

חקירת פונקציה רציונלית

גיא סידס

11 במאי 2025

תוכן העניינים

2	נוסחת גזרת מנה
2	לא רצים ישר לגזור!!!
2	נחקור את $f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x-2)(x-3)}$
4	נחקור את 32: $y(x) = \frac{2x^2-6x-8}{(2x-3)^2}$
5	נחקור את 33: $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x-12}$
7	נחקור את 30: $f(x) = \frac{x}{x^2-6x+8}$
9	נחקור את 34:
10	נחקור את $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$:
10	אסימפטוטות אנכיות ואופקיות
10	אסימפטוטות אנכיות:
10	אסימפטוטות אופקיות:
11	מציאת פרמטרים
11	קדם אנליזה עמ' 161 ש 4 מעל לרמת מבחן
13	נחקור את $f(x) = \frac{x^2+x+a}{x^2+b}$
15	נחקור את $f(x) = \frac{x^2-3x+a}{x^2+b}$
16	בגרות קיץ 29.5.24 + אינטגרל. להשלים.
17	בגרות חורף 1.2025

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{\overbrace{u'v}^{\text{לגזור מונה כפול לשמור}} - \overbrace{uv'}^{\text{לשמור כפול לגזור}}}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

כמו נגזרת מכפלה - רק עם מינוס בין שני הביטויים. במכפלה - אם יש טעות בסדר אין בעיה. במנה - טעות בסדר ← נגזרת שגויה (סימן הפוך).

לא רצים ישר לגזור!!!

1. נגזרת מנה עדיף להימנע: $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3}$ את זה, לא גוזרים כמנה

2. לצמצם כמה שניתן לפני גזירה (באופן כללי לא לרוץ לגזור, אלא לחשוב טיפה). לרשום לעצמנו - נקודת האפס שצמצמנו תהיה אסימפטוטה או חור:

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)^2}{x-3} \quad \boxed{x=2 \text{ חור או אסימפטוטה}}$$

3. להוציא גורם משותף לאחר גזירה: הגעה לנגזרת קומפקטית.

4. בדיקת הנגזרת הקומפקטית! והמשך ניתוח במצב טבלה במחשבון (סיווג נגזרת, אסימפטוטות וחורים).

5. לא לצמצם אחרי גזירה (השארת מכנה בריבוע, מבטיחה שסימן נגזרת יושפע רק מהמונה).

נחקור את $f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x-2)(x-3)}$

1. ת"ה $x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 3$. בעיקרון, תקבלנו ניקוד גם על רישום $x \neq 2, x \neq 3$

2. אם ניתן לצמצם, נצמצם:

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)^2}{x-3}$$

3. נגזור:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\overbrace{2(x-2)}^{u'} \cdot \overbrace{(x-3)}^v - \overbrace{(x-2)^2}^u \cdot \overbrace{1}^{v'}}{(x-3)^2} = \\
 &= \frac{(x-2)(2x-6-(x-2))}{(\sim\sim\sim\sim^2)} = \\
 &= \frac{(x-2)(2x-6-x+2)}{(\sim\sim\sim\sim^2)} \\
 f'(x) &= \boxed{\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2} \text{בדוקה}}
 \end{aligned}$$

אותה פונקציה. גזירה ללא צמצום :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\overbrace{3(x-2)^2}^{u'} \overbrace{(x-2)(x-3)}^v - \overbrace{(x-2)^3}^u \overbrace{(2x-5)}^{v'}}{(x-2)^2(x-3)^2} \\
 &\text{נוציא גורם משותף } (x-2)^3 \text{ במונה :} \\
 f'(x) &= \frac{(x-2)^3(3x-9-2x+5)}{(\sim\sim\sim)^2} = \boxed{\frac{(x-2)^3(x-4)}{(x-2)^2(x-3)^2} \text{בדוקה}}
 \end{aligned}$$

נחפש התאפסות של מונה. המכנה תמיד חיובי בת"ה.

$$f'(x) = 0 \implies (x-2)^3(x-4) = 0$$

\downarrow \downarrow
 $x=2$ $x=4$
 לא בת"ה לקיצוץ חשו

טבלת סיווג (פונקציה לא רציפה, אז אין ברירה) :

x	0	2	2.5	3	3.5	4	4.5
y'	+		-		-	0	+
y	\nearrow		\searrow		\searrow	min	\nearrow
		חור		אס'		(4, 4)	

1. ת"ה כבר רשמנו.

2. אסימפטוטה $x = 3$ (המכנה מתאפס והמונה אינו מתאפס)

3. אין אסימפטוטה ב- $x = 2$ גם המונה מתאפס, לכן נבדוק מה קורה בשאיפה ל- $x = 2$. בבדיקה בשיעורי x שואף ל-2 מתקבלים ערכים השואפים ל-0. הנקודה $(2, 0)$ היא חור (ואינה נמצאת על הפונקציה!!!)

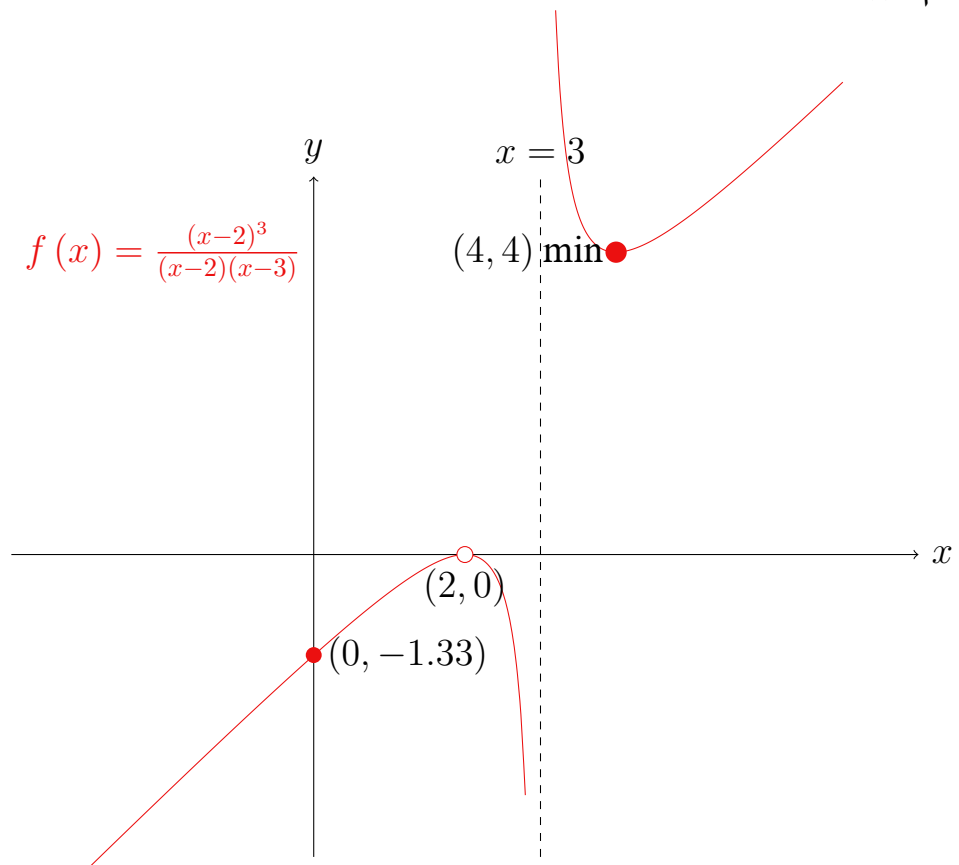
4. תחום עליה: $x < 2 \vee x > 4$ (שימו לב שזה ממשיך עד $\pm\infty$. זה לא נעצר ב-0 או ב-5!!!).

5. תחום ירידה - כל השאר, כלומר: $2 < x < 3 \vee 3 < x < 4$

6. נקודת מינימום $(4, 4)$.

הערה: (כפי שכבר הוסבר) ניתן היה מלכתחילה לצמצם את הפונקציה בתחום ההגדרה (ולסמן חור ב- $(2, 0)$). מתקבל $f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-3)}$ כמובן שכשיש ספק לגבי החור צריך לבדוק במחשבון סביב הנקודה החשודה.

7. סקיצה:



נחקור את 32: $y(x) = \frac{2x^2 - 6x - 8}{(2x - 3)^2}$

1. ת'ה $(2x - 3)^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 1.5$

2. חיתוך עם ציר ה-x: $y(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \rightarrow x_{1,2} = -1, 4 \rightarrow (-1, 0), (4, 0)$

3. כיוון שהמונה אינו מתאפס בנקודה בה המכנה מתאפס, קיבלנו אס' אנכית $x = 1.5$

4. חיתוך עם ציר ה-y: $y(0) = \frac{-8}{9}$

5. נק' חשודות לקיצון: שימו לב לצמצום ב- $(2x - 3)$ שעוזר מאד בתרגיל זה להצליח בפישוט הנגזרת: הצמצום מותר מפני ש- $x \neq 1.5$ (כלומר אנו לא מחלקים ב-0).

$$y' = \frac{\overbrace{(4x-6)}^{u'} \cdot \overbrace{(2x-3)^2}^{v'} - 4 \cdot \overbrace{(2x-3)}^{v'} \cdot \overbrace{(2x^2-6x-8)}^{1}}{(2x-3)^4}$$

$y' = \frac{8x^2 - 12x - 12x + 18 - 8x^2 + 24x + 32}{(2x-3)^3} = \frac{50}{(2x-3)^3}$ (אין נק' חשודות, אבל הנגזרת לא חיובית לכל x כי המכנה משנה סימן)

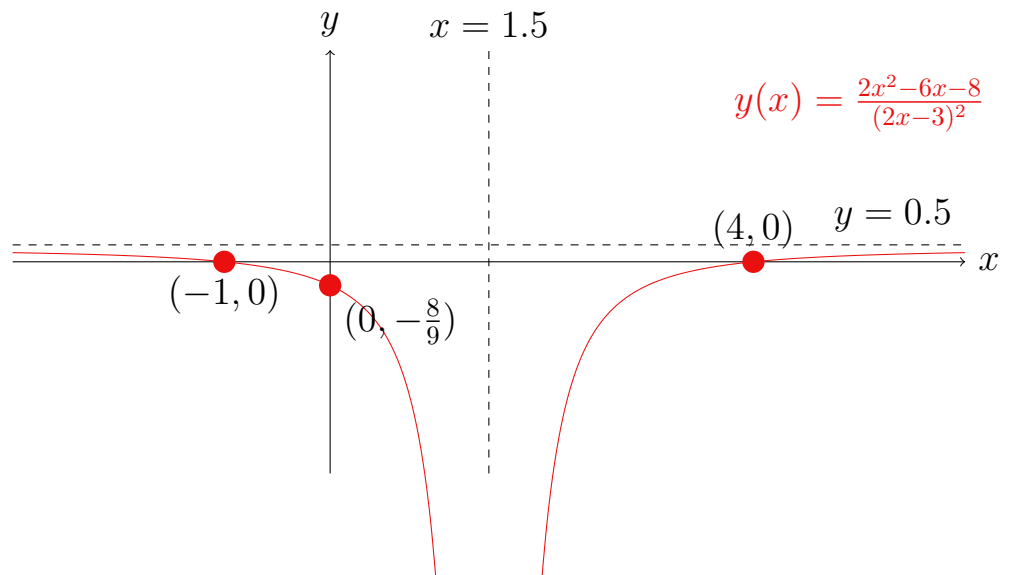
נבין טבלה:

x	0	1.5	3
y'	-	$\frac{xx}{xxx}$	+
y	\searrow	$\frac{xx}{xxx}$	\nearrow
		אס'	

6. הפונקציה יורדת לכל $x > 1.5$ ועולה לכל $x < 1.5$

7. אס' אופקית: מעריך החזקה הגבוה ביותר מכנה שווה למעריך החזקה הגבוה ביותר במונה. לכן האסימפטוטה האופקית תיקבע לפי יחס המקדמים והיא $y = \frac{1}{2}$ (בחזקה הגבוהה יש $\frac{2x^2}{4x^2}$)

8. סקיצה:



נחקור את 33: $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x - 12}$

1. ת"ה $x \neq 6$ $x \neq -2$.

1ב'. המונה אינו מתאפס בשיעורי ה"ל, ולכן אסימפטוטות אנכיות:

$$x = -2, x = 6$$

2. חיתוך עם צירים:

$$y(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 : x \text{ ציר עם } \begin{matrix} \downarrow \\ x=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ x=4 \end{matrix}$$

$(0,0), (4,0)$

$(0,0)$ הוא גם החיתוך עם ציר ה- y

3. נקודות חשודות לקיצון :

$$y'(x) = \frac{\overbrace{(2x-4)}^{u'} \overbrace{(x^2-4x-12)}^v - \overbrace{(x^2-4x)}^u \overbrace{(2x-4)}^{v'}}{(x^2-4x-12)^2}$$

$$= \frac{(2x-4)(\cancel{x^2-4x-12} - \cancel{x^2+4x})}{(x^2-4x-12)^2}$$

$$= \frac{(2x-4)(-12)}{(x^2-4x-12)^2}$$

$$y'(x) = \frac{-24(x-2)}{(x^2-4x-12)^2} = 0 \Leftrightarrow -24(x-2) = 0 \rightarrow x = 2$$

נבין טבלה, עם ערכי x 2, 2, 6 והערכים שביניהם. במחשבון תחום $start = -3, end = 9, step = 3$ יגע בכל הערכים הרלוונטיים.

x	-3	-2	0	2	3	6	9
y'	+	xxx	+	0	-	xxx	-
y	$y=1$	xxx	max	$(2, \frac{1}{4})$	xxx	$y=1$	
		אס'				אס'	

(ערך הפונקציה בנק' המקסימום התקבל במקרה קודם).

רצוי מאד לוודא נכונות נגזרת (אם כבר אתם במוד 9 או 7) :

$$f'(3.2) = -0.13585 \text{ (ניתן לבקש ב-991 גם ערך מסויים בסוף הטבלה).}$$

כדי לוודא נציב במחשבון : $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x-12} \right)_{x=3.2} = -0.13585$: נקבל $\frac{d}{dx}$ ■ כלומר הנגזרת נכונה.

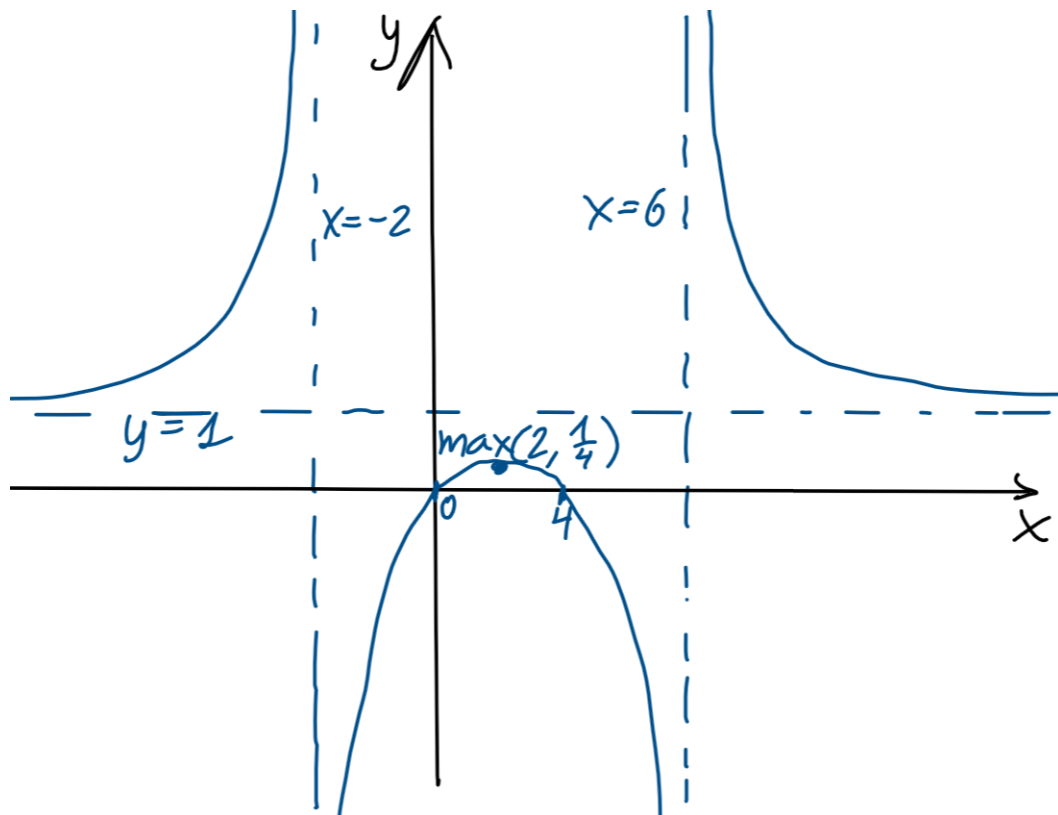
4. עלייה : $-2 < x < 2$ או $x < -2$,

ירידה : $2 < x < 6 \vee x > 6$

5. אס' אופקית : כן מעריך החזקה הגבוהה במונה שווה למעריך החזקה הגבוהה במכנה :

במקרה כזה, מנת המקדמים קובעת כאן אסימפטוטה אופקית $y = 1$.

6. סקיצה :



נחקור את 30: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 8}$

- ת"ה $x^2 - 6x + 8 \neq 0 \rightarrow x \neq 4 \wedge x \neq 2$
- המונה אינו מתאפס בערכים אלו, ולכן אסימפטוטות אנכיות:

$$x = 4$$

$$x = 2$$

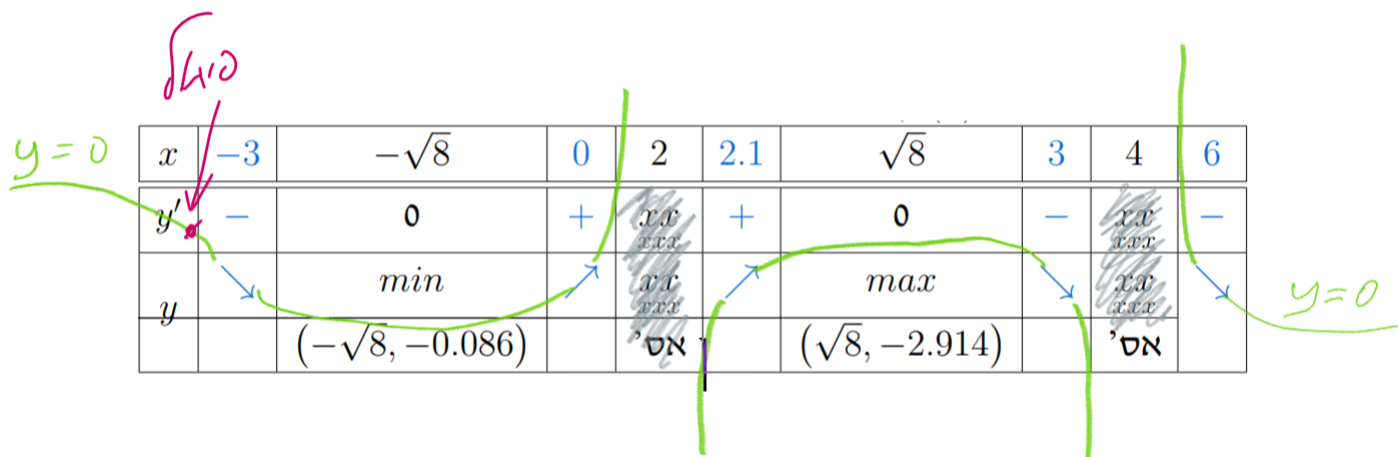
אסימפטוטה אופקית $y = 0$ (חזקת מכנה גדולה מחזקת מונה).

$$3. \text{ חשד לקיצון: } f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - 6x + 8 - x(2x - 6)}{(x^2 - 6x + 8)^2} = \frac{-x^2 + 8}{()^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

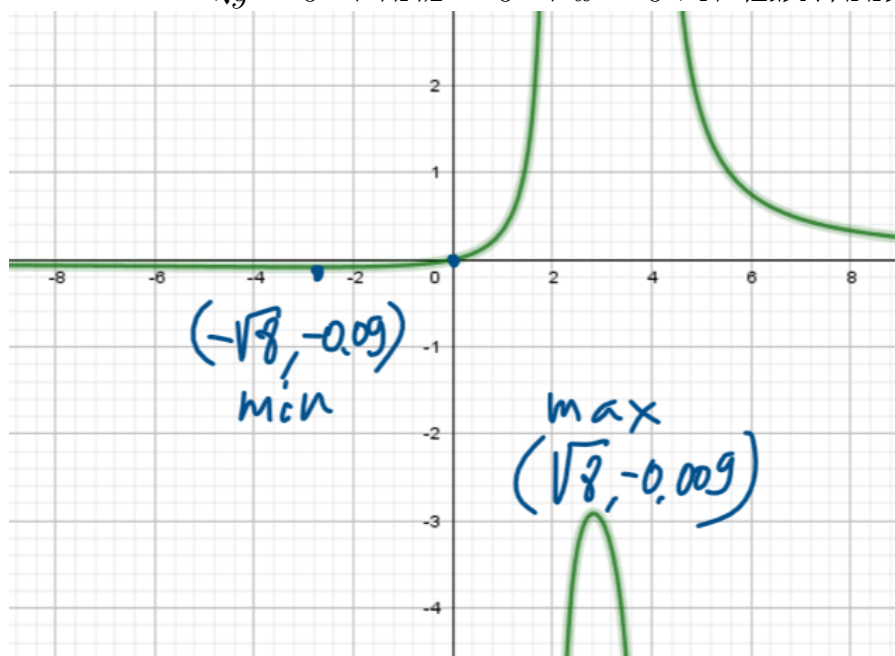
x	-3	$-\sqrt{8}$	0	2	2.1	$\sqrt{8}$	3	4	6
y'	-	0	+	$\frac{xx}{xxx}$	+	0	-	$\frac{xx}{xxx}$	-
y	\searrow	\min	\nearrow	$\frac{xx}{xxx}$	\nearrow	\max	\searrow	$\frac{xx}{xxx}$	\searrow
		$(-\sqrt{8}, -0.086)$		אס'		$(\sqrt{8}, -2.914)$		אס'	

ולאחר שירבוט על הטבלה:



מכאן כבר ברור איך תראה הסקיצה : חסר רק חיתוך עם ציר ה- y וציר ה- x :

$(0,0) \rightarrow y(0) = 0$ הוא נקודות החתוך היחידה (ניתן להסיק מהחקירה והסקיצה הראשונית שקיבלנו, או לנתח אלגברית : $x=0 \rightarrow$ מונה $=0 \rightarrow y=0$).



4. עליה : $-\sqrt{8} < x < 2 \vee 2 < x < \sqrt{8}$

ירידה : $x < -\sqrt{8} \vee 2 < x < 4 \vee x > 4$

5. אין דרישה למצוא את מיקום נקודת הפיתול שסומנה.

נחקור את 34:

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$x < -1 \vee -1 < x < 1 \vee x > 1 \text{ ת"ה}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x+2}{x-1}} : \text{ניתן לצמצם בת"ה ולכן}$$

$$f(0) = -2 \rightarrow (0, -2) \text{ חיתוך צירים}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow (-2, 0)$$

אס' אנכית $x=1$ חור ב- $x=-1$ מונה ומכנה מתאפסים באותו קצב. $(-1, -\frac{1}{2})$ אס' אופקית

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$y = 1$$

(לפי יחס מקדמים, שכן מעריך החזקה הגבוהה במונה ובמכנה זהים)

נקודות קיצון:

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{-3}{(x-1)^2}} < 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

יורדת בכל תחום הגדרתה ואין צורך בטבלה (כן צריך לבדוק נכונות נגזרת)

נחקור את $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$:

$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2}$ מוגדרות לכל $x \neq 2$.
 $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ לאחר צמצום. אס' אנכית $x = 2$ (מכנה שואף לאפס יותר חזק מהמונה).
אס' אנכית:

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$y = 1$$

חיתוך צירים $(-3, 0)$ $(0, -1.5)$

קיצון:

$$f'(x) = \frac{x-2-(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0 \forall x \text{ בת"ה}$$

ומכאן הדרך לסקיצה פשוטה (הודגמה בכיתה): מציירים מערכת צירים, נקודות חיתוך, נקודות "חור", אסימפטוטות, ואז ניתן לצייר פונקציה יורדת שמגיעה לאסימפטוטות ועוברת בין הנקודות השונות).

אסימפטוטות אנכיות ואופקיות

אסימפטוטות אנכיות:

אם מכנה מתאפס ומונה לא \leftarrow יש אס' אנכית,

אם שניהם מתאפסים \leftarrow צריך לבדוק במחשבון (טבלת ערכים $menu$ 9 אבל בעצם:

- אם החזקות שוות יהיה חור,
- ואם החזקה במכנה גדולה מזו שבמונה תהיה בכל זאת אס' אנכית
- אם החזקה במונה תהיה יותר גדולה, אז יהיה חור, אבל "בגובה" $y = 0$

אסימפטוטות אופקיות:

- אם החזקה במכנה גדולה מבמונה, תהיה אסימפטוטה אופקית $y = 0$
- אם החזקה במונה גדולה מזו שבמכנה - אין אסימפטוטה אופקית.

- אם החזקות שוות - האסימפטוטה האופקית תהיה לפי יחס מקדמים, לדוגמא

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2x^2 + 7x - 5}{3x^2 + 10x} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x \rightarrow \pm\infty \\ y = -\frac{2}{3} \text{ אס' אופקית} \end{matrix}}$$

מציאת פרמטרים

קדם אנליזה עמ' 161 ש4 מעל לרמת מבחן

נתונה $f(x) = \frac{x^2 - kx + m}{x^2 - 6x + 5}$ ונתון גם $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x)) = 1.75$ יש למצוא את הפרמטרים. מחיפוש תחום הגדרה (פירוק המכנה לגורמים) מתקבל:

$$f(x) = \frac{x^2 - kx + m}{(x-1)(x-5)}$$

בנוסף נתון ה- \lim משמעותו חור בנקודה $(5, 1.75)$ ומכאן שבהכרח המונה מתאפס ב- $x = 5$. לכן, ניתן לבטא את המונה של f באופן הבא:

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-5)}{(x-1)(x-5)}$$

(a הוא פרמטר זמני שהצבנו כדי לייצג את הפרבולה כמכפלה של שני גורמים לינאריים).
 כעת נשווה את המונה שיצרנו למונה המקורי:

$$\begin{aligned} (x-a)(x-5) &= x^2 - kx + m \\ x^2 - ax - 5x + 5a &= x^2 - kx + m \\ (-a-5)x + 5a &= -kx + m \end{aligned}$$

המקדמים של ה- x שווים זה לזה, והאיברים החופשיים שווים גם הם. לכן נובע $\boxed{-a-5 = -k}$ ו- $\boxed{5a = m}$.
 כל זה, לכאורה, לא מאפשר להתקדם.

כעת יש לקחת את הפונקציה שיצרנו, לצמצם ולאחר מכן ניתן להציב את הנתון לגבי החור:

$$f(x) = \frac{(x-a)(\cancel{x-5})}{(x-1)(\cancel{x-5})}$$

$$f(5) \stackrel{\text{מהנתון}}{=} 1.75 = \frac{5-a}{5-1}$$

$$1.75 \cdot 4 = 5 - a$$

$$a = -2$$

כעת נותר להציב במשוואות שקיבלנו :

$$k = a + 5 \rightarrow \boxed{k = 3}$$

$$m = 5a \rightarrow \boxed{m = -10}$$

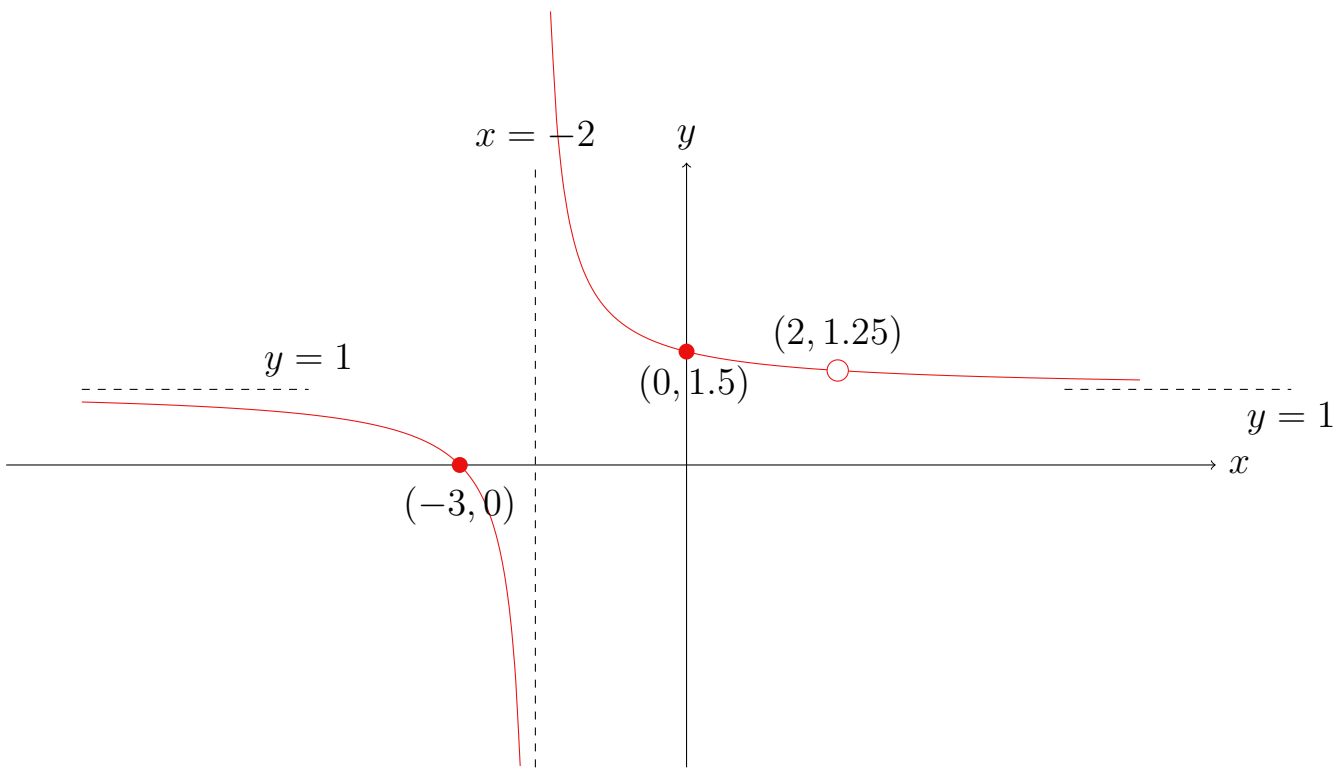
נחקור את $f(x) = \frac{x^2+x+a}{x^2+b}$

כאשר ידוע שיש לה אסימפטוטה אנכית אחת בלבד העוברת בנקודה $(-2, 5)$

תהליך הפתרון (לתרגול עצמי):

1. רישום האסימפטוטה האנכית הנובעת מהנתון.
2. פירוק של המכנה והסקת ערכו של b מהאסימפטוטה האנכית הידועה.
3. הצבה של x שמצאנו שאמור לאפס גם את המונה, ומכאן פתרון של a .
4. צימצום וחישוב החור.
5. אסימפטוטות אופקיות + חיתוך צירים.
6. גזירה, פשוט הנגזרת ובדיקת נגזרת.
7. קביעה שהנגזרת חיובית/שלילית לכל X או מציאת התאפסות אם יש כזו, וחשודות לקיצון.
8. סקיצה:

- רישום האסימפטוטות,
- רישום הנקודות השונות והחורים (לא לשכוח לסמן חור בעיגול חלול).
- חיבור בין הנקודות ומשיכת הקו לכיוון האסימפטוטות אמורה לייצר סקיצה
- בדיקת התאמה בין הסקיצה למחשבון ב-9 menu.



ות אופקי

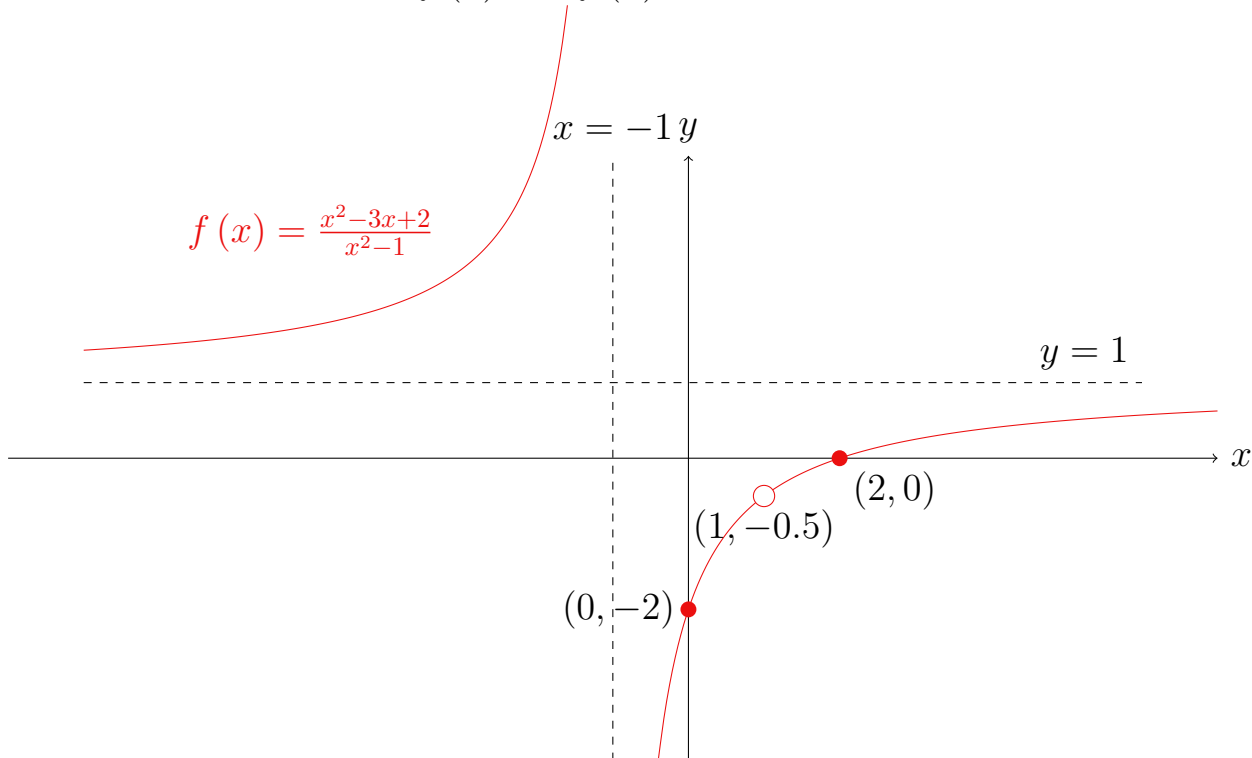
נחקור את $f(x) = \frac{x^2-3x+a}{x^2+b}$

כאשר ידוע שיש לה אסימפטוטה אנכית **אחת בלבד** העוברת בנקודה $(-1, 7)$
יש לפתור בתהליך דומה לזה שצויין לעי (למצוא את a ואת b ולהמשיך בחקירה).
בנוסף, יש לבצע את סעיפי החשיבה הבאים:

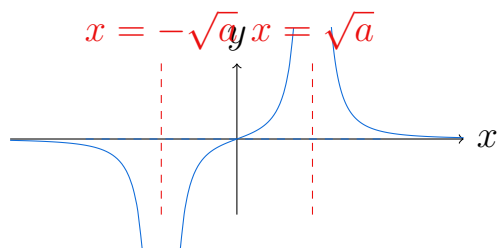
נתונה $h(x) = |f(x-2)|$ (הזזה ימינה ואז ע"מ).

האם לפונקציה יש קיצון? אם כן, כתבו את ערכי הנקודה, מאיזה סוג היא, והסבירו כיצד מצאתם אותה.
אם לא, הסבירו מדוע אין קיצון.

סעיף אחרון: ללא חישוב הסבירו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -f(x)$



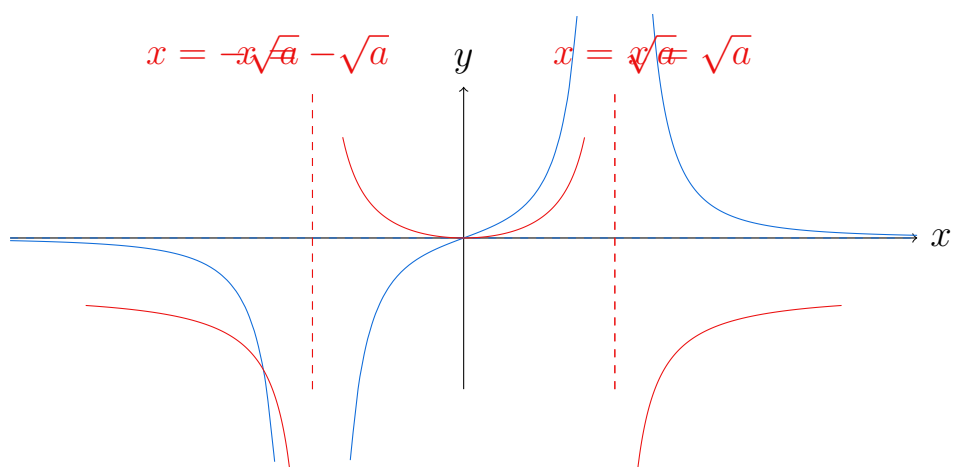
$$f(x) = \frac{6x}{(x^2 - a)^2}$$



$$f'(x) = \frac{-6(x^2 - a) \left(\overbrace{a + 3x^2}^{\text{חיובי}} \right)}{\underbrace{(x^2 - a)^4}_{\text{חיובי}}}$$

ומכאן ניתוח סימני נגזרת לפי הפרבולה העצובה $-6(x^2 - a)$ שבמונה.

$$g(x) = \frac{3}{a - x^2} - \frac{3}{a}$$



$$f(x) = \cos(x) - (\cos(x))^{0.5}, \quad \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - a^2)^3}$$

א. מוגדרת לכל $x \neq a, x \neq -a$

ב. עליה ירידה לפי חיוביות שליליות של f' : טבלת סימנים:

x	$< -a$	$-a < x < 0$	$0 < x < a$	$> a$
f'	+	-	+	-

עליה: $x < -a, 0 < x < a$

ירידה: $-a < x < 0, x > a$

ג. $f \in \int f'(x) \stackrel{\text{ניחוש}}{=} \frac{1}{(x^2 - a^2)^2} + c$ ובגזירה לבדיקה ניתן לראות שצריך לכפול ב-2
ובסה"כ: $f(x) = \frac{2}{(x^2 - a^2)^2} + c$ וצריך למצוא c עבורו $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ולכן $c = 0$ ו-

$$f(x) = \frac{2}{(x^2 - a^2)^2}$$

הפונקציה f שונה מאד מ- h, g להן יש x במונה, וביטוי שניתן לצמצם: נדגים על אחת:

$$g = \frac{x - a}{((x - a)(x + a))^2} \stackrel{x \neq a}{=} \frac{1}{(x - a)(x + a)^2}$$

כאן לאחר הצמצום המכנה עדיין מתאפס ויש אס' אנכית $x = a$ (וכמובן ב- $x = -a$).

לעומתה ב- h לאחר צמצום נשארת הפונקציה $\frac{1}{(x+a)^2}$ וב- $x = a$ יש חור $\left(a, \frac{1}{(2a)^2}\right)$ כלומר $h : III$

כיוון שיש תחומי עליה וירידה של f בטבלה לעיל, ניתן לקבוע ש $f = II$

בסופו של דבר ל- g נשארו שתי אס' אנכיות ולכן $g = I$ (ולא האחרון).

ה. האסימפטוטה של h היא $x = -a$ לאחר הזזה ימינה 9 יש אס' $x = -a + 9$

$$x = \overset{\text{נתון}}{-a + 9 = 0.8a} \implies 1.8a = 9 \rightarrow a = 5$$