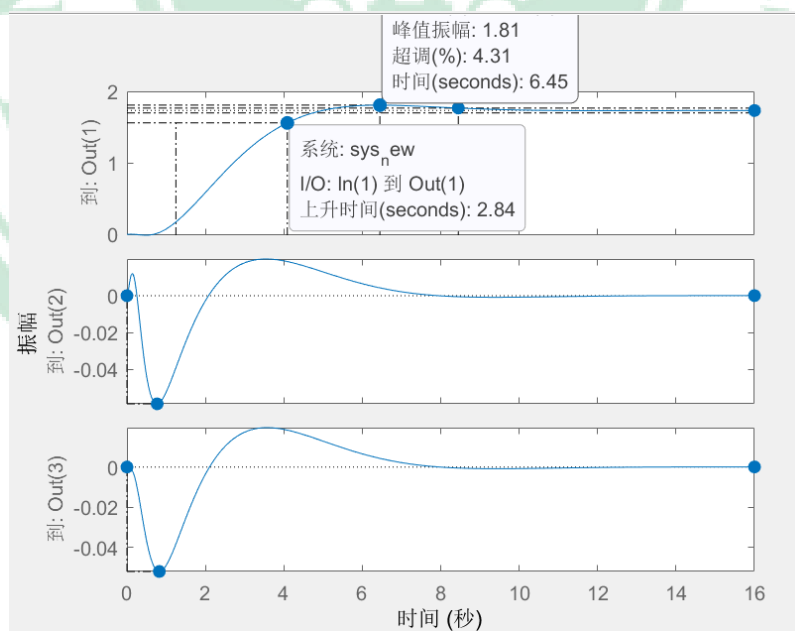
由结果可得此时 $K = 3.8730, 83.2461, -109.1017, 5.2141, 4.0540, -17.2685$



此时系统的上升时间为 1.21s，峰值时间为 3.05s，稳定时间为 3.84s，稳态值为 0.258。

- ③ $Q(1,1)=1;$
 $Q(2,2)=1;$
 $Q(3,3)=1;$
 $R=3;$

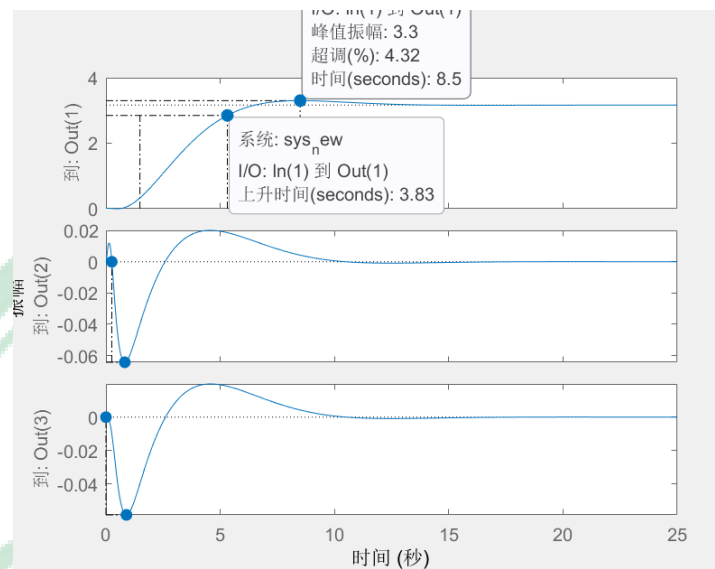
由结果可得此时 $K = 0.5774, 73.8956, -81.5535, 1.4167, 4.3745, -12.6104$



此时系统的上升时间为 2.84s，峰值时间为 6.45s，稳定时间为 8.45s，稳态值为 1.73。

- ④ $Q(1,1)=1;$
 $Q(2,2)=1;$
 $Q(3,3)=1;$
 $R=10;$

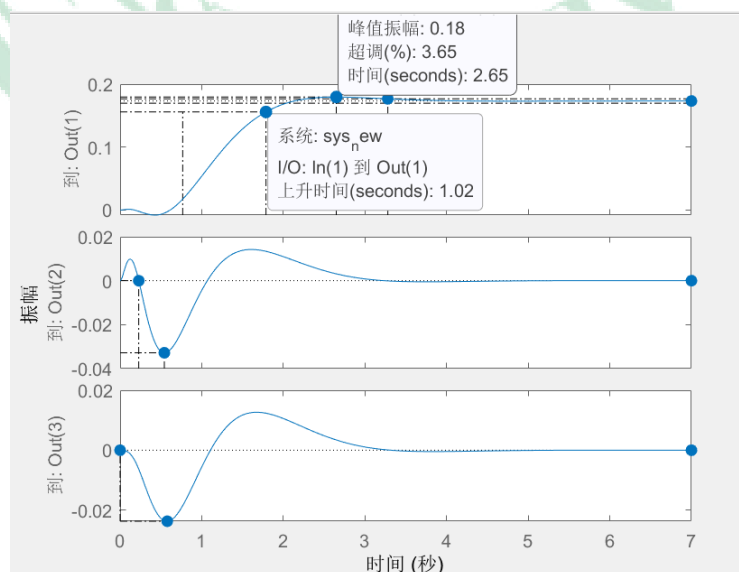
由结果可得此时 $K = 0.3162, 72.6343, -78.1086, 0.9823, 4.4048, -12.0270$



此时系统的上升时间为 3.83s, 峰值时间为 8.5s, 稳定时间为 11.2s, 稳态值为 3.16。

- ⑤ $Q(1,1)=100;$
 $Q(2,2)=100;$
 $Q(3,3)=100;$
 $R=3;$

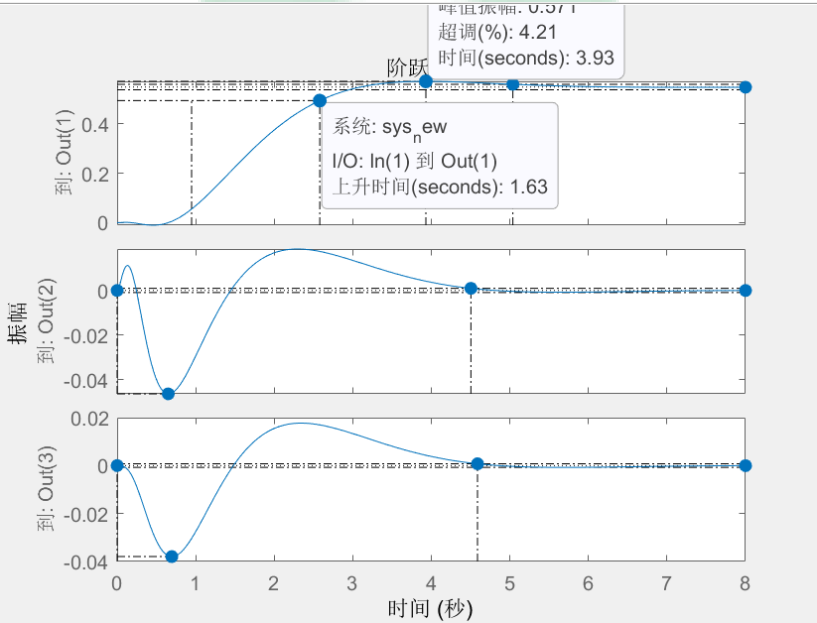
由结果可得此时 $K = 5.7735, 86.3077, -119.7805, 7.0066, 3.8624, -19.0953$



此时系统的上升时间为 1.02s，峰值时间为 2.65s，稳定时间为 3.28s, 稳态值为 0.173。

- ⑥ Q(1,1)=100;
Q(2,2)=100;
Q(3,3)=100;
R=30;

由结果可得此时 K = 1.8257, 77.8550, -93.0854, 3.0065, 4.2434, -14.5674



此时系统的上升时间为 1.63s，峰值时间为 3.93s，稳定时间为 5.04s, 稳态值为 0.584。

参数	上升时间	峰值时间	稳定时间	稳态值
Q(1,1)=30; Q(2,2)=50; Q(3,3)=50; R=1;	0.903s	2.39s	3.46s	0.183
Q(1,1)=30; Q(2,2)=50; Q(3,3)=50; R=2;	1.21s	3.05s	3.84s	0.258
Q(1,1)=1; Q(2,2)=1; Q(3,3)=1; R=3;	2.84s	6.45s	8.45s	1.73
Q(1,1)=1; Q(2,2)=1;	3.83s	8.5s	11.2s	3.16

Q(3, 3)=1; R=10;				
Q(1, 1)=100; Q(2, 2)=100; Q(3, 3)=100; R=3;	1. 02s	2. 65s	3. 28s	0. 173
Q(1, 1)=100; Q(2, 2)=100; Q(3, 3)=100; R=30;	1. 63s	3. 93s	5. 04s	0. 584

通过结果可以看出：

Q 为性能指标函数对于状态量的权阵，为对角阵，元素越大，意味着该变量在性能函数中越重要。要求性能函数求最小，也就是说该状态的约束要求高。

R 阵为控制量的权重，对角阵，同样，对应的元素越大，这意味着，控制约束越大。在上述六组实验中，相同 Q 的情况下，R 越大，响应时间越长，稳态值越大。

加权矩阵 Q 和 R 的选取是在立足提高控制性能与降低控制能量消耗的平衡上考虑的。通常将加权阵 Q 和 R 选为对角阵。这样可以看出 q_i 是对状态 X 平方的加权， q_i 相对增大就意味着对 X 的要求较严；R 是对控制量 u 的平方的加权，当 R 相对较大，意味着控制费用增高，使得控制能量较小，反馈减弱，当 R 相对很小时，控制费用较低，反馈增强，系统动态响应迅速。

对于二级倒立摆系统，二次型性能指标应能使其在调节过程中不偏离倒立摆的控制区域且尽可能在系统的线性范围内。

在选取 Q 和 R 时，主要从以下几方面考虑：

- (1) Q 是正定或半正定矩阵，R 是正定矩阵。
- (2) Q 阵中对角线上的元素与状态变量一一对应，数值越大，则表示该状态变量对系统的影响越显著。
- (3) 加权矩阵 R 不要过小，否则会导致控制量的增大。控制量太大会超过系统执行机构的能力，R 阵也不要太大，否则控制作用太小会影响控制性能。

七、实验心得与体会

在利用 LQR 方法设计控制器时，一个最关键的问题是二次型性能指标的选取。确定加权阵 Q, R 是一项重要且困难的工作。

对于二级倒立摆系统，二次型性能指标应能使二级倒立摆在调节过程中不偏离倒立摆控制区域且尽可能在系统的线性范围内，这样在考虑倒立摆系统各个状态时，下摆和上摆偏角差 $\theta_2 - \theta_1$ 应比下摆的偏角 θ_1 重要，下摆的偏角 θ_1 比小车的位移 r 重要。由于模型中微分存在，容易在系统中引入高频噪声，所以应该使微分项的加权系数尽量小，因此要在性能指标上反映这些要求，

则应该使得 x^2_3 加权最大, x^2_2 加权次之, x^2_1 加权最小。

直线二级倒立摆系统是一个比较复杂的系统, 它的非线性因素很多, 如各运动之间的干摩擦, 电机的饱和特性, 模型简化时忽略的高次项以及其他随机干扰。由于这些非线性因素的影响, 使得以线性模型为基础的仿真与实际动态响应有较大差别, 甚至使系统不能稳定。因而, 利用二次型最优控制使系统稳定的关键是寻找一个使系统稳定的加权矩阵 Q 和 R 。

由于系统的非线性是固有的, 片面追求系统的线性行为是不合理的。采用线性模型设计的控制器能够克服系统非线性来适应对应参数变化, 具有一定的鲁棒性。

选取 Q 和 R 时主要考虑了以下几个方面:

- (1) 由于采用的模型是经线性化后的模型, 为使我们的设计模型能有效地工作, 应使各状态尽量工作在系统的线性范围内。
- (2) 闭环系统的主导极点最好能有一对共轭复数极点, 这样有利于克服系统的摩擦非线性, 但系统主导极点的模不应过大, 以免系统的频带过宽, 使得系统对噪声过于敏感, 以至于不能正常工作。
- (3) 加权矩阵 R 的减小, 会导致大的控制量, 应注意控制 u 的大小, 不要超过系统执行机构的能力, 使得放大器处于饱和状态。

综合上述的最优控制理论和加权矩阵选取原则, 确定加权矩阵;再由此得出反馈增益矩阵 K , 作为闭环系统的反馈。得到多级倒立摆这类非线性复杂系统的最优控制方法:

- (1) 将非线性系统在某一点进行线性化, 得到系统的线性模型。
- (2) 根据经验对加权矩阵 Q 进行选取。
- (3) 由加权矩阵求反馈增益矩阵 K 。

经过以上三步可以将一个非线性不稳定系统变成稳定的闭环系统。