



院(系): 智能工程学院

组号: 第一组

组长: 方桂安

日期: 2022. 12. 20

实验名称: 二级倒立摆系统建模及 Matlab 仿真

## 一、实验目的

1. 了解二级倒立摆工作原理;
2. 建立二级倒立摆数学模型;
3. 分析二级倒立摆系统的稳定性、可控性。

## 二、小组成员

1. 方桂安: 20354027, 负责仿真
2. 刘梦莎: 20354091, 负责仿真
3. 陈石翰: 20354019, 负责仿真以及报告撰写
4. 刘恩琪: 20354086, 负责仿真
5. 刘 玥: 20354229, 负责仿真

## 三、实验任务

1. 建立二级倒立摆系统数学模型;
2. 分析二级倒立摆系统的稳定性、可控性。

## 四、实验设备

1. 二级倒立摆本体、倒立摆电控箱、PC 机 (Matlab 平台、运动控制卡)

## 五、实验原理



图 1 被控对象: 二阶倒立摆系统

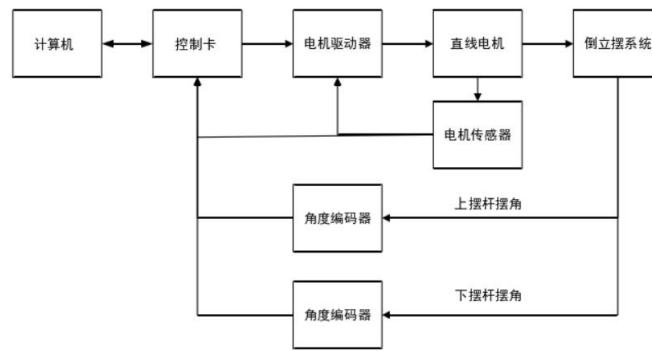


图 2 系统控制框图

## 1. 工作原理

电机传感器由伺服电机自带，可以根据该码盘的反馈通过换算获得小车位移、速度，并反馈给伺服电机和运动控制卡。

通过角度编码器，可换算出摆杆 1 和 2 的角度、角速度，并反馈给运动控制卡。

计算机从运动控制卡中实时读取数据确定控制决策电机的输出力矩并发送给运动控制卡，运动控制卡实现该次控制决策产生相应的控制量使电机转动带动小车运动，以达到控制的目的。

## 2. 运动学分析

**分析方法：拉格朗日力学分析法**

拉格朗日力学是分析力学的内容，本质上与牛顿力学是一样的，在物理上没有任何新内容。它从功和能量角度入手、引入广义坐标的概念，用数学分析方法重新表述了牛顿力学。它比牛顿力学好用的地方主要两点：**不依赖空间坐标系，不需要分析系统内部的约束力。**

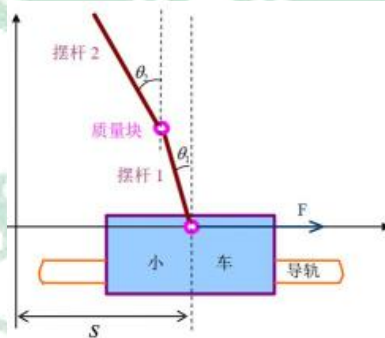


图 3 二阶倒立摆模型简图

参数	意义	参数	意义
$M$	小车质量	$\theta_1$	摆杆 1 与竖直方向上的夹角
$m_1$	摆杆 1 质量	$\theta_2$	摆杆 2 与竖直方向上的夹角
$m_2$	摆杆 2 质量	$a$	小车的加速度
$m_3$	质量块质量	$l_2$	摆杆 2 中心到转动中心的距离
$l_1$	摆杆 1 中心到转动中心的距离		

表 1 二阶倒立摆系统参数

## 自动控制原理实验报告

拉格朗日力学分析法的核心思想：

达朗贝尔原理（D'Alembert Principle）任何情况下，质点系主动力（外力）与惯性力所做的虚功之和为 0，不需要考虑内部约束力。

**拉格朗日方程：**

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q})$$

其中， $L$ 为拉格朗日算子， $T$ 为系统的动能， $V$ 为系统的势能， $q$ 为广义质心坐标。

假设主动力（外力）都是保守力（保守力所作的功与路径无关，只与起始位置有关），则系统动力学方程可以写为：

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

注：如果考虑主动力包括非保守力的情况，那么我们需要把这个力 $F$ 加入到式子中。

直线二级倒立摆系统中的广义坐标有三个，分别为小车位移 $s$ ，摆杆 1 角度 $\theta_1$ 和摆杆 2 角度 $\theta_2$ 。 $F$ 是系统在广义坐标上 $s$ 所受到的外力。由于系统在广义坐标系 $\theta_1, \theta_2$ 下不受外力，可得：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = F \end{cases}$$

参数	物理意义	参数	物理意义
$T_{m_{11}}$	摆杆 1 的平动动能	$T_{m_{21}}$	摆杆 2 的平动动能
$T_{m_{12}}$	摆杆 1 的转动动能	$T_{m_{22}}$	摆杆 2 的转动动能
$x_{pend1}$	摆杆 1 的质心横坐标	$x_{pend2}$	摆杆 2 的质心横坐标
$y_{pend1}$	摆杆 1 的质心纵坐标	$y_{pend2}$	摆杆 2 的质心纵坐标
$V_1$	摆杆 1 的势能	$V_2$	摆杆 2 的势能
$x_{mass}$	质量块质心横坐标	$V_3$	质量块的势能
$y_{mass}$	质量块质心纵坐标		

表 2 直线二级倒立摆模型参数

直线二级倒立摆系统的动能由小车动能，摆杆 1 动能，摆杆 2 动能和质量块动能四大部分组成。假设系统总动能为 $T$ ，小车动能为 $T_M$ ，摆杆 1 动能为 $T_{m_1}$ ，摆杆 2 动能为 $T_{m_2}$ ，质量块动能为 $T_{m_3}$ 。故得出系统动能的表达式为：

$$T = T_M + T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3}$$

小车动能：

$$T_M = \frac{1}{2} M (\dot{s})^2$$

由于摆杆的特性，摆杆 1 和摆杆 2 均存在平动动能和转动动能。摆杆 1 的总动能：

$$T_{m_1} = T_{m_{11}} + T_{m_{12}}$$

摆杆 2 的总动能为：

$$T_{m_2} = T_{m_{21}} + T_{m_{22}}$$

摆杆 1 的质心坐标：

$$\begin{cases} x_{pend1} = s - l_1 \sin \theta_1 \\ y_{pend1} = l_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

摆杆 2 的质心坐标：

$$\begin{cases} x_{pend2} = s - 2l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2 \\ y_{pend2} = 2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

质量块的质心坐标：

$$\begin{cases} x_{mass} = s - 2l_1 \sin \theta_1 \\ y_{mass} = 2l_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

根据动能势能公式可以推出以下公式，

摆杆 1 的平动动能：

$$T_{m_{11}} = \frac{1}{2} m_1 \left( \left( \frac{d(x_{pend1})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{pend1})}{dt} \right)^2 \right)$$

摆杆 1 的转动动能：

$$T_{m_{12}} = \frac{1}{2} I_{p_1} (\theta_1')^2 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 (\theta_1')^2$$

摆杆 2 的平动动能：

$$T_{m_{21}} = \frac{1}{2} m_2 \left( \left( \frac{d(x_{pend2})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{pend2})}{dt} \right)^2 \right)$$

摆杆 2 的转动动能：

$$T_{m_{22}} = \frac{1}{2} I_{p_2} (\theta_2')^2 = \frac{1}{6} m_2 l_2^2 (\theta_2')^2$$

质量块与摆杆不同，可将其看作一个质点，可直接得出质量块的动能：

$$T_{m_3} = \frac{1}{2} m_3 \left( \left( \frac{d(x_{mass})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{mass})}{dt} \right)^2 \right)$$

整个倒立摆系统的动能：

$$\begin{aligned} T &= T_M + T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3} \\ &= \frac{1}{2} M (\dot{s})^2 + \frac{1}{2} m_1 \left( \left( \frac{d(x_{pend1})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{pend1})}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{6} m_1 l_1^2 (\theta_1')^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left( \left( \frac{d(x_{pend2})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{pend2})}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 (\theta_2')^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_3 \left( \left( \frac{d(x_{mass})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{mass})}{dt} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

直线二级倒立摆系统的势能：



$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 = m_1gh_1 + m_2gh_2 + m_3gh_3 \\ &= m_1g \cdot y_{pend1} + m_2g \cdot y_{pend2} + m_3g \cdot y_{mass} \\ &= m_1gl_1\cos\theta_1 + m_2g(2l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) + 2m_3gl_1\cos\theta_1 \end{aligned}$$

假设在平衡位置时的系统中所有的变量的初始值均为零：

$$x(t_0) = (s, \theta_1, \theta_2, s', \theta_1', \theta_2', s'') = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

在直线二级倒立摆系统的线性化过程中，需先求出 $\theta_1''$ 和 $\theta_2''$ ，故设：

$$\begin{cases} \theta_1'' = f_1(s, \theta_1, \theta_2, s', \theta_1', \theta_2', s'') \\ \theta_2'' = f_2(s, \theta_1, \theta_2, s', \theta_1', \theta_2', s'') \end{cases}$$

函数 $f_1$ 和 $f_2$ 的形式可由如下式子得出：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_1'} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_2'} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0 \end{aligned}$$

将 $\theta_1''$ 和 $\theta_2''$ 在平衡位置 $x(t_0)$ 处用泰勒级数展开并线性化，得到方程：

$$\begin{cases} \theta_1'' = k_{11}s + k_{12}\theta_1 + k_{13}\theta_2 + k_{14}s' + k_{15}\theta_1' + k_{16}\theta_2' + k_{17}s'' \\ \theta_2'' = k_{21}s + k_{22}\theta_1 + k_{23}\theta_2 + k_{24}s' + k_{25}\theta_1' + k_{26}\theta_2' + k_{27}s'' \end{cases}$$

式子中：

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial s} \right|_{x(t_0)}, k_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \right|_{x(t_0)}, k_{13} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \right|_{x(t_0)}; \\ k_{14} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial s'} \right|_{x(t_0)}, k_{15} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1'} \right|_{x(t_0)}, k_{16} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2'} \right|_{x(t_0)}, k_{17} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial s''} \right|_{x(t_0)}; \\ k_{21} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial s} \right|_{x(t_0)}, k_{22} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} \right|_{x(t_0)}, k_{23} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \right|_{x(t_0)}; \\ k_{24} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial s'} \right|_{x(t_0)}, k_{25} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1'} \right|_{x(t_0)}, k_{26} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2'} \right|_{x(t_0)}, k_{27} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial s''} \right|_{x(t_0)}; \end{aligned}$$

将直线二级倒立摆相关参数代入方程，可得出以下结果：

$$\begin{aligned} k_{12} &= \frac{3g(m_1 + 2(m_2 + m_3))}{(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_1} = 86.69, k_{13} = \frac{-9gm_2}{2(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_1} = -21.62 \\ k_{17} &= \frac{3(2m_1 + m_2 - 4m_3)}{2(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_1} = 6.64, k_{22} = \frac{-9g(m_1 + 2(m_2 + m_3))}{2(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_2} = -40.31 \\ k_{23} &= \frac{3g(m_1 + 2(m_2 + m_3))}{(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_2} = 39.45, k_{24} = \frac{3(m_1 - l_2m_3)}{2(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_2} = -0.088 \end{aligned}$$

注：其余参数为 0.

系统的状态变量：

$$\{s, \theta_1, \theta_2, s', \theta_1', \theta_2'\}$$

系统的状态方程标准形式：

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = Ax(t) + Bu \\ y(t) = Cx(t) + Du \end{cases}$$

注：在二级倒立摆系统中，控制输入一般采用小车的加速度.

将以上结果代入动态方程可得：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{s} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 86.69 & -21.62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40.31 & -39.45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{s} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6.64 \\ -0.088 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{s} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

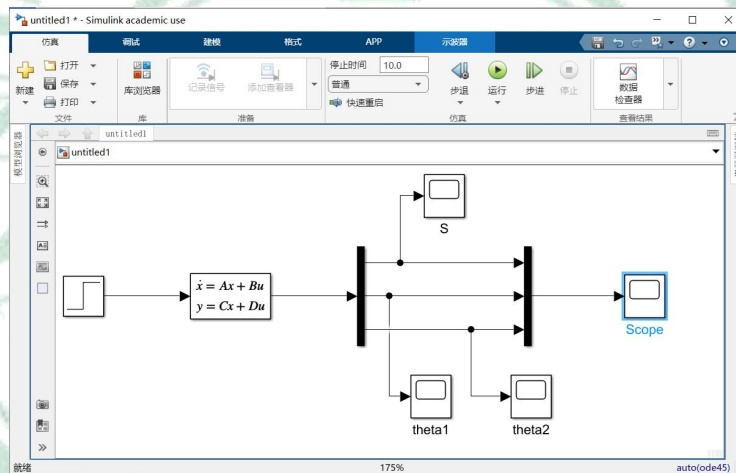
**思考：对二级倒立摆，为什么不采用自动控制原理中的传递函数来描述系统？**

对于二级倒立摆，由于其控制变量多、非线性强，所以控制规则与隶属函数很难确定。因此不适合采用自动控制原理中的传递函数来描述系统。

## 六、实验步骤

### 任务 1：二级倒立摆系统的稳定性分析

(1) 打开 Matlab，建立如下的 simulink 仿真模块，并保存。



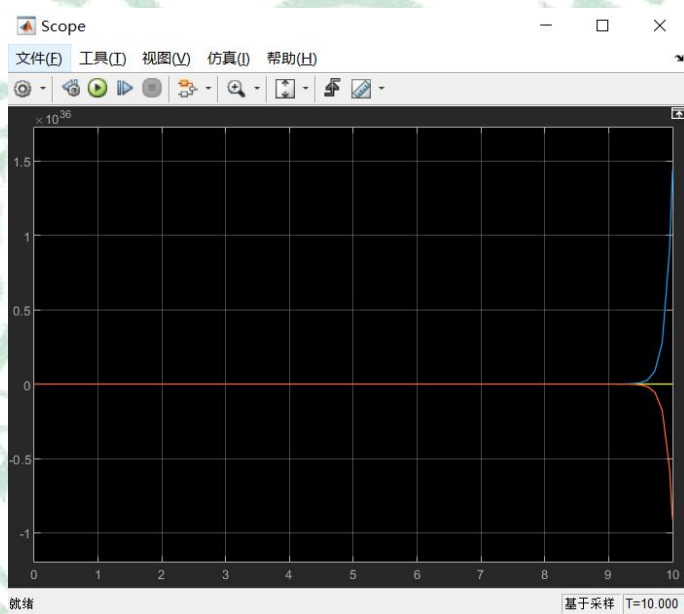
其中，step 函数的幅值为 0.01，相当于一个噪声信号：



State-space 模块的参数为:

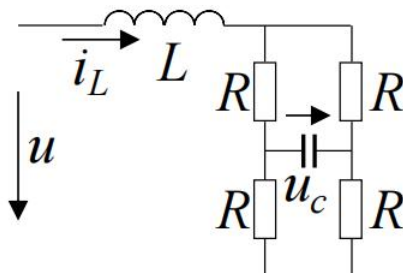


(2) 点击 scope, 观察输出  $y$ , 可看到状态发散, 说明需要设计控制器才能满足要求。



注意到: 二级倒立摆系统有 6 个状态, 但只有一个控制信号  $u$ , 即小车的加速度。对某些系统, 不是所有的状态都能用  $u$  来调节。换句话说, 有些时候, 无论怎么设计控制器  $u$ , 都无法改变系统的某些状态。因此, 需要讨论倒立摆系统的可控性。

例: 系统如下图所示。状态  $x_1 = i_L$ ,  $x_2 = u_c$ ,  $y = u_c$ 。



桥式电路

表明：控制量 $u$ 可以控制状态 $x_1$ ，但对状态 $x_2$ 无控制能力，即 $x_1$ 是能控制的，而 $x_2$ 是不能控制的。

### 能控性判据：秩判据

对于线性定常系统：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0$$

完全能控的充分必要条件是：

$$\text{rank} Q_c = \text{rank}[B : AB : \dots : A^{n-1}B] = n$$

其中： $n$ 为矩阵 $A$ 的维数， $Q_c = [B : AB : \dots : A^{n-1}B]$ 称为系统的能控性判别阵。

## 任务 2：二级倒立摆系统的可控性分析

(1) 在 Matlab 中新建一个.m 文件，输入如下代码，保存后运行。

```
1
2 % 描述系统状态以及输出的系数矩阵
3 A = [0,0,0,1,0,0;0,0,0,0,1,0;0,0,0,0,0,1;0,0,0,0,0,0;0,89.69,-21.62,0,0,0;-40.31,39.45,0,0,0,0];
4 B = [0;0;0;1;6.64;-0.088];
5 C = [1,0,0,0,0,0;0,1,0,0,0,0;0,0,1,0,0,0];
6 D = [0;0;0];
7
8 % 判别可控性矩阵
9 Controlable_matrix = ctrb(A, B);
10 % 求秩，如果等于系统状态个数6，则可控；否则不可控。
11 rank_controlable_matrix = rank(Controlable_matrix)
```

(2) 输出结果：

```
>> controlable_system

rank_controlable_matirx =

     6
```

这说明二级倒立摆系统是可控的，即设计合适的 $u$ ，可使得系统的输出满足要求。设计二级倒立摆控制器 $u$ 的方法有很多，如极点配置、输出反馈、神经网络控制、模糊控制等等。我们将采用最优控制中的线性二次型调节器方法(LQR)来设计控制器 $u$ ，这将是我们的下一次实验的主要内容。

## 七、实验心得

本次实验我们对直线二阶倒立摆模型进行了数学建模，并对二级倒立摆系统的稳定性与可控性进行了分析。

在建模过程中，采用的是拉格朗日力学分析法，使得建模不依赖于空间坐标系，更为方便；同时建模中还利用了动能守恒定律、牛顿第三定律、质心定律等多个物理学定律，综合结合了一节泰勒展开与线性代数等知识点，综合性十分强。

在稳定性和可控性判别的过程中，我们新学习了一个能控性判据，掌握了线性定常系统完全能控的充分必要条件。为后续实验设计控制器 $u$ 打下了一定的理论基础。