МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Д. А. Зенюк, Ю. Н. Орлов

ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ АДВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК 519.246.8+517.968.7(075)
ББК 22.171я73
З56

Рецензенты:
Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН
Доктор физико-математических наук *М. В. Родкин*
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
Доктор физико-математических наук *В. Т. Жуков*

Зенюк, Д. А., Орлов, Ю. Н.
З56 Дробное уравнение адвекции–диффузии и моделирование нестационарных временных рядов: учебное пособие / Д. А. Зенюк, Ю. Н. Орлов. – М.: МФТИ, 2016. – 94 с.
ISBN 978-5-7417-0606-0

В книге рассматриваются практические аспекты применения дробного исчисления к задачам анализа и прогнозирования нестационарных временных рядов, описанию эволюции их функции распределения. методике оценивания параметров соответствующих кинетических уравнений. Исследуется возможность применения уравнения Фоккера-Планка с производными нецелого порядка для описания эволюции выборочных плотностей распределений временных рядов.

Предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области прикладной математической статистики.

УДК 519.246.8+517.968.7(075)
ББК 22.171я73

ISBN 978-5-7417-0606-0

Оглавление

Плохо – это не когда мы знаем,
что чего-то не знаем,
а когда мы не знаем,
что не знаем чего-то

Предисловие

Размышления на любую тему сводятся к более или менее успешному манипулированию некоторым набором привычных категорий. В отсутствие таковых думать просто не получается. Наша цель как раз и состоит в том, чтобы представить категории мышления, принятые при обсуждении вопросов обработки сигналов, и способствовать их усвоению. Сигналы понимаются здесь как функции непрерывного времени.

Прежде всего, сигналы рассматриваются не как самостоятельные сущности, а как элементы евклидовых линейных пространств. Это выводит на авансцену мощный математический аппарат линейной алгебры и, что даже более важно, подключает интуитивные представления из евклидовой геометрии. Затем речь заходит об операциях над сигналами и о всевозможных их преобразованиях.

Взгляд на обработку сигналов с общих позиций неожиданно обнаруживает, что, по существу, все сводится к двум операциям – операциям образования свертки пары сигналов и их взаимной корреляции. Ограниченность арсенала используемых средств объясняется их чрезвычайной мощностью. На самом деле любая линейная инвариантная во времени обработка сигнала сводится к операции свертки. Собственно говоря, в линейной теории ничего кроме свертки и быть не может. Корреляция – это не более как форма свертки, адаптированная к анализу метрических свойств.

Арсенал используемых преобразований значительно богаче и постоянно расширяется. Обсуждаются как элементарные преобразования сигналов – сдвиги во времени, сжатия-растяжения, так и сложные интегральные преобразования, такие как преобразования Фурье или Гильберта. Приходится сталкиваться и с преобразованиями, нарушающими инвариантность во времени. Важный пример – квадратурные преобразования между пространствами вещественных сигналов и их комплексных огибающих. Последние десятилетия отмечены появлением целого спектра непрерывных и дискретных вейвлет–преобразований.

Размышления на любую тему сводятся к более или менее успешному манипулированию некоторым набором привычных категорий.

В отсутствие таковых думать просто не получается. Наша цель как раз и состоит в том, чтобы представить категории мышления, принятые при обсуждении вопросов обработки сигналов, и способствовать их усвоению. Сигналы понимаются здесь как функции непрерывного времени.

Прежде всего, сигналы рассматриваются не как самостоятельные сущности, а как элементы евклидовых линейных пространств. Это выводит на авансцену мощный математический аппарат линейной алгебры и, что даже более важно, подключает интуитивные представления из евклидовой геометрии. Затем речь заходит об операциях над сигналами и о всевозможных их преобразованиях.

Взгляд на обработку сигналов с общих позиций неожиданно обнаруживает, что, по существу, все сводится к двум операциям – операциям образования свертки пары сигналов и их взаимной корреляции. Ограниченность арсенала используемых средств объясняется их чрезвычайной мощностью. На самом деле любая линейная инвариантная во времени обработка сигнала сводится к операции свертки. Собственно говоря, в линейной теории ничего кроме свертки и быть не может. Корреляция – это не более как форма свертки, адаптированная к анализу метрических свойств.

Арсенал используемых преобразований значительно богаче и постоянно расширяется. Обсуждаются как элементарные преобразования сигналов – сдвиги во времени, сжатия-растяжения, так и сложные интегральные преобразования, такие как преобразования Фурье или Гильберта. Приходится сталкиваться и с преобразованиями, нарушающими инвариантность во времени. Важный пример – квадратурные преобразования между пространствами вещественных сигналов и их комплексных огибающих. Последние десятилетия отмечены появлением целого спектра непрерывных и дискретных вейвлет–преобразований.

Глава 1. **Сигналы и операции над ними**

1.1. Пространства сигналов

Игровое поле, на котором протекает обсуждение вопросов обработки сигналов, – это множество комплексных (*комплекснозначных*) функций $x(t)$ вещественной переменной t.

Сигналы можно складывать между собой и умножать на комплексную константу – от этого они не перестают быть сигналами. Операции сложения и умножения на комплексный скаляр наделяют доселе аморфное множество сигналов структурой бесконечномерного линейного пространства над полем комплексных чисел, подключая арсенал традиционных средств линейной алгебры – линейные комбинации и разложения по базисам. Сигналы приобретают статус векторов – элементов линейного пространства.

В пространстве сигналов выделяется подмножество сигналов с интегрируемым квадратом модуля:

$$E_x = \langle x, x \rangle = \int_{\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Величина E_x интерпретируется как энергия сигнала $x(t)$.

Если, к примеру, сигнал $x(t)$ измеряется в вольтах, то его квадрат – это мощность, выделяемая на сопротивлении в 1 Ом, а интеграл от мощности по времени – это энергия.

Каждой паре сигналов x, y можно поставить в соответствие их взаимную энергию – комплексное число:

$$E_{x,y} = \langle x, y \rangle = \int_{\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt.$$

Этим на множестве сигналов конечной энергии вводится (эрмитово) *скалярное произведение* с обычными свойствами линейности по левой координате:

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle \,,$$

сопряженной линейности – по правой:

$$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha^* \langle x, y_1 \rangle + \beta^* \langle x, y_2 \rangle \,,$$

Упражнение 1.1. ($\triangledown$) *Убедитесь в эквивалентности неравенств треугольника для нормы и расстояния.*
Намек: $(y - x) = (y - z) + (z - x)$.

Упражнение 1.2. ($\triangledown$) *Покажите, что для ортогональных сигналов с* $\langle y, x \rangle = 0$ *выполняется теорема Пифагора:*

$$\|y + x\|^2 = \|y\|^2 \; + \|x\|^2.$$

Часто существенным оказывается факт обращения сигнала в нуль вне некоторого ограниченного интервала (a, b) значений t. Тогда используется специальная терминология. Носителем сигнала $x(t)$ называют множество t, на котором его значения отличны от нуля: $\sup(x) = \{t : x(t) \neq 0\}$. Говорят, что носитель сигнала $x(t)$ компактен (*финитен*), если он заключен внутри некоторого ограниченного интервала: $\sup(x) \subset (a, b)$. Если нужно указать интервал явно, то приходится говорить о сигнале с носителем на (a, b) или просто о сигнале, компактном на (a, b).

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(u)|^2 \, du.$$

В пространство сигналов конечной мощности входят те сигналы, для которых этот предел существует и конечен.

На втором по популярности месте стоит обобщенная функция «главное значение» $1/x$, значение которой на апертуре $g(t)$ определяется как главное значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(u)}{u} \, du = \lim_{\epsilon \to 0} \Big\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{g(u)}{u} \, du + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{g(u)}{u} \, du \Big\}.$$

1.2. Согласованная фильтрация

Предположим, что в пространстве сигналов конечной энергии выбран некоторый ортонормированный базис размерности n:

$$\Big[e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t) \Big]; \quad \langle e_i, e_k \rangle = \delta_{i,k}.$$

Его линейная оболочка – множество линейных комбинаций

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(t)$$

1.3. Некогерентная и когерентная ортогональность

Как обычно в линейной алгебре, сигналы $x(t)$ и $y(t)$ считаются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\langle x, y \rangle = \int x(u) y^*(u)\, du = 0. \tag{1.1}$$

Значение свойства ортогональности в обработке сигналов тесно связано с проблемой выделения сигналов из их смеси.

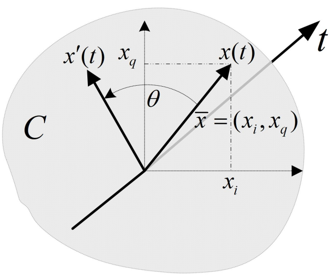
Пусть имеется взвешенная сумма $s(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ двух ортогональных сигналов x и y, $\langle x, y \rangle = 0$. Тогда выход фильтра, согласованного с сигналом x:

$$\langle s, x \rangle = \alpha \langle x, x \rangle + \beta \langle y, x \rangle = \alpha \langle x, x \rangle\,,$$

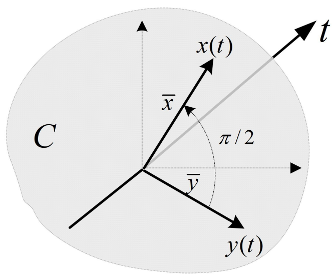
не зависит от y. Аналогично, на выходе фильтра, согласованного с y, полностью подавлен сигнал x:

$$\langle s, y \rangle = \beta \langle y, y \rangle\,.$$

Значение комплексного сигнала $x(t) = x_i(t) + j\, x_q(t)$ в каждый данный момент t лежит в комплексной плоскости C, перпендикулярной оси времени, рис. 1.1a, и может рассматриваться как двумерный вектор $\bar{x} = (x_i, x_q)$. Иными словами, комплексный сигнал – это вектор-функция $(x_i(t), x_q(t))$, график которой вьется вокруг временной оси, как вокруг шампура.



(a) Плоскость значений комплексного сигнала



(b) Когерентная ортогональность

Рис. 1.1. К ортогональности комплексных сигналов

Представление комплексного сигнала вещественной вектор-функцией лежит в русле парадигмы когерентности, когда пространство комплексных сигналов рассматривается как линейное пространство над полем не комплексных, а вещественных чисел. Тогда множества вещественных и мнимых сигналов оказываются линейными подпространствами, а комплексный сигнал $x(t) = x_i(t) + j\,x_q(t)$ – суммой компонент из вещественного и мнимого подпространств.

Разумеется, вещественное пространство переводится в мнимое умножением на скаляр j, но мнимая единица среди вещественных скаляров отсутствует.

Вещественная часть xy^* обращается в нуль, когда векторы $\bar{x}, \bar{y}$ ортогональны, мнимая – когда они коллинеарны. Обе части могут обратиться в нуль одновременно только при условии, что один из векторов $\bar{x}, \bar{y}$ равен нулю.

Комплексные сигналы $x(t)$, $y(t)$ называют *когерентно ортогональными*, если равна нулю вещественная часть их скалярного произведения:

$$\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \int (\bar{x}(u), \bar{y}(u))\,du = 0. \tag{1.2}$$

Это более слабое определение отвечает парадигме когерентности – вещественные и мнимые сигналы становятся ортогональными. Обычную ортогональность сигналов (1.1) называют *некогерентной.* Когерентная ортогональность может наступить не в силу какой-то специфики форм функций $x(t), y(t)$, а просто в силу того, что вектор $\bar{x}(t)$ ортогонален вектору $\bar{y}(t)$ при всех t, рис. 1.1*b*. Тогда подынтегральная функция обращается в нуль тождественно.

Различие между двумя типами ортогональности отчетливо выступает при рассмотрении фазовых сдвигов сигналов. Сдвиг фазы комплексного сигнала $x(t)$ на угол θ – это его умножение на комплексную экспоненту $e^{j\theta}$. Переходу от $x(t)$ к $x'(t) = x(t)e^{j\theta}$ отвечает поворот графика $x(t)$ как целого вокруг оси t на угол θ, рис. 1.1*a*.

Глава 2. **Спектральная теория**

2.1. Временное и частное представления сигналов

Известное преобразование Фурье ставит в соответствие каждому сигналу конечной энергии $x(t)$ его амплитудный спектр:

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi jft} \, dt. \tag{2.1}$$

Преобразование обратимо:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{+2\pi jft} \, df. \tag{2.2}$$

Ядро этого интегрального преобразования, комплексная экспонента $\chi(ft) = e^{2\pi jft}$, является функцией сразу двух переменных – времени t и частоты f. При желании ее можно рассматривать либо как функцию времени $\chi_f(t) = \chi(ft)$ с параметром f, либо как функцию частоты $\chi_t(f) = \chi(ft)$ с параметром t.

В той же мере тривиальны следующие факты:

$$x(f)|_{f=0} = \int x(t) dt, \quad x(t)|_{t=0} = \int x(f) df,$$

но когда интегральные формы преобразований Фурье не маячат перед глазами, факты эти могут вводить в ступор. Почему вдруг значение в нуле одной функции равно интегралу от другой?

Упражнение 2.1. (∇) *Покажите, что преобразование* (2.1) *дает разложение спектра по базису из функций $\chi_t(f)$:*

$$x(f) = \int \left\langle x, \chi_t^* \right\rangle (f) \, \chi_t^*(f) \, dt.$$

Упражнение 2.2. (∇) *Покажите, что неверный выбор знака в показателе экспоненты ядра преобразования Фурье* (2.1) *приведет к отражению спектра: $x(f) \to x(-f)$.*

2.2. Элементарные преобразования

Поначалу может показаться, что преобразование Фурье – это в первую очередь необходимость вычислять сложные интегралы. Все совершенно иначе. В теории сигналов преобразование

Фурье – это, скорее, категория мышления. Что же до вычислений, то все ограничивается разбором небольшого числа простых примеров. Гораздо более существенно неформальное понимание соотношений между законами преобразования сигналов во временной и частотной областях при тех или иных операциях. Понимание этих связей – это как раз то, что делает мысленные переходы между временной и частотной областями мощным инструментом анализа.

Простейшие преобразования сигналов – это их масштабирования и сдвиги. Связи между действиями этих преобразований во временной и частотной областях и обсуждаются ниже.

Масштабирования

Пусть S_a – сохраняющий энергию оператор масштабирования с параметром a. Его действие на сигнал x во временной области определяется правилом (**??**):

$$x'(t) = S_a\, x(t) = \sqrt{a}x(at).$$

Обнаруживается, что спектр масштабированного сигнала

$$x'(f) = \int x'(t)e^{2\pi jft}dt = \frac{\sqrt{a}}{a}\int x(at)e^{2\pi j\frac{f}{a}(at)}d\,(at) = \frac{1}{\sqrt{a}}x\Big(\frac{f}{a}\Big)$$

может быть получен из исходного спектра $x(f)$ обратным оператором масштабирования с параметром $1/a$:

$$x'(f) = S_{1/a}x(f). \tag{2.3}$$

Таким образом, сохраняющее энергию масштабирование сигнала эквивалентно обратному масштабированию его спектра:

$$S_a x(t) \leftrightarrow S_{1/a}x(f).$$

Говоря по-простому, растяжению сигнала отвечает пропорциональное сжатие его спектра и наоборот. Причем если при растяжении сигнала принять меры к сохранению его энергии, то это автоматически обеспечит и сохранение энергии спектра – интеграла от квадрата его модуля.

Упражнение 2.3. ($\Diamond$) *Покажите, что*

$$x(at) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{a}\,x\Big(\frac{f}{a}\Big).$$

То есть простое растяжение сигнала сжимает спектр с сохранением площади под его графиком, равной значению сигнала в точке нуль. Верно и двойственное утверждение: растяжение спектра эквивалентно сжатию сигнала с сохранением его площади.

Сдвиги по времени и частоте

Рассмотрим поведение спектра сигнала при его сдвиге во времени на t_0 – преобразовании $x'(t) = x(t - t_0)$:

$$x'(f) = \int x(t - t_0) e^{-2\pi j f t}\, dt =$$
$$= e^{-2\pi j f t_0} \int x(t - t_0) e^{-2\pi j f (t - t_0)}\, dt = e^{-2\pi j f t_0} x(f).$$

Видно, что временной сдвиг сигнала эквивалентен умножению его спектра на комплексную гармоническую функцию:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow x(f) e^{-2\pi j t_0 f}. \tag{2.4}$$

Такое поведение спектра при сдвигах сигнала имеет простое объяснение. Значения $x(f)$ – это коэффициенты разложения сигнала по собственным функциям $\chi_f(t) = e^{j2\pi f t}$ оператора сдвига во времени. Под действием сдвига эти базисные функции просто умножаются на собственные значения $\lambda_f = e^{-2\pi j t_0 f}$, что и определяет закон преобразования коэффициентов разложения.

Столь же просто проверить, что и, наоборот, сдвиг спектра на f_0 по частоте эквивалентен умножению на комплексную экспоненту временной формы сигнала:

$$x(t) e^{+2\pi j f_0 t} \leftrightarrow x(f - f_0). \tag{2.5}$$

Результаты (2.4), (2.5), выражающие двойственность между сдвигами и умножениями на экспоненту во временной и частотной областях, составляют содержание теоремы о сдвиге из теории Фурье.

Учебное издание

Зенюк Дмитрий Алексеевич
Орлов Юрий Николаевич

ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ АДВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *Н. Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 05.08.2016. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 5,9. Уч.-изд. л. 5,3. Тираж 150 экз. Заказ № 000.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mail.mipt.ru