



院(系): 智能工程学院

组号: 第一组

组长: 方桂安

日期: 2022. 12. 02

实验名称: 一级倒立摆系统建模及稳定性分析、  
基于 Matlab 的一级倒立摆根轨迹校正、PID 校正

## 一、实验目的

1. 了解一级倒立摆工作原理;
2. 建立一级倒立摆数学模型;
3. 掌握一级倒立摆的基本分析方法, 并在 Matlab 中仿真验证

## 二、小组成员

1. 方桂安: 20354027, 负责仿真
2. 刘梦莎: 20354091, 负责仿真
3. 陈石翰: 20354019, 负责仿真
4. 刘恩骐: 20354086, 负责仿真
5. 刘 玥: 20354229, 负责仿真及报告撰写

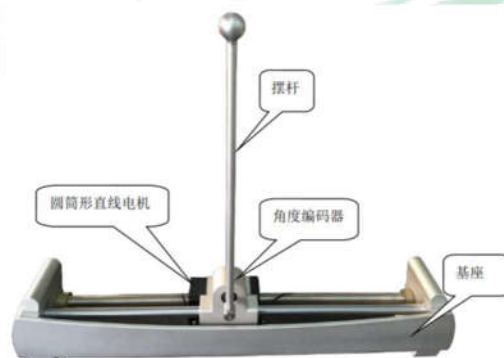
## 三、实验任务

1. 一级倒立摆系统稳定性分析;
2. 设计根轨迹校正环节使系统性能指标达到  $t_s \leq 1$  秒,  $\sigma \leq 10\%$ ;
3. 设计 PID 校正环节使系统性能指标达到  $t_s \leq 1$  秒,  $\sigma \leq 10\%$ 。

## 四、实验设备

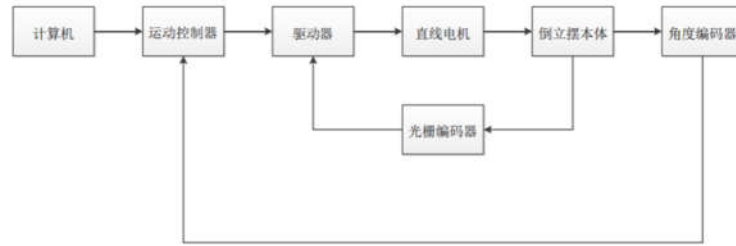
一级倒立摆本体、倒立摆电控箱、PC 机

## 五、实验原理

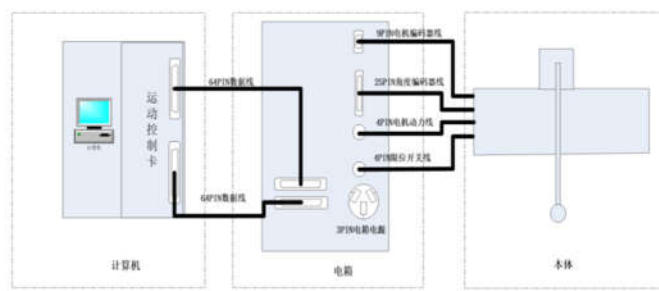


被控对象: 一级倒立摆系统

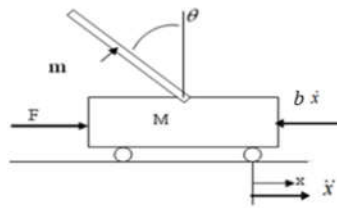
# 自动控制原理实验报告



系统控制框图



系统连接示意图



直线一级倒立摆系统

符号	意义	实际数值
$M$	小车质量（不含动子）	1.42kg
$m$	摆杆质量	0.12kg
$b$	小车摩擦力系数*	N/m/sec
$l$	摆杆转动轴心到杆质心的长度	0.188m
$I$	摆杆惯量	0.0014kg*m*m
$g$	重力加速度	9.8 m/s <sup>2</sup>
$F$	加在小车上的力	
$x$	小车位置	
$\theta$	摆杆与垂直向上方向的夹角	

受力分析：

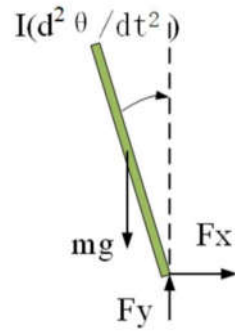
对小车，水平方向：  $F - F_x - f = M\ddot{x}$

对摆杆，水平方向：

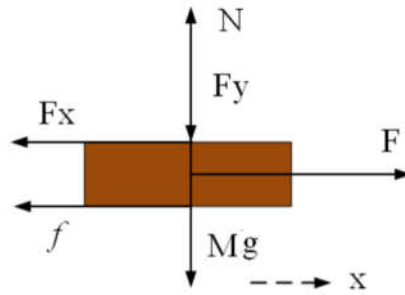
$$F_x = m \frac{d^2}{dt^2} (x - l \sin \theta) = m \frac{d}{dt} (\dot{x} - l \cos \theta \dot{\theta}) = m\ddot{x} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 - ml \cos \theta \ddot{\theta}$$

对摆杆，垂直方向：

$$mg - F_y = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = m \frac{d}{dt} (-l \sin \theta \dot{\theta}) = -ml \cos \theta \dot{\theta}^2 - ml \sin \theta \ddot{\theta}$$



摆杆受力分析图



系统中小车的受力分析图

摆杆力矩平衡:

$$I\ddot{\theta} = F_y l \sin\theta + F_x l \cos\theta$$

由于控制的目的是保持倒立摆直立, 摆杆允许转动的的转角一般较小, 可得到如下假设条件:

$$\sin\theta = \theta, \cos\theta = 1$$

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} + ml\sin\theta \dot{\theta}^2 - ml\cos\theta \ddot{\theta} \\ mg - F_y &= -ml\cos\theta \dot{\theta}^2 - ml\sin\theta \ddot{\theta} \\ I\ddot{\theta} &= F_y l \sin\theta + F_x l \cos\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} + ml\theta \dot{\theta}^2 - ml\ddot{\theta} & (1) \\ F_y &= mg + ml\dot{\theta}^2 + ml\ddot{\theta} & (2) \\ I\ddot{\theta} &= F_y l \theta + F_x l & (3) \end{aligned}$$

把方程 (1)、(2) 带入到 (3) 中:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= (mg + ml\dot{\theta}^2 + ml\ddot{\theta})l\theta + (m\ddot{x} + ml\theta \dot{\theta}^2 - ml\ddot{\theta})l \\ &= mgl\theta + ml^2\dot{\theta}^2 \theta + ml\ddot{x} - ml^2\ddot{\theta} \end{aligned}$$

因  $I = \frac{1}{3}ml^2$ , 利用  $\theta^2 = 0, \dot{\theta}^2 = 0$  将上式线性化:

故一阶倒立摆的数学模型:

$$\frac{4}{3}ml\ddot{\theta} - mg\theta = m\ddot{x}$$

代入  $mg = 1.176, l = 0.188$  实际数据后

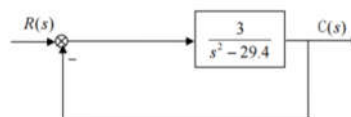
$$\ddot{\theta} - 29.4\theta = 3\ddot{x}$$

定义输入信号:

$$R(t) = \ddot{x}(t)$$

输出信号:

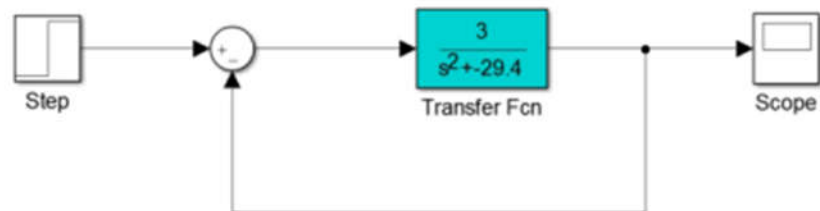
$$C(t) = \theta(t)$$



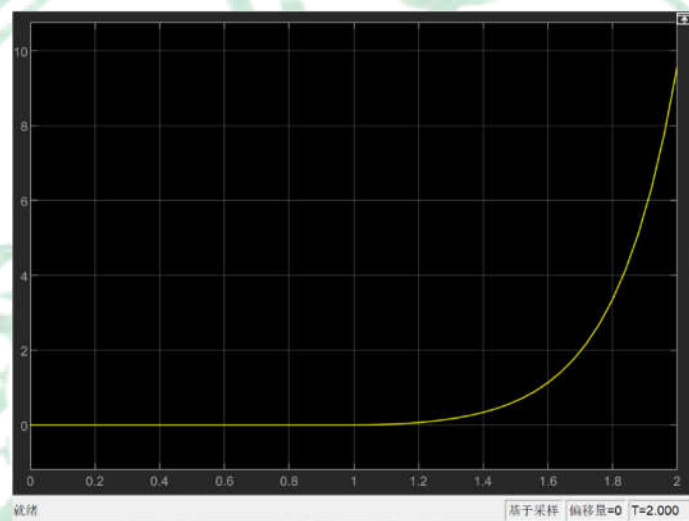
## 六、 实验过程

### ➤ 对任务 1：一级倒立摆系统稳定性分析

在 MATLAB Simulink 中构建如图所示的系统仿真程序

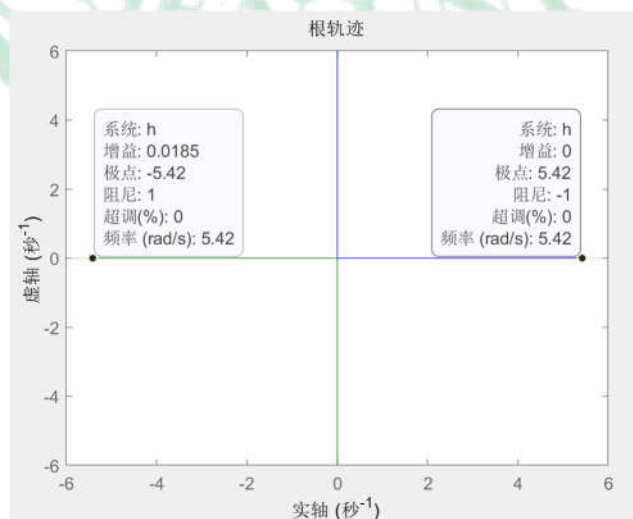


得到系统仿真曲线：



### ➤ 对任务 2：一级倒立摆系统根轨迹校正

1. 打开 MATLAB 输入 gtbox，点击进入：Inverted Pendulum/Linear Motor Driven/GLM1SIP-II/C-Typed Linear Motor-Acc/2-Root Locus” 路径下的 “e2\_0.m” 程序，画出系统闭环根轨迹：



由系统根轨迹图可以看出闭环传递函数的一个开环极点位于右半平面，并且闭环系统的根轨迹关于虚轴对称，这意味着无论根轨迹增益如何变化，闭环根总是位于正实轴或者虚轴上，即系统总是不稳定或临界稳定的。

2. 不妨对系统新增加一个开环零点和一个开环极点，零点为-5.4222，消去倒立摆的开环左极点，增加一个位于 13.42 的开环左极点，（注：13.42 是试凑法给出的值，值的范围在  $10 \sim 16$ ），控制器为：

$$G(s) = k \frac{s + 5.4222}{s + 13.42}$$

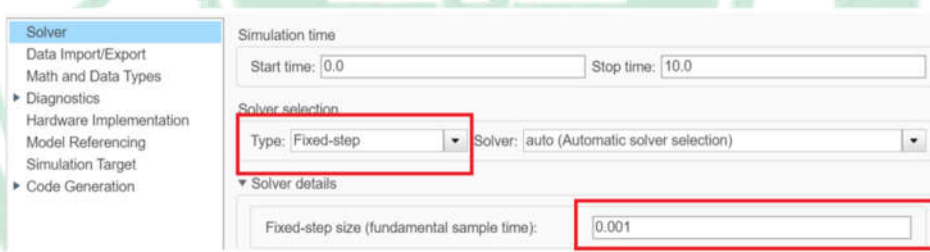
k 为开环增益。控制系统结构图如下：



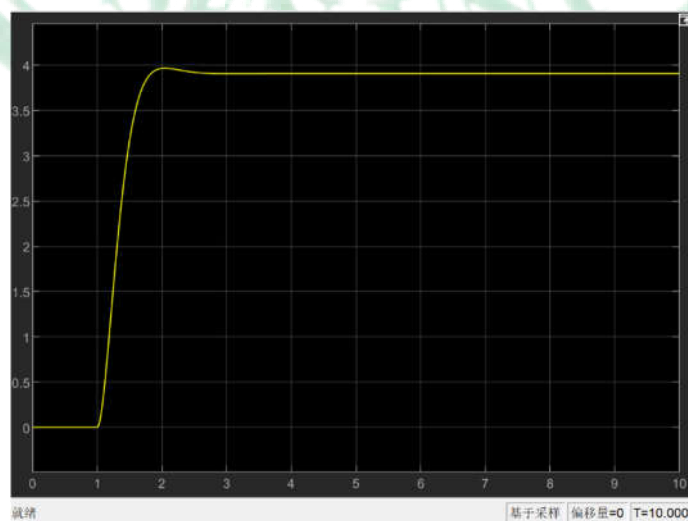
2. 取增益  $k=32.6$  ( $k$  值是使用试凑法给出的，范围在  $25 \sim 40$  之间)，搭建如图所示的 simulink 仿真系统，并保存。



3. 在 Modeling 栏下，选择 “Model Settings”，在弹出的框中，Solver section→type 选择为 “Fixed-step”，Fixed-step size 改为 “0.001”。



仿真结果如下：





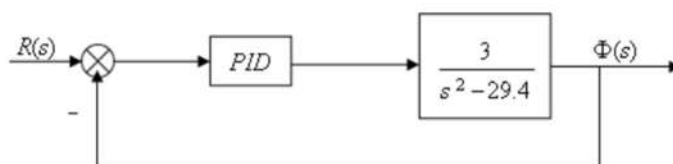
## 自动控制原理实验报告

控制器形式及参数	增益	超调量	调节时间	系统是否稳定?
$k \frac{s + 5.4222}{s + 13.42}$	29	0	1.72	稳定
	32	0.936%	0.831	稳定
	35	4.42%	1.05	稳定

对任务 3：一级倒立摆系统 PID 校正

PID 的数学模型：

$$G(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$



加了控制器之后系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{3K_d(s^2 + \frac{K_p}{K_d}s + \frac{K_i}{K_d})}{s(s^2 - 29.4)}$$

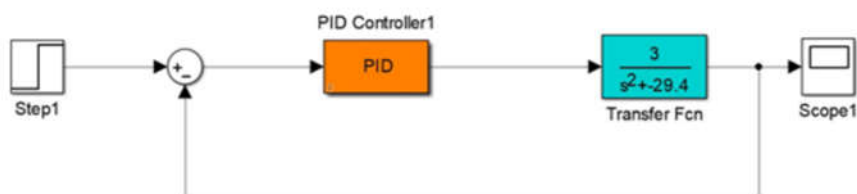
系统开环极点：-5.42，0，5.42

系统开环零点：

$$\frac{-\frac{K_p}{K_d} \pm \sqrt{\left(\frac{K_p}{K_d}\right)^2 - 4\frac{K_i}{K_d}}}{2}, \quad \frac{-\frac{K_p}{K_d} \pm \sqrt{\left(\frac{K_p}{K_d}\right)^2 - 4\frac{K_i}{K_d}}}{2}$$

PID 环节为系统增加了一个位于原点的极点，两个可变的零点。

1). 取  $k_p=25$ ,  $k_i=5$ ,  $k_d=5$ , 此时系统共轭零点位于-4.791, -0.2087, 根轨迹增益 15, 系统闭环极点为-10.97, -3.66, -0.3738, 搭建如图所示的 simulink 仿真系统：



2). 在 Modeling 栏下，选择 “Model Settings”，在弹出的框中，Solver section→type 选择为 “Fixed-step”，Fixed-step size 改为 “0.001”。

**Solver**  
 Data Import/Export  
 Math and Data Types  
 ▶ Diagnostics  
 Hardware Implementation  
 Model Referencing  
 Simulation Target  
 ▶ Code Generation

Simulation time  
 Start time: 0.0 Stop time: 10.0  
 Solver selection  
 Type: Fixed-step Solver: auto (Automatic solver selection)  
 ▼ Solver details  
 Fixed-step size (fundamental sample time): 0.001

改变控制器的 PID 值，观察实验现象并把实验数据填入下表

控制器参数	PID 参数	系统性能	响应曲线
$\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$	Kp=400, Kd=2000, KI=40	$t_s = 0.264,$ $\sigma = 7.9\%$	
	Kp=500, Kd=2500, KI=50	$t_s = 0.239,$ $\sigma = 6.37\%$	
	Kp=600, Kd=3000, KI=60	$t_s = 0.217,$ $\sigma = 5.33\%$	

## 七、 实验心得

通过上述实验，我们可以得到以下结论：

- 1、增加了一个开环零点，使闭环极点可以远离虚轴，同时在 K 增大时， $\beta$  先增大后减小，超调量先增大后减小，调整时间在 K 增大时也会减小，不改变系统型别，所以不改变系统稳定精度。
- 2、在虚轴左侧增加一个零点，右侧两个主导极点在 k 增大时， $\beta$  增大，超调量逐渐增大，距离虚轴距离基本不变，调节时间基本没有优化。系统型别发生变化，变为二阶系统，提高稳态精度。

3、增加两个零点，优化了动态性能，使闭环极点有向左移动的趋势，减小超调量和调节时间。同时系统型别增加，稳态性能优化

