20354027 言桂多

1. 加法公式：对∀事件A,B有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

若A,B两两不相容，则有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

推广：对∀A,B,C，$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

若互不相容，则 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

2. 减法公式：对∀A,B，有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

若 $B\subset A$，则有 $P(B)\le P(A)$，且 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

3. 对立事件的概率：$P(\bar{A})=1-P(A)$

4. 分配律：$P\{(A\cup B)\cap C\}=P\{AC\cup BC\}$

$P\{(AB)\cup C\}=P\{(A\cup C)\cap(B\cup C)\}$

5. 对偶律：$P\{\overline{A\cup B}\}=P\{\bar{A}\cap\bar{B}\}$　$P\{\overline{A\cap B}\}=P\{\bar{A}\cup\bar{B}\}$　(德摩根)

6. 条件概率：事件A发生的条件下，B发生的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

7. 乘法公式：若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$

8. 性质：$P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)=1-\frac{P(AB)}{P(A)}$

$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$

9. 古典概型：$P(A)=\frac{A中所含样本点数k}{\Omega中所有样本点数n}=\frac{k}{n}$ (有限点，每个可能性相等)

10. 超几何分布：N中有M件次品，取n件其中有m件次品(不放回)概率：$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

11. 全概率公式：$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$

12. 贝叶斯公式：$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$

13. A与B独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)\quad (P(A)>0)$

$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\bar{A})\quad (0<P(A)<1)$

且 A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$也相互独立

14. 若A，B，C相互独立，

则 $P(AB)=P(A)P(B)\quad P(AC)=P(A)P(C)\quad P(BC)=P(B)P(C)$

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

考点 离散型随机变量分布律与分布函数互求（填空题、选择题）

名称	定义	性质
分布律	$P(X=x_k)=p_k\quad(k=1,2,\cdots)$	① $p_k\geq 0,\ k=1,2,\cdots$ ② $\sum p_k=1$
分布函数	$F(x)=P(X\leq x)=\sum\limits_{x_k\leq x}p_k$	① $0\leq F(x)\leq 1$ ② $F(x)$单调不减 ③ $F(x)$右连续
概率	$P(X\leq a)=F(a)$	① $P(X>a)=1-F(a)$ ② $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$

考点 二项分布和泊松分布（填空题、选择题）

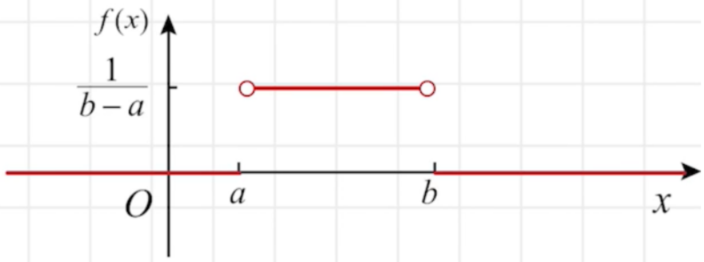
名称	符号	分布律	含义
二项分布	$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$， $(q=1-p,k=0,1,2,\cdots)$	n 重伯努利试验中 A 发生的次数 $X\sim B(n,p)$，其中 p 表示每次试验中 A 发生的概率。
泊松分布	π（λ） $P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$， $(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)$	若 $X\sim B(n,p)$，当 n 较大，p 较小时，X 近似服从 $P(np)$.

考点 关于连续型随机变量概率的计算（填空题、大题）

名称	定义	性质
分布函数	$F(x)=P(X\le x)$ $=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$	① $0\le F(x)\le 1$ ② $F(x)$单调不减 ③ $F(x)$右连续
概率密度	$f(x),-\infty<x<+\infty$	① $f(x)\ge 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ ③若$f(x)$连续，则$F'(x)=f(x)$
概率	$P(X\le a)=F(a)$	① $P(X=a)=0$ ② $P(X>a)=P(X\ge a)=1-F(a)$ ③ $P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$ $=P(a<X<b)=F(b)-F(a)$

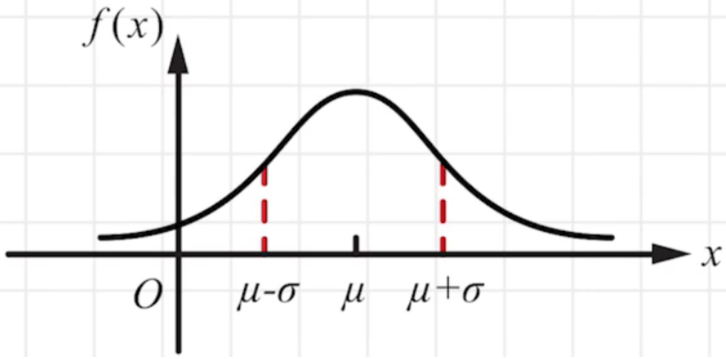
均匀分布$U(a,b)$的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$$



① 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的概率密度函数为：

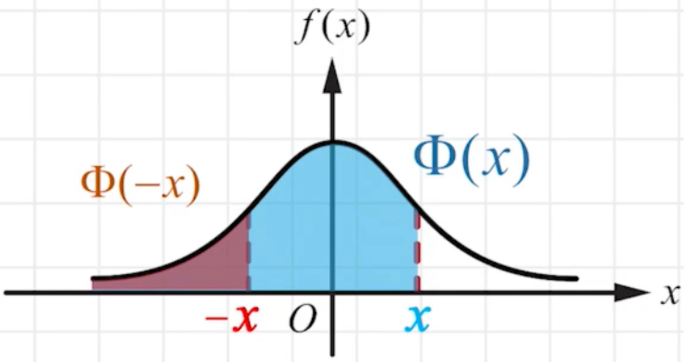
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$



② 当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，称作标准正态分布，记作 $N(0,1)$，

其分布函数为 $\Phi(x)=P(X\le x)$.

显然，$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$.



③ 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

其分布函数可表示为：

$$F(x)=P(X\le x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

考点 离散型随机变量函数的分布（填空题）

设 X 为一维离散型随机变量，其分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

那么函数 $Y=g(X)$ 的分布律就是

$g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

考点 连续型随机变量函数的分布（填空题、与考点八结合的大题）

已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，

则 $Y=g(X)$ 的概率密度的求解步骤为：（分布函数法）

1. 求出 Y 的分布函数，并利用关系 $Y=g(X)$，将 Y 的范围转化为 X 的范围，最终利用 X 的分布得到 Y 的分布：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\in G_y)=\int_{G_y} f_X(x)dx$$

2. 求导得到 $f_Y(y)=F_Y'(y)$.

（二）指数分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 θ 的**指数分布**.

由(4.7)式容易得到随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases} \tag{4.8}$$

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}.$$

事实上

$$\begin{aligned}P\{X>s+t\mid X>s\}&=\frac{P\{(X>s+t)\cap(X>s)\}}{P\{X>s\}}\\&=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}\\&=\frac{e^{-(s+t)/\theta}}{e^{-s/\theta}}=e^{-t/\theta}\\&=P\{X>t\}.\end{aligned}$$

性质：无记忆性

定理 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，$-\infty<x<\infty$，又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$（或恒有 $g'(x)<0$），则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta,\\ 0, & 其他,\end{cases} \tag{5.2}$$

其中 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(\infty)\}$，$\beta=\max\{g(-\infty),g(\infty)\}$，$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.