

CS1(4): 数の表現

脇田建

2016.10.3

整数の表現

予告：次回小テスト(1)

- ❖ 100の二進表現は？
- ❖ 二進表現で10010000となる数 n について $(n+4)$ の二進表現は？
- ❖ -3:Byteの二進表現は？
- ❖ -3:Byteの十六進表現は？
- ❖ -3:Shortの二進表現は？
- ❖ Intで表現可能な整数の区間は？

計算機における整数の表現 (Byte)

	符号	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
val b0: Byte = 0	0	0	0	0	0	0	0	0
val b1: Byte = 1	0	0	0	0	0	0	0	1
val b2: Byte = 2	0	0	0	0	0	0	1	0
val b3: Byte = 3	0	0	0	0	0	0	1	1
val b4: Byte = 4	0	0	0	0	0	1	0	0
val b5: Byte = 5	0	0	0	0	0	1	0	1
val b6: Byte = 6	0	0	0	0	0	1	1	0
val b7: Byte = 7	0	0	0	0	0	1	1	1
val b8: Byte = 8	0	0	0	0	1	0	0	0

計算機における整数の表現 (Byte)

	符号	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
val b0: Byte = 119	0	1	1	1	0	1	1	1
val b1: Byte = 120	0	1	1	1	1	0	0	0
val b2: Byte = 121	0	1	1	1	1	0	0	1
val b3: Byte = 122	0	1	1	1	1	0	1	0
val b4: Byte = 123	0	1	1	1	1	0	1	1
val b5: Byte = 124	0	1	1	1	1	1	0	0
val b6: Byte = 125	0	1	1	1	1	1	0	1
val b7: Byte = 126	0	1	1	1	1	1	1	0
val b8: Byte = 127	0	1	1	1	1	1	1	1

計算機における負数の表現 (Byte)

	符号	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
val b3: Byte = 3	0	0	0	0	0	0	1	1
val b2: Byte = 2	0	0	0	0	0	0	1	0
val b1: Byte = 1	0	0	0	0	0	0	0	1
val b0: Byte = 0	0	0	0	0	0	0	0	0
val b0: Byte = -1	1	?	?	?	?	?	?	?
val b1: Byte = -2	1	?	?	?	?	?	?	?
val b2: Byte = -3	1	?	?	?	?	?	?	?
val b3: Byte = -4	1	?	?	?	?	?	?	?
val b8: Byte = -5	1	?	?	?	?	?	?	?

計算機における負数の表現 (Byte)

仮に符号ビットの前にもう1ビットあったとしよう

	謎	符号	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
val b3: Byte = 3	1	0	0	0	0	0	0	1	1
val b2: Byte = 2	1	0	0	0	0	0	0	1	0
val b1: Byte = 1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
val b0: Byte = 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
val bm0: Byte = -1		1	?	?	?	?	?	?	?
val bm1: Byte = -2		1	?	?	?	?	?	?	?
val bm2: Byte = -3		1	?	?	?	?	?	?	?
val bm3: Byte = -4		1	?	?	?	?	?	?	?
val bm8: Byte = -5		1	?	?	?	?	?	?	?

計算機における負数の表現 (Byte)

★ 2の補数表現 ★

	謎	符号	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
val b3: Byte = 3	1	0	0	0	0	0	0	1	1
val b2: Byte = 2	1	0	0	0	0	0	0	1	0
val b1: Byte = 1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
val b0: Byte = 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
val b0: Byte = -1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
val bm1: Byte = -2	0	1	1	1	1	1	1	1	0
val bm2: Byte = -3	0	1	1	1	1	1	1	0	1
val bm3: Byte = -4	0	1	1	1	1	1	1	0	0
val bm5: Byte = -5	0	1	1	1	1	1	0	1	1

計算機における負数の表現 (Byte)

2の補数表現

	符号	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
val b5: Byte = 5	0	0	0	0	0	1	0	1
val bm5: Byte = -5	1	1	1	1	1	0	1	1

- ❖ 5と-5の表現をよくよく見比べてみよう.
- ❖ 5の表現から-5の表現を簡単に得るには？

2の補数表現の利点

加算器のハードウェアの実装が単純

	符号	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
val b1: Byte = 1	0	0	0	0	0	0	0	1
val bm1: Byte = -1	1	1	1	1	1	1	1	1
$b1 + bm1 = 1 + (-1) = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
val b6: Byte = 6	0	0	0	0	0	1	1	0
val bm6: Byte = -6	1	1	1	1	1	0	1	0
$b6 + bm6 = 6 + (-6) = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
val b100: Byte = 100	0	1	1	0	1	0	0	0
val bm100: Byte = -100	1	1	0	1	1	0	0	0
$b100 + bm100 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0

2の補数表現で表現可能な整数

- ❖ N ビットの2の補数表現

- ❖ 最大値：0111...1 (0に続けて $(N-1)$ 個の1) $= 2^{(N-1)} - 1$

- ❖ 最小値：2の補数表現は 2^N 個の相異なる連続した整数を表現可能だから、植木算により

$$(2^{(N-1)} - 1) - (2^N) + 1 = (2^{(N-1)} - 1) - (2 \cdot 2^{(N-1)}) + 1 = -2^{(N-1)}$$

- ❖ ということで $[-2^{(N-1)}, 2^{(N-1)} - 1]$ が表現可能な範囲

ビットとバイトとScalaの4種の整数型

Byte	Short	Int	Long
8 bits	16 bits	32 bits	64 bits
$-2^7 \sim 2^7 - 1$	$-2^7 \sim 2^7 - 1$	$-2^7 \sim 2^7 - 1$	$-2^7 \sim 2^7 - 1$
-128 ~ 127	-32,768 ~ 32,767	-2,147,483,648 ~ 2,147,483,647	-9,223,372,036,854,775,808 ~ 9,223,372,036,854,775,807
± 百	± 3万	± 21億	± 920京

ビットとバイトとScalaの4種の整数型

Byte	Short	Int	Long
8 bits	16 bits	32 bits	64 bits
$-2^7 \sim 2^7 - 1$	$-2^7 \sim 2^7 - 1$	$-2^7 \sim 2^7 - 1$	$-2^7 \sim 2^7 - 1$
± 百	± 3万	± 21億	± 920京

```
scala> (Byte.MinValue, Byte.MaxValue)
res16: (Byte, Byte) = (-128,127)
```

```
scala> (Short.MinValue, Short.MaxValue)
res17: (Short, Short) = (-32768,32767)
```

```
scala> (Int.MinValue, Int.MaxValue)
res18: (Int, Int) = (-2147483648,2147483647)
```

```
scala> (Long.MinValue, Long.MaxValue)
res19: (Long, Long) = (-9223372036854775808,9223372036854775807)
```

予告：次回小テスト(2)

- ❖ Nビットを用いた2の補数表現における最大の数と最小の数は？
- ❖ ScalaにおいてShort型は何ビットか？

オーバーフローの観測 (LX03A)

2^n : Byte編	2^n : Short編
$2^0 = 1$	$2^0 = 1$
$2^1 = 2$	$2^1 = 2$
$2^2 = 4$	$2^2 = 4$
...	...
$2^5 = 32$	$2^{13} = 8192$
$2^6 = 64$	$2^{14} = 16384$
$2^7 = -128$	$2^{15} = -32768$
$2^8 = 0$	$2^{16} = 0$
2^n : Int編	2^n : Long編
$2^0 = 1$	$2^0 = 1$
$2^1 = 2$	$2^1 = 2$
$2^2 = 4$	$2^2 = 4$
...	...
$2^{29} = 536870912$	$2^{61} = 2305843009213693952$
$2^{30} = 1073741824$	$2^{62} = 4611686018427387904$
$2^{31} = -2147483648$	$2^{63} = -9223372036854775808$
$2^{32} = 0$	$2^{64} = 0$

2^n : Byte, 2^n : Short, 2^n : Int, 2^n : Long

- ❖ いろんな型について 2^n を計算したい. でも右のコードは阿呆っぽい. どうする?
- ❖ まずはアドホック多相 (Ad Hoc Polymorphism)

```
// 2^nをShort上で計算する関数
def powerOf2S(n: Int): Short = {
  def aux(i: Int, p: Short): Short = {
    println(f"2^{i} = {p}\n")
    if (i == n) p
    else aux(i+1, (p+p).toShort)
  }
  println("\n2^n[Short]")
  aux(0, 1: Short)
}
```

```
// 2^nをInt上で計算する関数
def powerOf2I(n: Int): Int = {
  def aux(i: Int, p: Int): Int = {
    println(f"2^{i} = {p}\n")
    if (i == n) p
    else aux(i+1, p+p)
  }
  println("\n2^n[Int]")
  aux(0, 1)
}
```

```
// 2^nをLong上で計算する関数
def powerOf2L(n: Int): Long = {
  def aux(i: Int, p: Long): Long = {
    println(f"2^{i} = {p}\n")
    if (i == n) p
    else aux(i+1, p+p)
  }
  println("\n2^n[Long]")
  aux(0, 1L)
}
```


Ad Hoc多相な2の冪 (LX03B)

- ❖ オーバーローディング：同名だが引数の型が異なる関数定義群
- ❖ `powerOf2(n: Int, one: Int): Int`, `powerOf2(n: Int, one: Long): Long`, ...

二進法と十六進法

	符号	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
val b4: Byte = 123	0	1	1	1	1	0	1	1

- ❖ 二進表現は表記が長くてつらい. 十進表現で N 桁のものは二進表現では $(\log_2 10)N$ 桁 $\doteq 3.3N$ 桁を要する.
- ❖ ※ 情報科学では $\log_2 M$ を $\lg M$ と表記することもある.
- ❖ つらいので二進表現と親和性の高い十六進表現が便利

二進法と十六進法

2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1

❖ $4M$ 桁の二進表現 \Rightarrow 4桁の二進表現が M 個並んだもの

二進				16進	二進				16進	二進				16進	二進				16進
0	0	0	0	0	0	1	0	0	4	1	0	0	0	8	1	1	0	0	C
0	0	0	1	1	0	1	0	1	5	1	0	0	1	9	1	1	0	1	D
0	0	1	0	2	0	1	1	0	6	1	0	1	0	A	1	1	1	0	E
0	0	1	1	3	0	1	1	1	7	1	0	1	1	B	1	1	1	1	F

Scalaにおける十六進表現

❖ 0x十六進表現

❖ 例: $0x2a = 16 \times 2 + 10 = 42$

```
scala> println(0x5,0xa,0x2a,0xff,0xfffff)
(5,10,42,255,65535)
```

```
scala> println(f"${5}%h","${10}%h","${42}%h","${255}%h","${65535}%h")
5,a,2a,ff,ffff
```

```
scala> 0xfffffffffb
res36: Int = -5
```

```
scala> println(f"${-5}%h")
fffffffffb
```


おまけ：書式つき文字列

書式つき文字列 (cs1.LX0C)

- ❖ 普通の文字列: “This is a string”

- ❖ 書式つき文字列

- ❖ `f“...${式}...”`

- ❖ `f“Int.MaxValue is ${Int.MaxValue}”`

- ❖ `f“${5 > 3}”`

- ❖ `f“...$変数名...”`

- ❖ `val imv = Int.MaxValue`

- `f“Int.MaxValue is $imv”`

- ❖ 書式つき文字列: `f“... ${式}%書式...”`


```

package cs1

import scala.math._

// run-main cs1.LX03C: 書式つき文字列の例

object LX03C {
  def fact(n: Int): Int = {
    if (n == 0) 1
    else n * fact(n - 1)
  }

  def main(arguments: Array[String]) {
    // ${...} の内側に書かれた Scala の式の評価結果が文字列に埋め込まれる
    println(f"fact(10) = ${fact(10)}")
    println(f"fact(10) は偶数か? ${fact(10) % 2 == 0}")
    println(f"fact(10) は偶数か? ${if (fact(10) % 2 == 0) "はい" else "いいえ"}")
    println(f"Int.MaxValue = ${Int.MaxValue}")

    // 変数の値を文字列に埋め込むときは { } を省略できる.
    val lmax = Long.MaxValue
    println(f"Long.MaxValue = $lmax")
  }
}

```

```

// %d, %x, %f, %gなどを使ってさらに細かく書式を制御できる
// %8x: 8桁の16進表記を埋める

```

```

// fact(10) = 3628800
// p fact(10) は偶数か? true
// fact(10) は偶数か? はい
// Int.MaxValue = 2147483647
// Long.MaxValue = 9223372036854775807
// p 100> 100, 100> 64, 100> 00000064

```

```

// 100の16進表現 = 64, π = 3.14159, e^30 = 1.06865e+13

```

```

s/api/java/util/Formatter.html#syntax).

```

%x

%1.5f

%g

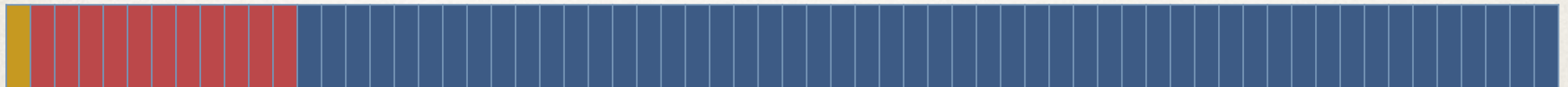
詳しくは、Javaの
Formatterクラス
の解説

浮動小数点数の表現

IEEE 754 規格

指数部11ビット (e: exponent)

仮数部52ビット (f: fractional, mantissa)



符号(s)
1ビット

- ❖ $e \in [1, 2^{11}-2] = [1, 2046]$
だから,
 $(e-1023) \in [-1022, 1023]$
- ❖ $1024 / \log 2 = 308$. 桁
- ❖ $x = (-1)^s 2^{e-1023} (1.f)_2$
仮数部の **けち** 表現
- ❖ ScalaのDouble型

IEEE 754の特殊な数表現

- ❖ $e = 2047, f \neq 0$: 非数 (NaN: not a number)

Scala では `Double.NaN`, `Float.NaN`

- ❖ $e = 2047, f = 0$: s に応じて $+\infty$ あるいは $-\infty$

- ❖ $e = 0, f \neq 0$: $(-1)^s 2^{-1022} (0.f)_2$ **けち**をやめて高精度化

- ❖ $e = 0, f = 0$: s に応じて $+0$ あるいは -0

ScalaのDouble型

- ❖ MaxValue / MinValue
- ❖ MaxPositiveValue / MinPositiveValue
- ❖ PositiveInfinity ($+\infty$) / NegativeInfinity ($-\infty$)
- ❖ NaN

浮動小数点数の性質 (LX03D)

- ❖ 1.0: Double を2で順次割り続けて右のような出力を得るプログラムを作成しなさい. など
- ❖ このプログラムで $2^{-n} = 0.000000$ となる最初の n の値はなにか. IEEE 754 規格の設計に照らして, n がこの値となることの説明をプログラムのコメントとして書きなさい.

```
1.0 * 2^-0 = 1.000000
1.0 * 2^-1 = 0.500000
1.0 * 2^-2 = 0.250000
1.0 * 2^-3 = 0.125000
1.0 * 2^-4 = 0.0625000
1.0 * 2^-5 = 0.0312500
1.0 * 2^-6 = 0.0156250
1.0 * 2^-7 = 0.00781250
1.0 * 2^-8 = 0.00390625
1.0 * 2^-9 = 0.00195313
1.0 * 2^-10 = 0.000976563
1.0 * 2^-11 = 0.000488281
1.0 * 2^-12 = 0.000244141
1.0 * 2^-13 = 0.000122070
1.0 * 2^-14 = 6.10352e-05
1.0 * 2^-15 = 3.05176e-05
1.0 * 2^-16 = 1.52588e-05
1.0 * 2^-17 = 7.62939e-06
```

- ❖ ヒント : n が 2^m とかけ離れる理由を考えよう.

LX03D

```
> run-main cs1.LX03D
[info] Compiling 1 Scala source to /Users/w
[info] Running cs1.LX03D
[info] 0.01 * 100 = 0.99999934
[info] 1.0 * 10000000 = 1.0E7
[info]
[info] 1.0 * 10000000 = 1.6777216E7
[info]
[info] 1.0 * 10000000 = 1.6777216E7
[info]
[info] 1.0 * 10000000 = 1.6777216E7
[info]
[info] 1.0 * 10000000 = 1.6777216E7
[info]
[info] 1.0E7
[info] 1.6777216E7
[info] 1.6777216E7
[info] 1.6777216E7
[info] 1.6777216E7
[success] Total time: 2 s, completed 2015/10/27 10:09:01
```

```
object LX03D {
  def main(arguments: Array[String]) {
    def addMany(delta: Float, n: Int, v: Float) =
      if (n == 0) v else addMany(delta, n - 1, v + delta)

    println(f"0.01 * 100 = ${addMany(0.01, 100, 0.0f)}")

    val N = 10000000
    val s0 = 0f

    val s1 = addMany(1f, N, s0)
    println(f"1.0 * $N = $s1\n")

    val s2 = addMany(1f, N, s1)
    println(f"1.0 * $N = $s2\n")

    val s3 = addMany(1f, N, s2)
    println(f"1.0 * $N = $s3\n")

    val s4 = addMany(1f, N, s3)
    println(f"1.0 * $N = $s4\n")

    val s5 = addMany(1f, N, s4)
    println(f"1.0 * $N = $s5\n")
  }
}
```

挑戦的なクイズ：比較的難問

- ❖ iMacの浮動小数点数がIEEE 754流れの表現を持つことは仮定するものの、仮数部のビット数と実数部のビット数を知らなかったものとしよう。Scalaでの浮動小数点数演算の挙動からそれを推定できるだろうか？
- ❖ <https://www.evernote.com/l/AAJQkwZCOuJDmZoFUL8Fne-DPOPFo6oep84>