20354027 方捷安

1. $dy = f'(x)dx \Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$$\begin{tikzcd}
\text{函数连续} & \text{可微} \arrow[l] \arrow[d] & \text{偏导数连续} \arrow[l] \arrow[dl] \\
& \text{偏导数存在} &
\end{tikzcd}$$

2. 如果当 $f(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时函数趋于不同的值，则极限不存在

3. $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续

若函数在 D 内每一点都连续，则 $f(x,y)$ 在 D 内连续

多元初等函数在其定义域内是连续函数

4. 在有界闭区域上的二元连续函数，在该区域上至少取得最大值和最小值各一次

介值定理　函数在 D 上必取得介于之间的任何值

5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导数，当它们在 D 内连续时，

则：$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. 全微分：$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$　（形式不变性）

7. 复合函数偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

8. 隐函数求导法则：① $\frac{dy}{dx} = \cancel{-\frac{F'_x(x,y)}{\quad}} - \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

② $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$

9. 曲面方程：$F(x,y,z)=0$，点 $M(x_0,y_0,z_0)$

则曲面在 M 点的法向量：$\vec{n}=\{F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\}$

切平面：$F'_x(M)(x-x_0)+F'_y(M)(y-y_0)+F'_z(M)(z-z_0)=0$

法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(M)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(M)}$

曲面方程：$z=f(x,y)$，点 $M(x_0,y_0,z_0)$

则 ~ 法向量：$\vec{n}=\{f'_x(M_0), f'_y(M), -1\}$

切平面：$f'_x(M)(x-x_0)+f'_y(M)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线方程：$\dfrac{x-x_0}{f'_x(M)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(M)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

10. 空间曲线 $M(x_0,y_0,z_0)$.

a. $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ M 对应 $t=t_0$，切向量 $\vec{T}=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$

b. $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ M 对应 $x=x_0$，切向量 $\vec{T}=\{1, y'(x_0), z'(x_0)\}$

c. $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ $\vec{T}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{M_0}$

切线：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

法平面 $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

11. 过 $P(x,y)$ 引射线 l，在 l 上取 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$$\lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|PP'|}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial z}{\partial l}$$ （方向导数）

当 $z=f(x,y)$ 在 P 处可微，l 方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 时，

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

同理：$u=f(x,y,z)$：$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma$

梯度：grad / ∇ $z=f(x,y)$ $\text{grad}\,z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$；

同理：$u=f(x,y,z)$ $\text{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial l}=\text{grad}\,z\cdot l^0$ l^0 是 l 上的单位向量

函数沿梯度向量的方向增加最快，变化率的最大值是梯度的模。

12. 梯度和散度计算公式：

$$\text{div}(\text{grad}\,r)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

13. 极值：① 解 $\begin{cases}f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases}$，求出所有驻点

② 对每一个驻点 (x_0,y_0) 求出二阶偏导数

$f''_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f''_{xy}(x_0,y_0)=B$ 和 $f''_{yy}(x_0,y_0)=C$

③ a. $AC-B^2>0$ 且 $A<0$，有极大值

b. $AC-B^2>0$ 且 $A>0$，有极小值

c. $AC-B^2<0$ 无极值

d. $AC-B^2=0$ 时此判别法失效，无法判断

14. 拉格朗日乘数法：目标函数 $f(x,y)$，附加条件归纳成 $\varphi(x,y)=0$

∴ 拉格朗日函数：$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$　λ：拉格朗日乘子

解：$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \\ y \\ \varphi \end{cases}$ 为 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 的可能极值点

☆ 另外一种方程写法 $\begin{cases} \nabla f=\lambda\cdot\nabla\varphi \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$

若二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必能取得 max/min

15. $$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_c^d dy\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx=\int_c^d\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

16. $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某一邻域连续且有直到 $(n+1)$ 阶连续偏导数

设 $(x=x_0+h,\ y=y_0+k)$ 为此邻域内任意一点，n 阶泰勒公式：

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+y_0)+R_n$$

拉格朗日形式的余项：$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),\ 0<\theta<1$

当 $n=0$ 时，拉格朗日中值定理：

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf'_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

当 $n=1$ 时，

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf'_x(x_0,y_0)+kf'_y(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\{h^2f''_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+2hkf''_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+k^2f''_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\},\ 0<\theta<1$$

17. 二重积分的性质

① $\iint\limits_D kf(x,y)\,d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，k为常数

② $\iint\limits_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\,d\sigma = \iint\limits_D f_1(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_D f_2(x,y)\,d\sigma$

③ 若有界闭区域D可分割为D_1与D_2（二重积分对于积分区域具有可加性）

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,d\sigma$$

④ 在D上，若$f(x,y) \le \varphi(x,y)$ 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \le \iint\limits_D \varphi(x,y)\,d\sigma$（保号性）

⑤ 估值定理：$f(x,y)$在D上最大值为M，最小值为m，σ是D的面积

$\therefore m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \le M\sigma$

⑥ 中值定理：$f(x,y)$在有界闭D上连续，则D上至少存在一点(ξ,η)

使 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$

18. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$（通常先$\rho$后$\theta$积分）☆

D为圆域、圆环、圆扇形或其中一部分，函数含$f(x^2+y^2)$或$f(\frac{y}{x})$用极坐标较简单

19. 对称：

D₁是D的一半区域

a. D关于x轴对称，$f(x,y)$关于y的奇函数 奇 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 0$ 偶 $2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

b. ~ y ~ x 奇 ~ $=0$ 偶 2 ~

c. x和y $\begin{cases} f(-x,y) = -f(x,y) \text{ 或 } f(x,-y) = -f(x,y) & \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 0 \\ f(-x,y) = f(x,-y) = f(x,y) & \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma \end{cases}$

d. 原点 $f(-x,-y) = -f(x,y)$ ~ $=0$ $f(-x,-y) = f(x,y)$ 2~ = ~

e. $y=x$ $f(x,y) = -f(y,x)$ ~ $=0$ $f(x,y) = f(y,x)$ 2~ = ~

20. ☆ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\right)$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为正奇数} \end{cases}$$

☆当$n=1$时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1$

21. $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

22. 柱面坐标 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ 球面坐标 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$\therefore \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$

$= \iiint\limits_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

23. 曲面S由方程$z=f(x,y)$给出

$\therefore S = \iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

用ρ表示密度函数：

	平面体	空间立体
质量M	$M=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$	$M=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)dv$
质心坐标	$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}$ $\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}$	$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)dv}{M}$ $\bar{y}=\frac{\iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)dv}{M}$ $\bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)dv}{M}$
转动惯量（关于坐标轴）	$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)d\sigma$ $I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)d\sigma$	$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$ $I_y=\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$ $I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv$

(1)占有平面区域D且质量密度为$\mu(x,y)$的平面薄片质量$M=\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma$，它对$x$轴、$y$轴的静力矩为

$$M_x=\iint\limits_D y\mu(x,y)d\sigma,\qquad M_y=\iint\limits_D x\mu(x,y)d\sigma.$$

D的重心坐标为 $\bar{x}=\frac{M_y}{M}$，$\bar{y}=\frac{M_x}{M}$.

(2)占有空间区域Ω且质量密度为$\mu(x,y,z)$的空间物体的重心坐标为：

$$\begin{cases} \bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega x\mu(x,y,z)dxdydz \\ \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega y\mu(x,y,z)dxdydz \\ \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega z\mu(x,y,z)dxdydz \end{cases}$$

其中M为Ω的质量 $M=\iiint\limits_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz$.

24. 第一类曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ （对弧长的曲线积分）

① $\int_L f(x,y)\,ds = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

② $\int_L f(x,y)\,ds = \int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy$

③ $\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$ 　　三元同理

第一类曲线积分对称性与二重积分相同，性质也类似

25. 第二类曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ （对坐标的曲线积分）

① $\sim = \int_a^b \{[P(x,y(x))]+[Q(x,y(x))]y'(x)\}dx$

② $\sim = \int_c^d \{[P(x(y),y)]x'(y)+[Q(x(y),y)]\}dy$

③ $\sim = \int_\alpha^\beta \{[P(x(t),y(t))]x'(t)+[Q(x(t),y(t))]y'(t)\}dt$ 　　三元同理

☆ 积分下限不一定小于积分上限（做功）☆ 有方向！

26. 格林公式：设闭区域D由分段光滑曲线L围成，若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在D上有一阶连续偏导

$\therefore \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx+Qdy$

L是D的取正向的边界曲线

① L是负向的，则 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = -\oint_L Pdx+Qdy$

② L不封闭，则添加相应曲线使其封闭

③ P或Q在D内不具有一阶连续偏导数，则"挖洞"将不存在或不连续点去掉

27. 两类曲线积分的关系：

设平面上有向曲线L上任一点 $M(x,y)$ 与L方向一致的切线方向余弦为

$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$，$\cos\beta = \frac{dy}{ds}$

则 $\int_L Pdx+Qdy = \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$

28. 设 $P(x,y)$ $Q(x,y)$ 在平面单连通区域D内具有连续一阶偏导数，则以下四个条件是等价 (平面上曲线积分与路径无关的条件)

① 曲线 $L(\overset{\frown}{AB})$ 是D内由A到B的一段有向曲线，
则 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关，只与起点A和终点B有关

② 在D内沿任意一条闭曲线L有：$\oint_L Pdx+Qdy=0$

③ 在D内的任意一点 (x,y) 处有：$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

④ 在D内有在函数 $u(x,y)$ 使 $Pdx+Qdy$ 是其全微分，即 $du=Pdx+Qdy$

29. 由28④可得：$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+C$
其中 (x_0,y_0) 是D内某一定点，(x,y) 是D内任一点

30. 区域D的面积 $S=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

31. 第一类曲面积分：(对面积的曲面积分)

① $z=z(x,y)$ Σ在xoy平面上的投影为 D_{xoy}

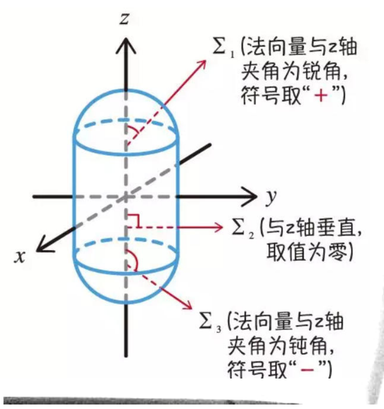
$\therefore \iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xoy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

② $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{yoz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz$

③ $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xoz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz$

32. 第二类曲面积分：(对坐标的曲面积分)

曲面积分	曲面方程	一投	二代	三符号	化成二重积分
$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$	$z=z(x,y)$	D_{xoy}	$R(x,y,z(x,y))$	$\pm dxdy$	$\pm\iint_{D_{xoy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$
$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz$	$x=x(y,z)$	D_{yoz}	$P(x(x,y),y,z)$	$\pm dydz$	$\pm\iint_{D_{yoz}} P(x(y,z),y,z)dydz$
$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dxdz$	$y=y(x,z)$	D_{xoz}	$Q(x,y(x,y),z)$	$\pm dxdz$	$\pm\iint_{D_{xoz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz$



注：在计算中要注意以下几点：

1. $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} \sim + \iint\limits_{\Sigma_2} \sim$ ；

2. $\iint\limits_{\Sigma^-} P(x,y,z) dydz = -\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z) dydz$ ，这里 Σ^- 是与 Σ 取相反侧的有向曲面；

3. 当 Σ 为母线平行于 z 轴的柱面时：

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z) dxdy = 0.$$

区别

	第一类(对面积)	第二类(对坐标)
	$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z) dS$	$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z) dydz + Q(x,y,z) dxdz + R(x,y,z) dxdy$
积分区域	曲面 Σ	有向曲面 Σ
被积函数	定义在 Σ 上	
积分变量	dS 面积	$dydz$; $dxdz$; $dxdy$ 坐标
计算方法	一投二代三变量	一投二代三符号

Σ在xoy上的投影

换 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

$z=z(x,y)$代入被积函数

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z) dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

三符号　一投　二代

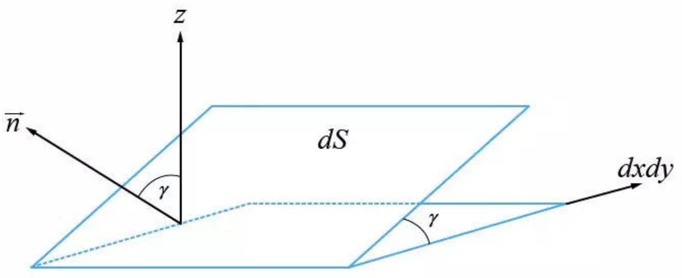
$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z) dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y)) dxdy$$

联系

$$dydz = \cos\alpha\, dS$$

$$dxdz = \cos\beta\, dS$$

$$dxdy = \cos\gamma\, dS$$



$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$

4. 两类曲面积分之间的关系

设曲面 Σ 上任一点 (x,y,z) 处法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 则有

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$

高斯公式

空间有界闭区域Ω，其表面外侧曲面为Σ，若$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy$$

或

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

这里$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是Σ上点(x,y,z)处的法向量的方向余弦。

高斯公式表达了空间闭区域Ω上的三重积分计算，可以转化为Ω边界曲面Σ上的曲面积分计算。

高斯公式的使用

与格林公式类似，对于高斯公式的使用，也有以下几点需要注意的地方：

1. Σ为封闭曲面，如果不封闭，则添加相应辅助曲面使其封闭再计算；
2. 如果是内侧，需要加负号；
3. 函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数。（否则也要"挖洞"将不存在或不连续点去掉再计

2. 通量与散度

设向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中 P,Q,R 具有连续的一阶偏导数，Σ 是场内的一个有向曲面，则称

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

为向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 Σ 的通量（或流量）.

$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度，记作 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

有了散度的概念，高斯公式可写成

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的边界曲面的外侧.

1. 斯托克斯（Stokes）公式

设函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在包含曲面 S 的空间域 Ω 内具有连续的一阶偏导数，L 是曲面 Σ 的边界曲线，则

$$\oint_{L}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

其中 L 的正向与 Σ 所取的正侧符合右手法则，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲面 S 的正侧上任一点(x,y,z)处法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

2. 环流量与旋度

设向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

L 是场内的一条有向闭曲线，则称

$$\Gamma=\oint_{L}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_{L}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

为向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿曲线 L 的环流量，并称向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

为向量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记作 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$，即

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

有了旋度的概念，斯托克斯公式可写成

$$\oint_{L}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

其中 $d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$，

$d\boldsymbol{S}=dy\,dz\boldsymbol{i}+dz\,dx\boldsymbol{j}+dx\,dy\boldsymbol{k}$.