

# הסתברות - מושגים הגדרות ודוגמאות

גיא סידס

23 בדצמבר 2024

**מבוא**

למדתם הסתברות בחטיבה. כעת נלמד מושגים נוספים ונעמיק את הנושא.

**הגדרות, נוסחאות ודוגמאות**

**ניסוי מקרי:** תהליך שתוצאתו אינה ידועה מראש בוודאות ויכולה להשתנות מחזרה אחת לאחרת.

**מרחב המדגם:** קבוצת כל התוצאות האפשריות של הניסוי המקרי.

**מאורע (מאורעות):** כל תת-קבוצה של מרחב המדגם המתארת תוצאה או קבוצה של תוצאות בהן אנו מעוניינים.

**הסתברות:** הסיכוי שיתרחש מאורע מסויים.

**מאורעות זרים:**

שני מאורעות A ו-B נקראים זרים אם הם אינם יכולים להתרחש בו-זמנית. כלומר:

$$P(A \cap B) = 0$$

**מאורעות תלויים:**

מאורעות A ו-B נקראים תלויים אם הידיעה על התרחשות האחד משנה את ההסתברות להתרחשות האחר. לדוגמה:

1. מזג אוויר גשום והסתברות לפתיחת דוכן גלידה בחוף. אם יורד גשם, יורדת ההסתברות לפתיחת הדוכן.
2. איכות מכונה במפעל והסתברות לייצור מוצר פגום. אם המכונה אינה מכוונת היטב, עולה ההסתברות למוצר פגום.
3. שימוש ברכב במקום הליכה ברגל והסתברות לפגוש חבר ברחוב. אם נוסעים ברכב ולא הולכים ברגל, קטנה הסבירות לפגוש חבר אקראית ברחוב.
4. מצב מניות בשוק והסתברות למשוך השקעה מקרן מסוימת. אם ידוע שמניות מסוימות מתרסקות, הסיכוי שמשקיעים ימשכו את הכסף מאותה קרן עולה.

**מאורעות בלתי תלויים:**

שני מאורעות A ו-B נקראים בלתי תלויים אם התרחשות אחד מהם אינה משנה את ההסתברות להתרחשותו של האחר. במקרה זה, מתקיים:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**דוגמאות למאורעות בלתי תלויים:**

1. הטלת קובייה והטלת מטבע.
2. הופעת אימייל חדש בתיבת הדואר והתרחשות תקרית אקראית אחרת, כדוגמת "בחרת מספר אקראי".
3. התרחשות זריחת השמש והסתברות לבחירה של קלף מסוים מחפיסת קלפים מעורבבת.

**חישוב הסתברויות משולבות:**

הסתברות לחיתוך כאשר המאורעות בלתי תלויים:

- אם A ו-B בלתי תלויים, אז:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  (חיתוך A, P)
  - הסתברות לאיחוד מאורעות, במקרה הכללי:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  של P) A איחוד B
  - במקרה שהם זרים (כלומר לא יכולים לקרות ביחד):  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- הסתברויות של איחוד מאורעות משלימים:  $P(A \cup \bar{A}) = 1$   
 $P(A \cap \bar{B})$  זוהי ההסתברות שהמאורע A יתרחש בעוד שהמאורע B לא יתרחש.

**סיכום:**

- מאורעות זרים:** אינם יכולים לקרות יחד.
- מאורעות בלתי תלויים:** התרחשות אחד אינה משנה את ההסתברות האחר.
- מאורעות תלויים:** התרחשות אחד משנה את ההסתברות האחר.

**טבלה דו-מימדית**

- (טבלת הסתברויות) הממחישה תלות מאורעות:
- נניח יש לנו שני מאורעות:

$A$ : "המכונה מכוונת היטב"

$B$ : "המוצר תקין"

נציג טבלה ערכית (להמחשה) הבנויה על הסתברויות מותנות המראות תלות בין  $A$  ו- $B$ :

מה נמצא בכל תא,

**טבלה מלאה עם כותרות:**

**באותיות (אבל עדיף במילים):**

|              | $\bar{A}$                 | $A$                 |           |
|--------------|---------------------------|---------------------|-----------|
| $P(B)$       | $P(\bar{A} \cap B)$       | $P(A \cap B)$       | $B$       |
| $P(\bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(A \cap \bar{B})$ | $\bar{B}$ |
| 1            | $P(\bar{A})$              | $P(A)$              |           |

|           | מכונה<br>לא מכוונת | מכונה מכוונת |     |
|-----------|--------------------|--------------|-----|
| מוצר תקין | 0.2                | 0.6          | 0.8 |
| לא תקין   | 0.1                | 0.1          | 0.2 |
|           | 0.3                | 0.7          | 1   |

סכום כל שורה מופיע בטור השמאלי.

סכום כל עמודה מופיע בשורה התחתונה.

קיים קשר תלותי: אם המכונה מכוונת ( $A$ ), ההסתברות למוצר תקין ( $B$ ) עולה.

## הסתברות מותנית:

ההסתברות של  $A$  בהינתן  $B$  מוגדרת:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

פירוש: בהינתן ש- $B$  התרחש, זו ההסתברות ש- $A$  יתרחש גם כן.

$P(\text{מכ' תקינה} | \text{תקין}) = \frac{P(\text{מכ' תקינה} \cap \text{תקין})}{P(\text{מכ' תקינה})}$  זוהי ההסתברות מותנית. שימו לב לכיוון הקו הנטוי. (בכיוון

ההפוך  $A \setminus B$  מדובר בהפרש בין קבוצות - מושג שאינו קשור לכאן כלל).

שימו לב שלא חייב להיות קשר סיבתי. אם נציג למשל טבלה של מעורב היום בתאונות דרכים / נהג עם

אלכוהול בדם, נקבל שנהיגה עם אלכוהול בדם, מעלה את הסיכוי לתאונת דרכים, ותאונת דרכים מעלה את

הסיכוי לאלכוהול בדם.

## הסתברות של איחוד מאורעות:

היעד: מניעת ספירה כפולה

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**ברנולי**

נתון סביבון שעליו המספרים 6,6,6,7 (6 מופיעה 3 פעמים)

מסובבים את הסביבון 3 פעמים. מה ההסתברות שסכום המספרים הוא 20 בדיוק? התוצאה הרצויה היא 6,7,7. אבל בעצם, גם 7,7,6 מתאים, וגם 7,6,7. אנחנו רוצים את זה, או את זה, או את זה או את זה (סכום הסתברויות של מאורעות זרים).

$$P(6, 7, 7) = \overbrace{0.75}^{p(6)} \cdot 0.25^2 = \frac{3}{64}$$

$$P(\text{סכום } 20) = 3 \cdot \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

במקרים הכלליים יותר, נשתמש ב-  $\binom{n}{k}$  (במחשבון  $nCr$ ) כדי למצוא את מספר הקומבינציות של בחירת  $k$  איברים מתוך  $n$ . למשל 5 מעל 3 (או 5 בחר 3) יסומן  $\binom{5}{3}$  ושווה ל-10. בעתיד אסביר את הנוסחה לחישוב האפשרויות - כהעשרה.