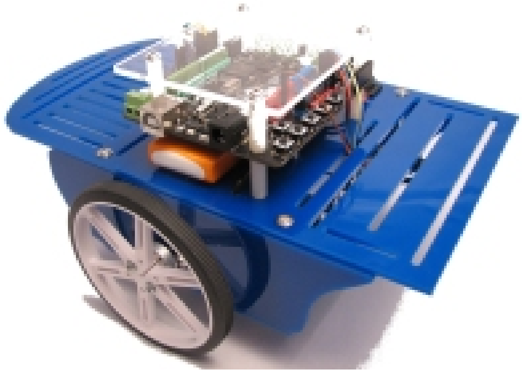
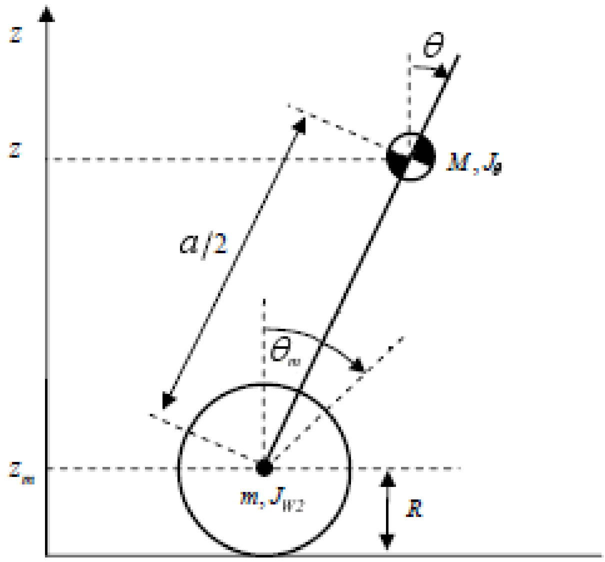
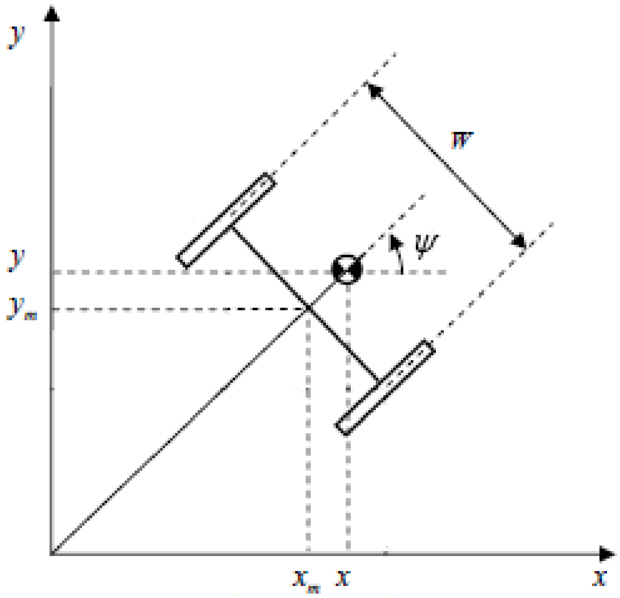
Equations du robot Geeros

Nous allons détailler dans ce document les équations dyamique du robot Geeros.







Variables et paramètres du robot:

- a : hauteur (m)
- M : masse (kg)
- W : distance entre les roues (m)
- J_ψ : inertie autour de l'axe vertical passant par le centre de l'axe des moteurs ($\mathrm{kg\cdot m^2}$)
- J_θ : inertie autour de l'axe des moteurs ($\mathrm{kg\cdot m^2}$)
- m : masse d'une roue (kg)
- J_W : inertie d'une roue autour de son axe de rotation ($\mathrm{kg\cdot m^2}$)
- R : rayon d'une roue (m)
- f_w : coefficient de frottement d'une roue sur le sol $\left(\dfrac{\mathrm{N\cdot m\cdot s}}{\mathrm{rad}}\right)$
- J_m : inertie du rotor d'un moteur autour de son axe de rotation ($\mathrm{kg\cdot m^2}$)
- K : coefficient de couple d'un moteur $\left(\dfrac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{A}}\right)$
- R_m : résistance interne d'un moteur (Ω)
- L : inductance du moteur (H)
- d : coefficient de frottement d'un moteur $\left(\dfrac{\mathrm{N\cdot m\cdot s}}{\mathrm{rad}}\right)$
- n : rapport de réduction d'un moteur
- $x_m(t), y_m(t), z_m(t)$: position du centre de l'axe des moteurs dans le repère de référence (m)
- $x(t), y(t), z(t)$: position du centre de gravité dans le repère de référence (m)
- $\psi(t)$: angle autour de la verticale passant par le centre de l'axe des moteurs (rad)
- $\theta_{RD}(t)$, $\theta_{RG}(t)$: angle de rotation (rad) des roues droite et gauche
- $\theta_m(t)$: angle moyen des roues (rad)
- $\theta(t)$: angle d'inclinaison du robot (rad)
- $x_{RD}(t), y_{RD}(t), z_{RD}(t)$: position de la roue droite dans le repère de référence (m)
- $x_{RG}(t), y_{RG}(t), z_{RG}(t)$: position de la roue gauche dans le repère de référence (m)
- $V_{RD}(t)$, $V_{RG}(t)$: tensions appliquées aux moteurs

L'angle moyen des roues et l'angle de lacet du robot s'écrivent:

$$\theta_m(t) = \frac{1}{2}\,\theta_{RD}(t) + \frac{1}{2}\,\theta_{RG}(t) \tag{1}$$

$$\psi(t) = \frac{R\left(\theta_{RD}(t) - \theta_{RG}(t)\right)}{W} \tag{2}$$

On en déduit les angles de chaque roue en fonction des deux autres variables:

$$\left[\theta_{RD}(t) = \frac{1}{2}\,\frac{\psi(t)\;W + 2\,R\,\theta_m(t)}{R},\ \theta_{RG}(t) = -\,\frac{1}{2}\,\frac{\psi(t)\;W - 2\,R\,\theta_m(t)}{R}\right] \tag{3}$$

La vitesse du centre de l'axe des moteurs s'écrit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x_m(t) = R\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\theta_m(t)\right)\cos(\psi(t)) \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,y_m(t) = R\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\theta_m(t)\right)\sin(\psi(t)) \tag{5}$$

Son altitude s'écrit:

$$z_m(t) = R \tag{6}$$

Position du centre de gravité du robot (angle θ par rapport à la verticale):

$$x(t) = x_m(t) + \frac{1}{2}\,a\sin(\theta(t))\cos(\psi(t)) \tag{7}$$

$$y(t) = y_m(t) + \frac{1}{2}\,a\sin(\theta(t))\sin(\psi(t)) \tag{8}$$

$$z(t) = z_m(t) + \frac{1}{2}\,a\cos(\theta(t)) \tag{9}$$

Ecrivons maintenant les équations de position de chaque roue.

Position de la roue droite:

$$x_{RD}(t) = x_m(t) + \frac{1}{2}\,W\sin(\psi(t)) \tag{10}$$

$$y_{RD}(t) = y_m(t) - \frac{1}{2}\,W\cos(\psi(t)) \tag{11}$$

$$z_{RD}(t) = z_m(t) \tag{12}$$

Position de la roue gauche:

$$x_{RG}(t) = x_m(t) - \frac{1}{2}\,W\sin(\psi(t)) \tag{13}$$

$$y_{RG}(t) = y_m(t) + \frac{1}{2}\,W\cos(\psi(t)) \tag{14}$$

$$z_{RG}(t) = z_m(t) \tag{15}$$

Nous allons écrire les équations suivant le formalisme de Lagrange. Ecrivons tout d'abord les équations des énergies cinétiques et potentielles.

Energie cinétique de translation:

$$T1 = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{d}{dt} x_{RD}(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y_{RD}(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z_{RD}(t) \right)^2 \right) + \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{d}{dt} x_{RG}(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y_{RG}(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z_{RG}(t) \right)^2 \right) + \frac{1}{2} M \left(\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z(t) \right)^2 \right) \tag{16}$$

Utilisons les équations précédentes pour exprimer cette équation en fonction de $\psi(t)$, $\theta(t)$ et de l'angle moyen de rotation des roues:

$$T1 = \frac{1}{2} R^2 (M + 2m) \left(\frac{d}{dt} \theta_m(t) \right)^2 + \frac{1}{2} M a \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \cos(\theta(t)) R \left(\frac{d}{dt} \theta_m(t) \right) + \frac{1}{8} \left(-M \cos(\theta(t))^2 a^2 + M a^2 + 2 W^2 m \right) \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 + \frac{1}{8} M a^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \tag{17}$$

Energie cinétique de rotation:

$$T2 = \frac{1}{2} J_W \left(\frac{d}{dt} \theta_{RD}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} J_W \left(\frac{d}{dt} \theta_{RG}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} J_\theta \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \frac{1}{2} J_\psi \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 + \frac{1}{2} n^2 J_m \left(\frac{d}{dt} \theta_{RD}(t) - \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \right)^2 + \frac{1}{2} n^2 J_m \left(\frac{d}{dt} \theta_{RG}(t) - \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \right)^2 \tag{18}$$

Ceci s'écrit en fonction de $\psi(t)$, $\theta(t)$ et de l'angle moyen de rotation des roues:

$$T2 = \frac{1}{4} \frac{1}{R^2} \left(4 R^2 (J_m n^2 + J_W) \left(\frac{d}{dt} \theta_m(t) \right)^2 - 8 n^2 J_m \left(\frac{d}{dt} \theta_m(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) R^2 + 4 \left(n^2 J_m + \frac{1}{2} J_\theta \right) R^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + 2 \left(R^2 J_\psi + \frac{1}{2} W^2 (J_m n^2 + J_W) \right) \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \right) \tag{19}$$

Energie potentielle:

$$U = m g z_{RD}(t) + m g z_{RG}(t) + M g z(t) \tag{20}$$

Ceci s'écrit en fonction de $\theta(t)$:

$$U = 2 m g R + M g \left(R + \frac{1}{2} a \cos(\theta(t)) \right) \tag{21}$$

Le lagrangien est la somme des énergies cinétiques moins l'énergie potentielle:

$$
\begin{aligned}
L(t) = {} & \frac{1}{8}\,\frac{1}{R^2}\Bigg(4\left(\left((M+2\,m)\,R^2+2\,n^2 J_m+2\,J_W\right)R^2\left(\frac{d}{dt}\,\theta_m(t)\right)^2\right. \\
& +4\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)R^2\left(M\cos(\theta(t))\,R\,a-4\,n^2 J_m\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta_m(t)\right)+\Big(-M\cos(\theta(t))^2 R^2 a^2 \\
& +\left(M a^2+2\,W^2 m+4\,J_\psi\right)R^2+2\,W^2\left(J_m n^2+J_W\right)\Big)\left(\frac{d}{dt}\,\psi(t)\right)^2-4\,R^2\Bigg(\left(-\frac{1}{4}\,M a^2\right. \\
& \left.-2\,n^2 J_m-J_\theta\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)^2+\left(M\cos(\theta(t))\,a+2\,R\,(M+2\,m)\right)g\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Nous allons choisir les coordonnées généralisées suivantes pour écrire les équations de Lagrange:

θ_m : angle de rotation moyen entre les roues droite et gauche

θ : angle d'inclinaison du gyropode

ψ : angle de rotation autour de la verticale

Celles-ci s'écrivent:

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial}{\partial\,\dot{\theta}_m}\,L(t)\right)-\frac{\partial}{\partial\,\theta_m}\,L(t)=F_{\theta m}(t)$$

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial}{\partial\,\dot{\theta}}\,L(t)\right)-\frac{\partial}{\partial\,\theta}\,L(t)=F_{\theta}(t)$$

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial}{\partial\,\dot{\psi}}\,L(t)\right)-\frac{\partial}{\partial\,\psi}\,L(t)=F_{\psi}(t)$$

Ceci donne pour chacune des forces:

$$
\begin{aligned}
F_{\theta m}(t) = {} & \frac{1}{2}\left((2\,M+4\,m)\,R^2+4\,n^2 J_m+4\,J_W\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta_m(t)\right)+\frac{1}{2}\Big(M\cos(\theta(t))\,R\,a \\
& -4\,n^2 J_m\Big)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)^2 R\,M\sin(\theta(t))\,a
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\theta}(t) = {} & \frac{1}{4}\left(8\,J_m n^2+M a^2+4\,J_\theta\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right)+\frac{1}{4}\Big(2\,M\cos(\theta(t))\,R\,a \\
& -8\,n^2 J_m\Big)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta_m(t)\right)-\frac{1}{4}\,M\sin(\theta(t))\,a\left(\cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\,\psi(t)\right)^2 a+2\,g\right)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\psi}(t) = {} & \frac{1}{4}\,\frac{1}{R^2}\Bigg(\Big(-M\cos(\theta(t))^2 R^2 a^2+\left(M a^2+2\,W^2 m+4\,J_\psi\right)R^2+2\,W^2\Big(J_m n^2 \\
& +J_W\Big)\Big)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi(t)\right)+2\,M\cos(\theta(t))\,a^2\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\,\psi(t)\right)R^2\Bigg)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

On peut aussi écrire des forces en fonction des paramètres des moteurs:

$$F_{RD}(t) = n\,K\,i_{RD}(t) + d\left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta_{RD}(t)\right)\right) - f_w\left(\frac{d}{dt}\theta_{RD}(t)\right) \quad (26)$$

$$F_{RG}(t) = n\,K\,i_{RG}(t) + d\left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta_{RG}(t)\right)\right) - f_w\left(\frac{d}{dt}\theta_{RG}(t)\right) \quad (27)$$

$$F_\theta(t) = -n\,K\,i_{RG}(t) - n\,K\,i_{RD}(t) - d\left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta_{RG}(t)\right)\right) - d\left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta_{RD}(t)\right)\right) \quad (28)$$

En supposant l'inductance dans les moteurs négligeable puisqu'on s'intéresse ici à la mécanique globale du robot, le courant dans les moteurs s'écrit:

$$i_{RD}(t) = \frac{V_{RD}(t) + n\,K\left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta_{RD}(t)\right)\right)}{R_m} \quad (29)$$

$$i_{RG}(t) = \frac{V_{RG}(t) + n\,K\left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta_{RG}(t)\right)\right)}{R_m} \quad (30)$$

Substituons ces courants dans l'expression des forces:

$$F_{RD}(t) = \frac{\left((-d - f_w)\,R_m - K^2 n^2\right)\left(\frac{d}{dt}\theta_{RD}(t)\right) + \left(K^2 n^2 + R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) + K\,V_{RD}(t)\,n}{R_m} \quad (31)$$

$$F_{RG}(t) = \frac{\left((-d - f_w)\,R_m - K^2 n^2\right)\left(\frac{d}{dt}\theta_{RG}(t)\right) + \left(K^2 n^2 + R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) + K\,V_{RG}(t)\,n}{R_m} \quad (32)$$

$$F_\theta(t) = \frac{1}{R_m}\left(\left(2\,K^2 n^2 + 2\,R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\theta_m(t)\right) + \left(-2\,K^2 n^2 - 2\,R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) - K\,n\left(V_{RD}(t) + V_{RG}(t)\right)\right) \quad (33)$$

Les sommes des forces pour les 2 mouvements (longitudinal et de rotation) sont:

$$F_{\theta m}(t) = F_{RD}(t) + F_{RG}(t) \tag{34}$$

$$F_{\psi}(t) = \frac{1}{2}\,\frac{W\left(F_{RD}(t) - F_{RG}(t)\right)}{R} \tag{35}$$

Ce qui s'écrit:

$$F_{\theta m}(t) = \frac{1}{R_m}\left(\left(\left(-2\,d - 2\,f_w\right)R_m - 2\,K^2\,n^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\theta_m(t)\right) + \left(2\,K^2\,n^2 + 2\,R_m\,d\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\theta(t)\right) + K\,n\left(V_{RD}(t) + V_{RG}(t)\right)\right) \tag{36}$$

$$F_{\psi}(t) = \frac{1}{2}\,\frac{W\left(-\left(\left(d + f_w\right)R_m + K^2\,n^2\right)W\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\psi(t)\right) + K\,R\,n\left(V_{RD}(t) - V_{RG}(t)\right)\right)}{R_m\,R^2} \tag{37}$$

En substituant les forces calculées par l'intermédiaire du Lagrangien, on obtient:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{R_m}\left(4\,R_m\left(n^2 J_m+\left(\frac{1}{2}\,M+m\right)R^2+J_W\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta_m(t)\right)-4\,R_m\left(-\frac{1}{4}\,M\cos(\theta(t))\,R\,a+n^2 J_m\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right)+\left(\left(4\,f_w+4\,d\right)R_m+4\,K^2 n^2\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta_m(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)^2 R\,M\sin(\theta(t))\,a\,R_m+\left(-4\,K^2 n^2-4\,R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)-2\,K\,n\left(V_{RD}(t)+V_{RG}(t)\right)\right)=0 \tag{38}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{R_m}\left(4\,R_m\left(\frac{1}{4}\,M\,a^2+2\,n^2 J_m+J_\theta\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right)+2\,R_m\left(M\cos(\theta(t))\,R\,a-4\,n^2 J_m\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta_m(t)\right)+\left(-8\,K^2 n^2-8\,R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta_m(t)\right)+\left(8\,K^2 n^2+8\,R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)-M\cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\,\psi(t)\right)^2\sin(\theta(t))\,R_m\,a^2-2\,M\sin(\theta(t))\,R_m\,a\,g+4\,K\,n\left(V_{RD}(t)+V_{RG}(t)\right)\right)=0 \tag{39}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{R_m\,R^2}\left(2\left(-\frac{1}{2}\,M\cos(\theta(t))^2 R^2 a^2+\left(\frac{1}{2}\,M\,a^2+W^2 m+2\,J_\psi\right)R^2+W^2\left(J_m n^2+J_W\right)\right)R_m\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi(t)\right)+\left(2\,R_m\cos(\theta(t))\,M\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)R^2 a^2+2\left(\left(d+f_w\right)R_m+K^2 n^2\right)W^2\right)\left(\frac{d}{dt}\,\psi(t)\right)-2\,K\,R\,W\,n\left(V_{RD}(t)-V_{RG}(t)\right)\right)=0 \tag{40}$$

Définissons 2 variables correspondant à la tension de commande des moteurs pour chaque mouvement, en fonction de la tension d'alimentation de chaque moteur:

$$V_x(t) = \frac{1}{2} V_{RD}(t) + \frac{1}{2} V_{RG}(t) \tag{41}$$

$$V_\psi(t) = \frac{1}{2} V_{RD}(t) - \frac{1}{2} V_{RG}(t) \tag{42}$$

Ceci nous permet d'exprimer les tensions de commande de chaque moteur en fonction des tensions globales pour les différents mouvements:

$$\left[V_{RD}(t) = V_x(t) + V_\psi(t),\, V_{RG}(t) = -V_\psi(t) + V_x(t)\right] \tag{43}$$

Substituons ces relations dans les équations de mouvement:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{R_m}\Bigg(4\,R_m\left(n^2 J_m + \left(\frac{1}{2} M + m\right) R^2 + J_W\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta_m(t)\right) - 4\,R_m\Bigg(-\frac{1}{4} M\cos(\theta(t))\,R\,a + n^2 J_m\Bigg)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right) + \left(\left(4\,f_w + 4\,d\right) R_m + 4\,K^2 n^2\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta_m(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)^2 R\,M\sin(\theta(t))\,a\,R_m + \left(-4\,K^2 n^2 - 4\,R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right) - 4\,K\,n\,V_x(t)\Bigg) = 0 \tag{44}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{R_m}\Bigg(4\,R_m\left(\frac{1}{4} M a^2 + 2\,n^2 J_m + J_\theta\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\right) + 2\,R_m\left(M\cos(\theta(t))\,R\,a - 4\,n^2 J_m\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta_m(t)\right) + \left(-8\,K^2 n^2 - 8\,R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta_m(t)\right) + \left(8\,K^2 n^2 + 8\,R_m\,d\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right) - M\cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\,\psi(t)\right)^2 \sin(\theta(t))\,R_m\,a^2 - 2\,M\sin(\theta(t))\,R_m\,a\,g + 8\,K\,n\,V_x(t)\Bigg) = 0 \tag{45}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{R_m R^2}\Bigg(2\left(-\frac{1}{2} M\cos(\theta(t))^2 R^2 a^2 + \left(\frac{1}{2} M a^2 + W^2 m + 2\,J_\psi\right) R^2 + W^2\left(J_m n^2 + J_W\right)\right) R_m\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi(t)\right) + \left(2\,R_m\cos(\theta(t))\,M\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right) R^2 a^2 + 2\left(\left(d + f_w\right) R_m + K^2 n^2\right) W^2\right)\left(\frac{d}{dt}\,\psi(t)\right) - 4\,K\,R\,W\,n\,V_\psi(t)\Bigg) = 0 \tag{46}$$

Faisons apparaître explicitement les vitesses:

$$\frac{d}{dt}\,\theta_m(t) = \frac{v_m(t)}{R} \tag{47}$$

$$\frac{d}{dt}\,\theta(t) = \omega(t) \tag{48}$$

$$\frac{d}{dt}\,\psi(t) = \xi(t) \tag{49}$$

Les équations du mouvement s'écrivent alors ainsi:

$$\frac{d}{dt}\,v_m(t) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{R_m\left(n^2 J_m + \left(\frac{1}{2}\,M + m\right)R^2 + J_W\right)}\Bigg(4\,R_m\left(-\frac{1}{4}\,M\cos(\theta(t))\,R\,a + n^2 J_m\right)R\left(\frac{d}{dt}\,\omega(t)\right) + \omega(t)^2 R^2 M\sin(\theta(t))\,a\,R_m + 4\,R\left(K^2 n^2 + R_m d\right)\omega(t) + \left(\left(-4\,f_w - 4\,d\right)R_m - 4\,K^2 n^2\right)v_m(t) + 4\,K\,n\,V_x(t)\,R\Bigg) \tag{50}$$

$$\frac{d}{dt}\,\omega(t) = \frac{1}{R_m R\left(8\,J_m n^2 + M a^2 + 4\,J_\theta\right)}\Bigg(-2\,R_m\left(M\cos(\theta(t))\,R\,a - 4\,n^2 J_m\right)\left(\frac{d}{dt}\,v_m(t)\right) + M\cos(\theta(t))\,\xi(t)^2\sin(\theta(t))\,R_m a^2 R + 2\,M\sin(\theta(t))\,R_m\,a\,g\,R - 8\,R\left(K^2 n^2 + R_m d\right)\omega(t) + \left(8\,K^2 n^2 + 8\,R_m d\right)v_m(t) - 8\,K\,n\,V_x(t)\,R\Bigg) \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}\,\xi(t) = \frac{1}{2}\,\Bigg(-\left(2\,R_m\cos(\theta(t))\,M\sin(\theta(t))\,\omega(t)\,R^2 a^2 + 2\left(\left(d + f_w\right)R_m + K^2 n^2\right)W^2\right)\xi(t) + 4\,K\,R\,W\,n\,V_\psi(t)\Bigg) \Bigg/ \left(\left(\left(-\frac{1}{2}\,M\cos(\theta(t))^2 R^2 a^2 + \left(\frac{1}{2}\,M a^2 + W^2 m + 2\,J_\psi\right)R^2 + W^2\left(J_m n^2 + J_W\right)\right)R_m\right) \tag{52}$$

On peut enfin résoudre ces équatiosn pour avoir un système ordinaire:

$$\frac{d}{dt} v_m(t) = \frac{1}{32} \Big(-M^2 \cos(\theta(t))^2 \sin(\theta(t))\, \xi(t)^2 R^2 R_m a^3 - 8 \Big(-\frac{1}{2} a \Big(J_m \xi(t)^2 n^2 - \frac{1}{2} M R g \Big) R_m \sin(\theta(t)) - R \left(K^2 n^2 + R_m d\right) \omega(t) + \left(K^2 n^2 + R_m d\right) v_m(t) - K n V_x(t) R \Big) M a R \cos(\theta(t)) + 8 M a R \Big(R \Big(n^2 J_m + \frac{1}{8} M a^2 + \frac{1}{2} J_\theta \Big) \omega(t)^2 + J_m g n^2 \Big) R_m \sin(\theta(t)) + 16 \left(K^2 n^2 + R_m d\right) R \left(\frac{1}{4} M a^2 + J_\theta\right) \omega(t) + \Big(-4 a^2 \left(\left(d + f_w\right) R_m + K^2 n^2 \right) M + \left(-32 J_m R_m f_w - 16 K^2 J_\theta \right) n^2 - 16 R_m J_\theta \left(d + f_w\right) \Big) v_m(t) + 16 V_x(t) R K n \left(\frac{1}{4} M a^2 + J_\theta \right) \Big) \Big/ \Big(\Big(-\frac{1}{16} M^2 \cos(\theta(t))^2 R^2 a^2 + \frac{1}{2} J_m M \cos(\theta(t)) R a n^2 + \frac{1}{16} M^2 R^2 a^2 + \Big(\Big(\frac{1}{2} n^2 J_m + \frac{1}{8} a^2 m + \frac{1}{4} J_\theta \Big) R^2 + \frac{1}{8} a^2 \left(J_m n^2 + J_W\right) \Big) M + m \left(n^2 J_m + \frac{1}{2} J_\theta \right) R^2 + J_m \left(J_W + \frac{1}{2} J_\theta \right) n^2 + \frac{1}{2} J_W J_\theta \Big) R_m \Big) \tag{53}$$

$$\frac{d}{dt} \omega(t) = \frac{1}{16} \Big(4 M \Big(\frac{1}{2} a \Big(-\frac{1}{2} \omega(t)^2 M R^2 + \xi(t)^2 \Big(n^2 J_m + \Big(\frac{1}{2} M + m \Big) R^2 + J_W \Big) \Big) R_m \sin(\theta(t)) - R \left(K^2 n^2 + R_m d\right) \omega(t) + \left(\left(d + f_w\right) R_m + K^2 n^2 \right) v_m(t) - K n V_x(t) R \Big) a R \cos(\theta(t)) + 4 M a R \Big(J_m \omega(t)^2 R n^2 + g \Big(n^2 J_m + \Big(\frac{1}{2} M + m \Big) R^2 + J_W \Big) \Big) R_m \sin(\theta(t)) - 16 \Big(\Big(\frac{1}{2} M + m \Big) R^2 + J_W \Big) \left(K^2 n^2 + R_m d\right) R \omega(t) + \Big(8 (M + 2 m) \left(K^2 n^2 + R_m d\right) R^2 + \left(16 J_W K^2 - 16 J_m R_m f_w \right) n^2 + 16 J_W R_m d \Big) v_m(t) - 16 \Big(\Big(\frac{1}{2} M + m \Big) R^2 + J_W \Big) V_x(t) R K n \Big) \Big/ \Big(R \Big(-\frac{1}{16} M^2 \cos(\theta(t))^2 R^2 a^2 + \frac{1}{2} J_m M \cos(\theta(t)) R a n^2 + \frac{1}{2} (M + 2 m) \Big(n^2 J_m + \frac{1}{8} M a^2 + \frac{1}{2} J_\theta \Big) R^2 + \frac{1}{8} a^2 \left(J_m n^2 + J_W\right) M + J_m \Big(J_W + \frac{1}{2} J_\theta \Big) n^2 + \frac{1}{2} J_W J_\theta \Big) R_m \Big) \tag{54}$$

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = \frac{1}{2} \Big(-\Big(2 R_m \cos(\theta(t)) M \sin(\theta(t))\, \omega(t) R^2 a^2 + 2 \left(\left(d + f_w\right) R_m + K^2 n^2 \right) W^2 \Big) \xi(t) + 4 K R W n V_\psi(t) \Big) \Big/ \Big(\Big(\Big(-\frac{1}{2} M \cos(\theta(t))^2 R^2 a^2 + \Big(\frac{1}{2} M a^2 + W^2 m + 2 J_\psi \Big) R^2 + W^2 \left(J_m n^2 + J_W\right) \Big) R_m \Big) \tag{55}$$

Les valeurs numériques des paramètres sont les suivantes:

$$\{J_W = 0.000024, J_m = 0.000003, K = 0.01, L = 0.003, M = 0.9, R = 0.045, R_m = 3, W = 0.17, a = 0.1, d = 0.0025, f_w = 0, g = 9.81, m = 0.024, n = 34, J_\psi = 0.0004, J_\theta = 0.002\} \tag{56}$$

Ce qui donne pour les équations:

$$\frac{d}{dt} v_m(t) = \Big(5.1258\ 10^{-8} \cos(\theta(t))^2 \sin(\theta(t))\ \xi(t)^2 + \Big(\big(-1.7557\ 10^{-7}\ \xi(t)^2 + 0.000010057\big) \sin(\theta(t)) + 0.000041547\ v_m(t) - 0.0000018696\ \omega(t) - 0.0000051639\ V_x(t)\Big) \cos(\theta(t)) + \big(-2.5483\ 10^{-7}\ \omega(t)^2 - 0.000034447\big) \sin(\theta(t)) + 0.000087199\ v_m(t) - 0.000003924\ \omega(t) - 0.000010838\ V_x(t)\Big) \Big/ \big(0.0000010251 \cos(\theta(t))^2 - 0.0000070225 \cos(\theta(t)) - 0.000012872\big) \tag{57}$$

$$\frac{d}{dt} \omega(t) = \Big(\Big(\big(0.0000010252\ \omega(t)^2 - 0.0000050083\ \xi(t)^2\big) \sin(\theta(t)) - 0.00092323\ v_m(t) + 0.000041546\ \omega(t) + 0.00011475\ V_x(t)\Big) \cos(\theta(t)) + \big(-0.0000035113\ \omega(t)^2 - 0.00098263\big) \sin(\theta(t)) - 0.00089717\ v_m(t) + 0.00004037\ \omega(t) + 0.0001115\ V_x(t)\Big) \Big/ \big(0.0000010251 \cos(\theta(t))^2 - 0.0000070225 \cos(\theta(t)) - 0.000012872\big) \tag{58}$$

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = \frac{0.000018225\ \xi(t) \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t))\ \omega(t) + 0.0011859\ \xi(t) - 0.001734\ V_\psi(t)}{0.0000091125 \cos(\theta(t))^2 - 0.00011306} \tag{59}$$

En supposant $\boldsymbol{\theta}(t) = 0$ afin de linéariser le système, on obtient:

$$\frac{d}{dt} v_m(t) = -6.823004441\ v_m(t) + 0.3070367897\ \omega(t) + 0.8480343836\ V_x(t) \tag{60}$$

$$\frac{d}{dt} \omega(t) = 96.47365575\ v_m(t) - 4.341208517\ \omega(t) - 11.99031236\ V_x(t) \tag{61}$$

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = -11.40864379\ \xi(t) + 16.68149787\ V_\psi(t) \tag{62}$$