Содержание

Аннотация

Это вводный абзац в начале документа.

1 Языки и их свойства, операции над языками

1.1 Введение

Назовём множество абстрактных объектов – символов – алфавитом Σ. Пусть алфавит конечный. Пустой и бесконечный алфавиты нам неинтересны.

Введём слово над алфавитом $\Sigma : w(A) = a_i, a_i \in \Sigma, \forall i = 0..|w(A)|$ – последовательность (строка) символов из алфавита $, 0 \leq |w(\Sigma)| < +\infty$.

Чтобы оперировать словами длины 0, вводят специальный символ длины $0 - \varepsilon : |\varepsilon^n| = 0, n = 0.. + \infty$; Его называют пустым.

Обозначим множество таких последовательностей из символов алфавита Σ, включая слово длины 0, как Σ^*.Тогда некоторый язык $L(\Sigma)$ над алфавитом Σ можно задать как подмножество слов над алфавитом: Ł$(\Sigma) \subset (\Sigma^*)$. Таким образом, математически мы определили объекты, с которыми будем работать, это последовательности конечной длины и множества.

Теория формальных языков – математический способ конструктивного описания множеств последовательностей (слов) элементов некоторых множеств (алфавитов). Почему конструктивного? Потому что, в принципе, все слова языка можно просто перечислить, если:

1. любое слово – конечной длины.

2. множество слов конечно.

3. нет ограничений на временную сложность алгоритмов, используемых в работе с таким языком.

Нарушения 1) и 2), соответственно, говорят о том, что мы будем перечислять слова бесконечно, 3) это практическая хотелка – нам нужны алгоритмы, которые работают, по крайней мере, за полином небольшой степени и по времени, и по памяти, так как мы хотим работать с относительно мощными языками, и нам важна масштабируемость.

В нашем курсе 1) будет всегда выполняться: считаем, что любое слово языка – конечной длины. Но пусть 2) не выполняется, а 3) нас просят строго соблюсти. Тогда задача конструктивного, то есть 'сжатого' и точного описания множества слов обретает куда более глубокую практическую значимость.

Кроме перечисления, можно предложить еще 2 способа задания языка:

- Формальный распознаватель – все слова языка можно распознать некоторой вычислительной машиной.
- Генератор – все слова языка можно вывести посредством формальной процедуры переписывания строк по системе правил. Система математических объектов, позволяющих это сделать, называется формальной грамматикой.

С этими двумя способами теория формальных языков и работает. Мы начнём с первого, в последствии переключимся на второй, а затем синхронно двинемся дальше с обеими способами, усложняя и рассматриваемые методы, подходы и задачи.

1.2 Операции над языками

Начнём с базовых операций над элементами языков – словами.

1.2.1 Операции над словами

Опр. 1.1 *Конкатенация – склеивание*[1] *строк. Если* $u = a_1 \dots a_m$ *и* $v = b_1 \dots b_n$ *— две строки, то их конкатенация — это строка* $u \cdot v = uv = a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n$*. Знак* $\cdot$*, как правило, опускают.*

Конкатенация строки сама с собой обозначается как возведение в степень: w^n – n раз повторяемая w. $w^1 = w, w^0 = \varepsilon$, то есть конкатенация играет роль умножения с единицей ε, и превращает язык в свободную группу.

Опр. 1.2 *Взятие префикса*

Опр. 1.3 *Взятие суффикса*

Конечно, существует множество других интересных, широкоиспользуемых либо экзотических операций, вроде инверсии слова, но оставим их за рамками.

[1] устоявшегося русского термина пока нет, увы

1.2.2 Операции над языками как множествами

Объединение, пересечение, вычитание, дополнение – как с обычными множествами ... Нам они понадобятся, в особенности, при проверке свойств принадлежности языка некоторому классу.

1.2.3 Операции над языками как множествами, содержащими последовательности

Опр. 1.4 *Конкатенация языков $L_1(\Sigma_1), L_2(\Sigma_2) \subset (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$ – это операция склеивания всех возможных слов языков: $L_1 \cdot L_2 = \{uv | u \in L_1, v \in L_2\}$.*

Можно взять не 2, а другое число языков k. Если язык конкатенируют сам с собой, то это обозначают L^k. Для $k < 2$ операцию определяют так: если $k = 0$, то это будет язык $\{\varepsilon\}$, что соответствует определению $x^0 = 1$ для чисел. Если $k = 1$, то это будет сам L. Как видим, конкатенация играет роль умножения[2].

Опр. 1.5 *Итерация языка $L : L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$.*

Заметим, что множество слов Σ^* – итерация языка Σ.

2 Конечные автоматы

Конечный автомат – математическая модель вычислителя с конечной памятью.

Опр. 2.1 *Недетерминированный конечный автомат (НКА) – это кортеж $\langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$:*

- *$Q, |Q| < \infty$ – множество состояний*
- *Σ – алфавит*
- *$\Delta \subset Q \times \Sigma^* \times Q$ – множество переходов*[3]
- *$q_0 \in Q$ – стартовое состояние*
- *$F \subset Q$ – множество финальных состояний*

Существует эквивалентное определение автомата, где вместо Δ задают функцию перехода $\delta : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$; будем пользоваться «более графовым» определением через Δ, хотя функция перехода нам ещё понадобится.

Способ распознавания строки автоматом уже лежит в его определении: представим граф автомата. Вершины – это состояния, рёбра – переходы. Если мы находимся в стартовом состоянии, и нам подают на вход строку, то

[2] это и правда умножение в некотором полукольце с единицей ε (вопрос: а какая операция – сложение в этом полукольце?)

[3] Δ задаёт множество двухместных отношений на Q, помеченных элементами Σ^*.

нам достаточно брать по символу/слову из Σ^*, смотреть, по каким рёбрам графа мы можем перейти (если ε – перейти можем спонтанно), совершать переход(ы), брать следующий символ/слово из Σ^*, смотреть, куда мы по нему можем перейти из текущего состояния, и так далее. Слово распозналось, если мы дошли до какого либо финишного состояния и обработали всё слово. То есть распознавание строки автоматом – суть проверка достижимости по рёбрам его графа из q_0 в одно из состояний в F.

Основным недостатком КА служит то, что мы в каждый момент времени знаем только текущее состояние и в какие мы можем из него перейти. У нас нет данных о том, что происходило ранее, и это накладывает ограничения на выразительность[4]. К примеру, нельзя составить КА, распознающий язык $a^n b^n, \forall n \in [0, +\infty)$, хотя для любого фиксированного множества n – можно (Рис. 1).

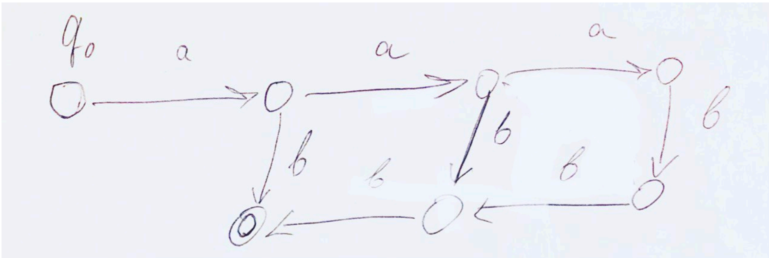
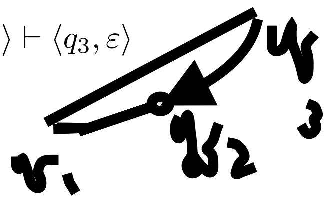


Рис. 1: КА, распознающий язык $a^n b^n, n \in [1, 3]$

О достижимости проще говорить в терминах пар $\langle q_x, v\rangle \in Q \times \Sigma^*$, где q_x – текущее состояние, а v – недоразобранная подстрока входной строки. Такая пара называется конфигурацией автомата[5]. Введём отношение достижимости на конфигурациях.

Опр. 2.2 *Достижимость* ($\vdash$) *– наименьшее рефлексивное транзитивное отношение над* $Q \times \Sigma^*$*, такое что:*

1. $\forall w \in \Sigma^* : (\langle q_1, w\rangle \to q_2) \in \Delta \Rightarrow \langle q_1, w\rangle \Rightarrow \langle q_2, \varepsilon\rangle$
2. $\forall u, v \in \Sigma^* : \langle q_1, u\rangle \vdash \langle q_2, \varepsilon\rangle, \langle q_2, v\rangle \vdash \langle q_3, \varepsilon\rangle \Rightarrow \langle q_1, uv\rangle \vdash \langle q_3, \varepsilon\rangle$
3. $\forall u \in \Sigma^* : \langle q_1, u\rangle \vdash \langle q_2, \varepsilon\rangle \Rightarrow \forall v \in \Sigma^* \langle q_1, uv\rangle \vdash \langle q_2, v\rangle$

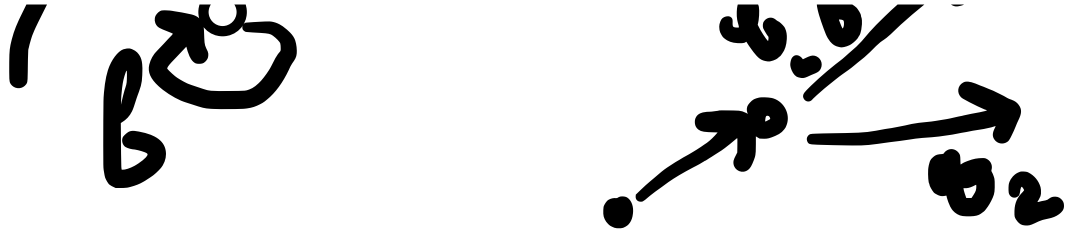


Теперь несложно задать язык, распознаваемый КА.

Опр. 2.3 *Пусть дан* $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$*. Язык, распознаваемый автоматом* M *–* $L(M) = \{w \in \Sigma^* | \exists q \in F : \langle q_0, w\rangle \vdash \langle q, \varepsilon\rangle\}$.

[4]тем не менее, конечные автоматы широко применяются в технике вокруг нас. Примеры: светофор, лифт, кодовый замок, система контроля воздуха в помещении, компьютерная мышь, аудиоплеер, веб-форма и т.д.

[5]по мере усложнения моделей вычислителей, мы будем добавлять новые параметры в конфигурацию – например, появится параметр, описывающий стек, и т.д.



Опр. 2.4 *Язык L называется автоматным, если существует КА M : $L = L(M)$. Множество таких языков L образует класс автоматных языков.*

На практике гораздо приятнее работать с детерминированным конечным автоматом (ДКА).

Опр. 2.5 *(Неформально) НКА $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$ называется детерминированным КА, если*

- *Все переходы – однобуквенные: $\forall(\langle q_1, w\rangle \to q_2) \in \Delta : |w| = 1$*
- *$\forall a \in \Sigma, q \in Q |\delta(q, a)| \leq 1$, где $\delta(q, a)$ – множество состояний, достижимых из q по символу a. Задание: расписать $\delta(q, w)$ аккуратнее через конфигурации.*

Иными словами, для любых фиксированных букв, для любого состояния, переход приводит только в одно результирующее состояние.

Можно ввести ДКА-автоматный язык L_{NFA} по аналогии с тем, как вводили $L(M) = L_{DFA}$. Очевидно, что $L_{DFA} \subseteq L_{NFA}$, так как ДКА – это частный случай НКА.

Если мы покажем, что произвольный НКА сводится к ДКА, то $L_{DFA} = L_{NFA}$.

2.1 Сведение НКА к ДКА

Л. 2.1 *(«Построение подмножеств», Рабин и Скотт [1959]). Пусть $B = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, F)$ — произвольный. Тогда $\exists$ DFA $A = (\Sigma, 2^Q, Q_0, \Delta', F')$, состояния которого — помножества Q, который распознаёт тот же язык, что и B. Его переход в каждом состоянии-подмножестве $s \subseteq Q$ по каждому символу $a \in \Sigma$ ведет во множество состояний, достижимых по a из некоторого состояния s.*

Произведём серию упрощений НКА.

Утв. 2.1 *В определнии НКА можно считать все переходы – однобуквенными. Для этого нужно перестроить множества Δ и Q.*

Утв. 2.2 *В определнии НКА можно считать $|F| = 1$.*

Эти утверждения доказываются технически, не будем этим заниматься сейчас (рекомендуется попробовать доказать дома или посмотреть в классических книгах и курсах).

TODO: доказательство Л2.1, алгоритм на базе метода «построение подмножеств»