הסתברות 581

גיא סידס

6 במרץ 2025

תוכן העניינים

תוכן העניינים

הגדרות ראשוניות

ניסוי : למשל הטלת קוביות למשל בחירה באקראי של כדור או אדם מתוך קבוצה.

מאורע : למשל התוצאה 4.

מרחב המדגם : בקוביה - {1,2,3,4,5,6} אוסף התוצאות האפשריות.

הסתברות : הסיכוי להתרחשות מאורע מסויים (לקבלת תוצאה מסויימת).

ההסתברות מסומנת ב-P ומחושבת כך :

$$P\left(\text{מאורעות רצויים}\right)=\frac{\text{כמות האפשרויות הרצויות}}{\text{כמות כל האפשרויות}}$$

כאשר חוזרים על ניסוי מספר פעמים (ואין תלות בין המאורעות) הסתברות לקבלת התוצאות הרצויות היא כפל של ההסתברויות לקבלת כל תוצאה בנפרד. למשל לכך היא זריקה של קובייה פעמיים, כאשר רוצים שבזריקה הראשונה יתקבל מספר זוגי, ובזריקה השניה יתקבל המספר 6. זריקת קוביה פעם אחר פעם היא דוגמא למאורעות בלתי תלויים. גם על זריקה של שתי קוביות בו זמנית מומלץ לחשוב כעל שני ניסויים עוקבים : זריקת קובייה פעם ראשונה. זריקת אותה הקובייה פעם שנייה.

סימונים

כדי להציג נוסחאות הסתברותיות נסמן את המאורעות באותיות. בדוגמא שלעיל :

הוצאת מספר זוגי בזריקה הראשונה= A. הסיכוי להתרחשות מאורע זה תסומן : $P\left(A\right)$

או פשוט $P\left(\text{מספר זוגי}\right)$

הוצאת המספר 6 בזריקה השניה = B והסיכוי $P\left(B\right)$ או פשוט $P\left(\text{יצא }6\right)$

התרחשות שני המאורעות מסומנת כחיתוך של קבוצות : $A\cap B$, והסיכוי להתרחשות זו :

$P\left(A\cap B\right)$

הסימן $\cap$ הוא סימון החיתוך, ומזכיר מעט את $\wedge$ (הקשר הלוגי "וגם").
במקרה של מאורעות בלתי תלויים כמו בדוגמא שלעיל מתקיים כאמור שההסתברות (הסיכוי לזרוק זוגי ואחר כך לזרוק 6 הוא כפל ההסתברויות, כלומר $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$.
מצב זה לא מתקיים בחלק גדול מהשאלות. להתרחשות מאורע A השפעה על הסיכוי להתרחשות מאורע B. דוגמא טיפוסית היא שאלה על קליעה לסל, כשאר הסיכוי שלו לקלוע את הקליעה השניה מושפע מההצלחה בקליעה הראשונה. במקרה זה המאורעות הם תלויים וננתח אותו באמצעות **טבלת הסתברויות דו מימדית**

מושג המשלים

המצב שהוא "לא A " יסומן $\overline{A}$ והסיכוי להתרחשותו הוא $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$
אם למשל הסיכוי למות מקורונה $P\left(\text{למות}\right)=P\left(A\right)=0.01$ אז הסיכוי לחיות (אם חלינו) הוא $P\left(\overline{A}\right)=1-0.01=0.99$. אני בד"כ אמנע משימוש באותיות שלא לצורך.
יתכנו כמובן מאורעות משלימים שנובעים מהניסוי: דוגמא טיפוסית היא התוצאה "בקוביה יצא לכל היותר 2". מאורע זה משלים למאורע "יצא לכל הפחות 3". $P\left(A\right)+P\left(\overline{A}\right)=1$, וניתן למצוא זאת בסכום ההסתברויות של כל זוג עלים בדיאגרמת עץ.

איחוד מאורעות

איחוד מסומן ב- $\cup$ (למשל $A\cup B$), והוא דומה לסימן $\vee$ (קשר לוגי או) במשמעותו: אלו המצבים מהם מתקיים המאורע A או המאורע B (או שניהם). ראינו דוגמאות בהם הפתרון להסתברות $P\left(A\cup B\right)$ היה פשוט $P\left(A\right)+P\left(B\right)$. רוב הזמן זה **לא יהיה המצב** שכן חישוב כזה יוצר מצבי "ספירה כפולה".

טבלה דו מימדית

כאשר זה לא מתקיים, נאמר שהמאורעות תלויים. המשמעות היא שאם התרחש מאורע A יש לך השפעה על הסיכוי שהתרחש גם מאורע B. בד"כ ידובר על תלות שמתקיימת בניסוי יחיד, וניעזר בטבלה דו מימדית כדי לנתח את המצב:

	גברים	נשים	
מעשנים	0.15		0.2
לא מעשנים			
	0.6		1

זו טבלה של 4×4 שאני ממליץ לצייר כ- 3×3 קווים, ולהשאיר הרבה מקום בארבע המשבצות האמצעיות.

חשוב לא לערבב בין המושגים מאורעות בלתי תלויים ומאורעות זרים (שלא הוסבר), ובין המושג מאורעות תלויים למושג הסתברות מותנית.

מאורעות זרים

מאורעות הם זרים אם אינם יכולים להתקיים בו זמנית: $A\cap B=\emptyset$. כך לדוגמא המאורע "להוציא מספר זוגי בקוביה" הוא זר למאורע "להוציא מספר אי זוגי בקוביה".

מאורעות תלויים

שני מאורעות הם תלויים אם הידיעה על התרחשותו של אחד מהם משנה את ההסתברות להתרחשות המאורע האחר. מאורעות שאינם תלויים נקראים בלתי תלויים.

A ו- B בלתי תלויים אם ורק אם $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$.

דוגמא טיפוסית למאורעות בלתי תלויים היא זריקה של שתי קוביות (או של אותה קוביה פעמיים, או הטלת מטבע מספר פעמים).

התוצאות בזריקה/הטלה השנייה אינן תלויות בתוצאת הזריקה / הטלה הראשונה.

מאורעות זרים הם בהכרח תלויים (שכן קיומו של אחד מבטיח את אי-קיומו של האחר).

הבינום/ ברנולי/ n בחר k

יסומן בדרך כלל $\binom{n}{k}$ ומייצג את מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n ללא חשיבות לסדר. הנוסחה מופיעה בדף הנוסחאות וזמינה בראש (ובמחשבון).

להלן הסבר מפורט, שחשוב להבין:

כדי לספור את מספר האפשרויות נסתכל תחילה על מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n **כאשר יש חשיבות לסדר**. נבחר לדוגמא 3 אותיות מבין האותיות $\{A, B, C, D, E\}$ ונרכיב מהן מילים:

עבור האות הראשונה יש לנו 5 אפשרויות ($n = 5$ זהו גודל הקבוצה ממנה בוחרים).

עבור האות השניה נותרו 4 אפשרויות, ועבור האות השלישית 3 אפשרויות.

בסה"כ קיבלנו $n\left(n-1\right)\left(n-2\right)$ (או $(5\cdot4\cdot3)$) שהם גם $\frac{5!}{2!}$.

אפשר להכליל את החישוב ולשים לב שמדובר ב- $\frac{n!}{(n-k)!}$ (בדוגמא שלנו $n = 5, k = 3$)

בצורת הבחירה שביצענו ניתן לקבל למשל צירופי מילים כגון BAC, ABC, CAB.

נשים לב שעבור כל 3 אותיות, נקבל 6 צירופים שונים: (3 אפשרויות למקם את האות הראשונה, 2 אפשרויות למקם את האות השניה, אפשרות 1 למיקום האות השלישית), ובסה"כ כאשר בוחרים k עצמים קיימות $k!$ אפשרויות לסדר.

לכן, במקרה שאין חשיבות לסדר, מספר האפשרויות הוא $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \binom{n}{k}$

ובסה"כ $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ או במחשבון: nCr.

כמעט בכל מקרה בו נידרש למציאת מספר אפשרויות יהיה מדובר בקומבינציות (בחירה ללא החזרה וללא חשיבות לסדר), או $\binom{n}{k}$. שאלה יכולה להתחיל כטבלה של הסתברויות מותנות, ולהסתיים בחישוב שכולל את הבינום $\binom{n}{k}$.

נראה דוגמאות לכך בבגרות 38 למשל.

שאלות מבגרויות

בגרות 13 עמ 53

הוועדה המארגנת של תחרות נולד לשיר מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א'(אולמרט), או יצטרפו אליו שני שופטים מהקואליציה של ההפיכה המשטרית (שופט ב' (בן-גביר) ושופט ג' (גרנמייזר). ההצבעה של א' לא תשתנה אם ישפוט לבד או אם ישפוט עם שני האחרים. ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים. אם ישפוט בתחרות רק א' יעבור המתחרה לשלב נוסף אם השופט יצביע בעדו.

אם ישפטו שלושת השופטים - יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם לפחות 2 מהשופטים יצביעו בעדו. יוסי הוא חד המתמודדים בתחרות.

נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו. ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5 (ג' הוא ברמת תפקוד של מטבע).

א. האם ההסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק א' שווה להסתברות שיעבור שלב אם ישפטו 3 השופטים?

פתרון: נסמן ב-x את ההסתברות ששופט א' מעביר שלב. זוהי ההסתברות למעבר שלב כשרק א' שופט.

ההסתברות למעבר שלב -3 שופטים היא - איחוד הסתברויות שכל השלושה הצביעו בעד, או ששניים הצביעו בעד, כלומר

$$\underbrace{\binom{2}{1}x\cdot(1-x)\cdot 0.5+\overbrace{x^2\cdot 0.5}^{\text{ג' נגד}}}_{2\,votes}+\underbrace{x^2\cdot 0.5}_{3\,votes\ \text{ג בעד}}=$$

$$x\cancel{-x^2+x^2}=x$$

כלומר ההסתברות שווה.

ב. לבסוף הוחלט כי 3 השופטים ישפטו. נתון כי ההסתברות שא' יצביע בעד יוסי אם ידוע כי

יוסי עבר לשלב ב' גדולה מ-0.8. מצא את תחום הערכים של ההסתברות שא' הצביע בעד.

פתרון: הסתברות מותנה. המכנה (הידוע) הוא x (הוכחנו בא' שזו ההסתברות למעבר שלב).

ההסתברות שגם יוסי יצביע וגם יעבור היא

$$x \cdot x \cdot \underbrace{0.5}_{\text{ג בעד}} + x \cdot x \cdot \underbrace{0.5}_{\text{ג נגד}} + x \cdot (1-x) \cdot 0.5$$

ובסה"כ מהנתון נובע:

$\frac{x^2+0.5x-0.5x^2}{x} > 0.8$

$0.5x + 0.5 > 0.8 \rightarrow x > 0.6$

ולכן $\boxed{0.6 < x \leqslant 1}$

בגרות 30 עמ 140

במבחן רב-ברירה ("אמריקאי") יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 השתובות המוצגות. תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאהל מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשלאה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכל.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

א1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

פתרון: $\binom{3}{1}\cdot 0.25\cdot 0.75^2=\boxed{\frac{27}{64}}$

א2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

פתרון: המשלים למצב שלא יפתור אף שאלה נוספת הוא ההסתברות לעבור:

$$1-p\left(\text{0 תשובות נכונות}\right)=1-0.75^3=\boxed{\frac{37}{64}}$$

ב. על 2 מהשאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן. בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה 1 מבין 4 התשובות המוצגות, אינה יכולה נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

פתרון: $\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boxed{\frac{4}{9}}$

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש-k מתוך 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100

נקודות.

יש למצוא את k ולנמק.

ההסתברות לענות נכון היא $\frac{1}{4-k}$

ההסתברות לטעות היא $1-\frac{1}{4-k}=\frac{3-k}{4-k}$

ידוע כי $\left(\frac{3-k}{4-k}\right)^2=\left(\frac{1}{4-k}\right)^2$ (להצליח בשתיהן משמעו 100, לטעות בשתיהן משמעו 60).

מכאן (אלגברית) בהכרח ש $3-k=1$ ומתקבל $\boxed{k=2}$.

פתרון:

בגרות 34 ש3 עמ 169

$P\left(\text{כחול}\right)=x$

א. $\binom{2}{1}x\left(1-x\right)=\frac{4}{9}$

$x-x^{2}=\frac{2}{9}$

$x^{2}-x+\frac{2}{9}=0$

נתון שרובם כחולים לכן $x_{1,2}=\cancel{\frac{1}{3}},\frac{2}{3}$ כלומר 8 כחולים, 4 אדומים.

ב. הוסיפו צהובים! וההסתברות לצבעים שונים נותרה ללא שינוי. **כמה הוסיפו?**

פתרון 1 הוא שנוספו 0 צהובים, אך לא זו הכוונה בשאלה.

נניח הוסיפו x צהובים (סימון. זה לא אותו x של קודם).

$P\left(\text{כחול}\right)=\frac{8}{12+x},P\left(\text{צהוב}\right)=\frac{x}{12+x},P\left(\text{אדום}\right)=\frac{4}{12+x}$

לצורך נוחות נסמן את ההסתברויות לאדום,כחול, צהוב ב-R, B, Y בהתאמה.

מהנתון מתקיים:

$$R\cdot Y+Y\cdot R+B\cdot R+R\cdot B+Y\cdot B+BY=\frac{4}{9}$$

כלומר:

$$2\left(RY\right)+2\left(RB\right)+2\left(YB\right)=\frac{4}{9}$$

$$RY+RB+YB=\frac{2}{9}$$

נחליף חזרה בהסתברויות:

$$\underbrace{\frac{4}{12+x}\cdot\frac{x}{12+x}}_{RY}+\underbrace{\frac{4}{12+x}\cdot\frac{8}{12+x}}_{RB}+\underbrace{\frac{x}{12+x}\cdot\frac{8}{12+x}}_{YB}=\frac{2}{9}/\cdot\left(12+x\right)^{2}$$

$$x^2 - 30x = 0$$

$$x\left(x-30\right)=0 \to \boxed{\text{30 כדורים}}$$

ג. **הוציאו את הצהובים. הוציאו באקראי מן הקופסה כדור אחרי כדור שו ושו ללא החזרה, עד שהוציאו כדור אדום.**

מה ההסתברות שמספר ההוצאות היה גדול מ-3?

פתרון:

צריך לתרגם את השאלה ולעבוד עם המשלים.

מה ההסברות **לא להוציא אדום, 3 פעמים?** זה מה שצריך לחשב.

$$\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}=\boxed{\frac{14}{55}}$$

בגרות 36 ש3 עמ 185

בתרגיל זה אין באמת טבלה. צריך להבין את זה כמה שיותר מהר. התרגיל בעצם נפתח באיחוד של הסתברויות של אירועים זרים.

	אירופה	אמריקה	אסיה
סעיף א	P	$\frac{3}{5}P$	$1-\frac{8}{5}P$
	$=0.5$	$=0.3$	$=0.2$
סעיף ג	25 נוסעים	15 נוסעים	10 נוסעים

לצרכי סעיף א' נחשב כל אחד מ-3 המקרים ונסכום:

$$P\left(\overset{\text{אחד}}{\text{אירופה}} \cap \overset{\text{אחד}}{\text{אסיה}}\right) = 2\cdot P\cdot\left(1-\frac{8}{5}P\right)+$$

$$+$$

$$P\left(\overset{\text{אחד}}{\text{אירופה}} \cap \overset{\text{אחד}}{\text{אמריקה}}\right) = 2\cdot P\cdot\frac{3}{5}P+$$

$$+$$

$$P\left(\overset{\text{אחד}}{\text{אסיה}} \cap \overset{\text{אחד}}{\text{אמריקה}}\right) = 2\cdot\frac{3}{5}P\left(1-\frac{8}{5}P\right)+$$

$$=0.62$$

מהוצאת גורם משותף וחלוקה ב-2 מתקבל:

$$P\left(1-\frac{8}{5}P+\frac{3}{5}P+\frac{3}{5}\left(1-\frac{8}{5}P\right)\right)=0.31$$

$$P\left(\frac{8}{5}-1.96P\right)=0.31$$

$$-1.96P^2+\frac{8}{5}P-0.31=0$$

$P_{1,2}=\boxed{0.5},\cancel{0.3163}$ (נתון שגדול מ-0.4). משקיבלנו את P ממלאים (בטבלה או במקום אחר את ההסתברויות לאמריקה, ו-2 היבשות האחרות).

ב) מה ההסתברות שבבחירת 5 נוסעים יהיו לפחות 2 לאמריקה ו-2 לא לאמריקה.

פתרון: צריך לפרק את הלוגיקה הזו ולהבין שמדובר בסכום ההסתברויות של 2 לאמריקה או 3 לאמריקה.

$$P\left(\text{אמריקה}\right)=0.3,\quad P\left(\overline{\text{אמריקה}}\right)=0.7$$

$$P\left(\text{סעיף ב}\right)=\binom{5}{2}\cdot\left(0.3^2\cdot0.7^3\right)+\binom{5}{3}\left(0.3^3\cdot0.7^2\right)=\boxed{0.441}$$

ג) כאן צריך להעביר תחילה את ההסתברויות לכמויות פיזיות (לעיל בטבלה, ושוב, זו **לא טבלה** של הסתברות מהסוג הרגיל, אלא סתם טבלה לשם נוחות).

כאן יש להתחשב בכך ש"אין החזרה". כלומר תוצאת הניסוי הראשון משפיעה על הניסוי השני. מי שחייבים רשאים לצייר עץ קטן (עציץ לכל היותר).

נחשב תחילה את ההסתברות למה שמצוי:

$$P\left(\text{2לאותה יבשת}\right)=\frac{10}{50}\cdot\frac{9}{49}+\frac{15\cdot14}{50\cdot49}+\frac{25\cdot24}{50\cdot49}=\frac{18}{49}$$

$$P\left(\text{2לאמריקה}\right)=\frac{15\cdot14}{50\cdot49}=\frac{3}{35}$$

$$P\left(\text{2לאמריקה}/\text{2לאותה יבשת}\right)=\frac{\frac{3}{35}}{\frac{18}{49}}=\boxed{\frac{7}{30}}$$

בגרות 38 עמ 216

	מוזיקה	לא מוזיקה	סה"כ
ספורט	$\frac{2}{3}y$ 0.5	$\frac{1}{3}y$ 0.25	y $\boxed{0.75}$
לא ספורט	$0.4\,(1-y)$ 0.1	$0.6\,(1-y)$ 0.15	$1-y$ 0.25
סה"כ	$1.5x =$ 0.6	$x =$ $\boxed{0.4}$	**1**

שלב א: $2.5x = 1 \rightarrow x = 0.4$

שלב ב: $\frac{1}{3}y + 0.6\,(1-y) = 0.4 \rightarrow y = 0.75$

לאחר שני השלבים הטבלה מלאה, ונקבל את התשובה לסעיף א: $\boxed{0.5}$

סעיף ב' (הסתברות **מותנית**):

"נמצא שהלקוח צופה בערוצי מוזיקה או בערוצי ספורט". זה מייצג את קבוצת הייחוס הבאה:

	מוזיקה	לא מוזיקה
ספורט	0.5	0.25
לא ספורט	0.1	

ומכאן

$$P\left(\text{סעיף ב}\right) = \frac{P\left(\text{ספורט} \cap \text{לא מוזיקה}\right)}{P(\text{ספורט} \cup \text{מוזיקה})} = \frac{0.25}{0.25+0.5+0.1} = \boxed{\frac{5}{17}}$$

סעיף ג': **בינום:**

יש לסכום 3 מקרים (ש-2, 3, או 4 צופים, מבין ה-4 שנבחרו), **או לעבוד עם המשלים:**

1 מינוס הסיכוי שאף אחד אינו צופה במוזיקה, או שאחד בלבד צופה במוזיקה:

$$P\left(\text{ג'}\right)=1-P\left(\text{0צופים}\right)-P\left(\text{1צופים}\right)=$$
$$=1-0.6^4-\binom{4}{1}0.6^3\cdot 0.4=\boxed{\frac{328}{625}}$$

החישוב האלטרנטיבי דומה אך ארוך יותר:

$$P\left(\text{2צופים}\right)\cup P\left(\text{3צופים}\right)\cup P\left(\text{4צופים}\right)=P\left(\text{2צופים}\right)+P\left(\text{3צ'}\right)+P\left(\text{4צ'}\right)$$
$$=\binom{4}{2}0.4^2\cdot 0.6^2+\binom{4}{3}0.4^3\cdot 0.6+\binom{4}{4}0.4^4=\boxed{\frac{328}{625}}$$

הסיבה שהאיחוד מתתרגם לחיבור, היא **שהמאורעות זרים**. זה תמיד יהיה המקרה בשאלות בבגרויות שמערבות בינום, שכן המאורע "רק 2", זר למאורע "בדיוק 3" וכו'.

בגרות 39 ש3 עמ 209

$P(\text{כחול})=x, P(\text{צהוב})=3x, P(\text{אדום})=\frac{5}{8}$

$$1x+3x+\frac{5}{8}=1\rightarrow 4x=\frac{3}{8}\rightarrow \boxed{x=\frac{3}{32}}$$

	כחול	צהובים	אדום	סה"כ
מחוספס	0	$\frac{8}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{9}}{32}=\frac{8}{32}$	$\frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{8}=\frac{4}{8}$	$\boxed{0.75}$
חלק	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{8}=\frac{1}{8}$	0.25
סה"כ	$x=\frac{3}{32}$	$3x=\frac{9}{32}$	$\frac{5}{8}$	1

בירוק - הערכים אותם ניתן להשלים בעקבות חישוב x.

א) לאחר מילוי הטבלה $\boxed{0.75}=(\text{מחוספס})\,P$

ומכאן ההסתברות לבדיוק 3 מ-8 היא: $\binom{8}{3}0.75^3\cdot 0.25^3=\frac{189}{8192}$

ב) 1) ההסתברות לצבעים שונים באמצעות המשלים:

$$P\left(\text{צ' שונים}\right)=1-\frac{20}{32}\cdot\frac{19}{31}-\frac{9}{32}\cdot\frac{8}{31}-\frac{3}{32}\cdot\frac{2}{31}=\boxed{\frac{267}{496}}$$

ב)2) $P\left(\text{צבעים שונים/אדום ראשון}\right)=\frac{P(redfirst\cap differentColors)}{P(\text{צבעים שונים})}=\frac{\frac{20}{32}\cdot\frac{12}{31}}{\frac{267}{496}}=\boxed{\frac{40}{89}}$

לשים לב שכל הפעילות כאן היא ללא החזרה, ולכן יש לתוצאות השלב הראשון השפעה על ההסתברות בשלב הראשון (זו למשל דוגמא למאורעות תלויים).

ג) כל ההסתברויות לצבעים הן מספרים רציונליים שהמכנה המשותף להם הוא 32 $\frac{5}{8},\frac{9}{32},\frac{3}{32}$.

לכן כדי לקבל מספר עגול כמות הכדורים חייבת להתחלק ב-32 ($32|n$ בשפה מתמטית: 32 מחלק את n). מכאן שכמות הכדורים היא כפולה של 32, כלומר $2\cdot 32$ או $3\cdot 32$.

בגרות 581 40 עמ 219

	תלמידים	מורים	סה"כ
נבדקו	$\frac{13}{15}x$ $=0.52$	$0.8\cdot 0.1=\frac{2}{15}x$ $=0.08$	$x=$ 0.6
לא נבדקו	0.38	$0.2\cdot 0.1=0.02$	0.4
סה"כ	0.9	0.1	1

מפתרון המשוואה שבטבלה מתקבל $x=0.6$. משוואה חלופית היא $x=0.08+\frac{13}{15}x$

א) $P\left(\text{לא נבדק}\right)=1-0.6=\boxed{0.4}$

ב) $P\left(\text{לפחות 4 נבדקו}\right)=\binom{5}{4}0.6^4\cdot 0.4^1+\binom{5}{5}0.6^5\cdot 0.4^0=\boxed{\frac{1053}{3125}}$

במחשבון: בינום של 5 מעל 4 הוא בדיוק כמו 5 בחר 1 ולכן אינטואיטיבית ניתן לדעת שזה $\binom{5}{4}=5$. בינום של 5 בחר 5 הוא 1 (אין אופציות אם בוחרים את כולם). לכן, למי שמקליד את זה באמריקאית, ההקלדה נראית כך:

$5\times .6^4\times .4+.6^5$. המחשבון תומך בהקלדת מספרים כגון 0.6 כ- .6).

ג) ידוע שמבין החמישה לפחות אחד נבדק: המכנה טיפה קטן (ביחס ל-1 כאשר אין הסתברות מותנית), המונה ללא שינוי מפני שהקבוצה "לפחות 4 נבדקו" **מוכלת** בקבוצה לפחות 1 נבדק. זו תת קבוצה שלה, ולכן החיתוך בין הקבוצות הוא הקבוצה "לפחות 4 נבדקו".

$$P\left(\text{לפחות 4 נבדקו}/\text{לפחות 1 נבדקו}\right)=\frac{P(\text{לפחות 4 נבדקו}\cap\text{לפחות 1 נבדקו})}{\text{לפחות 1 נבדקו}}=\frac{\frac{1053}{3125}}{1-0.4^5}=\boxed{\frac{351}{1031}}$$

ד) הסעיף הקשה. יש כאן במונה את המקרה שדורש להבטיח (או לאבטח) שמשהו יקרה בנסיון האחרון (כמו במקרה של קלע שמצליח בנסיון 6 להשיג מספר פגיעות מסויים) ובנוסף - הסתברות מותנית.

$$P\left(\text{אחרון נבדק}/\text{בדיוק 2 נבדקו}\right)=\frac{P(\text{בדיוק 2 נבדקו}\cap\text{אחרון נבדק})}{P(\text{בדיוק 2})}=\frac{\overbrace{\binom{4}{1}0.6^1\cdot 0.4^3}^{\text{ברנולי 1 מ-4}}\cdot\overbrace{0.6}^{\text{אבטחת האחרון}}}{\binom{5}{2}0.6^2\cdot 0.4^3}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

בגרות 45 ש3 עמ' 267

נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק 3 תוצאות אפשירות: נצחון, תיקו, והפסד. ההתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד.

נסמן ב-p את ההסתברות להפסד.

נתון שאם נטע משחקת בשני משחקים, ההתברות להפסיד בשניהם היא לפחות $4.5p$

א. מצא את P.

ההסתברות לנצח היא $3p$ (נתון פי 3 סיכוי לנצח).

פתרון מהנתון נובע $1-(3p)^2=4.5p$

$9p^2+4.5p-1=0 \rightarrow \boxed{p=\frac{1}{6}}, \cancel{-\frac{2}{3}}$

ב. מצאו את ההסתברות לנצח ב-3 לפחות.

ההסתברת לנצח ב-1 היא $3p=0.5$

פתרון: צריך לנצח ב-3 או 4 או 5:

$$\binom{5}{3}0.5^3\cdot0.5^2+\binom{5}{4}0.5^5+\binom{5}{5}0.5^5=16\cdot0.5^5=\boxed{0.5}$$

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות:

פתרון: 0.5^3 (לא מעניין מה קורה אחרי 3 המשחקים הראשונים).

ד1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

ההסתברות לא להפסיד במשחק בודד היא $\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}$.

פתרון: ההסתברות לא להפסיד כלל היא $\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{3125}{7776}$

ד2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות מה ההסתברות שהיא נצחה בשלושת הראשונים, והוציאה תיקו באחרון.

פתרון: ההסתברות לתיקו היא $1-p-3p=\frac{1}{3}$

ההסתברות להפסיד אחד לפחות היא המשלים לד1 כלומר $1-\frac{3125}{7776}$

ההסתברות ל-3 הנצחונות הראשונים ותיקו באחרון היא $0.5^3\cdot\frac{1}{6}$

ולסיכום ההסתברות המותנה היא המנה: $\frac{162}{4651} = \frac{0.5^3\cdot\frac{1}{6}\cdot\overbrace{\frac{1}{3}}^{\text{תיקו}}}{1-\frac{3125}{7776}}$

שאלה 3 מקבוצת המורים

רן מנסה להתקשר מטלפון ציבורי לאדם שרק שם משפחתו ידוע לוץ הוא מחפש את השם בספר הטלפונים הנמצא בתא הטלפון ומוצא רשימה של n אנשים שונים הנושאים את אותו שם משפחה. בידי רן רק שני אסימונים בעזרתם ניתן לבצע שיחות טלפון באותו טלפון.

א. האם ההסתברות שיצליח לשוחח בחיוג השני גדולה, קטנה או שווה להסתברות שיצליח לשוחח עם האדם המבוקש בחיוג הראשון? נמק.

פתרון: ההסתברות שווה. כדי להצליח לשוחח בחיוג השני צריך גם להיכשל בחיוג הראשון, כלומר:

$$P\left(\text{בחיוג שני}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\boxed{\frac{1}{n}}=P\left(\text{בחיוג ראשון}\right)$$

הערה: שני המאורעות זרים ולכן ההסתברות להצליח לשוחח היא סכום ההסתברויות כלומר,

$$P\left(\text{להצליח}\right)=P\left(\text{חיוג ראשון}\right)+P\left(\text{חיוג שני}\right)=\frac{2}{n}$$

ב) נניח כי רן הצליח לשוחח עם האדם שחיפש.

מה ההסתברות ששוחח עימו בחיוג השני שביצע מן הטלפון הציבורי?

פתרון: הסתברות מותנית:

$$P\left(\text{חיוג שני/הצליח}\right)=\frac{P\left(\text{חיוג שני}\right)}{P\left(\text{הצליח}\right)}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}}=\boxed{0.5}$$

ג1) עבור אילו ערכי n ההסתברות שרן יצליח לשוחח עם האדם שחיפש תהיה קטנה מ-50%?

פתרון:

$$P\left(\text{הצליח}\right) \underbrace{=}_{\text{מסעיף א}} \frac{2}{n} < 0.5 \rightarrow \boxed{n > 4}$$

ג)2 ההסתברות שרן לא הצליח לשוחח עם האדם שחיפש היא $\frac{5}{7}$. מצא את n

פתרון:

$$P\left(\text{הצליח}\right) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \underbrace{=}_{\text{מסעיף א}} \frac{2}{n} \rightarrow \boxed{n = 7}$$

ג)3 האם התוצאה של ג)2 תואמת את התוצאה של ג)1? נמק.

פתרון: כן ב-ג)1 מתקבלת גרירה כללית $n > 4 \rightarrow P < 0.5$.

וב-ג)2 יש מקרה $n = 7 > 4 \ \wedge \ P < 0.5$.

(אין צורך בהסבר נוסף, אבל באופן כללי כדי להפריך גרירה $Q \rightarrow P$ צריך להראות מקרה $\neg Q \wedge P$).

בגרות 571 23 ש3 עמ 217

$P(\text{כחול})=x, P(\text{צהוב})=3x, P(\text{אדום})=\frac{5}{8}$

$$x+3x+\frac{5}{8}=1 \to 4x=\frac{3}{8} \to \boxed{x=\frac{3}{32}}$$

א) ההסתברות לתלמיד מתנדבר בהינתן תנועת נוער היא 0.8 (או ברישום של הסתברות מותנית: $P\left(\text{ת'נוער/מתנדבר}\right)=\frac{0.8x}{x}=0.8$

משימוש במשלים נקבל שיש לשלול מצב שכולם מתנדבים ומצב שכולם אינם מתנדבים ולכן:

$$P\left(\text{ב'}\right)=1-0.8^5-0.2^5=\boxed{\frac{84}{125}}=0.672$$

	ת'נוער	לא ת'נוער	סה"כ
מתנדב	$0.2x=$ 0.32	$\left(\frac{1}{12}\right)(1-x)=$ 0.05	0.37
לא מתנדב	$0.8x=$ 0.08	0.55	$\boxed{0.63}$
סה"כ	$x=$ 0.4	$1-x=$ 0.6	1

ב) בירוק - הערכים אותם ניתן להשלים בעקבות חישוב x. טעויות נפוצות יהיו לרשום $\frac{1}{12}$ או $\frac{0.55}{12}$ במקום 0.05 שמתקבל מהמשוואה:

$$\frac{1-x}{12}+0.55=1-x$$
$$1-x+6.6=12-12x$$
$$11x=12-1-6.6$$
$$x=0.4$$

לאחר פתרון המשוואה ומילוי הטבלה $\boxed{0.63} = P\left(\text{ב}\right)$

ג) טבלה כמותית מובילה לכך ש-8 חברים בתנועת נוער ולא מתנדבים (פשוט לכפול הכל ב-100).

	ת'נוער	לא ת'נוער	סה"כ
מתנדב	32	5	37
לא מתנדב	8	55	63
סה"כ	40	60	100

ד1) בוחרים באקראי מהקבוצה בת 63חברים. ההסתברות שהראשון חבר בתנועה ושני האחרים לא, היא עץ, שבו הכמויות משתנות משלב לשלב:

$$P\left(\text{ד}1\right)=\frac{8}{63}\cdot\frac{55}{62}\cdot\frac{54}{61}$$

ד2) מותנית שרצוי לפתור תוך התעלמות מהענף הראשון, כלומר להניח שזה קרה, ושנותר לדרוש את המקרים חבר תנועה ואחריו לא חבר תנועה, או להיפך:

$$P\left(\text{ד}2\right)=\frac{54}{62}\cdot\frac{8}{61}+\frac{8}{62}\cdot\frac{54}{61}=\boxed{\frac{432}{1891}}$$

רישום מלא של מותנית יראה כך:

$$P\left(\text{ד}2\right)=\frac{\frac{55}{63}\cdot\frac{54}{62}\cdot\frac{8}{61}+\frac{55}{63}\cdot\frac{8}{62}\cdot\frac{54}{61}}{\frac{55}{63}}$$