在平面直角坐标系 xOy 中, 水滴曲线由四个 Bézier 控制点描述:

$$(0,0)\,,(2s,0)\,,(3s,2s)\,,(0,6s)\,,$$

其中 $s>0$ 为尺度参数.

由此写出水滴曲线的参数方程:

$$\begin{cases} x=3t\left(1-t\right)^2\cdot 2s+3t^2\left(1-t\right)\cdot 3s, \\ y=3t^2\left(1-t\right)\cdot 2s+t^3\cdot 6s, \end{cases}$$

其中 $t\in[0,1]$.

经化简, 得

$$\begin{cases} x=-3st^3-3st^2+6st, \\ y=6st^2. \end{cases}$$

以上方程中, 将 x 对 t 求导得 $x'=-9st^2-6st+6s$, 由此可知 x 在 $t\in\left[0,\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}\right]$ 时单调递增, 在 $t\in\left[\dfrac{\sqrt{7}-1}{3},1\right]$ 时单调递减. 故 x 的最大值 $x_{\max}=x\Big|_{t=\left(\sqrt{7}-1\right)/3}=\dfrac{14\sqrt{7}-20}{9}s$.

将上文的水滴曲线绕 y 轴旋转一周, 即可得到水滴曲面, 其参数方程为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=6st^2, \\ z=r\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $t\in[0,1]$, $r=-3st^3-3st^2+6st$, $\theta\in[0,2\pi)$. r 的取值范围为 $\left[0,\dfrac{14\sqrt{7}-20}{9}s\right]$, y 的取值范围为 $[0,6s]$, 由此可用一有限圆柱体包围水滴曲面.

现欲计算某射线是否与水滴曲面相交. 设射线的参数方程为

$$\begin{cases} x=q_xl+r_x, \\ y=q_yl+r_y, \\ z=q_zl+r_z, \end{cases}$$

其中 $q_x^2+q_y^2+q_z^2=1$, $r_x,r_y,r_z\in\mathbb{R}$, $l>0$. 分两种情况讨论:

1. $q_y=0$, 此时射线位于平面 $y=r_y$. 若 $r_y\notin(0,6s)$, 则认为该射线与水滴曲面不相交. 否则, 上述平面与水滴曲面的相交线为平面上的圆

$x^2+z^2=r_0^2$, 其中 $r_0=-3st_0^3-3st_0^2+6st_0$, $t_0=\sqrt{\dfrac{r_y}{6s}}$, 问题归约为平面上的射线与圆是否相交的问题, 这里不再展开讨论.

2. $q_y\neq 0$. 若 $q_y>0$ 且 $r_y\geq 6s$, 或者 $q_y<0$ 且 $r_y\leq 0$, 则认为该射线与水滴曲面不相交. 否则若射线与水滴曲面相交于 $(r_0\cos\theta_0, 6st_0, r_0\sin\theta_0)$, 其中 $t_0\in[0,1]$, $r_0=-3st_0^3-3st_0^2+6st_0$, $\theta_0\in[0,2\pi)$, 则 t_0 是以下关于 t 的方程的一个根:

$$\sqrt{\left(q_x\frac{6st^2-r_y}{q_y}+r_x\right)^2+\left(q_z\frac{6st^2-r_y}{q_y}+r_z\right)^2}=-3st^3-3st^2+6st.$$

若 $q_x=q_z=0$, 则等式左边的值恒为 $\sqrt{r_x^2+r_z^2}$, 令 $u=\sqrt{r_x^2+r_z^2}$. 否则令 $A=\dfrac{6sq_x}{q_y}$, $B=-\dfrac{r_yq_x}{q_y}+r_x$, $C=\dfrac{6sq_z}{q_y}$, $D=-\dfrac{r_yq_z}{q_y}+r_z$, 等式左边可化为

$$\sqrt{\left(A^2+C^2\right)\left(t^2+\frac{AB+CD}{A^2+C^2}\right)^2+\frac{\left(AD-BC\right)^2}{A^2+C^2}},$$

令 $u=\dfrac{|AD-BC|}{\sqrt{A^2+C^2}}$. 若 $u\geq\dfrac{14\sqrt{7}-20}{9}s$, 则认为该射线与水滴曲面不相交. 否则解方程

$$3st^3+3st^2-6st+\sqrt{r_x^2+r_z^2}=0\left(q_x=q_z=0\right),$$

或

$$\begin{aligned}&9s^2t^6+18s^2t^5-\left(A^2+C^2+27s^2\right)t^4-36s^2t^3\\&-2\left(AB+CD-18s^2\right)t^2-\left(B^2+D^2\right)=0\left(q_x^2+q_z^2>0\right).\end{aligned}$$

对方程的每个根 t_i, 求 $l_i=\dfrac{6st_i^2-r_y}{q_y}$. 若存在 i, 使 $t_i\in(0,1)$ 且 $l_i>0$, 则射线与水滴曲面有交点 $(q_xl_i+r_x, q_yl_i+r_y, q_zl_i+r_z)$, 否则认为二者无交点.