[illegible]

20354027

1. 设 $\alpha(x)\to 0$ $\quad (x\to 0,\ \tan x-\sin x\sim \frac{1}{2}x^3)$

则 $\sin\alpha(x)\sim\tan\alpha(x)\sim\arctan\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim[e^{\alpha(x)}-1]\sim\ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)$

$[1-\cos\alpha(x)]\sim\frac{1}{2}[\alpha(x)]^2$, $[1+\alpha(x)]^k-1\sim k\alpha(x)\ (k\neq 0)$

$\tan\alpha(x)-\sin\alpha(x)\sim\frac{[\alpha(x)]^3}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

唯一性、有界性、保号性

3. $\lim f(x)=0\ (f(x)\neq 0)$，则 $\lim\frac{1}{f(x)}=\infty$;

$\lim f(x)=\infty$，则 $\lim\frac{1}{f(x)}=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\mathrm{L}+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\mathrm{L}+b_n}(b_n\neq 0)=\frac{a_m}{b_n}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\mathrm{L}+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\mathrm{L}+b_n}(a_0 b_0\neq 0)=\begin{cases}a_0/b_0, & m=n\\ 0, & n>m\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

4. $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$ $\quad \lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\ (\lim g(x)\neq 0)$

5. 有限多个无穷小之和/积仍是无穷小；有界变量与无穷小之积仍是无穷小

6. ① $g(x)\le f(x)\le h(x)$ $\quad$ ② $\lim\limits_{x\to x_0/\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0/\infty}h(x)=a$

则 $\lim\limits_{x\to x_0/\infty}f(x)$ 存在且等于 a

$(1^\infty\approx e)$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

8. 幂指函数求极限常用对数法，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$

9. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

10. $f(x)$ 在 x_0 有定义；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

不满足其中之一即为间断点 $\quad$ 左、右极限至少有一个不存在即为第二类间断点

11. $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 连续，

则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$ 也在 x_0 连续

初等函数均连续

12. $f(x)$在开区间(a,b)内连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在，则$f(x)$在$(a,b)$有界

13. 若$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x)=a$，则宜提取公因子：

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^{\alpha(x)}-e^{\beta(x)}}{\alpha(x)-\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\beta(x)} \lim \frac{e^{\alpha(x)-\beta(x)}-1}{\alpha(x)-\beta(x)} = e^{a}$$

14. 点$M(x_0, f(x_0))$ $\quad f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

法线方程：$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$ $\quad (f'(x_0)\neq 0)$

15. 可导必连续，连续不一定可导.

16. 若$\varphi(x)$在$x=x_0$处连续，则~~$f(x)=|x-x_0|$~~ $f(x)=|x-x_0|\varphi(x)$在$x=x_0$处可导的充要条件是$\varphi(x_0)=0$。特别地，$|x-x_0|$在$x=x_0$处不可导，而$(x-x_0)|x-x_0|$在$x=x_0$处可导

17. $(\cot x)'=-\csc^2 x$ $\quad (\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$ $\quad (\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}$ $\quad \sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $\quad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

18. $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$ $\quad y=f[\varphi(x)] \Rightarrow y'=f'(x)\cdot\varphi'(x)$

$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ $\quad f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

19. $[u\pm v]^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$ $\quad [ku]^{(n)}=ku^{(n)}$

$$[uv]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

20. 设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}$

21. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ $\quad \cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\tan\alpha\tan(\frac{\pi}{3}+\alpha)\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)$ $\quad \cot 3\alpha=\frac{-3\cot\alpha+\cot^3\alpha}{3\cot^2\alpha-1}$

22. $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + \frac{n}{2}\pi)$ $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + \frac{n}{2}\pi)$

$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$ $(e^x)^{(n)} = e^x$

① $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ ② $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

③ $(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ 后三个中 x 可替换为 $(x+c)$ 若 $\alpha<n$，则①=0

23. 微分(一阶)的形式不变性：$dy = f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = f'(u)du$

24. $f(x)$ 在 x_0 点可微 $\rightleftharpoons$ $f(x)$ 在 x_0 点可导且 $dy = f'(x_0)dx$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点连续

25. 函数在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导

罗尔定理：$f(a)=f(b)$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

拉格朗日定理：~~~~ 至少存在 ~，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

柯西定理：$g'(x)\neq 0$，至少 ~，使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

26. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(-1\le x\le 1)$

$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$

27. 洛必达法则！$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ "$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$"

28. 泰勒公式 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ξ 介于 x_0 与 x 之间

麦克劳林公式 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ~0~

29. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

30. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数

$f''(x)\leq 0$，则曲线弧 $f(x)$ 是凸的

$f''(x)\geq 0$，则曲线弧 $f(x)$ 是凹的

这里是等于 写错了

拐点：连续曲线凹与凸部分的分界点 称为曲线的拐点 $f''(x)=0$ 或不存在

31. 定积分定义求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx \qquad \sum_{k=1}^{n}\to\int_0^1 \quad \frac{k}{n}\to x \quad \frac{1}{n}\to dx$$

32. $x>0$：$e^x>1+x$，$\ln(1+x)<x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$：$\sin x<x<\tan x$

33. 当 $f'(x)=0$ 时，（或不存在）

$f''(x_0)<0$，$f(x)$ 在 x_0 取得极大值；$f''(x)>0$，～极小值

驻点：指 $f'(x)=0$ 的点，又称平稳/稳定点/临界点

34. 画图：

① $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=A\Rightarrow y=A$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线

② $\lim_{x\to x_0^{\pm}}f(x)=\infty\Rightarrow x=x_0$ 为 $f(x)$ 的铅直渐近线

③ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$ 且 $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=b\Rightarrow y=ax+b$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线

35. $\int f'(x)\,dx=f(x)+C \qquad \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)$

$$\int[k_1f(x)\pm k_2g(x)]\,dx=k_1\int f(x)\,dx\pm k_2\int g(x)\,dx \quad (k_1, k_2 \text{不同时为零})$$

+C +C +C!!!

36. (1) $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \ (a \neq -1)$ (2) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(3) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ (4) $\int e^x dx = e^x + C$

(5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ (8) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(9) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$ (10) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

(11) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ (12) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{arsin}\frac{x}{a} + C$ (14) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

(15) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ (16) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

(17) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

(18) $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

(19) $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$

(20) $\int \mathrm{sh}x\, dx = \mathrm{ch}x + C$ (21) $\int \mathrm{ch}x\, dx = \mathrm{sh}x + C$

37. $\int df(x) = f(x) + C \Rightarrow \int d\int df(x) = \int d f(x) = f(x) + C$

38. ①设 $\int f(u)du = F(u) + C$ 且 $u = \varphi(x)$ 可微,

则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$

② 设 $x = \psi(t)$ 严格单调可微，且 $\psi'(t) \neq 0$

若 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt = \Phi(t) + C$

则 $\int f(x)dx = \Phi[\psi^{-1}(x)] + C$

39. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ | $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$ | $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ | $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$ | $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

§4.0 (1) $x^{n-1} f(kx^n+p)dx = \frac{1}{kn} f(kx^n+p) d(kx^n+p)$

(2) $e^x f(ke^x+p)dx = \frac{1}{k} f(ke^x+p) d(ke^x+p)$

$a^x f(ka^x+p)dx = \frac{1}{k\ln a} f(ka^x+p) d(ka^x+p)$

(3) $\cos x f(k\sin x+p)dx = \frac{1}{k} f(k\sin x+p) d(k\sin x+p)$

$\sin x f(k\cos x+p)dx = -\frac{1}{k} f(k\cos x+p) d(k\cos x+p)$

$\frac{1}{\cos^2 x} f(k\tan x+p)dx = \frac{1}{k} f(k\tan x+p) d(k\tan x+p)$

(4) $\frac{1}{x} f(k\ln x+p)dx = \frac{1}{k} f(k\ln x+p) d(k\ln x+p)$

$\frac{1}{x} f(k\log_a x+p)dx = \frac{\ln a}{k} f(k\log_a x+p) d(k\log_a x+p)$

(5) $f(\arcsin x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = f(\arcsin x) d(\arcsin x)$

$f(\arctan\frac{x}{a})\cdot\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} f(\arctan\frac{x}{a}) d(\arctan\frac{x}{a})$

(6) $\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} d\ln(1+x^2)$

41. 若 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 可微，且 $u'(x)\cdot v(x)$ 具有原函数，

则有 $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$

或 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

反对幂指三，从后往前安

☆ 被积函数是三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数与多项式之间的乘积

42. 对形如 $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ 的积分 可转化为 $\int f(x)\,dg(x)$ 计算，$g(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$

43. (1) $\int\frac{A}{x-a}dx$ (2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx\ (n=2,3\cdots)$ (3) $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ (4) $\int\frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^n}dx\ (n=2,3\cdots)$

44. (1) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(3) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(5) $f(x)\le g(x),\ x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

45. (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，

则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ； $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的积分平均值

(3) 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

许瓦尔兹不等式：$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b [f(x)]^2dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2dx$

46. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{偶} \end{cases}$$

是=不是在

47. (1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)$ 在 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导

且有 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 是可微数的，

则 $\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right) = f[g(x)]g'(x)$

(3) 若上、下限都是 x 的可微函数

$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right) = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$

(4) 牛顿－莱布尼兹公式：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

48. (1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$　　(4) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

(5) $f(x+C) = f(x)$ $(C>0)$ 则 $\int_0^C f(x)dx = \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} f(x)dx = \int_a^{a+C} f(x)dx$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{奇} \end{cases}$

☆ 当 n 为偶数时，$n!!$ 表示所有偶数（不大于 n）连乘积，反之亦然

49. (1) 由 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $(f_1(x)\le f_2(x))$ 与直线 $x=a$, $x=b$ $(a\le b)$ 围成面积:

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

$x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$ $(g_1(y)\le g_2(y))$ $y=c$, $y=d$ $(c\le d)$

$$S=\int_c^d [g_2(y)-g_1(y)]dy$$

(2) 由 $r=r(\theta)$ 与 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 围成面积:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$$

(3) 由 $y=f(x)$ 与 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成平面绕 x 轴旋转一周体积:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

(4) $x=g(y)$ $y=c$, $y=d$ y

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d g^2(y)dy$$

(5) $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ 绕 x 轴旋转而成的曲面面积:

$$S=2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

(6) $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

(7) $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ 的弧长为:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

(8) $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

(9) $r=r(\theta)$, $\varphi_0\le\theta\le\varphi_1$

$$l=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

50. $\vec{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ $\vec{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $c=\{c_1, c_2, c_3\}$

(点乘积或内积)

☆ 数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{a,b})$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(4) $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

☆ 向量积：$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{a,b})$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$构成右手系

(叉乘积或外积)

☆有"-"号

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\}$$

☆ (1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ (3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(4) $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0$

☆ 混合积：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 记为$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\sin(\widehat{a,b})\cos(\widehat{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}})$$

其绝对值等于以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为相邻三条棱的平行六面体的体积

且 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

若任意两向量重合或平行，其混合积为0 e.g. $(a\times a)\cdot b=0$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面

51. 平面及其方程：

(1) 点法式方程：平面过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 法向量$\vec{n}=\{A, B, C\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

(2) 截距式方程：设a, b, c为平面在坐标轴上的截距：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(3) 三点式方程：平面过不共线的三点$A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ $C(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

(4) 一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$ (A, B, C不同时为0)

52、空间直线及其方程

方向向量：与直线平行的非零向量，称为该直线的方向向量

(1) 对称式方程（点向式或标准式方程） 过点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 方向向量 $\vec{s} = \{l, m, n\}$

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

(2) 参数方程
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$ （t 为参数）

(3) 两点式方程 过 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

(4) 一般式方程
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$ （两个平面的交线）

53、设平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

法向量 $\vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ $\vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$

直线：$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ $L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$

方向向量：$\vec{s_1} = \{l_1, m_1, n_1\}$ $\vec{s_2} = \{l_2, m_2, n_2\}$

(1) 夹角

π_1 与 π_2：$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

L_1 与 L_2：$\cos\theta = \frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}$ L_1 与 π_1：$\sin\theta = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{s_1}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{s_1}|}$ ☆

(2) 平行的条件：

$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

$L_1 // \pi_1 \Leftrightarrow l_1A_1 + m_1B_1 + n_1C_1 = 0$

(3) 垂直的条件

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

$L_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \frac{l_1}{A_1} = \frac{m_1}{B_1} = \frac{n_1}{C_1}$

54. 距离公式

(1) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到面 $Ax+By+Cz+D=0$: $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(2) $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到线 $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$: $d = \frac{|\overrightarrow{M_0P_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$

(3) 设有两直线: $l_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ $l_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$

共面的条件: ~~只~~ $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{s_1} \times \vec{s_2}) = 0$

两线间距离: $d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{s_1} \times \vec{s_2})|}{|\vec{s_1} \times \vec{s_2}|}$

55. 二次曲面 $z = x^2 + py^2 + qz^2$

(1) $p=q=0$, $z=x^2$ 是抛物柱面

(2) $q=0, p\neq 0$, 当 $p>0$, $z=x^2+py^2$ 是椭圆抛物面; 反之, 双曲抛物面

(3) $p=0, q\neq 0$, 当 $q=a^2>0$, 则可化为 $x^2+(az-\frac{1}{2a})^2 = \frac{1}{4a^2}$ 是椭圆柱面

当 $q=-a^2<0$, 则可化为 $(az+\frac{1}{2a})^2 - x^2 = \frac{1}{4a^2}$ 是双曲柱面

(4) 当 $p \cdot q \neq 0$, 当 $p=a^2>0, q=b^2>0$, 可化为 $x^2+a^2y^2+(bz+\frac{1}{2b})^2 = (\frac{1}{2b})^2$ 是椭球面

当 $p=-a^2<0$, $q=-b^2<0$ $a^2y^2+(bz-\frac{1}{2b})^2 - x^2 = (\frac{1}{2b})^2$ 是单叶双曲面

$p=a^2>0$, $q=-b^2<0$ $x^2+a^2y^2-(bz+\frac{1}{2b})^2 = -(\frac{1}{2b})^2$ 双叶双曲面

$p=-a^2<0$, $q=b^2>0$ $x^2-a^2y^2+(bz-\frac{1}{2b})^2 = (\frac{1}{2b})^2$ 单叶双曲面

光滑曲线: $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$

在点 $r(t_0)$ 的切线方程: $r = r(t_0) + \mu r'(t_0)$ $\begin{cases} x=x(t_0)+\mu x'(t_0) \\ y=y(t_0)+\mu y'(t_0) \\ z=z(t_0)+\mu z'(t_0) \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

法平面方程: $x'(t_0)(x-x(t_0)) + y'(t_0)(y-y(t_0)) + z'(t_0)(z-z(t_0)) = 0$