

# Informatie theorie

Sebastiaan Polderman  
0820738

Paul Sohier  
0806122

7 februari 2011

# Hoofdstuk 1

## Informatie

### 1.1 Opdacht 1

*Een roulettespel heeft een draaischijf met 38 genummerde vakjes: 18 rode, 18 zwarte en 2 groene vakjes. Op de draaiende schijf wordt een balletje geworpen. Als de schijf tot rust komt, zal het balletje in één van de vakjes blijven liggen. Elk vakje heeft evenveel kans om het balletje te vangen. De zwarte vakjes zijn oneven genummerd van 1, 3, 5, ..., 35, de rode vakjes zijn even genummerd van 2, 4, 6, ..., 36 en de twee groene vakjes hebben de 'nummers' 0 en 00. Zodra de croupier de kleur of het nummer van het winnende vakje genoemd heeft, mag er niet meer ingezet worden.*

- (a) *Hoe groot is de selectieve informatie over elke kleur van het vakje?* 1 bit
- (b) *Hoe groot is de gemiddelde informatie over de kleur van het vakje?* 1 bit
- (c) *Hoe groot is de gemiddelde informatie over het nummer van het vakje?*  
 $(2 * 6 + 16 * 5 + 8 * 4 + 4 * 3 + 2 * 2 + 1 * 1) / 38 = 3.71 \text{ bit}$
- (d) *Hoe groot is de conditionele entropie (equivocatie) van de kleur als het nummer van het vakje al bekend is? De entropie  $H(X)$  is  $H(X) = -0,4736842105 \cdot \log_2(0,4736842105) - 0,4736842105 \cdot \log_2(0,4736842105) - 0,0526315789 \cdot \log_2(0,0526315789) = 1.24 \text{ bit}$  De conditionele entropie is:  $H(Y|X) = P(X = a) \cdot H(Y|X = a) + P(X = b) \cdot H(Y|X = b) = 0,4736842105 \cdot -0,0526315789 + 0,4736842105 = 0.498 \text{ bit}$*
- (e) *Hoe groot is de conditionele entropie (equivocatie) van het nummer als de kleur van het vakje al bekend is?*  $H(X|Y) = P(Y = a) \cdot H(X|Y =$

$$a) + P(Y = b) \cdot H(X|Y = b) = -0.0526315789 \cdot 0.4736842105 + 0.0526315789 = 0.027 \text{ bit}$$

- (f) Hoe groot is de gemeenschappelijke entropie van de kleur en het nummer van het vakje?
- (g) Hoe groot is de onderlingen entropie van de kleur en het nummer van het vakje?
- (h) maak van  $H(N, K)$ ,  $H(K)$ ,  $H(N)$ ,  $H(N|K)$ ,  $H(N; K)$ ,  $H(K|N)$  een schema zoals figuur 1.3. Houd rekening met de getalswaarde van de entropieën.

## 1.2 Opdracht 4

Volgens bijlage D komen in normale teksten korte woorden frequenter voor dan lange woorden. In het 'Groene boekje' woordenlijst van de Nederlandse taal) blijkt dat niet te kloppen. Geef hier een verklaring voor.

De drie bestaande lidwoorden zijn veel gebruikte woorden in de Nederlandse taal. Lidwoorden worden vaker gebruikt als “normale” woorden, waardoor de verhouding hierdoor al niet klopt. Maar bijvoorbeeld ook werkwoorden en ook persoonsvormen zijn gemiddeld genomen korter. Er zijn dus wel meer verschillende lange woorden, maar die worden minder “hergebruikt” als de eerder genoemde korte woorden.

## 1.3 Opdracht 5

Binare Coded Decimals ('BCD') is een code waarbij een getal van 0, 1, 2, ..., 99 in een 8 bit-woord (een 'byte') gecodeerd wordt. Hoeveel redundantie bevat zo'n BCD-woord?

Om de redundantie te berekenen hebben we eerst de entropie en de maximale entropie nodig om dit te kunnen berekenen.

**Minimale entropie**

$$H(X) = -\lim(p * \log(p)) = 0 \text{ Ofwel } p = 1$$

**Maximale entropie**

$$H_{max}(X) = \log(x) = \log(8) = 3$$

De redundantie hierna is dus:

$$R(X) = H_{max}(X) - H(X) = 3/1 = 3$$

## Hoofdstuk 2

# Codesystemen voor storingsvrije omgevingen

### 2.1 Opdracht 1

*Een bron genereert een onafhankelijke rij symbolen uit het alfabet  $\{0, 1\}$ . De kans op een 0 is 0,9, en kans op een 1 is 0,1. De rij getallen wordt met een 'Run-Length coding' gecodeerd tot een rij met symbolen uit het alfabet  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ . Tenslotte wordt deze 'run length' codewoorden weer gecodeerd met een huffmancode.*

b-code	r-code
1	a
01	b
001	c
0001	d
00001	e
000001	f
0000001	g
00000001	h
00000000	i

- (a) Bereken de entropie van de bron.
- (b) Bereken het gemiddeld aantal bronsymbolen per run-length codewoord.
- (c) Bereken het gemiddeld aantal bit van de Huffmancode per run-length woord.
- (d) Bereken het gemiddelde aantal bronsymbolen  $b$  per Huffmansymbool  $h$ .

## 2.2 Opdracht 4

*Waarom zouden de makers van 'gzip' de blokverwijzingen beperkt hebben?*

Wanneer de blokverwijzing groter zou zijn dan zou de redundantie in de blokverwijzing optreed zo groot kunnen worden dat de gecomprimeerde data groter is als het origineel.

## 2.3 Opdracht 5

*In het DNA van de bacterie Micrococcus Lysodeiktus hebben de basen A, C, T, G de volgende waarschijnlijkheid:  $P(A) = P(T) = 29/200$  en  $P(C) = P(G) = 71/200$ . Bij de bacterie E.Coli is deze verdeling:  $P(A) = P(T) = P(C) = P(G) = 1/4$ . Welke bacterie zou van de twee het meest complexe organisme zijn?*

## 2.4 Opdracht 6

*Het decompressie-algoritme van het programma 'bzip2' maakt gebruik van een inversie permutatie  $T(i)$  om uit de laatste kolom de bronrij terug te vinden. Wat is er fout aan de volgende redenering om de bronrij terug te vinden uit tabel 2.5, gegeven dat de rij-index van de bronrij de waarde 3 heeft?*

Men kan uit de tabel 2.5 aflezen dat de onbekende bronrij moet beginnen met een 'o' (Rij 3, kolom 2) en eindigen met een 'b' (rij 3 kolom 1). Vervolgens blijkt de rij bronsymbolen uit alle andere tweetallen te zijn opgebouwd voor de tussenliggende symbolen: 'ob', 'ro', 'oo', 'rr', 'or'. Wij weten alleen niet in welke volgorde. Wel is bekend dat elk tweetal exact één keer gebruikt moet worden.

Met deze gegevens kunnen wij de bronrij herstellen: Start met 'o' dan zijn er twee volgende letters mogelijk: 'b' en 'o' (vanwege 'bo' en 'oo') De rij 'ob' heeft geen opvolger en is dus geen oplossing. De rij 'oo' heeft als uitbreiding 'oor' (Vanwege 'or'). Dit passen en meten kunnen wij herhalen tot wij de originele bronrij 'oorrob' gevonden hebben.

## Hoofdstuk 3

# Coderingen voor storingsrijke omgevingen

### 3.1 Opdracht 1 \*

*Een BSC heeft een Binary Error Rate van 0,3. Wat is de discrete kanaal-capaciteit van dit kanaal?*

### 3.2 Opdracht 2

*Noem 3 decodeerprincipes en hun eigenschappen.*

- MAP Maximum-a-Posteriori is een decodeerprincipe die gebruik maakt van over het algemeen zo laag mogelijke decodeer fout te houden. Het decodeerprincipe kiest een zo grootmogelijke  $x_i$  uit  $P(X = x_i|Y = y_i)$  waardoor het codewoord  $y_i$  het meest in de buurt komt.
- ML Maximum Likelihood is een decodeerprincipe die voornamelijk gebruikt wordt bij het decoderen van uniform verdeelde bronwoorden. om dit te doen dient je een  $x_i$  zo hoog mogelijk te hebben bij  $P(Y = y_i|X = x_i)$  ( $y_i$  is in dit geval het code woord)
- MD Minimum Distance is een decodeerprincipes kiest een codewoord  $x_i$  wat z dichtmogelijk bij  $y_i$  licht qua symbolen. het woort voornamelijk gebruikt bij cyberteksten waar genoeg redudantie in is hierdoor kan er voldoende afstand tussen de code woorden woorden berijkt.

### 3.3 Opdracht 3

De *Soundex codering* is een codering die bronwoorden uit een West Europese spreektaal vertaalt in codewoorden van één letter gevolgd door drie cijfers. Het voordeel van deze codering is dat de woorden die veel op elkaar lijken qua uitspraak, dezelfde code krijgen. Soundex wordt veel toegepast in spellingscontrole in woordprocessors, reisplanners en reserveringssystemen etc. Bijvoorbeeld, de namen 'brok', 'brock', 'broek' geven dezelfde code B620. Daarentegen geven de namen 'jansen', 'janssen', 'jansens' de J525.

*Het soundex-algoritme werkt als volgt:*

- (a) *De eerste letter van het bronwoord wordt de beginletter in het Soundex codewoord*
- (b) *De volgende 3 cijfers komen uit de volgende tabel. Zijn worden in volgorde opgebouwd in volgorde van de letters in het bronwoord. Als het bronwoord te kort is voor een volledig Soundex codewoord, wordt het Soundex codewoord aangevuld met nullen. Te lange codewoorden worden afgebroken na drie cijfers.*

code	letter	uitspraakorgaan
1	b p f v	lippen
2	c s k g j q x z	keel
3	d t	tanden
4	l	tong voor
5	m n	neus
6	r	tong achter
geen	a e h i o u y w	

*Deze tabel geeft de cijfercodering van de letters aan. De meeste medeklinkers zijn volgens uitspraak gegroepeerd. De klinkers en de zachte medeklinkers krijgen geen cijfercode. Hoewel het Soundex-algoritme goed werkt voor West-Europese talen, is het niet voor andere spreektaalen geschikt.*

- (a) *Welke aspecten maken Soundex codering geschikt voor Weste-Europese talen?* Deze coderingen is alleen geschikt voor westerse talen omdat het gebruik maakt van klanken die over het algemeen voor komen in de westerse omgeving. In andere gebieden kunnen minder klanken zijn of zijn er veel meer letters met de zelfde klank.
- (b) Een andere manier om alternatieve woorden te vinden is de 'Edit Distance':

- Spatie tussenvoegen;

- Twee buurletters verwisselen;
- Een letter vervangen door een andere;
- Het verwijderen van een letter;
- Een letter toevoegen.

(Wat is het belangrijkste verschil tussen de 'Edit Distance' en Soundex?) Het belangrijkste verschil is in dit geval dat Soundex een vaste lengte heeft. bij de andere manieren die hier boven staan is er geen vaste lengte gespecificeert.

### 3.4 Opdracht 4

*Gegeven een taal met 8 bronwoorden van 3 bit.*

- (A) *Hoeveel redundantie moeten de codewoorden bevatten om een taal met 8 bronwoorden van ieder 3 bit intolerant voor 2 bit fouten te maken?*

Bronwoord	Tolerantie toevoeging	Codewoord
000	1111	0001111
001	0011	0010011
010	1010	0101010
011	1100	0111100
100	0000	1000000
101	0110	1010110
110	0101	1100101
111	1001	1111001

- (B) *Welke CRC-polynoom zou in aanmerking komen om de bronwoorden te beschermen tegen 1 en 2 bit fouten? Een CRC-6 is voldoende want er diennen alleen maar 1 en 2 bit foute gedetecteert te worden.*

### 3.5 Opdracht 5 R

*Een geheugenloos kanaal tussen X en Y heeft de volgende eigenschappen*  
 $P(Y = y|X = x) = 0,5$

- (A) *Bepaal de discrete kanaalcapaciteit van het kanaal in figuur 5.5?*
- (B) *Ontwerp een transmissiecode waarmee via dit kanaal foutloze transmissie plaats kan vinden.*



## Hoofdstuk 4

# Cryptografie

### 4.1 Opdracht 1

*Probeer het volgende Ceasargecodeerde bericht teontcijferen:  
LNNZDPLNCDJHQLNRYHUZRQ*

Het ondcijveren van dit Ceasargecodeerde bericht kan onderandere op de volgende manier door alle mogelijke uitkomst op te schrijven tot dat je een leesbaar bericht tegen komt

0	LNNZDPLNCDJHQLNRYHUZRQ
1	KMMYCOKMBCIGPKMQXGTYQP
2	JLLXBNJLABHFOJLPWFSXPO
3	IKKWAMIKZAGENIKOVERWON

In dit geval is de meest logiese uitkomst: Ik kwam ik zag en ik overwon

### 4.2 Opdracht 2

*Geef enkele voorbeelden waaruit blijkt dat berichten in het algemeen niet uniform verdeeld zijn. Welke oplossing is geschikt om deze berichten uniform verdeeld te maken?*

Om een bericht uniform te verdelen is er onderandere een mogelijk hijd om het bedricht in te pakken ofwel comprimeren dit heeft als gevolg dat elk teken of teken reeks gemiddelt even vaak voorkomt.

### 4.3 Opdracht 3

*Een andere manier om geheime boodschappen te versturen is steganografie.*

- (a) *Wanener zouden partijen steganografie gebruiken?*

Als er een open medium is waar het bericht over verstuurt kan woorden waardoor de daatwerkelijke boodschap geheim dient te blijven. Dit is veel gebruikt in het engelse verzet tijdens de orlog. (Er zijn destijds een hoop gijten gemolken)

- (b) *Wat is het nadeel van steganografie?*

Het nadeel van steganografie is dat als het code boek uitlekt iedereen weet wat de berichten betekenen en je beperkt ben tot een code boek om te achterhalen wat een code betekent. je kan namelijk niet alle comandows kwijd in een code boek.

### 4.4 Opdracht 4

*Een bekende manier om geheime boodschappen te ontcijferen is gebruik te maken van letterfrequenties. Deze methode werkt bij systemen waarbij dfe letters simpelweg vervangen worden door andere tekens, zoals monoafabetische substituering. Methoden die gebruik maken van verwisselingen van letterposities zijn minder kwetsbaar voor deze methoden.*

- (a) *Welke principes zijn volgens Shannon noodzakelijk voor een betrouwbaar cryptografisch systeem?*

... [http://en.wikipedia.org/wiki/Kerckhoffs\\_principle](http://en.wikipedia.org/wiki/Kerckhoffs_principle) ...

- (b) *Als de letters uniform verdeeld zijn in een bericht dan hebben alle letters  $i = 1 \dots 26$  evenveel kans om op te treden  $p(X = a) = p_a = 1/26$ . Indien wij een ander bericht van gelijke lengte met willekeurig verdeelde letters op het eerste bericht leggen, dan is de kans dat een positie twee letters 'a' op elkaar liggen gelijk aan  $P(X = a \cap x = a) = p_a^2 = (1/26)^2 = 0,0385$ . Als wij deze methode per taal uitvoeren, blijkt dat deze coïncidentie per letter per taal verschilt. Om deze eigenschap van een taal met een kental te beschrijven wordt zij gedefinieerd als de coïncidentie-index:  $i_c = \sum_{i=1}^{26} p_i^2$ :*

taal	$i_c$
Engels	00661
Frans	0,0778
Duits	0,0762
Italiaans	0,0738
Japans	0,0819
Russische	0,0529
Random	0,0385

Bereken de coïncidentie-index voor de Nederlandse taal. Maak gebruik van de gegeven letterfrequenties in bijlage C.

$i$	Symbool	$p_i$	$\sum_{j=1}^i (p_j^2)$
1	E	0,190	0,0361
2	N	0,110	0,0482
3	A	0,066	0,052556
4	T	0,065	0,056781
5	D	0,063	0,06075
6	O	0,063	0,064719
7	R	0,060	0,068319
8	I	0,054	0,071235
9	L	0,042	0,072999
10	S	0,041	0,07468
11	G	0,038	0,076124
12	H	0,026	0,0768
13	V	0,025	0,077425
14	U	0,024	0,078001
15	K	0,020	0,078401
16	M	0,020	0,078801
17	B	0,015	0,079026
18	W	0,015	0,079251
19	Y	0,015	0,079476
20	C	0,013	0,079645
21	Z	0,013	0,079814
22	F	0,010	0,079914
23	Z	0,010	0,080014
24	J	0,001	0,080015
25	Q	0,001	0,080016
26	X	0,000	0,080016
<b>Totaal</b>			0,080016

de  $i_c$  van de nederlandse taal is 0,080016

(c) Hoe zou de coïncidentie-index  $i_c$  gebruikt kunnen worden bij het kraken

*van een cipher-text?*

als de taal van de tekst bekend is dan kan bij onderandere een Ceasar-gecodeerd bericht sneller gezien worden welke het is door een paar regels over elkaar te leggen.

## 4.5 Opdracht 5

*Waarom moet de entropie  $H(K|C)$  zo groot mogelijk zijn?*

De entropie dient zo hoog mogelijk te zijn zodat als C bekend is dat dan de K niet makkelijk gevonden.

## 4.6 Opdracht 6

*Een natuurlijke tekst in het Nederlands heeft een relatieve nulde-orde redundantie van 50%. De Nederlandse tekst wordt op karakterbasis met een Ceasarcodering versleuteld.*

- (a) *Bereken de kritieke lengte van de cipher-text.*

$$\frac{H(K)}{R(P)} = \frac{\text{ld}(26)}{50\% \cdot \text{ld}(26)} = 2$$

- (b) *Indien de Nederlandse tekst gecomprimeerd wordt met een code-efficiëntie van 70%, wat is dan de kritieke lengte van de Ceasar codering?*

$$\frac{H(K)}{R(P)} = \frac{\text{ld}(26)}{30\% \cdot \text{ld}(26)} = 3\frac{1}{3}$$